



طراحی بهینه چندهدفه دیسک دوار با ساختار هدفمند آلومینیوم-سیلیکون کاربیدی با خواص وابسته به دما براساس رفتار خزشی

فرید وکیلی تهامی^{1*}، محمد زهساز²، آرش محمدعلیزاده فرد³

1- دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- استاد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، صندوق پستی 5166614766، f_vakili@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 فروردین 1393

پذیرش: 26 اردیبهشت 1393

ارائه در سایت: 08 مهر 1393

کلید واژگان:

دیسک دوار

مواد هدفمند

خزش

الگوریتم ژنتیکی چندهدفه

جبهه پارتو

چکیده

در این مقاله پس از بررسی رفتار خزشی دیسک دوار ساخته شده از ترکیب هدفمند دو ماده آلومینیوم 6061 و سیلیکون کاربید، توزیع مواد و پروفیل ضخامت بهینه آن تعیین شده است. با گسترش معادله انتقال حرارت، توزیع دما در دیسک به دست آمده سپس با در نظر گرفتن توزیع دما، با گسترش معادله جابه جایی، رفتار ترمومکانیکی دیسک در خزش بررسی شده است. در معادلات فوق تمامی خواص فیزیکی تابع دما و درصد حجمی مواد فرض شده اند. خواص معادل با دو مدل موری-تاناکا و هاشین-اشتریکمن به دست آمده و با نتایج موجود در ادبیات فن مقایسه شده است. معادلات ترمومکانیکی با روش شبه تحلیلی حل شده و برای اعتبارسنجی با پاسخ های تحلیلی در حالتی خاص مقایسه شده اند. پس از آن، طراحی بهینه در بخش های تک هدفه و چندهدفه و با استفاده از الگوریتم ژنتیکی انجام گرفته است. اهداف شامل افزایش ضریب اطمینان کمینه، کاهش وزن و کاهش بازه تغییرات ضریب اطمینان بیشینه و کمینه و متغیرهای طراحی نیز شامل درصد حجمی مواد در جدار داخلی و خارجی، توان الگوی توزیع مواد و توان پروفیل ضخامت هستند. نتایج نشان می دهد که دو روش حل تحلیلی و شبه تحلیلی مطابقت کاملی داشته و دیسک بهینه دارای غنای بیشتری از سیلیکون در جدار خارجی بوده و پروفیل ضخامت آن نیز به صورت نزولی است. نتایج پژوهش تناقض اهداف بهینه سازی را نیز آشکار می کنند و از این رو نتایج به صورت جبهه پارتو ارائه شده اند.

Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior

Farid Vakili-Tahami*, Mohammad Zehsaz, Arash Mohammad Alizadeh Fard

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 5166614766 Tabriz, Iran, f_vakili@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 April 2014
Accepted 16 May 2014
Available Online 30 September 2014

Keywords:
Rotating Disc
Functionally Graded Materials
Creep
Multi-objective Genetic Algorithm
Pareto Front

ABSTRACT

In this paper the creep behavior of a functionally graded (FG) rotating disc made of Aluminum 6061 and Silicon Carbide is investigated and the optimum volume fraction of FG disc and its profile has been obtained. For this purpose, the temperature gradient along the disc radius is obtained by solving the governing heat transfer differential equation. All the thermal properties of the material are assumed to be the function of temperature and volume fraction. To obtain material properties, two models of Mori-Tanaka and Hashin-Schtrickman are used. To validate the results, they are compared with those given in the literature. Two solution methods: semi-analytical and closed form are employed and the results are compared. The optimum design is carried out with one, and multi-objective methods which are based on genetic algorithm. The objectives are increasing the factor of safety, reducing the weight of the disc and reducing the range between minimum and maximum safety factors. The design variables are percentage of volume fraction, the power of material distribution formula, and the thickness of the disc. The results show that two solution methods compare well. Also, it has been shown that high fraction of Silicon Carbide in the outer side the disc provide optimum results. Also, contradiction of the objectives is reviled, hence the results are presented as Pareto front.

1- مقدمه

وزن سازه به خاطر وجود دلایلی همچون کاهش مصرف سوخت و نیز دستیابی به سازه ای با توزیع ضریب اطمینان مطلوب وجود دارد. با افزایش تقاضا برای افزایش بازده تبدیل انرژی و نیز کاهش انتشار گازهای گلخانه ای در نیروگاه ها، سیستم های تولید انرژی و مواردی از این دست، دما و تنش در این سیستم ها افزایش یافته و از این رو، دلواپسی اصلی در طراحی

دیسک های دوار، به دلیل کاربردهای فراوان آن در صنعت، از دیرباز موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده است. از میان کاربردهای دیسک دوار می توان به مواردی همچون موتورهای صنایع هوایی، اتومبیل ها، توربین ها، پمپ ها و کمپرسورها اشاره نمود. در بسیاری از این کاربردها نیاز به کاهش

Please cite this article using:

F. Vakili-Tahami, M. Zehsaz, A. Mohammad Alizadeh Fard, Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 23-34, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

خواص نیز به صورت توانی فرض شده است. آنان نشان داده‌اند در صورت مستقل از دما در نظر گرفتن خواص، ممکن است نتایج دچار خطای حدود 200 درصدی شوند. این پژوهش جزء معدود پژوهش‌ها در مورد دیسک‌های دوار هدفمند است که در آن خواص وابسته به دما فرض شده‌اند.

با وجود پژوهش‌های متنوع ذکر شده در مورد دیسک‌های دوار، در بیشتر آن‌ها برای همگن‌سازی خواص فیزیکی یا از قانون اختلاط استفاده شده است و یا از تغییرات این خواص با دما صرف‌نظر شده است. از این رو، در پژوهش حاضر ابتدا به تحلیل خزشی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر و خواص فیزیکی وابسته به دما پرداخته شده، که در آن، خواص معادل با فرض توزیع مواد توانی و با استفاده از دو مدل موری-تاناکا² و هاشین-اشتریکمن³ محاسبه شده‌اند. برای اعتبارسنجی، خواص فیزیکی معادل محاسبه شده با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن برای کامپوزیت‌های با درصد حجمی ثابت مقایسه شده‌اند. ضرایب معادلات اساسی خزشی نیز با استفاده از رگرسیون به‌دست آمده‌اند. برای تحلیل ترمومکانیکی، نخست معادله انتقال حرارت رسانش فوریه برای تعیین توزیع دما و سپس معادله دیفرانسیل جابه‌جایی برای تحلیل تنش-کرنش حل شده‌اند. برای حل معادلات از روش شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی استفاده شده است و به‌منظور اعتبارسنجی، پاسخ‌های تحلیل الاستیک با نتایج تحلیل ارائه شده برای حالت الاستیک با توزیع خواص توانی مقایسه شده‌اند. به‌علت وجود ضرایب وابسته به دما، در معادله دیفرانسیل توزیع دما و نیز وجود کرنش‌های خزشی در معادله دیفرانسیل جابه‌جایی هر دو معادله غیرخطی‌اند. پس از این مراحل، بهینه‌سازی در گام‌های تک‌هدفه و چندهدفه و با استفاده از الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب انجام شده است تا توزیع مواد هدفمند و پروفیل ضخامت بهینه تعیین شوند. اهداف مطرح شامل کمینه‌سازی وزن دیسک و دستیابی به توزیع ضریب اطمینان مطلوب است. همچنین، متغیرهای طراحی شامل درصد حجمی مواد در جدار داخلی و خارجی دیسک، توان الگوی توزیع مواد و توان پروفیل ضخامت هستند.

2- تعیین خواص معادل

در پژوهش پیش رو از الگوی توزیع توانی مواد استفاده شده است. درصد حجمی مواد در این الگو را می‌توان با رابطه (1) توصیف کرد:

$$V(r) = V_i + (V_o - V_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^\eta \quad (1)$$

که در آن V_o و V_i به ترتیب بیانگر درصد حجمی ذرات سیلیکون کاربید در جدار داخلی و خارجی دیسک و r_i ، r_o و η به ترتیب نشان‌دهنده شعاع داخلی، خارجی و مطلوب و η نیز تعیین‌کننده پروفیل توزیع مواد هستند.

با توجه به اینکه مواد هدفمند از دو یا چند فاز متفاوت تشکیل شده‌اند و در اکثر مواقع اطلاعات دقیق راجع به مورفولوژی⁴ از جمله شکل، اندازه و نحوه توزیع فازهای تشکیل‌دهنده در دسترس نیستند، خواص مؤثر این مواد تنها باید از طریق کسرهای حجمی و مشخصات فازهای تشکیل‌دهنده تعیین شوند. همان‌طور که ذکر شد، برخی از مطالعات صورت گرفته در این زمینه از قانون اختلاط برای تعیین خواص همگن شده استفاده نموده‌اند؛ اما این روش عموماً از دقت کافی برخوردار نیست، زیرا در آن، برهم‌کنش میان فازها در نظر گرفته نمی‌شود.

چندین مدل میکرومکانیکی به‌منظور محاسبه خواص همگن شده مواد

اجزای سیستم‌ها به سمت ارزیابی کارایی ویسکوپلاستیک این قطعات برای جلوگیری از واماندگی در اثر وقوع خزش سوق یافته است [1]. دیسک‌های دوار نیز به‌عنوان جزئی از این سیستم‌ها، اغلب در گرادیان‌های دمایی و سرعت‌های زاویه‌ای بالا کار می‌کنند. سرعت زاویه‌ای و دمای زیاد باعث ایجاد تنش‌های ترمومکانیکی بالا در دیسک شده و همزمان با آن، وجود دمای بالا و زمان کاری طولانی شرایط را برای وقوع پدیده خزش فراهم می‌کند؛ بنابراین، بررسی پدیده خزش در دیسک‌های دوار اهمیت بیشتری می‌یابد.

