



## تحلیل اثر وزن بر ارتعاشات آشوبناک روتور انعطاف پذیر با یاتاقان‌های مغناطیسی

سعید قانیدی<sup>1</sup>، مصطفی غیور<sup>2\*</sup>، رضا تیکنی<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، طراحی کاربردی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی 8415683111، ghayour@cc.iut.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 17 مهر 1394

پذیرش: 04 آذر 1394

ارائه در سایت: 13 دی 1394

کلید واژگان:

آشوب

روتور انعطاف‌پذیر

یاتاقان مغناطیسی

تیر ریلی

ماکزیمم نمای لیاپانوف

روتور از اجزاء بسیار مهم و حساس صنعت می‌باشد که معمولاً با سرعت بسیار بالایی دوران می‌کند، از این رو انتخاب تکیه‌گاه‌های مناسب برای آن‌ها بسیار حائز اهمیت است. در یاتاقان‌های مکانیکی (غلطشی و لغزشی)، همواره تماس بین روتور و یاتاقان وجود دارد و در نتیجه نیروی غیر-خطی حاصل از این تماس، دینامیک سیستم را دستخوش تغییر می‌کند. با قرار دادن یاتاقان‌های مغناطیسی به عنوان تکیه‌گاه روتور، امکان حذف برخورد فراهم شده ولی حضور نیروهای غیرخطی در قالب نیروهای مغناطیسی (ناشی از تابعیت غیرخطی نیروی مغناطیسی از جریان الکتریکی و فاصله هوایی روتور و استاتور، تلفات هیستریزس و جریان گردابی در کوئل‌های مغناطیسی) همچنان وجود دارد. در این مقاله، رفتار غیرخطی سیستم در حضور نیروهای ایجاد شده توسط یاتاقان‌های مغناطیسی فعال (AMB) بررسی شده است. سیستم به صورت یک شافت انعطاف‌پذیر و با هشت درجه آزادی (چهار درجه برای دیسک و دو درجه برای هر یاتاقان) مدل شده و نیروهای ژيروسکوپیک ناشی از انعطاف‌پذیری روتور و نیروی گریز از مرکز نیز در نظر گرفته شده‌اند. معادلات حاکم با فرض تیر ریلی استخراج و با روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل شده‌اند. نتایج در دو بخش، با و بدون حضور اثر وزن دیسک و محور مورد بررسی قرار گرفته است. برای شناسایی رفتار سیستم از تکنیک‌های شناسایی آشوب، مانند تاریخچه زمانی، منحنی‌های صفحه فاز، نمودارهای طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده می‌گردد. نتایج به دست آمده بیانگر وقوع حرکت‌های پرودییک، زیر هارمونیک، شبه پرودییک و آشوبناک در پاسخ سیستم و همچنین تفاوت قابل ملاحظه رفتار غیرخطی سیستم در حضور اثر وزن می‌باشد.

## Influence of weight parameter on chaotic vibration of flexible rotor supported by active magnetic bearings

Saeed Ghaedi, Mostafa Ghayour\*, Reza Tikani

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

\* P.O.B. 8415683111, Isfahan, Iran, ghayour@cc.iut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 09 October 2015  
Accepted 25 November 2015  
Available Online 03 January 2016

**Keywords:**  
Chaos  
Flexible rotor  
Active magnetic bearings  
Rayleigh's beam  
Maximum Lyapanov exponent

### ABSTRACT

The chaotic behavior of a flexible rotor supported by active magnetic bearings is numerically investigated in this work. A statically unbalanced disk is mounted on the shaft. The rotor is modeled by three lumped mass and 8 D.O.F. The rotor-AMB systems include many non-linear factors, such as nonlinear function of the coil current and the air gap between the rotor and the stator, nonlinearity due to geometric coupling of magnetic actuator, eddy current effect and hysteresis losses of the magnetic core material. In this work, the influence of weight parameter on nonlinear response of the system is investigated. Numerical results showed considering weight parameter has an important effect on the response of the rotor and exhibits a rich variety of nonlinear dynamical behavior including synchronous, sub-synchronous, quasi-periodic and chaotic vibrations. Bifurcation diagrams, phase planes, power spectra, Poincare map and maximum Lyapanov exponents are used to analyze the response of the system under different operational conditions. Chaotic vibrations should be avoided as they induce fluctuating stresses that may lead to premature failure of the machinery's main component. It will be beneficial to the design of AMB system.

### 1- مقدمه

غیرخطی بوده و با حضور آن در معادلات حرکت، سیستم رفتارهای دینامیکی متفاوتی از خود به نمایش می‌گذارد. به خصوص آن‌که، در یاتاقان‌های لغزشی این اثر شدیدتر بوده و تماس از نوع برخورد می‌باشد. این عیب، طراحان را به سوی طراحی و ساخت یاتاقان‌های بدون تماس سوق داد که یاتاقان‌های آبرو دینامیک از تلاش‌های انجام شده در راستای نیل به همین هدف می‌باشد. آنچه که به عنوان عیب این یاتاقان‌ها شناخته شده است، ایجاد سختی و

وجود نابالانسی غیرقابل اجتناب در ماشین‌آلات دوار، همواره ارتعاشاتی ناخواسته به پاسخ دینامیکی سیستم تحمیل می‌کند؛ به طوری که با افزایش دور روتور، این اثر تقویت شده و در سرعت‌های بالا اثراتی مخرب در پی دارد. همچنین وجود تماس در یاتاقان‌های مکانیکی (غلطشی و لغزشی) نیز از مشکلات همیشگی در زمینه طراحی روتور می‌باشد؛ چراکه این نیروی تماسی

Please cite this article using:

S. Ghaedi, M. Ghayour, R. Tikani, Influence of weight parameter on chaotic vibration of flexible rotor supported by active magnetic bearings, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 213-224, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

انجام گرفته است، روتور صلب مدل شده است؛ اما در واقع، در ماشین‌های دوار انعطاف‌پذیری روتور بر روی رفتار دینامیکی سیستم تأثیرگذار بوده و فرکانس طبیعی سیستم را دستخوش تغییر می‌نماید. در مقالاتی که روتور به صورت انعطاف‌پذیر مدل شده، دیسک در مرکز بوده و روتور به صورت تیر اویلر - برنولی در نظر گرفته شده است. با این فرض، اثری از ترم‌های ژيروسکوپی در معادلات ظاهر نشده و این خاصیت مهم ماشین‌های دوار نادیده گرفته می‌شود. یکی دیگر از مواردی که در اکثر مقالات انجام شده در زمینه آشوب روتور - AMB، از آن صرف‌نظر می‌شود، تأثیر اثر وزن روتور بر رفتار غیرخطی سیستم است که در تحقیق حاضر به بررسی وجود اثر این نیرو در رفتار سیستم پرداخته شده است. هدف از این مطالعه ارائه مدل مناسب‌تری از سیستم روتور - AMB می‌باشد به گونه‌ای که اثرات ژيروسکوپی در معادلات ظاهر شود، ضمن این که دیسک می‌تواند در نقطه‌ای به جز مرکز روتور قرار گرفته باشد. به همین منظور مدل 8 درجه آزادی از سیستم روتور - AMB ارائه گردیده و از ابزارهای شناسایی آشوب از جمله تاریخچه زمانی، طیف توان، منحنی‌های صفحه فاز، نگاشت پوانکاره، نمودار دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده شده است.

## 2- مدل روتور انعطاف‌پذیر - AMB

شماتیک سیستم مورد مطالعه در شکل 1 نشان داده شده است. روتور با سرعت ثابت  $\omega$  دوران می‌کند و در دو انتها توسط دو یاتاقان مغناطیسی چهار قطبی مهار شده است. روتور انعطاف‌پذیر بوده و یک دیسک صلب روی آن قرار گرفته است. یک نابالانسی استاتیکی بر روی دیسک در نظر گرفته شده است و همین عاملی برای تحریک هارمونیک سیستم می‌باشد.

## 2-1- مدل ارائه شده

در اغلب مدل‌های ارتعاشی، سیستم پیوسته واقعی به صورت گسسته در نظر گرفته می‌شود و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر سیستم اصلی به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردد. در روش اجزاء محدود، سیستم اصلی به تعدادی المان مجزا تقسیم می‌شود به طوری که افزایش تعداد المان‌ها، تعداد معادلات بیشتر و متعاقب آن، افزایش دقت حل تقریبی را در پی خواهد داشت. با این روش، حل عمومی برای معادلات معمولی حاکم برای هندسه‌های ساده به راحتی قابل دستیابی است. موضوع مهم در این روش، تقسیم کل سیستم به تعداد مناسبی از درجات آزادی است تا علاوه بر ارائه مدل مناسبی از سیستم واقعی، حجم محاسبات در حد قابل قبولی باشد. چرا که در تحلیل فرکانسی، دقت برخی فرکانس‌های طبیعی به خصوص بالاترین فرکانس طبیعی سیستم، بستگی مستقیم به مدل اجزاء محدود دارد.

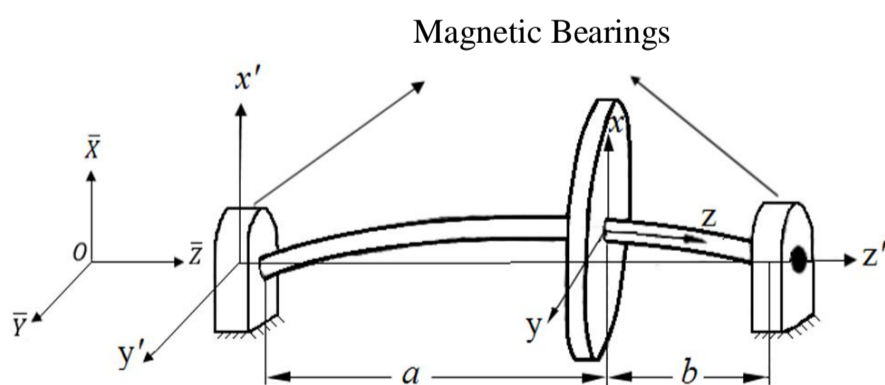


Fig.1 Flexible rotor - AMB

شکل 1 روتور انعطاف‌پذیر با یاتاقان‌های مغناطیسی

استهلاک نسبتاً کم آن‌هاست. از این رو با توجه به بروز انواع رفتارهای غیر-خطی در پاسخ سیستم، محققین به این نتیجه رسیدند که علاوه بر تلاش برای حذف برخورد، وجود یاتاقانی با سختی متغیر ضروری به نظر می‌رسد. یاتاقان‌های مغناطیسی این قابلیت را دارند که با قرار دادن کنترل‌ری مناسب، ارتعاشات روتور را کنترل نموده و زمینه لازم جهت عملکرد صحیح سیستم را فراهم نمایند. نیرویی که این یاتاقان‌ها جهت شناور نمودن روتور ایجاد می‌کنند غیرخطی بوده و تابعی از سرعت و موقعیت محور می‌باشد. یکی از بزرگ‌ترین مزایای این یاتاقان‌ها، امکان کنترل فعال حرکت روتور می‌باشد، به طوری که با کنترل جریان ورودی به قطب‌های یاتاقان می‌توان ارتعاشات روتور را کنترل نمود.

## 1-1- مروری بر تحقیقات انجام شده

یکی از علل ایجاد ارتعاش غیرخطی روتور، کوپلینگ نیروهای مغناطیسی یاتاقان می‌باشد. تأثیر عوامل غیرخطی ناشی از این اثر، بر روی پاسخ روتور صلب با یاتاقان مغناطیسی فعال<sup>1</sup> توسط ام و همکارش بررسی و وجود دوشاخه‌ای شدن هاف<sup>2</sup> در محدوده معینی از سرعت روتور آشکار شده است [1]. مطالعات ویرجین و همکاران، وجود حل چندگانه در پاسخ به تشدید اولیه روتور صلب - AMB و تأثیر کوپلینگ نیروهای مغناطیسی اهمیت این اثر را نمایان می‌سازد [2]. در تحقیق ژانگ و همکاران، تأثیر سختی یاتاقان با ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و سه بر روی پاسخ روتور نیز بررسی شده و حرکت شبه پریودیک، زیر هارمونیک دوم و همچنین پرش در رفتار سیستم مشاهده شده است [3]. بررسی پایداری و دوشاخگی پاسخ روتور صلب - AMB با تأخیر زمانی توسط وانگ و همکارش انجام شده و مشخص شده است با افزایش تأخیر سنسور و گذشتن آن از مقدار بحرانی آن، دوشاخگی هاف در پاسخ سیستم ظاهر می‌شود [4]. در ادامه این مقاله با بررسی نواحی ناپایداری پاسخ، توسط وانگ و همکارش روی یک سیستم مشابه ادامه یافت [5]. در برخی از مطالعات سختی یاتاقان مغناطیسی به صورت متغیر با زمان (هارمونیک) در نظر گرفته شده است. تحقیق ژانگ و همکاران محدوده‌های آشوبناک در پاسخ روتور در این زمینه را بررسی می‌کند. در این مطالعات همواره پدیده آشوب نوع شلنیکف<sup>3</sup> در پاسخ سیستم قابل مشاهده است [6]. مطالعه امر و همکارش که بر روی روتور صلب - AMB و با سختی متغیر با زمان انجام شده نشان داده است، در پاسخ سیستم همواره پدیده‌های پرش، فنر نرم و فنر سخت اتفاق می‌افتد [7]. در سال‌های اخیر مطالعاتی در زمینه دینامیک روتورهای انعطاف‌پذیر انجام شده است. مطالعات جانگ و همکارش بر روی روتور - AMB انعطاف‌پذیر و یاتاقان‌های کمکی نشان داد که حرکات زیر هارمونیک دوم، چهارم، هشتم و آشوب همواره در رفتار روتور وجود دارد [8]. در مطالعه عنایت حسین، تأثیر کوپلینگ مغناطیسی بر رفتار روتور - AMB انعطاف‌پذیر نشان داده است با افزایش کوپلینگ مقطع یاتاقان، طیف وسیعی از ارتعاشات زیر هارمونیک در پاسخ سیستم مشاهده شده و آشوب در سرعت‌های پایین‌تری اتفاق می‌افتد [9]. ناهمراستایی یاتاقان‌ها نیز یکی از مشکلات عمده در ماشین‌های دوار می‌باشد. در تحقیق عنایت حسین مشاهده شده است با افزایش ناهمراستایی، بسته به اینکه مقدار کوپلینگ نیروهای مغناطیسی چه مقدار باشد، حرکت در سرعت کمتری به حرکت آشوبناک می‌انجامد [10].