با پیشرفت سریع تکنولوژی نیاز به استفاده از مواد جدید به‌عنوان اولویت مهندسی در سیستم‌های پیچیده پربازده مطرح شده است. در برخی از این موارد، نیاز به تأمین مقاومت توأمان ماده در برابر بارهای ترمومکانیکی متفاوت، منجر به معرفی و تولید مواد هدفمند با قابلیت تحمل بارهای متفاوت و تغییرات خواص پیوسته در جهات مختلف شده است.

مطالعات متنوعی در زمینه بررسی رفتار خزشی و ترموالاستیک دیسک‌های دوار در ادبیات فن ارائه شده است. در بیشتر این مطالعات، همچون مطالعات سینگ و همکارانش در سال 2001 میلادی [2]، محاسبه خواص معادل با استفاده از قانون اختلاط صورت گرفته و یا همچون بررسی‌های یو و همکارانش [3] و کردخیلی و نقدآبادی [4] در سال 2007 توزیعی از پیش تعیین شده برای خواص فرض شده است که مطالعه اخیر با ارائه یک روش حل شبه‌تحلیلی برای تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد هدفمند همراه بوده است. در سال 2005 میلادی، جاهد و همکارانش [5] به کمینه‌سازی وزن دیسک‌های دوار با وجود ناهمگونی مواد پرداخته‌اند. آن‌ها در مقاله خود به بررسی مجدد دو مورد موجود در ادبیات فن پرداخته‌اند. در مثال نخست تمامی خواص فیزیکی، ثابت فرض شده و تلاش شده تا تنش مؤثر دیسک به تنش تسلیم نزدیک‌تر گردد؛ در مثال دوم مدول الاستیسیته در راستای شعاع متغیر فرض شده و فرایند پیشین تکرار شده است. در سال 2006 میلادی، فرشی و فائزی [6] به بهینه‌سازی دیسک دوار غیرهمگن به‌روش غیرگرادیانی پرداخته‌اند. تابع هدف در این بهینه‌سازی، وزن دیسک در نظر گرفته شده است و کمینه‌سازی با در نظر گرفتن محدودیت‌های تنش (پایین‌تر بودن تنش از حد تحمل ماده در شرایط حرارتی ذکر شده) انجام شده و قیودی نیز برای هندسه دیسک تعیین شده است. در سال 2008 میلادی، فرشی و بیدآبادی [7] به بهینه‌سازی پروفیل ضخامت دیسک دوار با وجود خزش مرحله دوم پرداخته‌اند. آن‌ها رفتار خزشی را با استفاده از رابطه نورتون مدل نموده و با ارائه مثالی با ضرایب و تنش مجاز ثابت به بررسی کارایی روش خود پرداخته‌اند. در سال 2011 میلادی، لقمان و همکارانش [8] به بررسی تنش‌های خزشی و ترموالاستیک در یک دیسک دوار ساخته شده از ماده هدفمند آلومینیوم-سیلیکون کاربید¹ پرداخته‌اند. تمامی خواص به‌غیر از ضریب پواسون در راستای شعاعی تابع درصد حجمی مواد فرض شده و توسط قانون اختلاط محاسبه شده‌اند. رفتار خزشی نیز توسط قانون شربی توصیف شده است. در سال 2012 میلادی، قربانی [9] به بررسی شبه‌تحلیلی خزش دیسک دوار هدفمند ساخته شده از ترکیب St37 و زیرکونیوم با ضخامت متغیر به‌روش گسسته‌سازی پرداخته است. در این مقاله خواص به‌صورت توانی تغییر نموده و برای تعیین کرنش‌های خزشی از رابطه زمان‌سختی نورتون، با فرض ثابت بودن ضرایب این معادله استفاده شده است. در سال 2013 میلادی، کردخیلی و لیوانی [10] پاسخ‌های ترموالاستیک و خزشی را برای یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر و خواص وابسته به دما تعیین کرده‌اند. تغییرات

2- Mori-Tanaka
3- Hashin-Shtrikman
4- Morphology

1- Al-SiC

در روابط (9) و (10) $S_y^{(1)}$ و $S_y^{(2)}$ به ترتیب تنش‌های تسلیم مربوط به فاز ضعیف و قوی بوده و V_1 و V_2 نیز درصدهای حجمی مربوط به هر یک از این مواد هستند. در این بررسی تمامی خواص تابع دما و درصد حجمی ذرات سیلیکون کاربرد فرض شده‌اند. علاوه بر آن، فرض شده است که دیسک دوار مورد بررسی حاصل ترکیب هدفمند دو ماده آلومینیوم 6061 و سیلیکون کاربرد باشد. برای توصیف تغییرات خواص فیزیکی این دو ماده با توجه به محدوده دمایی موجود، چندجمله‌ای‌های درجه‌سومی مطابق رابطه (11) برازش شده‌اند که ضرایب آن‌ها برای آلومینیوم و سیلیکون کاربرد به ترتیب در جدول‌های 1 و 2 ارائه شده‌اند.

$$P = \sum_{i=1}^j q_i \left(\frac{T-b}{c} \right)^{i-1} \quad (11)$$

در این رابطه، T دما برحسب کلوین، j تعداد جمله‌ها و P نیز می‌تواند هر یک از خواص باشد. ضرایب q ، b و c نیز از طریق برازش داده‌ها به دست می‌آیند. به‌علت پیچیده‌تر بودن تغییرات تنش تسلیم آلومینیوم با دما، در این مورد از چند جمله‌ای‌های درجه هشت استفاده شده است. ضرایب مربوط به تنش تسلیم نیز در جدول 3 آمده‌اند. بنابر گزارش منابع مختلف [19-21] رابطه شریبی نتایج بهتری برای توصیف رفتار خزشی کامپوزیت‌های با پایه آلومینیوم دارد؛ بنابراین، برای توصیف رفتار خزشی از این قانون (رابطه 12) استفاده شده است [21]:

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c = [M(\sigma_e - \sigma_0)]^m \quad (12)$$

که در آن σ_e معرف تنش مؤثر است. رابطه شریبی شامل ثابت‌های خزشی است که از میان آن‌ها، ثابت m برابر با هشت در نظر گرفته شده است. مقادیر M و σ_0 با رگرسیون براساس نتایج تجربی به دست آمده از پژوهش‌های پانندی و همکارانش [21] بر روی کامپوزیت‌های آلومینیوم-سیلیکون کاربرد به دست آمده‌اند. داده‌های تجربی مورد استفاده در جدول 4 آورده شده و نتایج حاصل از رگرسیون در روابط (13) قابل مشاهده است:

$$M = \frac{4.723 T^{4.98}}{10^{16} V^{0.622}} + 0.0002096$$

$$\sigma_0 = 0.01T + 0.9531V - 0.6361 \quad (13)$$

که در آن T مقدار دمای مطلق به کلوین و V درصد حجمی ذرات SiC هستند. داده‌های لازم برای برازش خواص فیزیکی ارائه شده در جداول 1 تا 3 از منبع [22] برگرفته شده‌اند.

جدول 1 ضرایب و ثوابت چندجمله‌ای‌های برازش شده برای آلومینیوم 6061

v	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	k (W/mK)	α (1/K)	P
0,3633	62,04	2848	196,1	$2,748 \times 10^{-5}$	q ₁
0,0136	-8,675	-18,09	2,645	$1,425 \times 10^{-6}$	q ₂
0,01065	-3,137	-0,4566	-5,869	$-6,024 \times 10^{-8}$	q ₃
$3,382 \times 10^{-3}$	-0,9465	-0,08859	-0,00015	$-3,666 \times 10^{-10}$	q ₄
569,5	569,5	483	588,8	477,2	b
133,4	133,4	81,61	142,5	77,91	c

جدول 2 ضرایب و ثوابت چندجمله‌ای‌های برازش شده برای سیلیکون کاربرد

v	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	k (W/mK)	α (1/K)	P
0,1704	$4,355 \times 10^2$	3176	82,13	$3,825 \times 10^{-6}$	q ₁
$-4,656 \times 10^{-4}$	-3,622	-6,347	-13	$1,994 \times 10^{-6}$	q ₂
$-4,046 \times 10^{-4}$	$2,153 \times 10^{-4}$	-0,1768	3,595	$-1,079 \times 10^{-6}$	q ₃
$6,644 \times 10^{-4}$	$-8,34 \times 10^{-4}$	0,04943	-0,3391	$2,251 \times 10^{-7}$	q ₄
623	608,6	605,7	618	628,7	b
151,5	159,2	159	160,2	238	c

کامپوزیتی ارائه شده است. باید خاطر نشان شد که مواد هدفمند نیز به‌عنوان مواد کامپوزیتی جدید با تغییرات خواص پیوسته شناخته می‌شوند. روش‌های خودسازگار [11] و موری-تاناکا [12-15] دو مدل میکرومکانیکی دقیق برای تعیین خواص این مواد هستند. روش دیگر برای محاسبه خواص همگن شده، استفاده از روش المان محدود و یا المان مرزی برای مدل‌سازی ریزساختارها است [16,17]. روش موری-تاناکا براساس فرض پیوسته بودن ماتریس و مدل خودسازگار با فرض پیوسته بودن فاز اضافه شده ارائه شده‌اند. در این بررسی با فرض پیوسته بودن ماتریس از مدل موری-تاناکا استفاده شده است. در این الگو، روابط مربوط به ضریب پواسون و مدول الاستیسیته به ترتیب مطابق روابط (2) و (3) بیان می‌شوند:

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{6K + 2\mu} \quad (2)$$

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (3)$$

که در آن، K و μ به ترتیب برابر با مدول حجمی و برشی بوده و از روابط (4) و (5) محاسبه می‌شوند:

$$K = \frac{V(K_2 - K_1)}{1 + (1 - V) \frac{K_2 - K_1}{K_1 + \frac{4}{3}\mu_1}} + K_1 \quad (4)$$

$$\mu = \frac{V(\mu_2 - \mu_1)}{1 + (1 - V) \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + f_1}} + \mu_1 \quad (5)$$

که در این رابطه f_1 به‌صورت رابطه (6) تعریف می‌شود.

$$f_1 = \frac{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1)}{6(K_1 + 2\mu_1)} \quad (6)$$

ضرایب رسانش (k) و انبساط حرارتی (α) نیز به ترتیب توسط روابط (7) و (8) محاسبه می‌شوند:

$$\frac{k - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{3k_1V}{3k_1 + (1 - V)(k_2 - k_1)} \quad (7)$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{K_1}}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}} \quad (8)$$

در روابط (4) تا (8) مقادیر با زیرنویس یک مربوط به زمینه کامپوزیت و مقادیر با زیرنویس دو مربوط به ذرات اضافه شده به کامپوزیت است. برای بیان چگالی از قانون اختلاط و همچنین برای تعیین تنش تسلیم معادل در مقاطع مختلف ماده هدفمند، از مدل هاشین-اشتریکمن استفاده شده است. این مدل دو حد بالا و پایین را پیش‌بینی می‌کند که به ترتیب در روابط (9) و (10) مشاهده می‌شوند [18]:

$$S_y = \frac{5V_2}{3 + 2V_2} S_y^{(2)} + \frac{3V_1}{3 + 2V_2} S_y^{(1)} \sqrt{1 + \frac{2V_2}{3} \left[1 - \left(\frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}} \right)^2 \right]} \quad (9)$$

$$S_y = \begin{cases} \frac{5V_1}{3 + 2V_1} S_y^{(1)} + \frac{3V_2}{3 + 2V_1} S_y^{(2)} \sqrt{1 + \frac{2V_1}{3} \left[1 - \left(\frac{S_y^{(1)}}{S_y^{(2)}} \right)^2 \right]} & \text{اگر } V_1 < 1 \text{ و } \frac{2}{5} \sqrt{1 + \frac{3V_1}{2}} < \frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}} \leq 1 \text{ باشد، آنگاه} \\ S_y^{(2)} \sqrt{1 + \frac{3V_1}{2}} & \text{اگر } V_1 < 1 \text{ و } \frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}} \leq \frac{2}{5} \sqrt{1 + \frac{3V_1}{2}} \text{ باشد، آنگاه} \\ S_y^{(1)} & \text{اگر } V_1 = 1 \text{ باشد، آنگاه} \end{cases} \quad (10)$$

در این رابطه σ ، ε و ΔT به ترتیب معرف تنش، کرنش و اختلاف دما هستند؛ همچنین، زیر نویس های ρ و θ به ترتیب جهت های شعاعی و مماسی را نشان می دهند و حرف بالانویس C به مقادیر خزشی اشاره دارد. روابط کرنش جابه جایی نیز به صورت رابطه (17) نوشته می شوند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (17)$$

معادله تعادل نیز برای دیسک دوار با ضخامت متغیر با استفاده از رابطه (18) بیان می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h \sigma_{rr}) - \frac{h \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho r h \omega^2 = 0 \quad (18)$$

که در آن، ω و ρ به ترتیب سرعت زاویه ای و چگالی هستند. با جانشانی روابط (17) در روابط (16) و سپس جانشانی حاصل در رابطه (18)، معادله دیفرانسیل (19) برای توصیف جابه جایی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر تحت بارهای ترمومکانیکی به دست می آید. در این رابطه تمامی خواص ترمومکانیکی تابع دما و درصد حجمی مواد در نظر گرفته شده اند.

$$C_1 \frac{d^2 u}{dr^2} + C_2 \frac{du}{dr} + C_3 u + C_4 = 0 \quad (19)$$

ضرایب C_1 تا C_4 در رابطه (19) نیز به صورت رابطه (20) محاسبه می شوند:

$$C_1 = hE$$

$$C_2 = E \frac{dh}{dr} + \frac{hE}{r} + (1-v^2)h \frac{d}{dr} \left(\frac{E}{1-v^2} \right)$$

$$C_3 = \frac{vE}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{hE}{r^2} + (1-v^2) \frac{vh}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{E}{1-v^2} \right) + \frac{hE}{r} \frac{dv}{dr}$$

$$C_4 = -(1+v) [\alpha h \frac{dE}{dr} + \alpha E \frac{dh}{dr} + hE \frac{d\alpha}{dr}] T - \alpha (1+v) h E \frac{dT}{dr}$$

$$- [E \frac{dh}{dr} + \frac{hE(1-v)}{r} + (1-v^2)h \frac{d}{dr} \left(\frac{E}{1-v^2} \right)] \varepsilon_{rr}^c$$

$$- [vE \frac{dh}{dr} + hE \frac{dv}{dr} - \frac{hE(1-v)}{r} + v(1-v^2)h \frac{d}{dr} \left(\frac{E}{1-v^2} \right)] \varepsilon_{\theta\theta}^c$$

$$- E h \left(\frac{d\varepsilon_{rr}^c}{dr} + v \frac{d\varepsilon_{\theta\theta}^c}{dr} \right) + (1-v^2) \rho r h \omega^2 \quad (20)$$

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای حل معادله (19) به صورت جابه جایی آزاد در شعاع داخلی و خارجی دیسک هستند.

معادلات دیفرانسیل (14) و (19) در جهت افزایش دقت حل، بی بعدسازی شده اند. بدین منظور از تغییر متغیرهای رابطه (21) استفاده می شود:

$$\bar{T} = \frac{T}{T}, \quad \bar{T} = \frac{\rho_0 r_0^2 \omega^2}{\alpha_0 E_0}, \quad \bar{U} = \frac{u}{\bar{u}}, \quad \bar{u} = \frac{\rho_0 r_0^3 \omega^2}{E_0}$$

$$\bar{\varepsilon}^c = \frac{\varepsilon^c}{\bar{\varepsilon}^c}, \quad \bar{\varepsilon}^c = \frac{\rho_0 r_0^2 \omega^2}{E_0}$$

$$\bar{E} = \frac{E}{E_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \bar{R} = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{H} = \frac{h}{h_0} \quad (21)$$

پس از اعمال بی بعدسازی، معادله (14) به شکل رابطه (22) در می آید:

$$\bar{H} \bar{K} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{R}^2} + \left(\frac{\bar{H} \bar{K}}{\bar{R}} + \frac{d}{d\bar{R}} (\bar{H} \bar{K}) \right) \frac{d\bar{T}}{d\bar{R}} = 0 \quad (22)$$

همچنین، معادله دیفرانسیل (19) به رابطه (23) تبدیل می شود:

$$\bar{C}_1 \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{R}^2} + \bar{C}_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{R}} + \bar{C}_3 \bar{U} + \bar{C}_4 = 0 \quad (23)$$

که در آن ضرایب \bar{C}_1 تا \bar{C}_4 به صورت رابطه (24) به دست می آیند:

جدول 3 ضرایب و ثوابت چندجمله ای های برازش شده برای مقاومت مواد (MPa)

سیلیکون کاربید	آلومینیوم 6061	
506,2	31,34	q ₁
7,96	-20,21	q ₂
-1,98×10 ⁻³	-4,28	q ₃
-9,16×10 ⁻⁴	-20,61	q ₄
0	32,48	q ₅
0	17,94	q ₆
0	-25,25	q ₇
0	-3,71	q ₈
0	5,34	q ₉
618	587,1	B
160,2	148,6	C

جدول 4 نتایج تجربی مورد استفاده برای رگرسیون [20,23]

σ_0 (MPa)	M (s ^{-1/n} /MPa)	V (%)	T (K)
15,24	0,00963	10	620
24,83	0,00594	20	620
34,32	0,00518	30	620
24,74	0,00897	20	675
25,72	0,01295	20	725

3- تعیین توزیع دما

معادله انتقال حرارت رسانش در مختصات استوانه ای و در عدم وجود منبع حرارتی، به صورت رابطه (14) بیان می شود:

$$hk \frac{d^2 T}{dr^2} + \left(\frac{hk}{r} + \frac{d}{dr} (hk) \right) \frac{dT}{dr} = 0 \quad (14)$$

که در آن T ، h و k به ترتیب بیانگر دما، ضخامت دیسک و ضریب رسانش هستند.

با توجه به اینکه ضریب رسانش موجود در معادله دیفرانسیل (14) وابسته به دما و درصد حجمی مواد اضافه شده است، معادله دیفرانسیل مذکور غیرخطی است. برای حل این معادله از روش تکرار با حدس اولیه توزیع خطی استفاده شده است. شرایط مرزی مفروض برای معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما، شرایط دما ثابت در جدار داخلی و خارجی است. همگرایی حل با استفاده از کنترل مقدار خطای نسبی مطابق رابطه (15) صورت می گیرد:

$$\left| \frac{\max(T_j - T_{j-1})}{T_j} \right| < \lambda \quad (15)$$

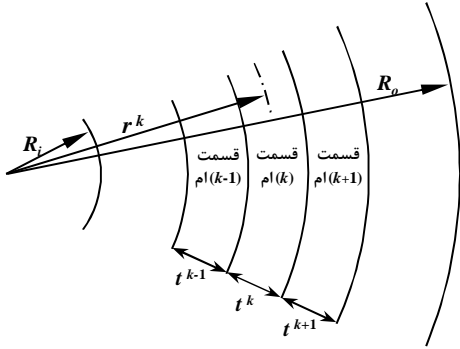
که در آن λ نشانگر شمار تکرار و l مقدار خطای نسبی مورد قبول است که برابر 10^{-3} فرض شده است.