در بیشتر مطالعاتی که در زمینه بررسی دینامیک غیرخطی روتور - AMB

1- Active Magnetic Bearing

2- Hopf Bifurcation

3- Shilnikov Type Multi-pulse Chaotic Phenomenon

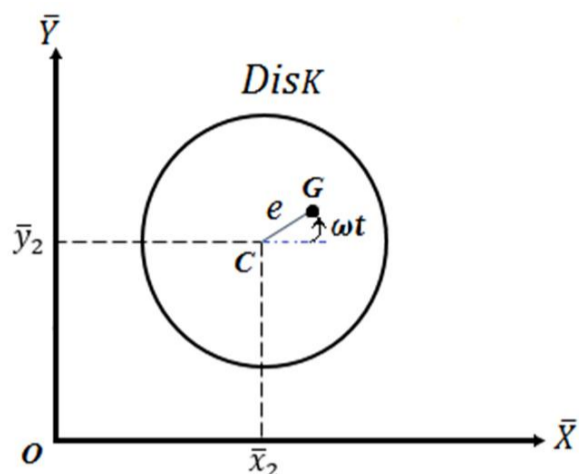


Fig. 3 The position of center of mass of disc

شکل 3 موقعیت مرکز جرم دیسک

$$\begin{aligned} \overline{OG} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_2 + e \cos \omega t \\ \bar{y}_2 + e \sin \omega t \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \bar{V}_G &= \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2 - e\omega \sin \omega t \\ \dot{\bar{y}}_2 + e\omega \cos \omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

در نتیجه انرژی جنبشی انتقالی کل سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} T_{\text{rotational}} &= \frac{m_1}{2} (\dot{\bar{x}}_1^2 + \dot{\bar{y}}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{\bar{x}}_2^2 + \dot{\bar{y}}_2^2 + e\omega^2 + \\ & 2e\omega\dot{\bar{y}}_2 \cos \omega t - 2e\omega\dot{\bar{x}}_2 \sin \omega t) \\ & + \frac{m_3}{2} (\dot{\bar{x}}_3^2 + \dot{\bar{y}}_3^2) \end{aligned} \quad (3)$$

اما یافتن انرژی جنبشی دورانی دیسک مستلزم داشتن زوایای اوپلر می‌باشد. با توجه به شکل 4 و با در نظر گرفتن چرخش‌ها به ترتیب حول محورهای  $\bar{y}, x', z$ ، انرژی جنبشی دورانی دیسک به صورت رابطه (4) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} T_{\text{rotational}} &= \frac{I_T}{2} \left[ (\dot{\theta}_y \sin \varphi \cos \bar{\theta}_x + \dot{\theta}_x \cos \varphi)^2 + \right. \\ & \left. (\dot{\theta}_y \cos \varphi \cos \bar{\theta}_x - \dot{\theta}_x \sin \varphi)^2 \right] + \\ & \frac{I_P}{2} (-\dot{\theta}_y \sin \bar{\theta}_x + \omega)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به کوچک بودن  $\theta_x$  و  $\theta_y$ ، انرژی دورانی دیسک برابر است با:

$$T_{\text{rotational}} = \frac{1}{2} \left[ I_T (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + I_P (\omega^2 - 2\omega\dot{\theta}_y \bar{\theta}_x) \right] \quad (5)$$

### 2-2-2- انرژی پتانسیل سیستم

انرژی پتانسیل محورتحت خمش، وابسته به انحنای تیر می‌باشد. به همین منظور، برای به دست آوردن تغییرشکل روتور، باید تابع حدسی انتخاب شود که شرایط مرزی را ارضا نماید [11]. تابع حدس انتخاب شده چند جمله‌ای مرتبه سه می‌باشد. ضریب جمله مرتبه دوم تابع حدس، با توجه به عدم وجود ممان خمشی در ابتدای محور، بایستی صفر باشد. انرژی پتانسیل تیر تحت خمش از انتگرال‌گیری انرژی کرنشی در طول تیر به دست می‌آید. انرژی پتانسیل از اصل برهم‌نهی انرژی کرنشی در دو جهت عمود بر هم محاسبه

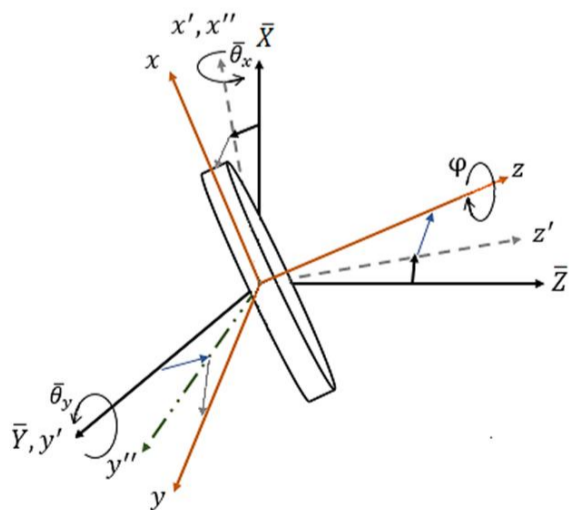


Fig. 4 Euler angles

شکل 4 زوایای اوپلر دیسک

شکل 2 مدل پیشنهادی روتور را نشان می‌دهد. روتور به صورت هشت درجه آزادی در نظر گرفته شده، به صورتی که سیستم اصلی به سه جرم گسسته تقسیم شده است. جرم  $m_1$  و  $m_3$  امکان جابه‌جایی در جهت  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  را دارند، در حالی که  $m_2$  علاوه بر تغییر مکان در جهت  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  امکان دوران حول دو راستای مذکور را دارد. در مدل ارائه شده، جرم محور در نقطه 1 و 3 به صورت نقطه‌ای قرار دارد. در نتیجه محور انعطاف‌پذیر به صورت بدون جرم و عاملی برای اتصال جرم‌ها عمل می‌کند. جدول 1 مشخصات سیستم مورد نظر را نشان می‌دهد. پارامترهای سیستم با استفاده از همین مقادیر به دست می‌آید.

### 2-2- معادلات حاکم بر سیستم

در این تحقیق، روتور به صورت تیر ریلی در نظر گرفته شده است. به این صورت که تحت هر تغییر شکلی، دیسک همواره عمود بر تار خنثی تیر می‌باشد. معادلات حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ به دست آمده است.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) + \left( \frac{\partial D.E}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ dof} \quad (1)$$

$T$  و  $V$  به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل و  $q_i$  و  $D.E$ ،  $Q_i$  مختصات تعمیم‌یافته، نیروی میرا کننده و نیروهای تعمیم‌یافته سیستم می‌باشد.

### 2-2-1- انرژی جنبشی سیستم

از آنجا که شعاع محور به نسبت شعاع دیسک کم می‌باشد، از انرژی جنبشی دورانی  $m_1$  و  $m_3$  صرف‌نظر شده است؛ در نتیجه، این دو جرم فقط دارای انرژی جنبشی انتقالی می‌باشند. در صورتی که دیسک انرژی جنبشی دورانی را نیز دارا می‌باشد. با توجه به مختصات مرکز دیسک در شکل 3 می‌توان سرعت مرکز جرم دیسک را مطابق رابطه (2) محاسبه نمود.

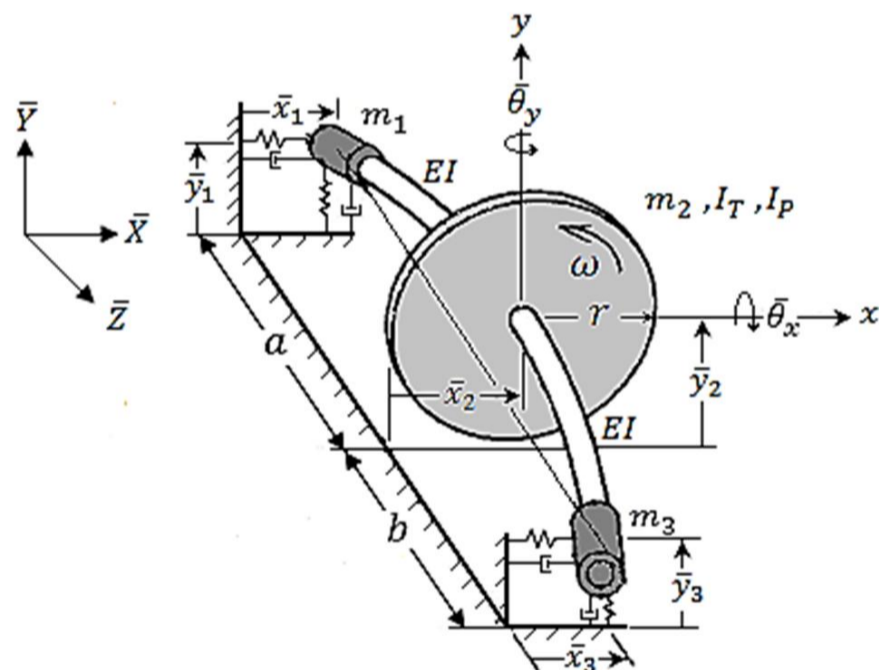


Fig. 2 The proposed model of rotor \_ AMB

شکل 2 مدل ارائه شده سیستم روتور \_ AMB

جدول 1 پارامترهای فیزیکی استفاده شده در این تحقیق

Table 1 Physical parameters used in this work

پارامتر	نام	مقدار	واحد
$\rho$	چگالی	7800	(kg/m <sup>3</sup> )
$l$	طول محور	0.5	m
$r$	شعاع محور	0.01	m
$R$	شعاع دیسک	0.1	m
$h$	پهنای دیسک	0.02	m
$\delta e$	ضریب میرایی هوا	0.001	-

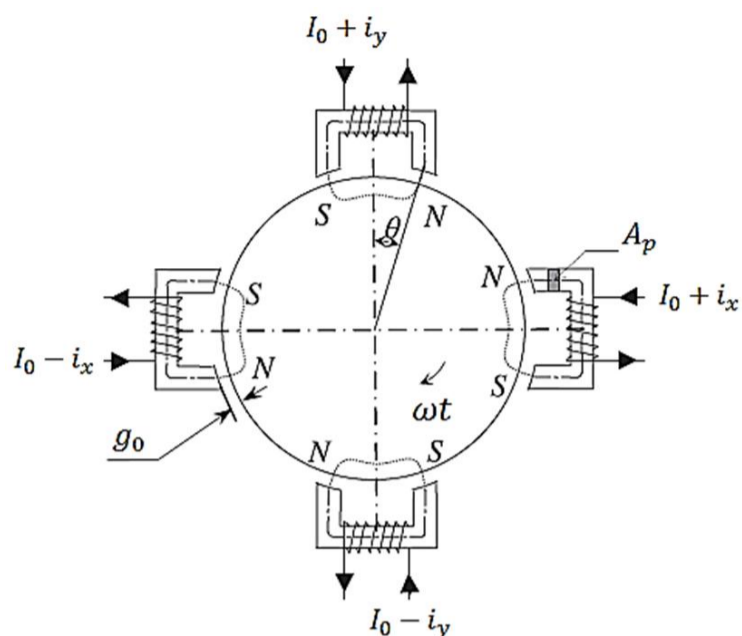


Fig. 5 Four-poles AMB scheme

شکل 5 شماتیک یاتاقان مغناطیسی فعال چهار قطبی

استاتیکی می‌باشد. با ترکیب روابط (9) و (10) و با استفاده از رابطه (11) نیروهای تعمیم‌یافته سیستم به دست می‌آیند.

$$Q_i = \sum_{k=1}^m \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ dof} \quad (11)$$

با توجه به این که مختصات تعمیم‌یافته سیستم از یکدیگر مستقلند، نیروهای خارجی وارد بر سیستم ( $\vec{F}_k$ ) همان نیروهای تعمیم‌یافته هستند. بنابراین با استفاده از روابط لاگرانژ و ضرایب بدون بعد و پارامترهای زیر که شرح آن‌ها در فهرست علائم آمده است، معادلات حرکت بدون بعد سیستم به صورت روابط (12) استخراج می‌گردد.