4- تعیین میدان جابه جایی و مقادیر تنش - کرنش

به منظور تحلیل ترمومکانیکی، کرنش ها برابر مجموع کرنش های الاستیک، حرارتی و خزشی در نظر گرفته شده اند. تحلیل در مختصات استوانه ای با فرض وجود تقارن محوری انجام و با توجه به ضخامت کم دیسک شرایط تنش صفحه ای در نظر گرفته شده است. با توجه به این فرضیات می توان رابطه (16) را نوشت:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-v^2} [\varepsilon_{rr} + v\varepsilon_{\theta\theta} - \alpha(1+v)\Delta T - (\varepsilon_{rr}^c + v\varepsilon_{\theta\theta}^c)]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-v^2} [\varepsilon_{\theta\theta} + v\varepsilon_{rr} - \alpha(1+v)\Delta T - (\varepsilon_{\theta\theta}^c + v\varepsilon_{rr}^c)] \quad (16)$$



شکل 1 تقسیم‌بندی شعاعی دیسک

در روابط (27)، $\Delta \varepsilon^c$ و σ_e به ترتیب، رشد کرنش خزشی معادل و تنش مؤثر بوده و از طریق معادلات (28) به دست می‌آیند:

$$\Delta \varepsilon^c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\Delta \varepsilon_{rr}^c)^2 + (\Delta \varepsilon_{\theta\theta}^c)^2 + (\Delta \varepsilon_{zz}^c)^2}$$

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{\theta\theta} \sigma_{rr}} \quad (28)$$

به منظور تعیین نرخ کرنش خزشی، از معادلات اساسی مختلف می‌توان استفاده نمود. با توجه به اینکه رفتار خزشی کامپوزیت‌های پایه آلومینیوم می‌تواند با رابطه شربی (رابطه 29) به خوبی پیش‌بینی شود، از این رابطه در این تحلیل استفاده شده است [21]:

$$\Delta \varepsilon^c = [M(\sigma_e - \sigma_0)]^m \Delta t \quad (29)$$

حل براساس روش عددی تکراری مندلسون انجام می‌شود تا تاریخچه تنش-کرنش دیسک به دست آید. برای این منظور، در هر مرحله زمانی، ابتدا یک مقدار حدس اولیه برای مقدار رشد کرنش خزشی تعیین می‌شود و پس از حل معادله جابه‌جایی، مقدار کرنش‌های کل و تنش‌های جاری به دست می‌آیند. با داشتن این مقادیر، تغییر کرنش خزشی به کمک روابط (28) و (29) به دست می‌آیند. با داشتن تنش مؤثر و کرنش خزشی، جزء مؤثر و تنش‌های جاری از معادلات پراندتل-راس (27)، مقدار کرنش‌های خزشی جزء جدید به دست آمده و کرنش‌های جزء خزشی گام پیشین اصلاح می‌شوند و تکرار این فرآیند تا همگرایی الگوریتم ادامه می‌یابد. پس از محاسبه تنش مؤثر، ضریب اطمینان به صورت رابطه (30) محاسبه می‌شود:

$$SF(r) = \frac{S_y(r)}{\sigma_e(r)} \quad (30)$$

6- اعتبارسنجی

6-1- بررسی اعتبار روش‌های همگن‌سازی مورد استفاده

برای اعتبارسنجی روش‌های همگن‌سازی، نتایج به دست آمده از آن‌ها با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن برای مواد کامپوزیتی با توزیع یکنواخت مواد مقایسه شده است. نخست به بررسی روش موری-تاناکا پرداخته می‌شود. داده‌های مقایسه شده در این مورد در جدول 5 خلاصه شده‌اند. باید توجه داشت، روش همگن‌سازی موری-تاناکا با فرض پیوسته بودن ماتریس و گسسته بودن ذرات اضافه شده صحت دارد و بررسی‌های متعددی در زمینه استفاده از مدل موری-تاناکا در تعیین خواص معادل در مواد کامپوزیتی نیز مؤید دقت بالای این مدل برای درصد حجمی پایین و پیوسته بودن ماتریس کامپوزیت است. برای پیش‌بینی تنش تسلیم در مقاطع مختلف ماده هدفمند از مدل هاشین-اشتریکمن استفاده شده است. مقایسه نتایج پیش‌بینی شده توسط این مدل با نتایج تجربی نیز در جدول 6 قابل مشاهده است. با توجه به تطابق بهتر نتایج حد پایین مدل هاشین-اشتریکمن با نتایج تجربی و همچنین در جهت

$$\bar{C}_1 = \bar{H}\bar{E}$$

$$\bar{C}_2 = \bar{E} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} + \frac{\bar{H}\bar{E}}{\bar{R}} + (1-v^2)\bar{H} \frac{d}{d\bar{R}} \left(\frac{\bar{E}}{1-v^2} \right)$$

$$\bar{C}_3 = \frac{v\bar{E}}{\bar{R}} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} - \frac{\bar{H}\bar{E}}{\bar{R}^2} + (1-v^2) \frac{v\bar{H}}{\bar{R}} \frac{d}{d\bar{R}} \left(\frac{\bar{E}}{1-v^2} \right) + \frac{\bar{H}\bar{E}}{\bar{R}} \frac{dv}{d\bar{R}}$$

$$\bar{C}_4 = -(1+v) \left[\bar{\alpha}\bar{H} \frac{d\bar{E}}{d\bar{R}} + \bar{\alpha}\bar{E} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} + \bar{H}\bar{E} \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{R}} \right] \bar{T} - \bar{\alpha}(1+v)\bar{H}\bar{E} \frac{d\bar{T}}{d\bar{R}}$$

$$- \left[\bar{E} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} + \frac{\bar{H}\bar{E}(1-v)}{\bar{R}} + (1-v^2)\bar{H} \frac{d}{d\bar{R}} \left(\frac{\bar{E}}{1-v^2} \right) \right] \bar{\varepsilon}_{rr}^c$$

$$- \left[v\bar{E} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} + \bar{H}\bar{E} \frac{dv}{d\bar{R}} - \frac{\bar{H}\bar{E}(1-v)}{\bar{R}} + v(1-v^2)\bar{H} \frac{d}{d\bar{R}} \left(\frac{\bar{E}}{1-v^2} \right) \right] \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^c$$

$$- \bar{H}\bar{E} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_{rr}^c}{d\bar{R}} + v \frac{d\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^c}{d\bar{R}} \right) + (1-v^2)\bar{\rho}\bar{R}\bar{H} \quad (24)$$

5- روش حل شبه تحلیلی گسسته‌سازی

حل تحلیلی دو معادله دیفرانسیل غیرخطی (14) و (19) برای تمامی حالات بعید به نظر می‌رسد، بدین منظور، از روش‌های شبه‌تحلیلی یا عددی استفاده می‌شود. در این پژوهش از روش شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی [4] استفاده شده است. در این روش دیسک به N_d حلقه با ضخامت معلوم تقسیم شده و خواص مواد در هر حلقه ثابت در نظر گرفته می‌شود. این امر معادلات دیفرانسیل موجود را به مجموعه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند که حل تحلیلی آن موجود است. شکل 1 این تقسیم‌بندی را نشان می‌دهد. به منظور یافتن ثوابت انتگرال‌گیری حاصل از حل، باید در مرز المان‌ها، شرایط پیوستگی اعمال شود. این شرایط برای معادله دیفرانسیل (14) شرایط پیوستگی دمایی مرتبه اول و دوم هستند که شامل برابری مقادیر و شیب تغییرات دما در مرز المان‌هاست که با روابط (25) بیان می‌شوند:

$$\bar{T}(r) \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \bar{T}(r) \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}}$$

$$\frac{d\bar{T}(r)}{d\bar{R}} \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \frac{d\bar{T}(r)}{d\bar{R}} \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}} \quad (25)$$

شرایط پیوستگی برای معادله دیفرانسیل (19) نیز شامل برابری جابه‌جایی‌ها و شیب جابه‌جایی‌ها در مرز المان‌هاست. این شرایط با روابط (26) بیان می‌شود:

$$\bar{U}(r) \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \bar{U}(r) \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}}$$

$$\frac{d\bar{U}(r)}{d\bar{R}} \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \frac{d\bar{U}(r)}{d\bar{R}} \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}} \quad (26)$$

با توجه به اینکه C4 در معادلات (20)، شامل کرنش‌های خزشی است، برای حل معادله دیفرانسیل (19) در طول زمان، معادله مذکور در گام‌های زمانی کوچک حل می‌شود. کرنش‌های خزشی در گام اول صفر بوده و در هر گام بعدی برابر حاصل جمع مقادیر کرنش در گام‌های قبلی به علاوه میزان رشد آن در گام مذکور است. مقدار رشد کرنش‌ها را می‌توان با رابطه پراندتل-راس به دست آورد. این روابط با معادلات (27) ارائه می‌شوند [8]:

$$\Delta \varepsilon_{rr}^c = \frac{\Delta \varepsilon^c}{2\sigma_e} [2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}]$$

$$\Delta \varepsilon_{\theta\theta}^c = \frac{\Delta \varepsilon^c}{2\sigma_e} [2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}]$$

$$\Delta \varepsilon_{zz}^c = -\Delta \varepsilon_{rr}^c - \Delta \varepsilon_{\theta\theta}^c \quad (27)$$

جدول 7 نمادهای مورد استفاده در حل تحلیلی

خاصیت	k	E	α	ρ
نماد توان	β	γ	χ	μ

با دو مرحله انتگرال گیری در راستای شعاع از رابطه (33) رابطه (34) به دست می آید:

$$\bar{T}(\bar{R}) = \frac{a_1}{(\zeta - \beta)} \bar{R}^{\zeta - \beta} + a_2 \quad (34)$$

در رابطه فوق مقادیر a_1 و a_2 ثوابت انتگرال گیری هستند که با اعمال شرایط مرزی به دست می آید. با فرض شرایط دما ثابت در جدار داخلی و خارجی می توان رابطه (35) را نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{R}_i) &= \bar{T}_i, \\ \bar{T}(\bar{R}_o) &= \bar{T}_o \end{aligned} \quad (35)$$

با اعمال این شرایط، ثوابت انتگرال گیری به صورت رابطه (36) خواهند بود:

$$a_1 = \frac{(\bar{T}_o - \bar{T}_i)(\zeta - \beta)}{1 - \left(\frac{\bar{R}_i}{\bar{R}_o}\right)^{\zeta - \beta}}, \quad a_2 = \bar{T}_o - \frac{(\bar{T}_o - \bar{T}_i)}{1 - \left(\frac{\bar{R}_i}{\bar{R}_o}\right)^{\zeta - \beta}} \quad (36)$$

به این ترتیب توزیع دمای به دست آمده را می توان با توزیع دمای به دست آمده از روش شبه تحلیلی گسسته سازی مقایسه نمود.

8- حل تحلیلی معادله جابه جایی

با جانشانی خواص و پروفیل ضخامت مفروض در معادله دیفرانسیل (19) می توان ضرایب معادله مذکور را به صورت روابط (37) به دست آورد. شایان ذکر است که برای حالت الاستیک کرنش های خزشی صفرند.

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \bar{R}^{-\zeta + \gamma} \\ \bar{C}_2 &= (\gamma + 1 - \zeta) \bar{R}^{-\zeta + \gamma - 1} \\ \bar{C}_3 &= (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) \bar{R}^{-\zeta + \gamma - 2} \\ \bar{C}_4 &= - \left((\gamma + \chi - \zeta) \bar{T} + \bar{R} \frac{d\bar{T}}{d\bar{R}} \right) (1 + \nu) \bar{R}^{-\zeta + \gamma + \chi - 1} \\ &+ (1 - \nu^2) \bar{R}^{-\zeta + \mu + 1} \end{aligned} \quad (37)$$

در رابطه (37)، \bar{T} توزیع دمای به دست آمده از رابطه (34) است. با جانشانی این مقدار می توان ضریب \bar{C}_4 را به شکل رابطه (38) نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 &= - \left(\frac{(\gamma + \chi - \beta)}{(\zeta - \beta)} a_1 \bar{R}^{\zeta - \beta} + (\gamma + \chi - \zeta) a_2 \right) \\ &\times (1 + \nu) \bar{R}^{-\zeta + \gamma + \chi - 1} + (1 - \nu^2) \bar{R}^{-\zeta + \mu + 1} \end{aligned} \quad (38)$$

معادله دیفرانسیل (19) دارای دو قسمت جواب عمومی و خصوصی است که با در نظر گرفتن قسمت همگن این معادله می توان رابطه (39) را نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{-\zeta + \gamma} \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{R}^2} + (\gamma + 1 - \zeta) \bar{R}^{-\zeta + \gamma - 1} \frac{d\bar{U}}{d\bar{R}} \\ + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) \bar{R}^{-\zeta + \gamma - 2} \bar{U} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

معادله دیفرانسیل (39) معادله دیفرانسیل اولر-کوشی است و با استفاده از تغییر متغیری به صورت رابطه (40) به معادله (41) می انجامد:

$$\bar{Z} = \ln(\bar{R}) \quad (40)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{Z}^2} + (\gamma - \zeta) \frac{d\bar{U}}{d\bar{Z}} + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) \bar{U} = 0 \quad (41)$$

معادله دیفرانسیل (41) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت است که معادله مشخصه آن به شکل رابطه (42) است:

$$q^2 + (\gamma - \zeta)q + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) = 0 \quad (42)$$

اطمینان، از این حالت استفاده شده است. با توجه به حدود معرفی شده در مطالعات مختلف برای مدل موری-تاناکا و همچنین محدودیت داده های معتبر برای محاسبه ضرایب خزشی، بیشینه درصد حجمی مواد در این پژوهش برابر 35 درصد فرض شده است.

2-6- بررسی اعتبار روش های حل معادلات دیفرانسیل

باتوجه به اینکه وجود حل تحلیلی برای حالت کلی معادلات ترمومکانیکی غیرخطی در حالت کلی بعید به نظر می رسد، برای اعتباربخشی به روش های حل این معادلات به کمک روش شبه تحلیلی گسسته سازی، ابتدا پاسخ های حل تحلیلی برای معادلات حرارتی و مکانیکی در حالت الاستیک و با صرف نظر از خواص وابسته به دما به دست آمده است. به منظور ساده سازی معادلات، در حل تحلیلی از روش های همگن سازی صرف نظر شده و تغییرات خواص فیزیکی به صورت توانی در نظر گرفته شده اند (رابطه 31):

$$P(r) = P_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^p \quad (31)$$

در رابطه (31)، P خاصیت دلخواه مورد نظر و P_o مقدار خاصیت مورد نظر در شعاع خارجی است. توان p متناظر با هریک از خواص نیز در جدول 7 ارائه شده است. در این بخش و برای حل تحلیلی فرض شده است که تمامی خواص به غیر از ضریب پواسون به صورت توانی تغییر کنند. ضخامت دیسک دوار نیز به شکل توانی مطابق رابطه (32) تغییر می کند:

$$h(r) = h_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\zeta} \quad (32)$$

که در آن، h_o ضخامت دیسک در شعاع خارجی است. پاسخ های به دست آمده از حل تحلیلی با نتایج حاصل از حل شبه تحلیلی گسسته سازی شده مقایسه شده اند.

7- حل تحلیلی معادله توزیع دما

با جانشانی روابط موجود برای خواص و ضخامت در معادله دیفرانسیل (22) می توان رابطه (33) را نوشت:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \bar{R}^{-\zeta + \beta + 1} \frac{d\bar{T}}{d\bar{R}} \right\} = 0 \quad (33)$$

جدول 5 مقایسه نتایج تجربی با نتایج مدل موری-تاناکا

خاصیت مورد مطالعه	درصد حجمی ذرات SIC	دما (K)	مقدار موجود در منابع	مقدار محاسبه شده	منبع
k (W/m.K)	20	288	162,69	156,44	[24]
k (W/m.K)	20	397	160,2	165,32	[24]
E (MPa)	10	300	81	86,24	[25]
E (MPa)	15	300	89	92,76	[25]
α (1/K)	15	300	$22,3 \times 10^{-6}$	$19,4 \times 10^{-6}$	[26]

جدول 6 مقایسه نتایج تجربی با نتایج مدل هاشین-اشتریکمن در پیش بینی تنش تسلیم

درصد حجمی ذرات SIC	حد پایین (MPa)	نتایج مدل هاشین-اشتریکمن حد بالا (MPa)	مقدار موجود در منابع (MPa)	منبع
10	307,32	311,54	278	[25]
10	307,32	311,54	280,3	[27]
15	316,52	322,88	343	[25]
20	325,82	334,35	340,2	[27]
30	344,71	357,71	392	[27]

$$\begin{aligned}
 & -\bar{R}^x(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}^{\zeta-\beta}+a_2\right]+a_3(q_1+\nu)\bar{R}^{q_1-1}+a_4(q_2+\nu)\bar{R}^{q_2-1}\left\}\frac{\bar{R}^\gamma}{1-\nu^2}\right. \\
 \bar{\sigma}_{\theta\theta} & = \left\{\frac{-(\mu\nu-\gamma\nu+3\nu+1)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\mu-\gamma+2}\right. \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi\nu+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^\chi \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta\nu-\beta\nu+\chi\nu+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi} \\
 & \left. -\bar{R}^x(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}^{\zeta-\beta}+a_2\right]\right. \\
 & \left. +a_3(1+q_1\nu)\bar{R}^{q_1-1}+a_4(1+q_2\nu)\bar{R}^{q_2-1}\right\}\frac{\bar{R}^\gamma}{1-\nu^2} \quad (51)
 \end{aligned}$$

شرایط مرزی جابه‌جایی آزاد در جداره داخلی و خارجی در رابطه (52) آورده شده است:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{rr}(\bar{R}_i) & = 0, \\
 \bar{\sigma}_{rr}(\bar{R}_o) & = 0 \quad (52)
 \end{aligned}$$

با اعمال این رابطه شرایط مرزی تعیین می‌شوند. با توجه به وضعیت تنش صفحه‌ای، تنش مؤثر با استفاده از رابطه (28) محاسبه می‌شود (روابط (53) و (54)).

$$\begin{aligned}
 a_4 & = \frac{-1}{(q_2+\nu)\bar{R}_o^{q_2-1}} \\
 & \times \left\{ \frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}_o^{\mu-\gamma+2}\right. \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}_o^{\chi+1} \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]} \\
 & \times \bar{R}_o^{\zeta-\beta+\chi+1} \\
 & \left. + a_3(q_1+\nu)\bar{R}_o^{q_1-1}\right\} \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 & = \frac{-1}{(q_1+\nu)\left[\frac{\bar{R}_o^{q_1-1}}{\bar{R}_o^{q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{q_1-1}}{\bar{R}_i^{q_2-1}}\right]} \\
 & \times \left\{ \frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\left[\frac{\bar{R}_o^{\mu-\gamma+2}}{\bar{R}_o^{q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\mu-\gamma+2}}{\bar{R}_i^{q_2-1}}\right]\right. \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\left[\frac{\bar{R}_o^{\chi+1}}{\bar{R}_o^{q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\chi+1}}{\bar{R}_i^{q_2-1}}\right] \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]} \\
 & \times \left[\frac{\bar{R}_o^{\zeta-\beta+\chi+1}}{\bar{R}_o^{q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\zeta-\beta+\chi+1}}{\bar{R}_i^{q_2-1}}\right] \\
 & \left. -\frac{\bar{R}_o^x}{\bar{R}_o^{q_2-1}}(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}_o^{\zeta-\beta}+a_2\right]\right. \\
 & \left. +\frac{\bar{R}_i^x}{\bar{R}_i^{q_2-1}}(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}_i^{\zeta-\beta}+a_2\right]\right\} \quad (54)
 \end{aligned}$$