$$I_P = \frac{1}{2} m_2 r^2, I_T = \frac{1}{4} m_2 r^2, \gamma = \frac{m_1 + m_3}{m_2}$$

$$\beta = \frac{m_1}{m_1 + m_3}, f = \sqrt{\frac{\mu_0 N^2 A_p I_0^2 (P-1)}{\frac{g_0^3}{3EI} - \frac{3EI}{l^3}}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$u = \frac{e}{g_0}, \tau = \omega_n t, x_i = \frac{\bar{x}_i}{g_0}, y_i = \frac{\bar{y}_i}{g_0}, v = \frac{l_P}{l_T}$$

$$w = \frac{g}{g_0 f}, P = \frac{g_0 \bar{P}}{I_0}, D = \frac{g_0 \omega_n \bar{D}}{I_0}, i = \frac{i_0}{I_0} \quad (12)$$

$$\ddot{x}_1 = F_{Mx_1} - \frac{1}{\gamma f^2 \beta^4} (x_1 - x_2 + \beta \theta_y)$$

$$\ddot{y}_1 = F_{My_1} - \frac{1}{\gamma f^2 \beta^4} (y_1 - y_2 + \beta \theta_x) - \frac{w}{f^2}$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{f^2 \beta^3} (-x_1 + x_2 - \beta \theta_y) - \frac{1}{f^2 (1-\beta)^3} (x_2 - x_3 + (1-\beta) \theta_y) + u \Omega^2 \cos \Omega \tau - \frac{2\delta_e}{f} \dot{x}_2$$

$$\ddot{y}_2 = -\frac{1}{f^2 \beta^3} (-y_1 + y_2 + \beta \theta_x) - \frac{1}{f^2 (1-\beta)^3} (y_2 - y_3 - (1-\beta) \theta_x) + u \Omega^2 \sin \Omega \tau - \frac{2\delta_e}{f} \dot{y}_2 - \frac{w}{f^2}$$

$$\ddot{\theta}_x = -v \Omega \dot{\theta}_y - \frac{4n^2}{f^2 \beta^2} (-y_1 + y_2 + \beta \theta_x) - \frac{4n^2}{f^2 (1-\beta)^2} (-y_2 + y_3 + (1-\beta) \theta_x)$$

$$\ddot{\theta}_y = v \Omega \dot{\theta}_x - \frac{4n^2}{f^2 \beta^2} (x_1 - x_2 + \beta \theta_y) - \frac{4n^2}{f^2 (1-\beta)^2} (x_2 - x_3 + (1-\beta) \theta_y)$$

$$\ddot{x}_3 = F_{Mx_3} - \frac{1}{\gamma f^2 (1-\beta)^4} (-x_2 + x_3 - (1-\beta) \theta_y)$$

$$\ddot{y}_3 = F_{My_3} - \frac{1}{\gamma f^2 (1-\beta)^4} (-y_2 + y_3 + (1-\beta) \theta_x) - \frac{w}{f^2} \quad (13)$$

در این معادلات  $w$  پارامتر وزن بوده و  $F_{Mx}$  و  $F_{My}$  نیروهای بدون بعد یاتاقان مغناطیسی و به فرم رابطه (14) می‌باشند.

می‌شود. با یافتن ضرایب تابع حدس در دو راستا، گشتاور خمشی تیر از رابطه  $M_x = EI x''$  و  $M_y = EI y''$  قابل دستیابی است. با توجه به این که نیروی یاتاقان‌های مغناطیسی تابعی از تغییر مکان روتور نسبت به دستگاه ساکن می‌باشد، مناسب است این خیزها، در دستگاه ثابت بیان شوند.

با بیان خیزها در دستگاه ساکن، انرژی پتانسیل به صورت رابطه (6) می‌باشد.

$$V = \frac{E}{2} \int_0^l \left( I_x \left( \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{z}^2} \cos \omega t - \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{z}^2} \sin \omega t \right)^2 + I_y \left( \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{z}^2} \sin \omega t + \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{z}^2} \cos \omega t \right)^2 \right) d\bar{z} \quad (6)$$

با توجه به دایره‌ای بودن مقطع روتور،  $I_x = I_y = I$ ، انرژی پتانسیل سیستم به صورت رابطه (7) ساده می‌شود.

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \left( \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{z}^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{z}^2} \right)^2 \right) d\bar{z} \quad (7)$$

### 2-2-3- نیروهای اتلافی سیستم

نیروهای مستهلک کننده انرژی در سیستم، نیروی ویسکوز ناشی از وجود هوا در اطراف دیسک می‌باشد. نیروی اتلافی هوا به صورت میرایی ویسکوز بر روی دیسک مدل شده است. انرژی اتلافی میرایی ویسکوز به صورت رابطه (8) بیان می‌گردد.

$$D.E = \frac{1}{2} C (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (8)$$

### 2-2-4 نیروهای خارجی وارد بر سیستم

نیروهای خارجی وارد بر سیستم، شامل نیروی وزن و نیروی تولید شده توسط یاتاقان‌های مغناطیسی می‌باشد. همان‌طور که در شکل 5 نشان داده شده است، یاتاقان‌های مغناطیسی در این مدل‌سازی، شعاعی بوده و دارای چهار قطب الکترومغناطیسی می‌باشند که در راستای  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  قرار گرفته‌اند. نیروهای مغناطیسی تولیدی توسط این قطب‌ها تابعی غیرخطی از جریان‌های عبوری از سیم‌پیچ و فاصله هوایی موجود در بین قطب‌ها و محور می‌باشد.

با صرف نظر کردن از اثرات جریان گردابی<sup>1</sup>، نشتی مغناطیسی<sup>2</sup> و تلفات هیستریزس در هسته سیم‌پیچ‌ها، نیروهای مغناطیسی اعمال شده به روتور در راستای  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  در موقعیت دلخواه به صورت روابط (9) بیان می‌شوند [6].

$$\bar{F}_{Mx} = \frac{\mu_0 N^2 A_p}{4} \times \left( \left( \frac{I_0 + i_x}{g_0 - \bar{x}} \right)^2 - \left( \frac{I_0 - i_x}{g_0 + \bar{x}} \right)^2 + \alpha \bar{x} \left( \left( \frac{I_0 + i_y}{g_0 - \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{I_0 - i_y}{g_0 + \bar{y}} \right)^2 \right) \right)$$

$$\bar{F}_{My} = \frac{\mu_0 N^2 A_p}{4} \times \left( \left( \frac{I_0 + i_y}{g_0 - \bar{y}} \right)^2 - \left( \frac{I_0 - i_y}{g_0 + \bar{y}} \right)^2 + \alpha \bar{y} \left( \left( \frac{I_0 + i_x}{g_0 - \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{I_0 - i_x}{g_0 + \bar{x}} \right)^2 \right) \right) \quad (9)$$

$N$  تعداد حلقه‌های سیم‌پیچ‌ها،  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  ضریب نفوذپذیری میدان مغناطیسی<sup>3</sup> در خلاء،  $A_p$  سطح مقطع موثر قطب‌ها،  $g_0$  حداقل فاصله هوایی بین قطب‌ها و روتور،  $I_0$  جریان بایاس،  $\bar{x}$  جابجایی محور در راستای  $\bar{x}$ ،  $\bar{y}$  جابجایی در راستای  $\bar{y}$  در موقعیت دلخواه،  $i_x$  و  $i_y$  نیز جریان کنترلی اعمال شده به کویل‌ها، در راستای  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  می‌باشد.

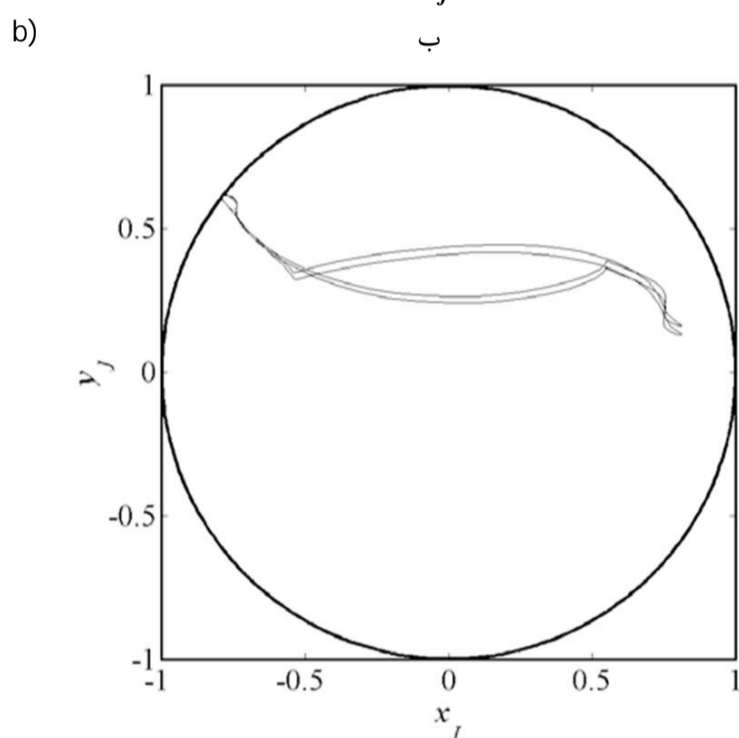
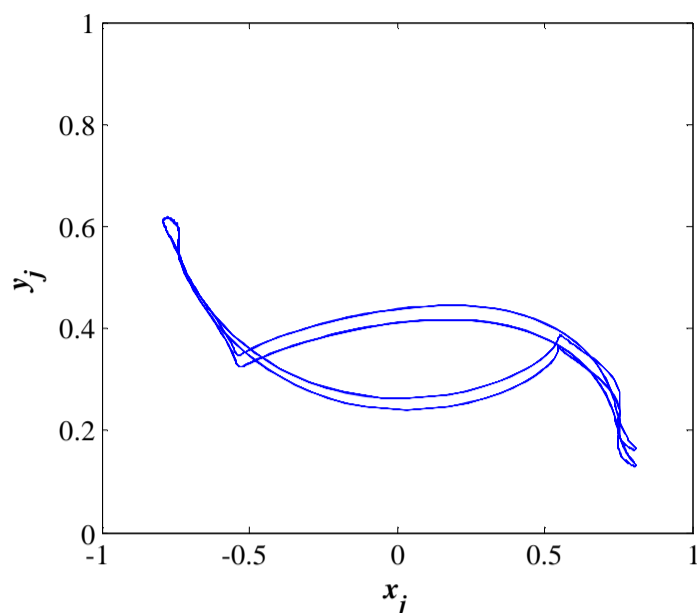
در یاتاقان‌های مغناطیسی فعال جریان کویل‌ها توسط کنترلر PD کنترل می‌شود. بنابراین جریان کنترلی در جهت  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$i_x = \bar{P} \bar{x} + \bar{D} \dot{\bar{x}}, \quad i_y = i_0 + \bar{P} \bar{y} + \bar{D} \dot{\bar{y}} \quad (10)$$

$\bar{D}$  و  $\bar{P}$  به ترتیب ضرایب تناسبی و مشتق‌گیر کنترلر هستند. جریان کنترلی در راستای  $\bar{y}$  دارای مقدار ثابت  $i_0$  برای معلق نگه‌داشتن روتور در حالت

1- Eddy Current  
2- Flux Leakage  
3- Magnetic Permeability

a) الف  
 $f = 1.5, \gamma = 0.2, \alpha = 0.28, P = 1.1, D = 0.03, U = 0.1, w = 0$



**Fig. 6** Rotor whirl orbit: a) numerical results b) reference results [9]

شکل 6 مدار چرخش روتور: الف) نتایج شبیه‌سازی ب) نتایج مرجع [9]

تداوم این رفتار تا  $\Omega = 0.24$  قابل مشاهده است. قضاوت در مورد آشوبناک بودن یا نبودن این ناحیه، در ادامه توسط ابزارهای دیگر انجام می‌شود. در بازه  $\Omega = [0.24 \sim 0.3]$  رفتار سیستم به حالت زیر هارمونیک سوم بازمی‌گردد. با خروج از این ناحیه، بار دیگر حضور آشوب در پاسخ سیستم مشاهده شده و تا  $\Omega = 0.318$  حفظ می‌شود. با عبور از این قسمت، پاسخ سیستم با دوره تناوب 6T و 3T مشاهده شده و با افزایش  $\Omega$  در محدوده  $\Omega = [0.35 \sim 0.385]$  بار دیگر یک جاذب غریب، پاسخ سیستم را آشوبناک می‌سازد. عبور از سرعت دورانی  $\Omega = 0.385$  کافی است تا در نهایت رفتار سیستم پس از گذشت از نواحی کوچکی از ارتعاشات زیر هارمونیک چهارم و دوم به حرکت پریودیک بازگردد. در این قسمت از نمودار، به جز حضور آشوب در بازه‌های کوچک  $\Omega = [1.06 \sim 1.07]$  و  $\Omega = [1.47 \sim 1.48]$  اتفاق خاصی رخ نداده و رفتار دینامیکی سیستم تا  $\Omega = 3$  متناوب باقی می‌ماند.