9- بهینه‌سازی چندهدفه

معمولاً، طراحی مهندسی شامل مجموعه‌ای از اهداف و معیارهاست. در صورت تضاد اهداف، یک جواب بهینه یکتا برای بهینه‌سازی وجود نداشته و حل مسئله بهینه‌سازی مستلزم استفاده از روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه است. شکل کلی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه به صورت رابطه (55) بیان می‌شود:

با حل این معادله جبری، ریشه‌های معادله مشخصه به صورت معادله (43) به دست می‌آیند:

$$q_{1,2} = \frac{-(\gamma-\zeta) \pm \sqrt{(\gamma-\zeta)^2 - 4(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}}{2} \quad (43)$$

برای تعیین حقیقی یا مختلط بودن ریشه‌های رابطه (42)، باید عبارت زیر رادیکال تعیین علامت شود. با توجه به بازه ضریب پواسون، عبارت زیر رادیکال در رابطه (43) همواره مثبت و ریشه‌های معادله مشخصه، اعدادی حقیقی خواهند بود. به دلیل حقیقی بودن ریشه‌های معادله مشخصه، جواب‌های قسمت همگن معادله به صورت رابطه (44) قابل بیان است:

$$\bar{U}_h = a_3\bar{U}_1 + a_4\bar{U}_2 = a_3\bar{R}^{q_1} + a_4\bar{R}^{q_2} \quad (44)$$

ضرایب a_3 و a_4 ثوابت انتگرال‌گیری هستند که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. برای تعیین جواب‌های خصوصی، روش لاگرانژ به کار گرفته شده که برای استفاده از آن، نخست باید رونسکین جواب‌های همگن به دست آید (رابطه 45):

$$W = \begin{vmatrix} \bar{U}_1 & \bar{U}_2 \\ \bar{U}'_1 & \bar{U}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{R}^{q_1} & \bar{R}^{q_2} \\ q_1\bar{R}^{q_1-1} & q_2\bar{R}^{q_2-1} \end{vmatrix} = (q_2 - q_1)\bar{R}^{q_1+q_2-1} \quad (45)$$

با استفاده از روش لاگرانژ، جواب قسمت ناهمگن به صورت رابطه (46) قابل بیان است:

$$\bar{U}_p = -\bar{U}_1 \int \frac{\bar{U}_2(-\frac{\bar{C}_4}{\bar{C}_1})}{W} d\bar{R} + \bar{U}_2 \int \frac{\bar{U}_1(-\frac{\bar{C}_4}{\bar{C}_1})}{W} d\bar{R} \quad (46)$$

با جانشانی روابط مربوط و انتگرال‌گیری می‌توان رابطه (47) را نوشت:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_p & = \frac{-(1-\nu^2)}{(\mu-q_1-\gamma+3)(\mu-q_2-\gamma+3)}\bar{R}^{\mu-\gamma+3} \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)a_2}{(\chi-q_1+1)(\chi-q_2+1)}\bar{R}^{\chi+1} \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)a_1}{(\zeta-\beta)(\zeta-\beta+\chi-q_1+1)(\zeta-\beta+\chi-q_2+1)}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi+1} \quad (47)
 \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (42) می‌توان رابطه (48) را نوشت:

$$\begin{aligned}
 q_1 + q_2 & = -(\gamma - \zeta), \\
 q_1 q_2 & = (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) \quad (48)
 \end{aligned}$$

با جانشانی روابط (48) در رابطه (47) می‌توان رابطه (49) را داشت:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_p & = \frac{-(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\mu-\gamma+3} \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\chi+1} \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi+1} \quad (49)
 \end{aligned}$$

در نهایت جواب کل معادله دیفرانسیل به صورت رابطه (50) خواهد بود:

$$\bar{U} = a_1\bar{U}_1 + a_2\bar{U}_2 + \bar{U}_p \quad (50)$$

در این مرحله ثوابت انتگرال‌گیری را می‌توان با اعمال شرایط مرزی محاسبه نمود. با جانشانی جواب‌های معادلات دیفرانسیل توزیع دما و جابه‌جایی در روابط (16)، تنش‌های شعاعی و مماسی به صورت رابطه (51) هستند:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{rr} & = \left\{ \frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\mu-\gamma+2}\right. \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^\chi \\
 & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi}
 \end{aligned}$$

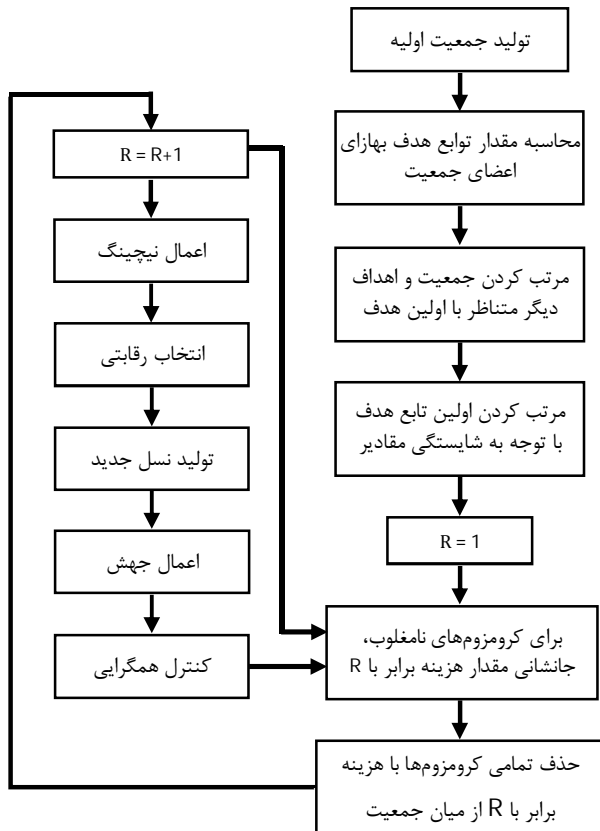
تولید داده‌های جدید، نخست باید والدین انتخاب شوند که برای این منظور از روش انتخاب رقابتی استفاده شده است. پس از انتخاب والدین با استفاده از عملگر تقاطع تک‌نقطه‌ای⁴ داده‌های جدید تولید می‌شوند. با اعمال عملگر جهش از همگرایی الگوریتم به کمینه محلی جلوگیری می‌شود. نرخ جهش در این پژوهش برابر با 0/02 در نظر گرفته شده است. پس از این مرحله، مقدار تابع هدف به‌زای هر یک از داده‌های جدید محاسبه شده و مراحل فوق تا همگرایی الگوریتم ادامه می‌یابد. شایان ذکر است تعداد اعضای جمعیت در بهینه‌سازی تک‌هدفه برابر با 600 و در بهینه‌سازی چندهدفه برابر با 1000 در نظر گرفته شده است. شکل 2 فلوجارت مراحل این الگوریتم را نشان می‌دهد که در آن R بیانگر رتبه منتسب به هر کروموزوم است.

10- فرمول بندی مسئله بهینه‌سازی

در این بررسی با استفاده از روش الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب به تعیین توزیع بهینه مواد و پروفیل ضخامت دیسک پرداخته می‌شود. توابع هدف و قید مطرح در مسئله به‌صورت رابطه (60) هستند:

$$\begin{aligned}
 J^{(1)} &= \min m_{disc} \\
 &= \min \int 2\pi r h(r) \rho(r) t(r) dr \\
 J^{(2)} &= \min (SF_{max}(t) - SF_{min}(t)) \\
 J^{(3)} &= \max (SF_{min}(t)) \\
 g_1 : \min(SF(t)) &\geq \alpha \\
 g_1 : \max(SF_{max}(t) - SF_{min}(t)) &\leq \beta
 \end{aligned} \tag{60}$$

که در آن، m جرم دیسک است. چنان‌که مشاهده می‌شود، توابع دوم و سوم و همچنین هر دو قید وابسته به زمان هستند.



شکل 2 فلوجارت الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب

$$\begin{aligned}
 J(x, p) &= [J_1, \dots, J_n] \\
 h(x, p) &= 0 \\
 g(x, p) &\leq 0 \\
 x_{i, LB} \leq x_i \leq x_{i, UB} \quad (i=1, \dots, m) \\
 x &= [x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_m] \\
 h &= [h_1(x), \dots, h_{r_1}(x)] \\
 g &= [g_1(x), \dots, g_{r_2}(x)]
 \end{aligned} \tag{55}$$

که در آن J, x, p و n به‌ترتیب بردار توابع هدف، بردار متغیرهای طراحی، بردار ثوابت و تعداد اهداف هستند که هر متغیر طراحی بین دو حد پایین ($x_{i, LB}$) و بالا ($x_{i, UB}$) محدود شده است. بهینه‌سازی ممکن است شامل دسته‌ای از قیود تساوی (h) و نامساوی (g) باشد. در این روابط r_2 و r_1 به‌ترتیب نشان‌دهنده تعداد قیود تساوی و نامساوی هستند. در این بررسی، مسئله با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب¹ حل شده است.

9-1 الگوریتم ژنتیکی چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب

الگوریتم ژنتیکی یک روش جستجو و بهینه‌سازی بر پایه انتخاب طبیعی است که جمعیت داده‌ها را تحت قانون انتخابی مشخصی بهبود می‌دهد. در این بررسی برای حالت تک‌هدفه از الگوریتم ژنتیکی پیوسته تک‌هدفه و برای مسئله چندهدفه از الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب استفاده شده است. برای بهینه‌سازی با این الگوریتم ابتدا با توجه به دامنه طراحی باید یک جمعیت اولیه از متغیرهای طراحی تولید شود، سپس، توابع هدف به‌زای جمعیت موجود محاسبه می‌شود. در مرحله بعدی مقادیر یکی از اهداف با توجه به نتیجه مورد انتظار مرتب شده، جمعیت و مقادیر هدف دیگر نیز متناظر با ترتیب مقادیر این هدف مرتب می‌شوند. سپس، داده‌های نامغلوب شناسایی، رتبه‌بندی و از میان جمعیت جدا می‌شوند و این روند برای تمام جمعیت اعمال می‌شود. برای توزیع یکنواخت‌تر داده‌ها، از اشتراک شایستگی² استفاده می‌شود. بدین منظور ابتدا با توجه به رابطه (56) فاصله اقلیدسی بین جفت جواب x و y در فضای بی‌بعد بین صفر و یک محاسبه می‌شود [28]:

$$dj(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{J_i(x) - J_i(y)}{J_i^{max} - J_i^{min}} \right)^2} \tag{56}$$

که در آن، J_i^{min} و J_i^{max} به‌ترتیب برابر بیشینه و کمینه مقادیر تابع هدف J_i و n تعداد اهداف هستند. سپس، مقدار شایستگی³ برای هر حل x در نسل t به‌صورت رابطه (57) محاسبه می‌شود [28]:

$$nc(x, t) = \sum \max \left\{ \frac{\sigma_{share} - dj(x, y)}{\sigma_{share}}, 0 \right\} \tag{57}$$

مقدار σ_{share} با رابطه (58) تعیین می‌شود [29]:

$$\sigma_{share} = \frac{r}{\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n (J_{k, max} - J_{k, min})^2}}{2\sqrt{q}} \tag{58}$$

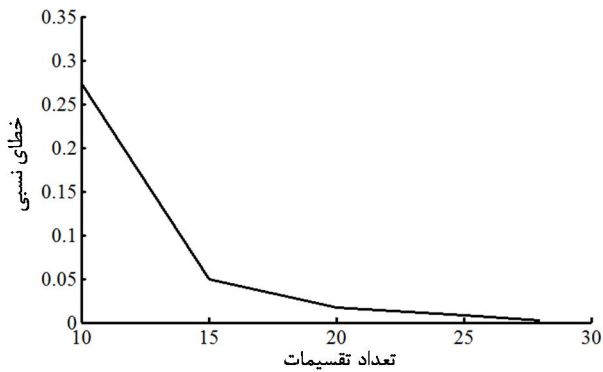
که در آن q تعداد نقاط اوج فضای حل است. پس از انجام محاسبات، تابع هدف جدید برای هر رتبه به شکل رابطه (59) تعریف می‌شود [28]:

$$f^*(x, t) = \frac{f(x, t)}{nc(x, t)} \tag{59}$$

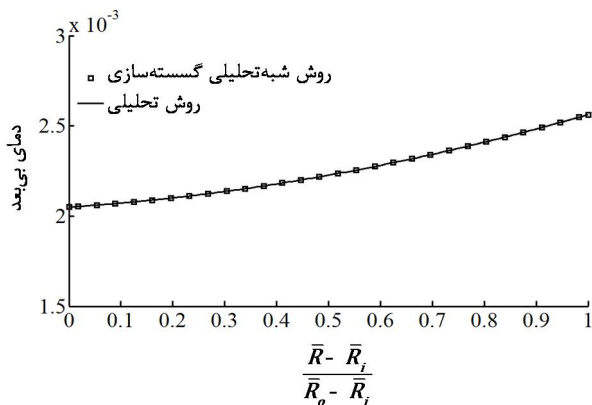
در مرحله بعد، نیمی از داده‌های با شایستگی کمتر حذف می‌شوند. برای

1- Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)
 2- Fitness sharing
 3- Niche count

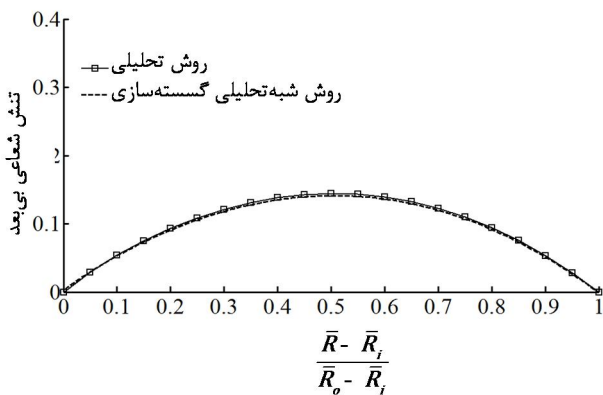
4- Single point crossover



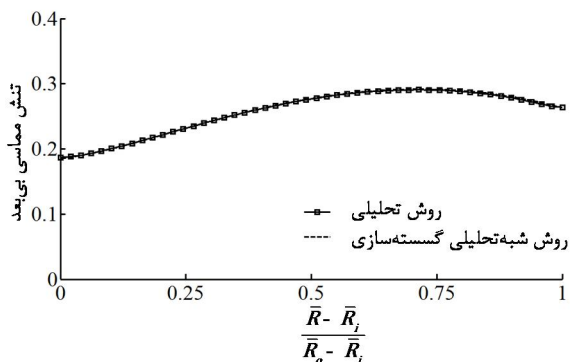
شکل 3 آزمون حساسیت به تعداد تقسیمات در جدار خارجی برای حل الاستیک.



شکل 4 مقایسه نتایج دو روش حل در تعیین توزیع دمای بی بعد شده برای حل الاستیک



شکل 5 مقایسه نتایج دو روش حل در تعیین توزیع تنش شعاعی بی بعد شده برای حل الاستیک



شکل 6 مقایسه نتایج دو روش حل در تعیین توزیع تنش مماسی بی بعد شده برای حل الاستیک

وابستگی اهداف بهینه سازی از آن جهت مطرح می شود که بازآرایی تنش ها در اثر وقوع خزش، توزیع تنش و ضریب اطمینان را دچار تغییر می کند. این طراحی شامل دو قید کمینه ضریب اطمینان و بیشینه اختلاف ضرایب اطمینان بیشینه و کمینه است. قید دوم برای دستیابی به توزیع ضریب اطمینانی یکنواخت تر مطرح می شود. مقادیر مفروض برای حدود این قیود در جدول 8 ارائه شده است. برای اعمال قیود مطرح، تابع جریمه (J) به کار گرفته شده است؛ برای قید نمونه (61) تابع جریمه به شکل رابطه (62) به کار رفته است:

$$g(x) \geq g_0 \quad (61)$$

$$J = J + \kappa \max\{0, [g_0 - g(x)]\} \quad (62)$$

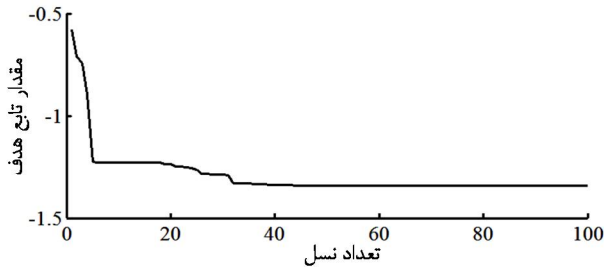
در این روابط g_0 مقدار حدی قید بوده و κ نیز نشان دهنده مقدار جریمه است که عددی نسبتاً بزرگ انتخاب می شود. متغیرهای طراحی نیز شامل درصد حجمی ذرات سیلیکون کاربید در جدار داخلی و خارجی، توان الگوی توزیع مواد و توان پروفیل ضخامت است. شایان ذکر است در تمامی مراحل پروفیل ضخامت مطابق رابطه (32) فرض شده است.

11- نتایج

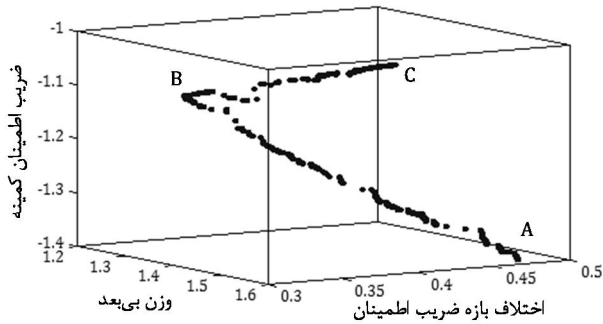
11-1- مقایسه نتایج تحلیلی و شبه تحلیلی در حالت الاستیک

مقایسه نتایج دو روش حل تحلیلی و شبه تحلیلی گسسته سازی در حالت الاستیک (زمان اولیه) انجام یافته است. برای حصول اطمینان از همگرایی پاسخ روش حل شبه تحلیلی گسسته سازی، آزمون حساسیت به تعداد تقسیم بندی ها در سه نقطه انجام گرفته است. نخست با توجه به اینکه در این روش، تمامی محاسبات برای شعاع میانی هر زیربازه انجام می گیرد، شرایط مرزی در جدار داخلی و خارجی به ترتیب در شعاع میانی زیربازه ابتدایی و انتهایی اعمال می شود. از این رو ابتدا مقدار دما در جدار داخلی و خارجی با برون یابی تعیین شده و سپس همگرایی این مقادیر بررسی شده است. پس از این مرحله، آزمون برای شعاعی برابر با مقدار میانگین شعاع جداره داخلی و خارجی نیز انجام گرفته است. نتایج آزمون نشان داده اند که با افزایش تعداد تقسیمات به بیش از 20 تقسیم، تغییر چندانی در نتایج مربوط به توزیع دما دیده نمی شود و از این رو تعیین توزیع دما با این روش با 20 قسمت انجام شده است. شکل 3 این آزمون را برای جدار خارجی نشان می دهد. برای حل مکانیکی نیز همین روند تکرار شده و تعداد تقسیمات لازم 55 قسمت پیش بینی شده است. شکل های 4، 5 و 6 به ترتیب مقایسه انجام شده میان دو روش در حل معادلات دیفرانسیل (22) و (23) را ارائه می دهند.