شکل‌های 9 و 10 دیگر ابزارهای بررسی رفتار غیرخطی سیستم را برای دو نسبت سرعت متفاوت نشان می‌دهند. از آنجا که امکان تشخیص حرکت شبه پریودیک از آشوبناک در نمودار دوشاخه‌ای شدن وجود ندارد، برای بررسی رفتار سیستم از نمودارهای تاریخچه زمانی، منحنی صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره در مناطقی از نمودار که ظاهری آشوبناک دارد، استفاده

$$F_{Mx} = \frac{1}{4(P-1)} \left[ \left( \frac{1-Px-D\dot{x}}{1-x} \right)^2 - \left( \frac{1+Px+D\dot{x}}{1+x} \right)^2 + \alpha x \left( \left( \frac{1+i-Py-D\dot{y}}{1-y} \right)^2 + \left( \frac{1-i+Py+D\dot{y}}{1+y} \right)^2 \right) \right]$$

$$F_{My} = \frac{1}{4(P-1)} \left[ \left( \frac{1+i-Py-D\dot{y}}{1-y} \right)^2 - \left( \frac{1-i+Py+D\dot{y}}{1+y} \right)^2 + \alpha y \left( \left( \frac{1-Px-D\dot{x}}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{1+Px+D\dot{x}}{1+x} \right)^2 \right) \right] \quad (14)$$

### 3- شبیه‌سازی عددی و تحلیل نتایج

#### 3-1- نتایج عددی بدون در نظر گرفتن اثر وزن

حل عددی معادلات (13) با استفاده از روش رانگ - کوتای مرتبه 4 با گام زمانی متغیر انجام گرفته است. نسبت سرعت چرخشی به عنوان پارامتر کنترلی انتخاب شده است. برای اطمینان از پایدار بودن اطلاعات عددی به دست آمده، تعداد نسبتاً قابل توجهی از اطلاعات تاریخچه زمانی کنار گذاشته شده است. نتایج پس از این بازه برای تحلیل رفتار غیرخطی سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. تحلیل عددی در دو بخش با و بدون در نظر گرفتن اثر وزن سیستم انجام گرفته است. برای شناسایی رفتار دینامیکی سیستم از ابزارهای مخصوص این پدیده شامل تاریخچه زمانی، منحنی‌های صفحه فاز، نمودارهای طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیپانوف استفاده شده است. همان‌گونه که قبلاً بیان شد، در این تحقیق برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم از مدل انعطاف‌پذیر استفاده شده است. برای صحت‌سنجی مدل ارائه شده، با ساده‌سازی مدل کنونی به مدل مرجع [9] رسیده و برخی از نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در مرجع [9] سیستم روتور - AMB با یک دیسک صلب در وسط محور در نظر گرفته شده و به صورت چهار درجه آزادی مدل شده است؛ به صورتی که به سه جرم گسسته (یک جرم برای دیسک و دو جرم ژورنال) تقسیم شده و هر جرم دارای دو درجه آزادی در دو راستای عمود بر هم است. در این مرجع فرض شده است که با قرار گرفتن دیسک در مرکز محور، پاسخ ژورنال سمت چپ در دو راستا، دقیقاً همان رفتار ژورنال سمت راست است.

شکل 6 مسیرهای لنگ زنی<sup>1</sup> سیستم روتور-AMB چهار درجه آزادی را نشان می‌دهد. با قرار گرفتن دیسک در مرکز محور و عدم تغییر زاویه آن، دو درجه آزادی دورانی دیسک حذف شده و با فرض برابر بودن پاسخ ژورنال سمت چپ با ژورنال راست، مدل ارائه‌شده کنونی به مدل مرجع [9] کاهش می‌یابد. برای اطمینان بیشتر از صحت مدل ارائه‌شده، دو نمودار دوشاخه‌ای شدن مرجع [9] با پارامترهای متفاوت، شبیه‌سازی شده‌اند (شکل 7). با توجه به هم‌خوانی بسیار خوب نتایج به دست آمده و نتایج مرجع مذکور صحت مدل ارائه‌شده تأیید می‌گردد.

در مرجع مربوطه سرعت چرخشی روتور به عنوان پارامتر کنترلی در نظر گرفته شده است. به علت محدودیت صفحات تنها چند نمونه از شبیه‌سازی نمودارها، آورده شده است.

شکل 8 نمودار دوشاخه‌ای شدن جابه‌جایی دیسک در راستای  $x(x_5)$  را بدون در نظر گرفتن اثر وزن نشان می‌دهد. ابتدا، رفتار سیستم به صورت پریودیک (1T) تا  $\Omega = 0.117$  مشاهده می‌شود. سپس به یکباره آشوب رخ می‌دهد و تا  $\Omega = 0.157$  ادامه می‌یابد. پس‌از آن، پاسخ سیستم به زیر هارمونیک پنجم رفته و تا  $\Omega = 0.176$  این رفتار حفظ می‌شود. با افزایش سرعت دورانی، پاسخ زیر هارمونیک سوم در بازه  $\Omega = [0.177 \sim 0.199]$  ظاهر می‌شود. سپس در  $\Omega = 0.2$  پاسخ سیستم شبه پریودیک یا آشوبناک شده و

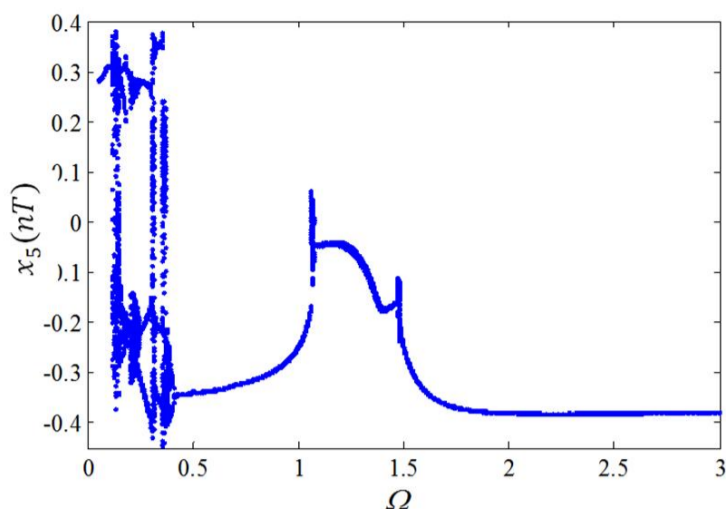


Fig. 8 Bifurcation diagram of disk displacement ( $x_5$ ) at  $\Omega = [0 \sim 3]$

شکل 8 نمودار دوشاخه‌ای شدن  $x_5$  در بازه  $\Omega = [0 \sim 3]$

می‌شود. در شکل 8 در نسبت سرعت‌های  $\Omega = 0.23$  و  $\Omega = 0.355$  رفتاری شبیه به آشوب اتفاق افتاده است. با توجه به شکل 9 امکان تشخیص حرکت در نمودار تاریخچه زمانی و طیف توان دشوار به نظر می‌رسد. از طرفی در منحنی صفحه فاز احتمال اشتباه در تشخیص حرکت زیر هارمونیک با دوره تناوب بالا از حرکت شبه پریودیک وجود دارد. اما منحنی‌های بسته‌ای که در مقطع پوانکاره نقش بسته‌اند، نشان از حرکت شبه پریودیک سیستم در این سرعت دارند. با توجه به شکل 10 تفاوت‌هایی بین دو ابزار تاریخچه زمانی و طیف توان در دو سرعت  $\Omega = 0.23$  و  $\Omega = 0.355$  مشاهده می‌شود.

منحنی صفحه فاز احتمال وجود آشوب را به نمایش گذاشته و نگاشت پوانکاره این گمان را تأیید می‌کند. لازم به ذکر است، نواحی که در تفسیر نمودار دوشاخه‌ای شدن، از آن‌ها یقیناً به‌عنوان نواحی آشوبناک یاد شده، با ابزارهای دیگر بررسی شده‌اند و به علت محدودیت در تعداد صفحات مقاله، تنها بررسی چند نسبت سرعت در مقاله آورده شده است. در شکل 11 بازه  $\Omega = [0 \sim 1]$  جهت وضوح بیشتر رفتار سیستم نمایش داده شده است.

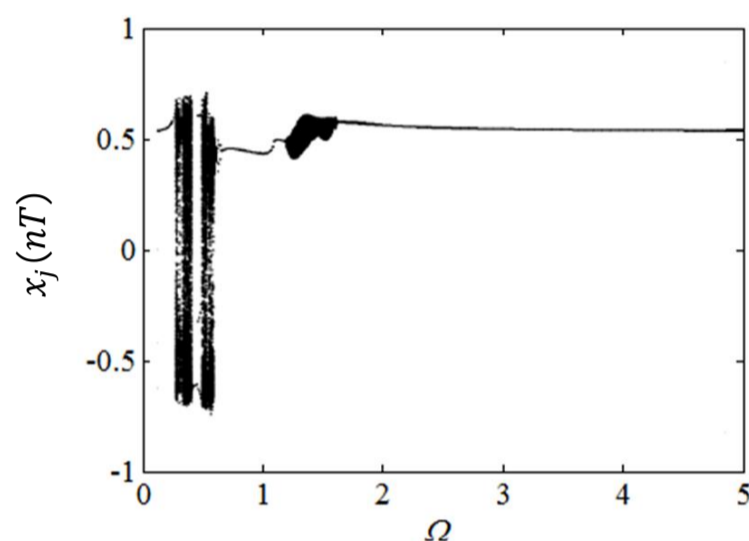
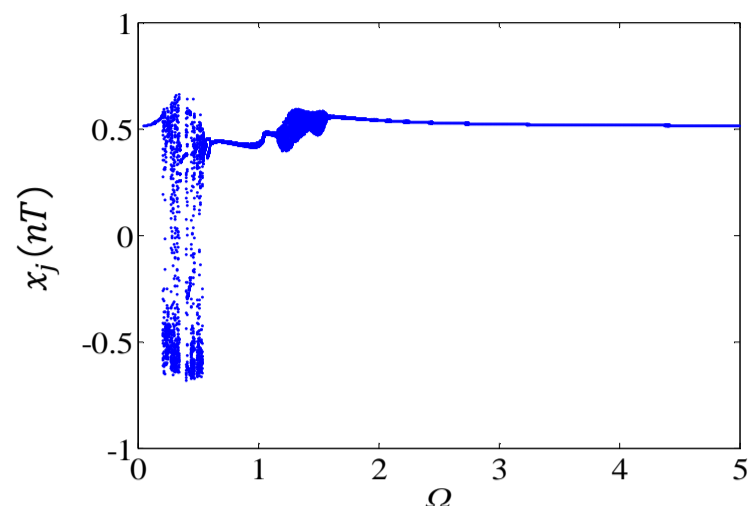
### 3-1-1-3-1 ماکزیمم نمای لیاپانوف

آشوب در سیستم‌های معین، وابستگی شدیدی نسبت به شرایط اولیه دارد. با این ویژگی اگر دو خط سیر در فضای فاز از دو نقطه نزدیک به هم شروع شوند، به‌مرور زمان به‌صورت نمایی از یکدیگر دور می‌شوند. بنابراین اگر  $d_0$  فاصله اولیه بین دو نقطه شروع باشد، با گذشت زمان فاصله به‌صورت  $d(t) = d_0 2^{\lambda t}$  تغییر می‌کند که  $\lambda$  اشاره به نماهای لیاپانوف دارد. باید توجه داشت که واگرایی مدارهای آشوبناک فقط در مقیاس محلی، نمایی است. از آنجاکه پاسخ سیستم محدود است،  $d(t)$  نمی‌تواند به بینهایت میل کند. به همین علت، برای تعریف واگرایی مدارها باید در بسیاری از نقاط مسیرهای فضای فاز متوسط گیری نمود. بنابراین از یک مسیر مرجع نزدیک به مسیر اصلی شروع کرده و هر بار  $\frac{d(t)}{d_0}$  محاسبه می‌شود. چنانچه  $d(t)$  زیاد شود، مسیر نزدیک جدیدی به‌عنوان مرجع انتخاب شده و  $d_0(t)$  جدیدی تعریف می‌شود [12]. بدین ترتیب نمای لیاپانوف به‌صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \log_2 \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} \quad (15)$$

اگر  $\lambda > 0$  باشد، حرکت آشوبناک و اگر  $\lambda < 0$  باشد حرکت به‌صورت منظم می‌باشد.  $\lambda = 0$  اشاره به پاسخ گذرای سیستم دارد. لازم به ذکر است روند

a) الف  
 $f = 2.5, \gamma = 0.2, \alpha = 0.28, P = 1.1, D = 0.03, U = 0.1, w = 0$



b) ب  
 $f = 1.5, \gamma = 0.2, \alpha = 0.28, P = 1.1, D = 0.03, U = 0.1, w = 0$

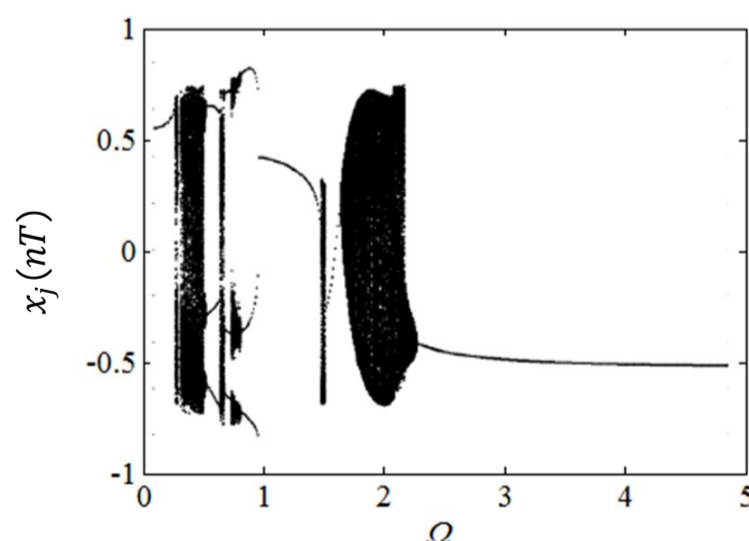
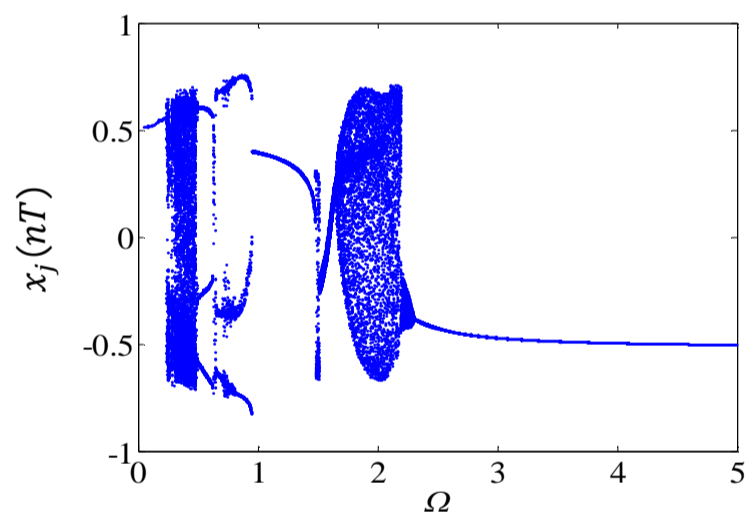
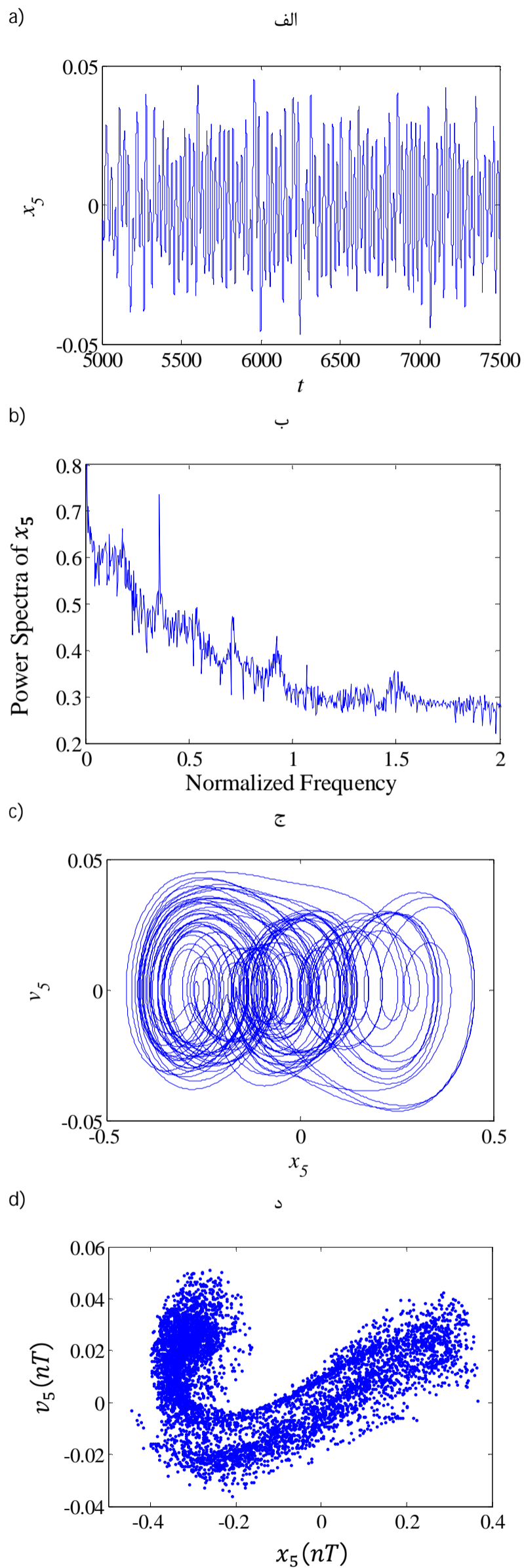


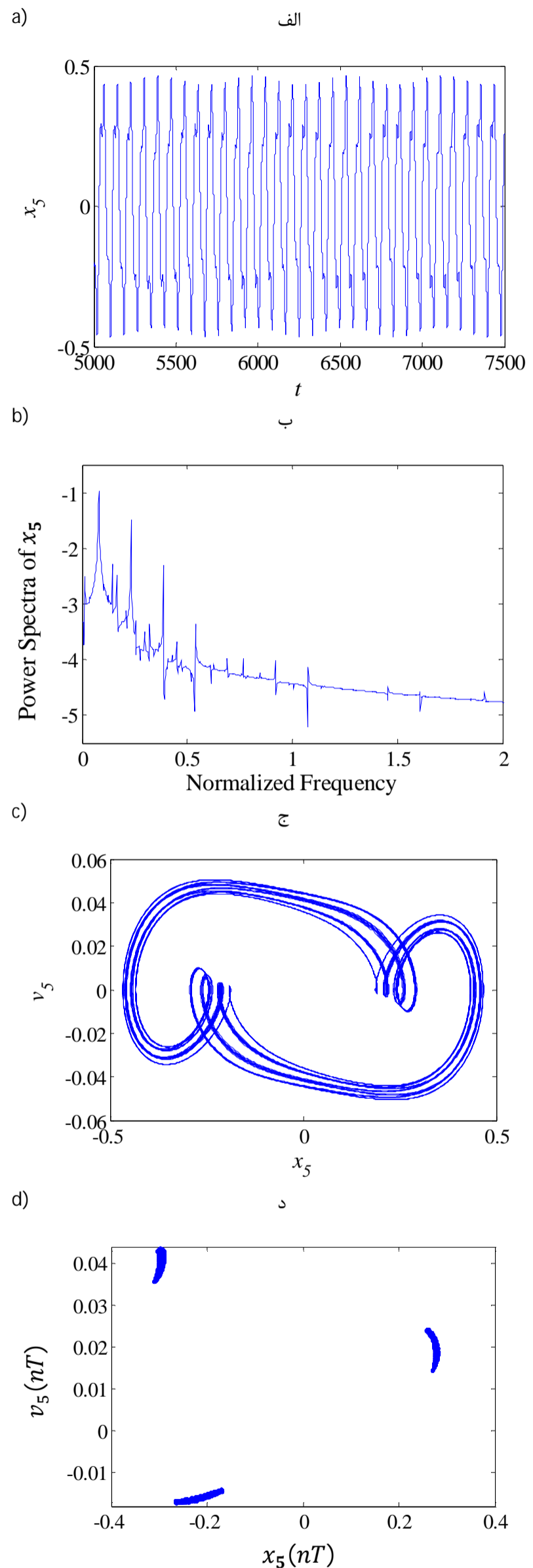
Fig. 7 Simulation of Bifurcation diagrams of ref. [9]:  
a)  $f = 2.5$  b)  $f = 1.5$

شکل 7 شبیه‌سازی نمودارهای دوشاخه‌ای شدن مرجع [9] به ازای پارامترهای متفاوت الف)  $f = 2.5$  ب)  $f = 1.5$



**Fig. 10** Disk response: a) time series b) power spectra c) phase plane d) poincar'e map at  $\Omega = 0.355$

شکل 10 پاسخ دیسک: الف) تاریخچه زمانی ب) طیف توان ج) منحنی صفحه فاز د) نگاشت پوانکاره در  $\Omega = 0.355$



**Fig. 9** Disk response: a) time series b) power spectra c) phase plane d) poincar'e map at  $\Omega = 0.23$

شکل 9 پاسخ دیسک: الف) تاریخچه زمانی ب) طیف توان ج) منحنی صفحه فاز د) نگاشت پوانکاره در  $\Omega = 0.23$

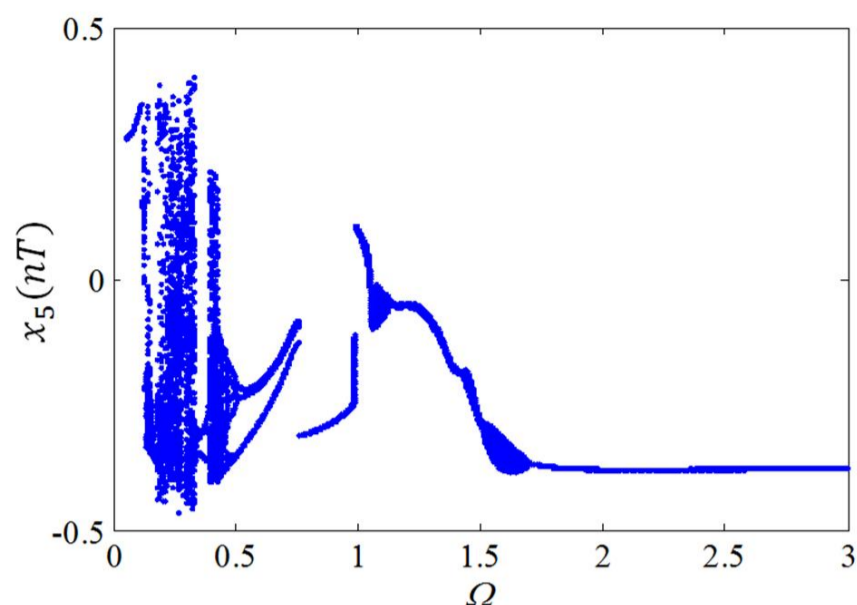


Fig.13 Bifur. diagram of  $x_5$  with weight effect at  $\Omega = [0\sim 3]$

شکل 13 نمودار دوشاخه‌ای شدن  $x_5$  با اثر وزن در بازه  $\Omega = [0\sim 3]$

محدوده  $\Omega = [0.2\sim 0.21]$  پاسخ سیستم پایدار گشته و به زیر هارمونیک چهارم می‌رود. آنچه در ادامه مشاهده می‌شود، حضور رفتار شبه پریودیک یا آشوبناک در سیستم و در محدوده  $\Omega = [0.21\sim 0.282]$  است که تعیین رفتار سیستم در این محدوده نیز با ابزارهای دیگر بررسی می‌شود. پس از این ناحیه، پاسخ سیستم با دوره تناوب 4T و 2T مشاهده شده و با افزایش تدریجی  $\Omega$  در محدوده  $\Omega = [0.294\sim 0.334]$  وجود جاذبی دیگر، رفتار سیستم را شبه پریودیک و یا احتمالاً آشوبناک می‌سازد. با عبور از این محدوده، زیر هارمونیک‌های با دوره تناوب 2T و 3T نشان از وجود حرکت پایدار دارند. با ورود به نسبت سرعت دورانی  $\Omega = 0.388$  نمودار مجدداً از وجود ارتعاشات شبه پریودیک یا پدیده آشوب تا  $\Omega = 0.44$  خبر می‌دهد. از این پس در ناحیه کوچکی، زیر هارمونیک‌های دوازدهم و ششم مشاهده می‌شود. پس از حرکت زیرهارمونیک 6T، پاسخ سیستم در بازه نسبتاً بزرگ‌تری ( $\Omega = [0.5\sim 0.757]$ ) با دوره تناوب 3T ارتعاشات نموده و با یک پرش به پاسخ پریودیک انتقال می‌یابد. پاسخ پریودیک سیستم تا  $\Omega = 0.974$  ادامه داشته و باز با تشدید تأثیر عوامل غیرخطی، رفتار دینامیکی سیستم در دو محدوده  $\Omega = [0.975\sim 1.128]$  و  $\Omega = [1.51\sim 1.63]$  آشوبناک می‌شود. اما با گذشت از این مقادیر سرعت، اتفاق قابل توجهی رخ نداده و مطابق قبل رفتار دینامیکی سیستم تا  $\Omega = 3$  متناوب باقی می‌ماند. در این قسمت نیز جهت نمایش بهتر مطالب فوق، نمودار دوشاخه‌ای شدن (شکل 14) در بازه  $\Omega = [0\sim 1]$  آورده شده است.

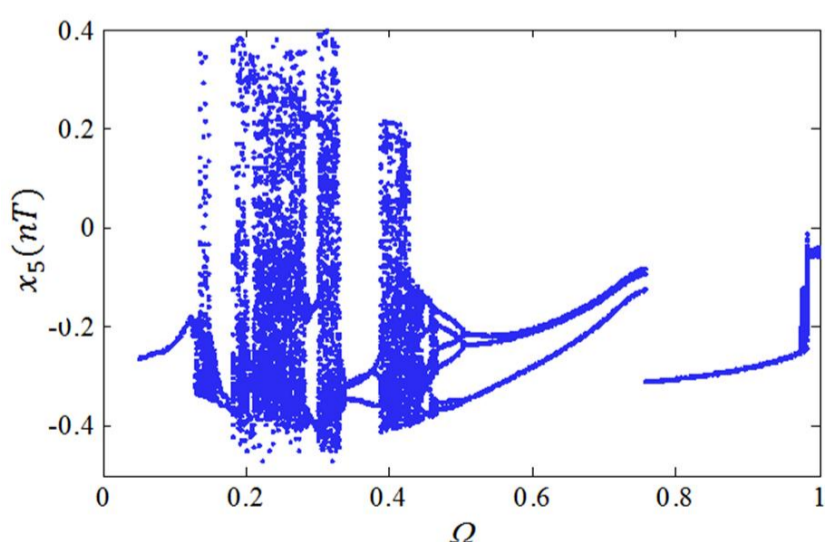


Fig. 14 Bifurcation diagram of  $x_5$  with weight effect at  $\Omega = [0\sim 1]$

شکل 14 نمودار دوشاخه‌ای شدن  $x_5$  با اثر وزن در بازه  $\Omega = [0\sim 1]$

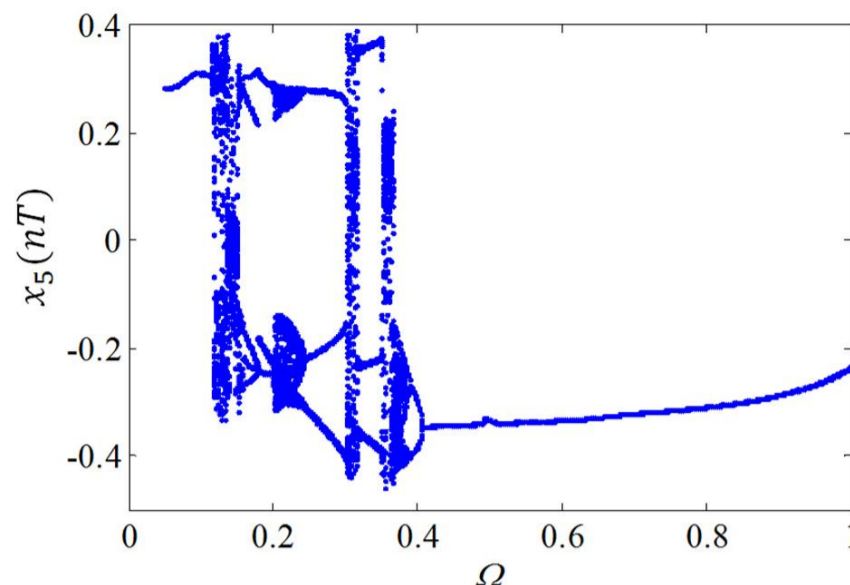


Fig. 11 Bifurcation diagram of  $x_5$  at  $\Omega = [0\sim 1]$

شکل 11 نمودار دوشاخه‌ای شدن  $x_5$  در بازه  $\Omega = [0\sim 1]$

تعیین ماکزیمم نماهای لیاپانوف در این تحقیق با استفاده از الگوریتم ارائه‌شده در مرجع [13] انجام گرفته است. در تمامی ابزارهای شناسایی آشوب، تنها ماکزیمم نمای لیاپانوف قادر است به‌طور قطعی وقوع آشوب را اطلاع دهد. با مثبت شدن این نما، بدون هیچ تردیدی آشوب رخ خواهد داد. در این جا به منظور اطمینان کامل از وقوع آشوب در  $\Omega = 0.355$  از ابزار ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده شده است. با توجه به شکل 12، مثبت بودن نمای لیاپانوف وجود این پدیده را تأیید می‌کند.

### 3-2- نتایج عددی به دست آمده با در نظر گرفتن اثر وزن

در این قسمت، تحلیل با در نظر گرفتن اثر وزن انجام شده است. در این حالت، باید حتی در حالت سکون، جریانی از قطب‌های یاتاقان گذشته تا میدان مغناطیسی ایجاد شده روتور را در حالت شناور قرار دهد، حضور این جریان، تفاوت‌های زیادی در رفتار دینامیکی سیستم پدید می‌آورد.

شکل 13 نمودار دوشاخه‌ای شدن پاسخ دیسک را با در نظر گرفتن اثر وزن نشان می‌دهد. در این نتایج رفتار سیستم نسبت به حالت قبل تفاوت‌هایی را نشان می‌دهد. اولین تفاوت، ادامه حرکت پریودیک تا  $\Omega = 0.122$  و در نتیجه به تأخیر افتادن آشوب می‌باشد. پس از رخداد به یک‌باره آشوب و تداوم آن تا  $\Omega = 0.154$  رفتار سیستم به زیر هارمونیک دوم می‌رود و این رفتار تا  $\Omega = 0.174$  حفظ می‌شود. تنها در محدوده کوچکی پاسخ سیستم پریودیک می‌شود و با افزایش سرعت دورانی، در  $\Omega = 0.18$  رفتار سیستم به صورت آشوبناک شده و این رفتار تا حدود  $\Omega = 0.2$  ادامه می‌یابد. مجدداً در

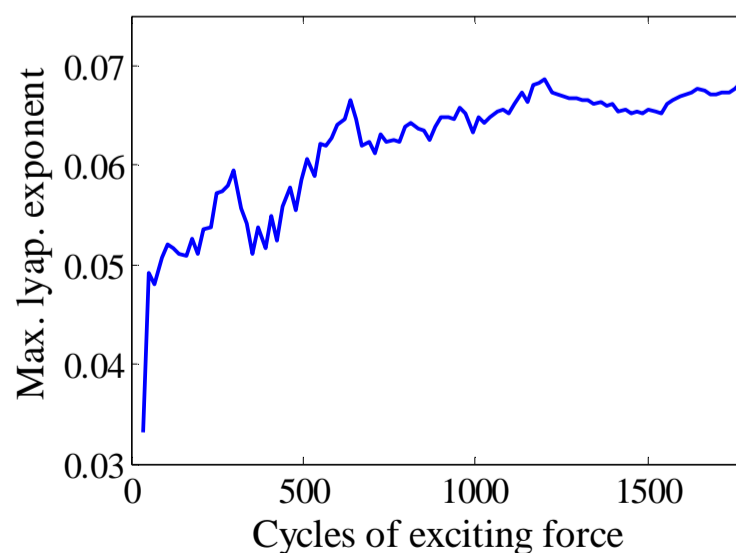
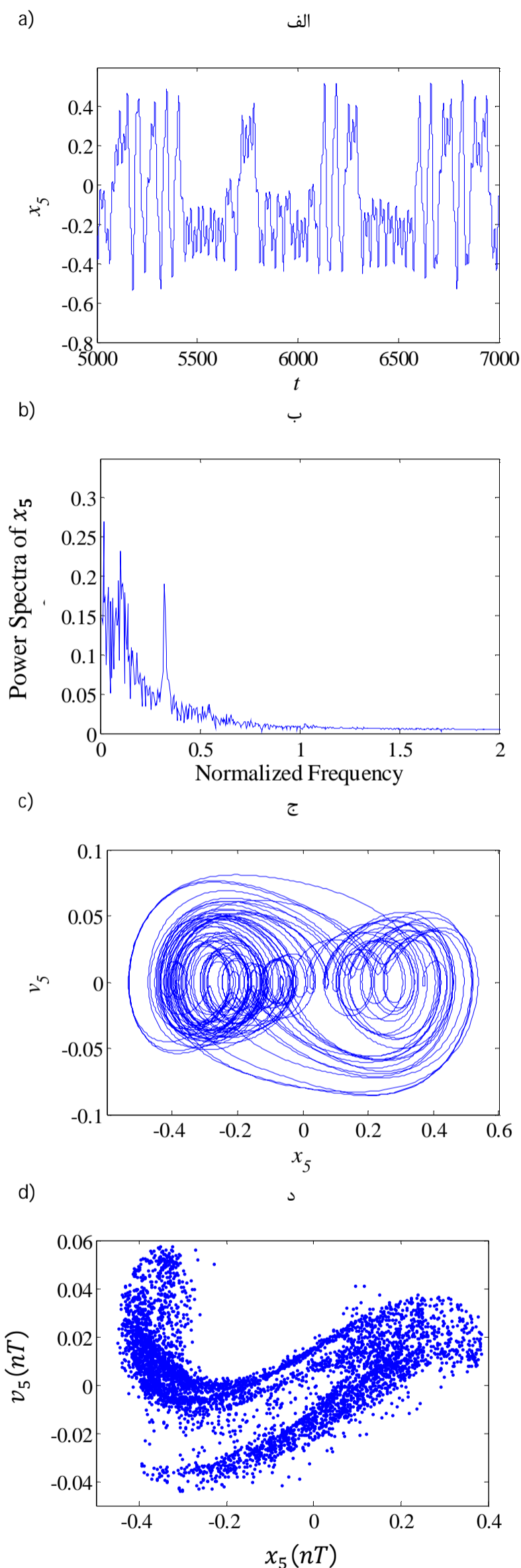


Fig. 12 Max. lyapunov exponent at  $\Omega = 0.355$

شکل 12 ماکزیمم نمای لیاپانوف پاسخ دیسک: به ازای  $\Omega = 0.355$





**Fig. 15** Disk response: a) time series b) power spectra c) phase plane d) poincar'e map with weight effect  $\Omega = 0.23$

شکل 15 پاسخ دیسک: الف) تاریخچه زمانی ب) طیف توان ج) منحنی صفحه فاز د) نگاشت پوانکاره با در نظر گرفتن اثر وزن در  $\Omega = 0.23$

شکل 15 چهار ابزار شناسایی رفتار غیرخطی را مجدداً برای نسبت سرعت  $\Omega = 0.23$  و این بار با در نظر گرفتن اثر وزن نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود درجایی که صرف نظر کردن از اثر وزن ارتعاش شبه پریودیک را نشان می‌داد، در نظر گرفتن این نیرو، پدیده آشوب را در پی دارد. نمودار ماکزیمم نمای لیاپانوف در شکل 16 نیز وجود آشوب در این ناحیه را تأیید می‌کند.

همچنین استفاده از ابزارهای فوق، برای  $\Omega = 0.355$  نشان از رفتار کاملاً متفاوت سیستم نسبت به حالت قبل دارد. آنچه ابزارهای شکل 17 نشان می‌دهد، پاسخ زیرهارمونیک سوم با در نظر گرفتن اثر وزن است. درحالی‌که صرف نظر کردن از این اثر، پاسخ را آشوبناک پیش‌بینی می‌نمود.

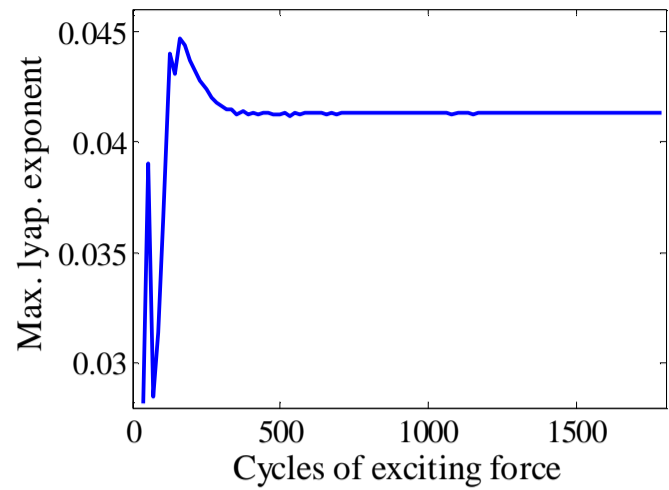
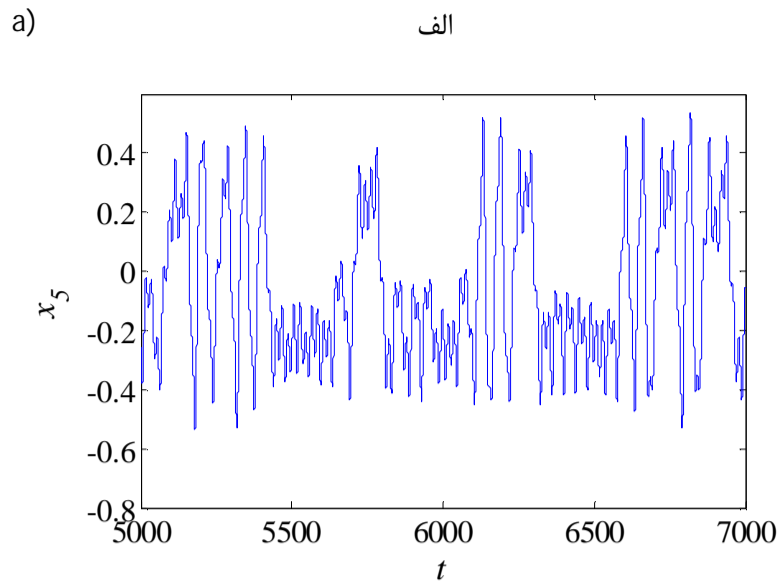
بررسی رفتار غیرخطی سیستم در دو نسبت سرعت دورانی دیگر نیز انجام گرفته است تا در صورت آشوبناک بودن پاسخ سیستم، از کارکرد روتور در این محدوده‌ها دوری شود؛ زیرا ارتعاشات آشوبناک برای سیستم، رفتاری نامطلوب بوده و خرابی و کاهش طول عمر قطعات سیستم را در پی دارد. همان‌طور که در شرح شکل 13 اشاره شد، بازه‌های  $\Omega = [0.294 \sim 0.334]$  و  $\Omega = [0.388 \sim 0.44]$  مشکوک به رفتار آشوبناک هستند و به همین علت، استفاده از ابزارهای دیگر برای تشخیص رفتار سیستم ضروری است. از محدوده‌های فوق، دو نسبت سرعت، انتخاب و به بررسی رفتار سیستم در این بازه‌ها به ترتیب در شکل‌های 18 و 20 پرداخته شده است.

شکل 18 نشان می‌دهد در  $\Omega = 0.32$ ، تاریخچه زمانی دارای شکلی بی‌نظم است و طیف وسیعی از فرکانس‌ها در طیف توان ظاهر شده است. با توجه به این‌که برای اطمینان از نمایش پاسخ حالت ماندگار سیستم، میزان قابل توجهی از نمودار پاسخ زمانی کنار گذاشته شده است، نمی‌توان شکل به‌ظاهر بی‌نظم این نمودار را ناشی از پاسخ گذرای سیستم دانست. در نتیجه، این مشخصات به همراه وجود چندین مسیر در منحنی صفحه فاز و نقاط توده‌ای در نگاشت پوانکاره احتمال آشوب را بسیار بالا می‌برد. با مثبت بودن ماکزیمم نمای لیاپانوف در شکل 19 وجود آشوب در این سرعت، به‌طور کامل تأیید می‌گردد.

در شکل 20 و در نسبت سرعت  $\Omega = 0.4$ ، نیز تاریخچه زمانی و طیف توان تقریباً مشابه شکل 18 بوده و با توجه منحنی صفحه فاز و نگاشت پوانکاره، پاسخ سیستم در این سرعت، آشوبناک می‌باشد. مطابق قبل، از نمودار ماکزیمم نمای لیاپانوف در شکل 21 برای تأیید این ادعا استفاده شده است. البته با توجه به شکل کلی نگاشت پوانکاره در این نسبت سرعت و شباهت تقریبی آن با نگاشت‌های قبلی، رخداد آشوب و در نتیجه مثبت شدن ماکزیمم نمای لیاپانوف، دور از انتظار نیست. البته باید توجه داشت که جذب غریب در این نسبت سرعت، متفاوت از جاذب‌های فراکتالی قبلی می‌باشد.

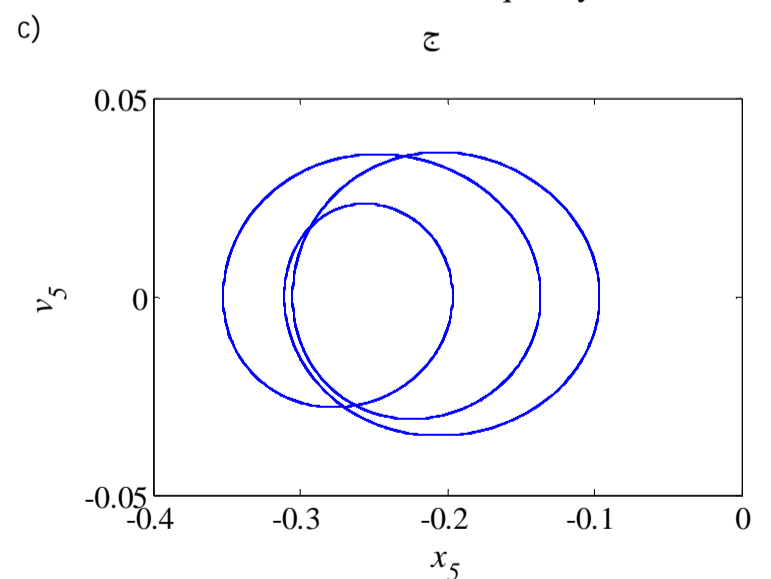
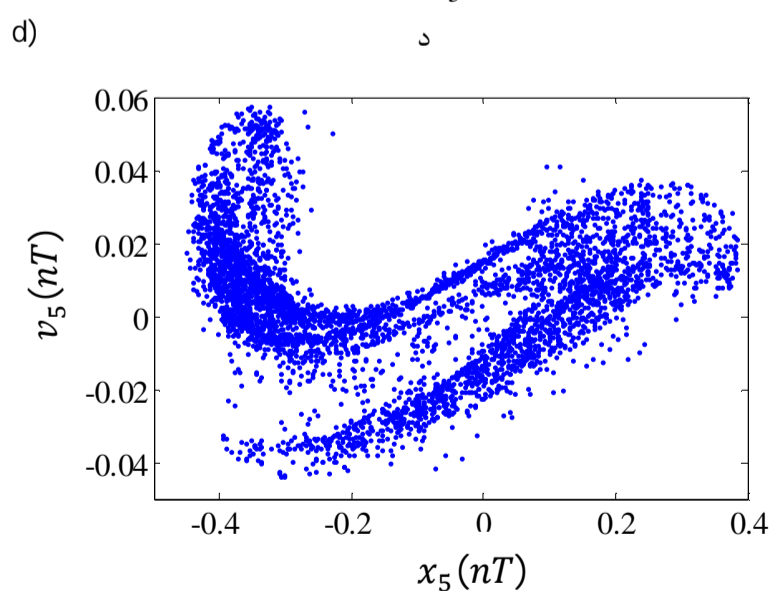
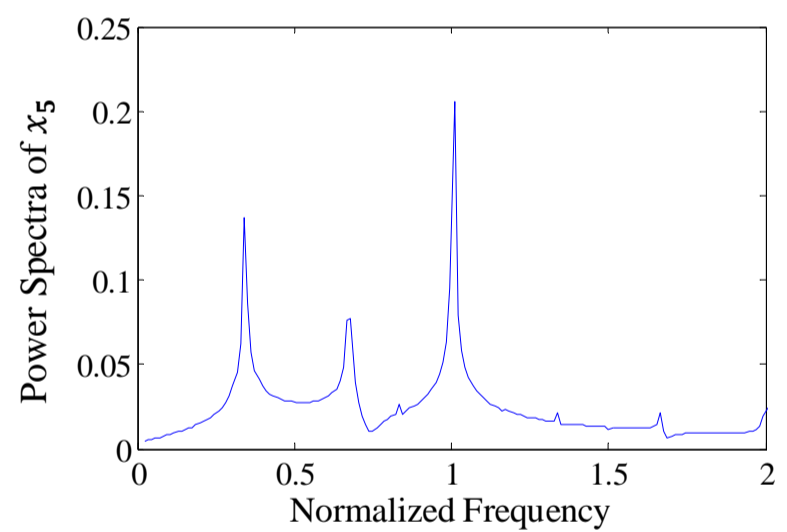
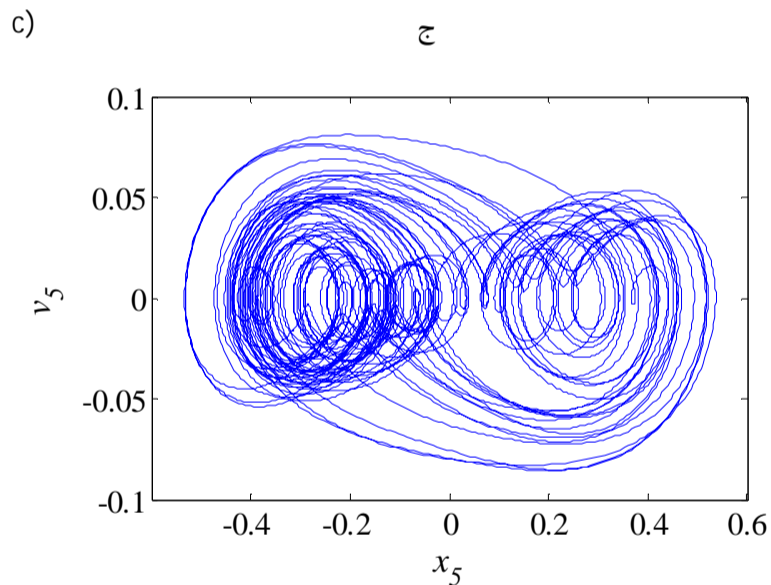
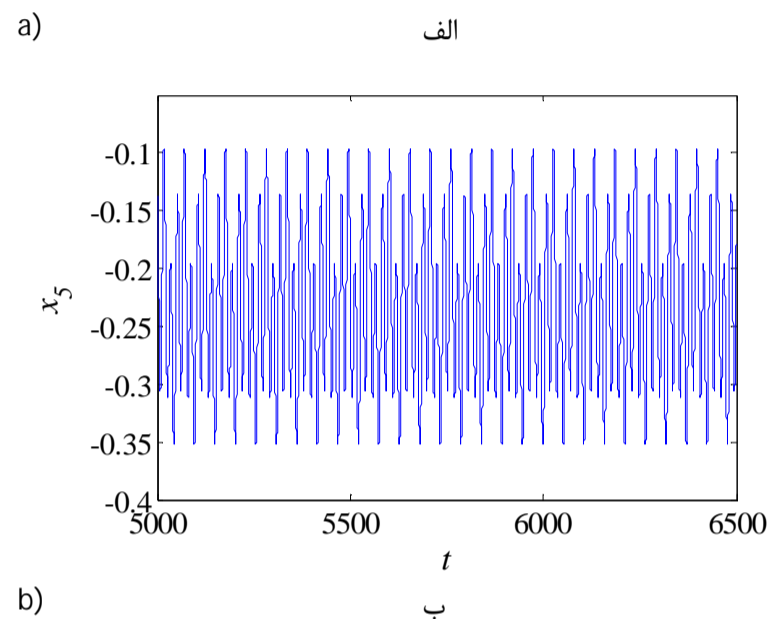
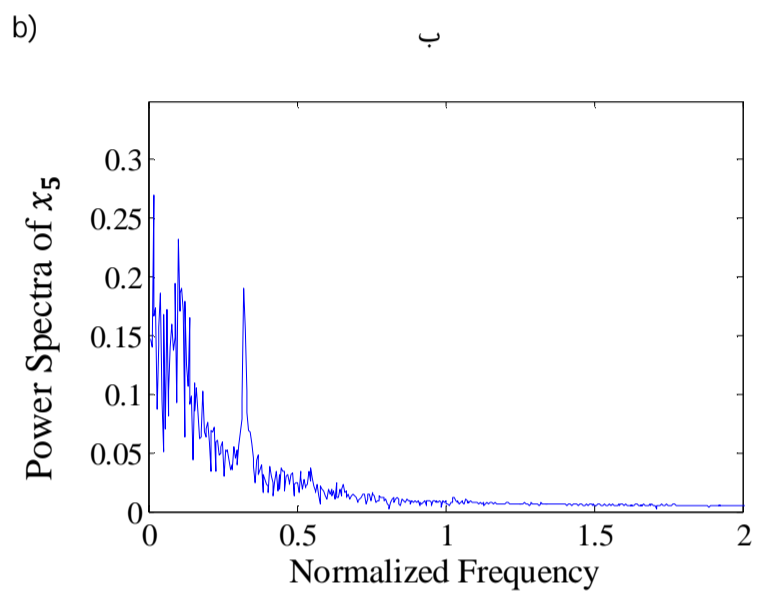
### 3-3- مقایسه نتایج

در این قسمت، به‌عنوان مقایسه هر دو تحلیل در قالب یک جدول آمده است. جدول 2 محدوده‌های رفتار آشوبناک در هر دو تحلیل را نشان می‌دهد. با توجه به جدول 2 مشاهده می‌شود در نظر گرفتن اثر جرم، تأثیر بسیار زیادی بر روی رفتار غیرخطی سیستم دارد؛ به‌طوری‌که با در نظر گرفتن این اثر، آشوب به تأخیر افتاده و در سرعت دورانی بالاتری اتفاق می‌افتد. همچنین مشاهده می‌شود که در یک سرعت دورانی مشابه در دو تحلیل، در نظر گرفتن اثر وزن سیستم، رفتارهایی متفاوت از آنچه که در تحلیل اول انجام شد از خود به نمایش می‌گذارد.



**Fig. 16** Max. Lyapunov exponent at  $\Omega = 0.23$

شکل 16 ماکزیمم نمای لیپانوف به ازای  $\Omega = 0.23$



**Fig. 18** Disk response: a) time series b) power spectra c) phase plane d) poincaré map with weight effect at  $\Omega = 0.32$

شکل 18 پاسخ دیسک: الف) تاریخچه زمانی ب) طیف توان ج) منحنی صفحه فاز د) نگاشت پوانکاره با در نظر گرفتن اثر وزن در  $\Omega = 0.32$

**Fig. 17** Disk response: a) time series b) power spectra c) phase plane with weight effect at  $\Omega = 0.355$

شکل 17 پاسخ دیسک: الف) تاریخچه زمانی ب) طیف توان ج) منحنی صفحه فاز د) در نظر گرفتن اثر وزن در  $\Omega = 0.355$

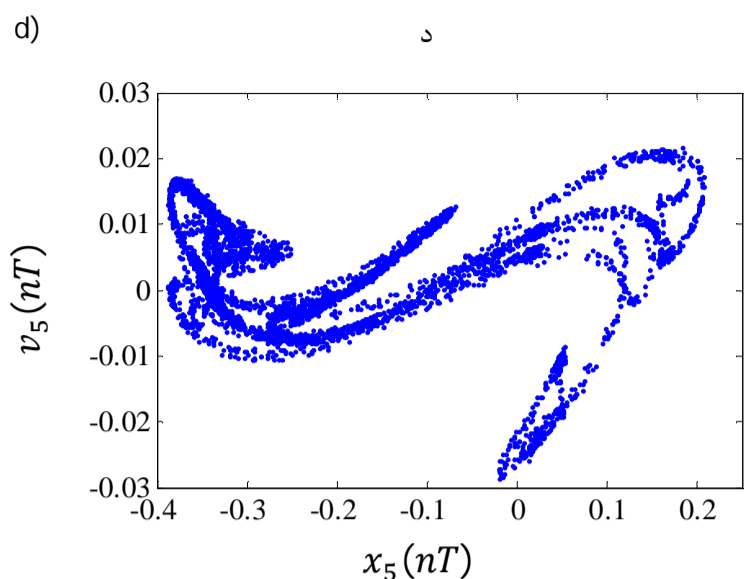


Fig. 20 Disk response: a) time series b) power spectra c) phase plane d) poincar'e map with weight effect  $\Omega = 0.4$

شکل 20 پاسخ دیسک: الف) تاریخچه زمانی ب) طیف توان ج) منحنی صفحه فاز د) نگاشت پوانکاره با اثر وزن  $\Omega = 0.4$

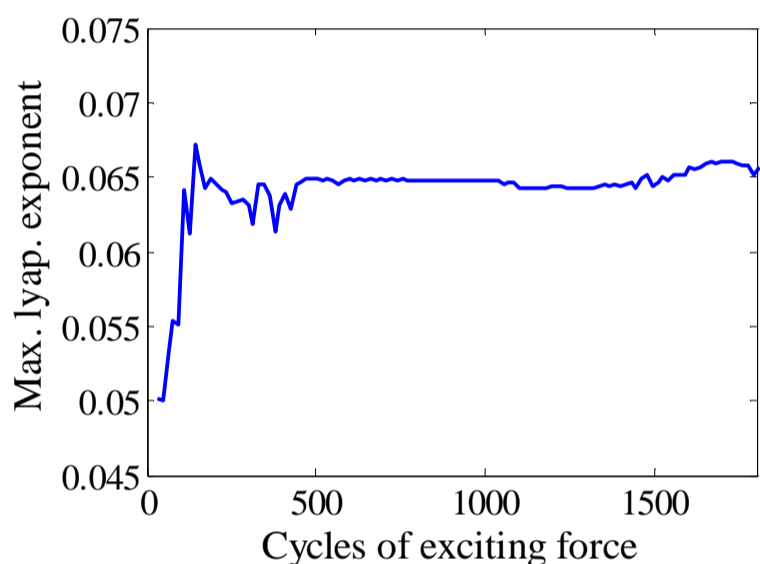


Fig. 21 Max. lyapunov exponent with weight effect at  $\Omega = 0.4$

شکل 21 ماکزیمم نمای لیاپانوف با در نظر گرفتن اثر وزن در  $\Omega = 0.4$

جدول 2 محدوده‌های پاسخ آشوبناک سیستم با و بدون اثر وزن

Table 2 chaotic area in response with-without weight effect

محدوده	بدون اثر وزن	با اثر وزن
محدوده اول	0.117~0.157	0.122~0.154
محدوده دوم	0.24~0.318	0.18~0.2
محدوده چهارم	1.06~1.07	0.294~0.334
محدوده پنجم	1.47~1.48	0.388~0.44
محدوده ششم	—	0.975~1.128
محدوده هفتم	—	1.51~1.63

#### 4- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آشوبناک روتور AMB با و بدون در نظر گرفتن اثر وزن سیستم مورد بررسی قرار گرفت. سیستم به صورت هشت درجه آزادی و به صورت انعطاف‌پذیر مدل شد و نتایج به دست آمده با هم مقایسه گردید.

برای بررسی رفتار غیرخطی سیستم تکنیک‌های مخصوص شناسایی آشوب، از جمله تاریخچه زمانی، منحنی‌های صفحه فاز، نمودارهای طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیاپانوف مورد

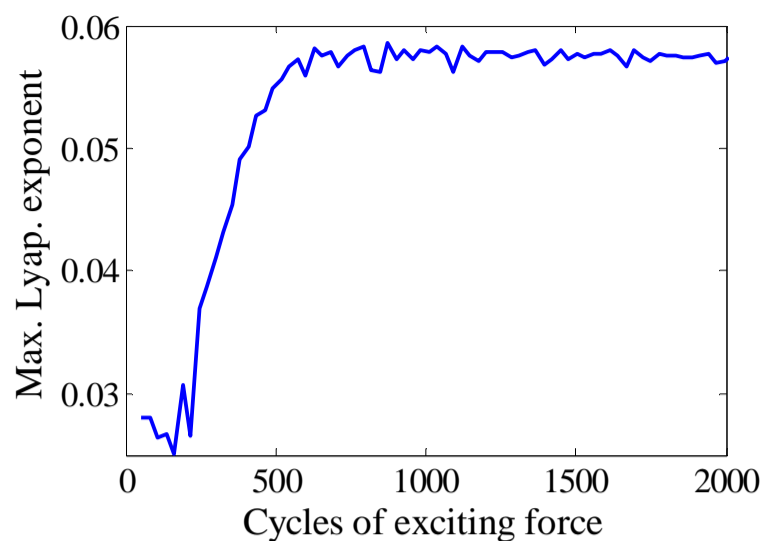
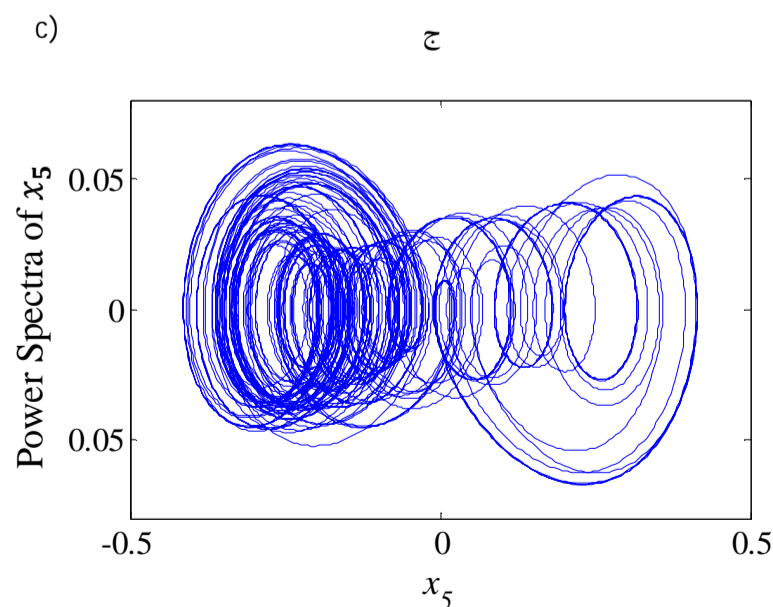
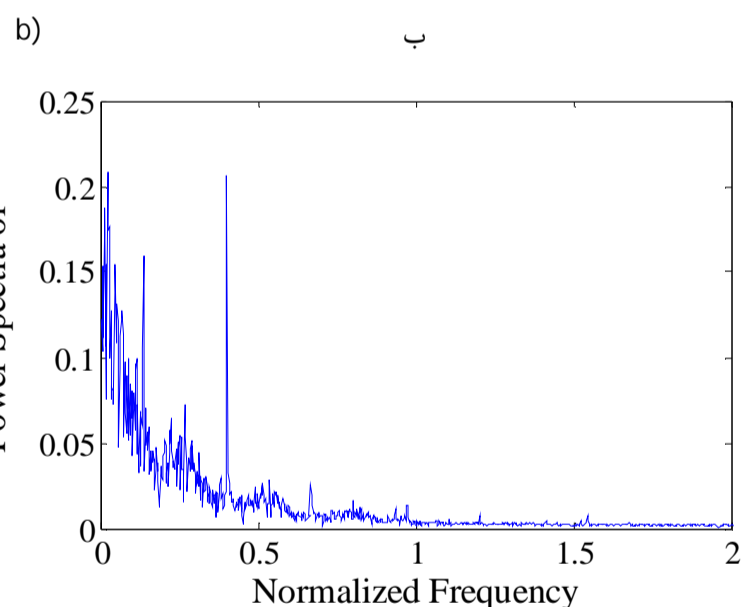
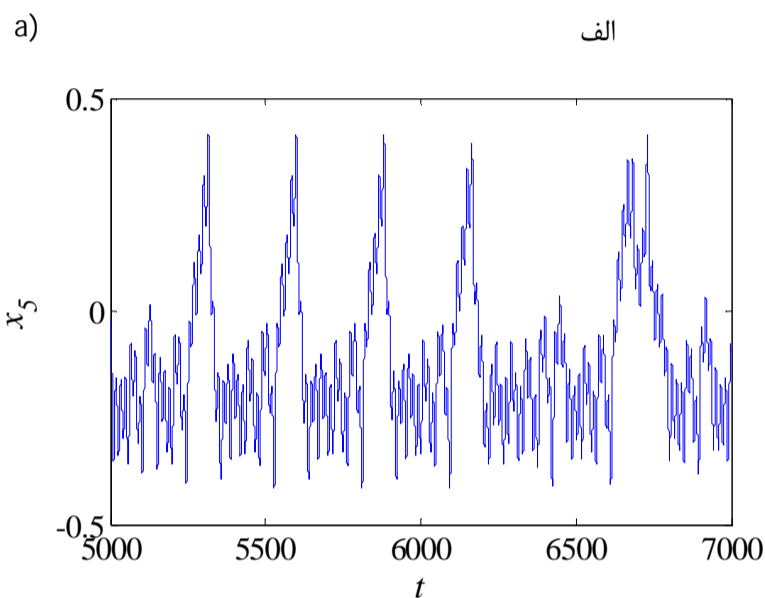


Fig. 19 Max. lyap. exponent with weight effect at  $\Omega = 0.32$

شکل 19 ماکزیمم نمای لیاپانوف با در نظر گرفتن اثر وزن در  $\Omega = 0.32$



## علائم یونانی

$\alpha$	ضریب کوپلینگ نیروهای مغناطیسی
$\beta$	نسبت جرم ژورنال سمت چپ به جرم محور
$\gamma$	نسبت جرم دیسک به محور
$\mu_0$	نفوذپذیری میدان مغناطیسی در خلأ $(\frac{H}{m})$
$\tau$	زمان بدون بعد
$\Omega$	نسبت سرعت
$\omega$	سرعت دورانی روتور $(\frac{rad}{s})$
$\omega_n$	فرکانس طبیعی خطی روتور-AMB $(\frac{rad}{s})$
$\delta_e$	ضریب میرایی ویسکوز

## 6- مراجع

- [1] M. AM, E. Fawzi, Nonlinear oscillations in magnetic bearing systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 8, pp. 1242-1245, 1993.
- [2] L. N. Virgin, T. F. Walsh, J. D. Knight, Nonlinear behavior of a magnetic bearing system, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 17, No. 4, pp. 582-588, 1995.
- [3] W. Zhang, X. P. Zhan, Periodic and chaotic motions of a rotor active magnetic bearing with quadratic and cubic terms and time-varying stiffness, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 41, No. 4, pp. 331-359, 2005.
- [4] H. Wang, J. Liu, Stability and bifurcation analysis in a magnetic bearing system with time delays, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 26, No. 3, pp. 813-825, 2005.
- [5] H. Wang, W. Jiang, Multiple stabilities analysis in a magnetic bearing system with time delays, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 27, No. 3, pp. 789-799, 2006.
- [6] W. Zhang, M. H. Yao, X. P. Zhan, Multi-pulse chaotic motions of a rotor-active magnetic bearing system with time-varying stiffness, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 27, No. 1, pp. 175-186, 2006.
- [7] Y. Amer, U. H. Hegazy, Resonance behavior of a rotor-active magnetic bearing with time-varying stiffness, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 34, No. 4, pp. 1328-1345, 2007.
- [8] M. J. Jang, C. K. Chen, Bifurcation analysis in flexible rotor supported by active magnetic bearings, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 11, No. 8, pp. 2163-2178, 2001.
- [9] J. Inayat-Hussain, Geometric coupling effects on the bifurcations of a flexible rotor response in active magnetic bearings, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 41, No. 5, pp. 2664-2671, 2009.
- [10] J. Inayat-Hussain, Nonlinear dynamics of a statically missaligned flexible rotor in active magnetic bearings, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 3, pp. 764-777, 2010.
- [11] L. Maurice, Adams, J. R., *Rotary Machinery Vibration*, pp. 37-38, New York: Marcel Dekker, 2000.
- [12] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Determining lyapanov exponents from a time series, *Physica D*, Vol. 16, pp. 285-317, 1985.
- [13] J. Xu, Some advance on global analysis of nonlinear systems, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 39, No. 4, pp. 1839-1848, 2009.

استفاده قرار گرفت. آن‌طور که نتایج به‌دست‌آمده نشان داد، با در نظر گرفتن اثر وزن روتور، تفاوت چشم‌گیری در پاسخ سیستم مشاهده شد؛ به‌طوری‌که آشوب به تأخیر افتاده، اما در محدوده‌های بیشتری از سرعت دورانی روتور ظاهر شد. از نکات مهم دیگر در این مقایسه، تفاوت رفتار سیستم به ازای یک سرعت دورانی مشخص با و بدون در نظر گرفتن اثر وزن است؛ به‌گونه‌ای که در سرعت دورانی  $\Omega = 0.23$  صرف‌نظر از اثر وزن، ارتعاشات شبه پریودیک را نشان می‌داد، درحالی‌که ابزارهای شناسایی، رفتار سیستم را با حضور پارامتر وزن، آشوبناک توصیف نمود. همچنین نقطه مقابل آن نیز مشاهده شد؛ به‌صورتی که در  $\Omega = 0.355$  در تحلیل اول، آشوب مشاهده شد، اما در همین بازه، در نظر گرفتن اثر وزن، رفتار منظم (ارتعاشات زیر هارمونیک سوم) را در پاسخ سیستم نشان داد. اما نکته مهم دیگری که می‌توان به آن اشاره نمود، تفاوت نوع رفتار سیستم در مدل کنونی و مدل مرجع [9] است. با مقایسه شکل 7-ب با شکل 8 مشاهده می‌شود با قرار گرفتن دیسک در محلی به‌جز میانه شافت، اثرات ژيروسکوپی، نقش مهمی در کاهش نواحی آشوبناک سیستم به‌خصوص در سرعت‌های بالا دارد. بنابراین ارائه مدلی مناسب از سیستم، اهمیت زیادی در پیش‌بینی رفتار سیستم دارد.

## 5- فهرست علائم

$A_g$	مساحت یک قطب مغناطیسی ( $m^2$ )
$D$	بهره مشتق‌گیر بدون بعد
$\bar{D}$	ضریب بهره مشتق‌گیر $(\frac{As}{m})$
$F_{Mx}$	نیروی بی‌بعد مغناطیسی در جهت $x$
$\bar{F}_{Mx}$	نیروی مغناطیسی در جهت $x$ (N)
$F_{My}$	نیروی بی‌بعد مغناطیسی در جهت $y$
$\bar{F}_{My}$	نیروی مغناطیسی در جهت $y$ (N)
$f$	نسبت سختی مغناطیسی به سختی تیر
$g_0$	فاصله هوایی نامی (m)
$i_0$	جریان استاتیکی کنترل‌کننده (A)
$I_0$	جریان اولیه کوئل (A)
$I_p$	ممان اینرسی قطبی دیسک ( $kg\ m^2$ )
$I_T$	ممان اینرسی عرضی دیسک ( $kg\ m^2$ )
$i_x$	جریان کنترلی در جهت $x$ (A)
$i_y$	جریان کنترلی در جهت $y$ (A)
$P$	بهره تناسبی بدون بعد
$\bar{P}$	ضریب بهره تناسبی $(\frac{A}{m})$
$e$	خارج از مرکزی دیسک (m)
$u$	پارامتر بدون بعد نابالانسی
$w$	پارامتر وزن