با توجه به استفاده از روش حل شبه تحلیلی برای بهینه سازی، در این قسمت به ارائه یک حل نمونه با استفاده از این روش پرداخته شده است. بدین منظور توزیع مواد مطابق رابطه (1) فرض شده است. دیسک از ترکیب دو جنس آلومینیوم 6061 و سیلیکون کاربید در نظر گرفته شده و خواص معادل با استفاده از مدل موری-تاناکا و هاشین-اشتریکمن تعیین شده است. همچنین، تمامی خواص فیزیکی وابسته به دما و درصد حجمی مواد فرض شده اند. مشخصات دیسک در جدول 8 مشاهده می شود. برای تعیین تعداد تقسیمات لازم برای حل با این روش، آزمون حساسیت به تعداد تقسیمات - چنان که توضیح آن پیشتر آمد- انجام گرفته است. نتایج حاکی از کافی بودن تعداد 85 قسمت برای هر دو حل تعیین توزیع دما و تحلیل ترمومکانیکی است. شکل 7 توزیع دمای به دست آمده را همراه با حدس اولیه نمایش می دهد. همچنین، توزیع تنش مماسی و شعاعی برای حالت مذکور در شکل 8 نشان داده شده است.



شکل 10 نمودار همگرایی به ازای $K_1 = K_2 = 7$



شکل 11 جبهه جواب‌های نامغلوب پارتوی سه‌بعدی

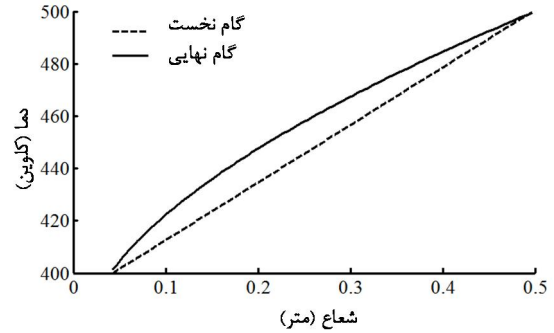
جدول 9 مقایسه همگرایی به‌ازای مقادیر مختلف ضرایب جریمه (K_1 و K_2)

η	z	V_0	V_1	مقدار تابع هدف	تعداد نسل	K_2	K_1
-1,24	2,55	29,78	7,74	-1,183	29	4	4
-1,23	2,66	31,83	10,68	-1,178	18	5	5
-0,63	0,48	39,05	2,19	-1,339	54	7	7
-1,22	2,56	32,60	11,72	-1,174	40	7	5
-1,25	2,53	28,24	5,54	-1,188	38	5	7
-1,25	2,46	28,26	5,53	-1,185	28	10	10
-1,26	2,57	27,70	4,78	-1,190	59	15	10
-1,20	2,66	35,05	15,19	-1,168	34	10	15
-1,20	2,75	38,84	14,93	-1,169	30	15	15

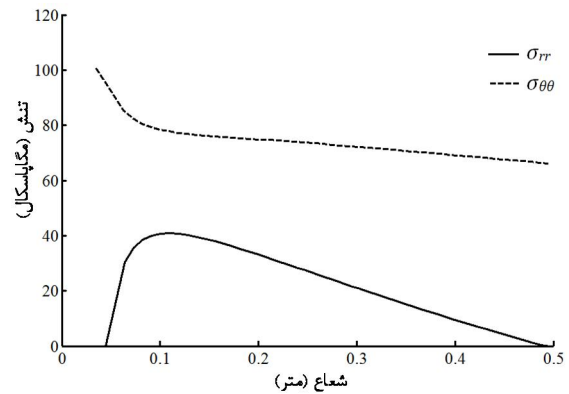
جدول 10 مقایسه همگرایی به‌ازای مقادیر مختلف ضرایب جریمه

η	z	V_0	V_1	بیشترین ضریب اطمینان (A)	کمترین اختلاف بازه ضریب اطمینان (B)	کمترین وزن (C)
-0,62	0,48	39,05	2,19			
-0,41	0,24	39,91	3,31			
-0,30	0,29	39,95	2,34			

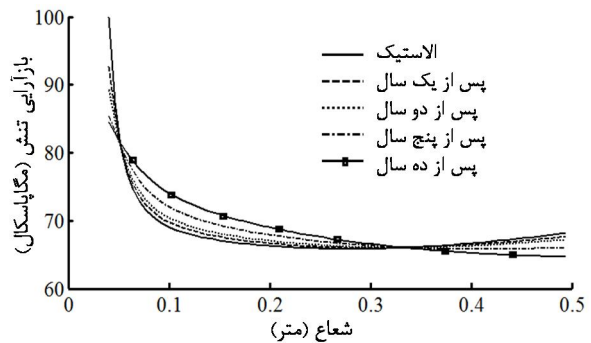
با توجه به شرایط مرزی آزاد-آزاد برای دیسک مورد نظر و اثر کرنش خزشی، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به‌علت بازآرایی تنش، مقدار تنش موثر در جدار داخلی دیسک از 100 مگاپاسکال به حدود 84 مگاپاسکال می‌رسد. علاوه بر آن، در این شکل نقاط مرجع نیز، که در آن‌ها تنش تغییر قابل ملاحظه‌ای ندارد، ملاحظه می‌شوند. محدوده انتخاب شده برای سه متغیر نخست طراحی با توجه به سه مورد انتخاب شده است. نخست محدودیت ساخت دیسک‌های دوار، چنان‌که سنودین و همکارانش [30] در سال 2012 موفق به ساخت دیسک دوار هدفمندی با توزیع مواد 10 تا 30 درصد در دو سوی دیسک شده‌اند. از سوی دیگر چنان‌که ذکر شد، تحقیقات متعدد نشان‌دهنده برتری و صحت روش موری-تاناکا برای کامپوزیت‌های با ماتریس پیوسته است. سومین محدودکننده، وجود داده‌های تجربی خزش برای بازه‌ای از درصد حجمی مواد است. با توجه به تمامی موارد فوق محدوده متغیرها مطابق رابطه (63) انتخاب شده است:



شکل 7 توزیع دمای به‌دست آمده با خواص وابسته به دما



شکل 8 توزیع تنش به‌دست آمده با خواص وابسته به دما برای حل الاستیک



شکل 9 بازآرایی تنش معادل پس از بازه‌های مختلف زمانی

جدول 8 مشخصات و شرایط کاری دیسک دوار مورد مطالعه

مقدار مفروض	مشخصه
12,5	نسبت قطر خارجی به داخلی
80	قطر داخلی، d_i (mm)
1000	سرعت دورانی (rpm)
400	دما در جداره داخلی (K)
500	دما در جداره خارجی (K)
300	دمای مرجع (K)
1,1	کمینه ضریب اطمینان مطلوب، α
0,5	بیشینه اختلاف مجاز، β

برای انجام حل خزشی، باید گام زمانی مناسبی انتخاب شود. بدین منظور ضریب اطمینان کمینه با گام‌های زمانی مختلف با در نظر گرفتن پنج سال زمان برای وقوع خزش محاسبه شد. نتایج نشان می‌دهد افزایش تعداد تکرار به بیش‌تر از 365 تکرار تفاوت قابل توجهی در نتایج ایجاد نمی‌کند. این تعداد تکرار مؤید انتگرال‌گیری در هر پنج روز است. شکل 9 بازآرایی تنش موثر را در زمان‌های مختلف نمایش می‌دهد.

13- مراجع

- [1] F. Vakili Tahami, A. H. Daei-Sorkhabi, F. R. Biglari, Creep constitutive equations for cold-drawn 304L stainless steel, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 527, No. 18, pp. 4993-4999, 2010.
- [2] S. Singh, S. Ray, Steady-state creep behavior in an isotropic functionally graded material rotating disc of Al-SiC composite, *Metallurgical and Materials Transactions A*, Vol. 32, No. 7, pp. 1679-1685, 2001.
- [3] L. You, X. You, J. Zhang, J. Li, On rotating circular disks with varying material properties, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 58, No. 6, pp. 1068-1084, 2007.
- [4] S. Kordkheili, R. Naghdabadi, Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *Composite Structures*, Vol. 79, No. 4, pp. 508-516, 2007.
- [5] H. Jahed, B. Farshi, J. Bidabadi, Minimum weight design of inhomogeneous rotating discs, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 1, pp. 35-41, 2005.
- [6] B. Farshi, J. Bidabadi, Optimum design of inhomogeneous rotating discs under secondary creep, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, No. 7, pp. 507-515, 2008.
- [7] B. Farshi, M. Faezi, Optimization of inhomogeneous rotating discs by the ingredient method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 9, No. 7, pp. 107-119, 2010. (In Persian)
- [8] A. Loghman, A. G. Arani, A. Shajari, S. Amir, Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al-SiC composite, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 12, pp. 1853-1864, 2011.
- [9] M. T. Ghorbani, A semi-analytical solution for time-variant thermoelastic creep analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness and properties, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 5, No. 2, pp. 41-50, 2012.
- [10] S. Hosseini Kordkheili, M. Livani, Thermoelastic creep analysis of a functionally graded various thickness rotating disk with temperature-dependent material properties, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111, pp. 63-74, 2013.
- [11] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, Vol. 21, No. 5, pp. 571-574, 1973.
- [12] T. Chen, G. J. Dvorak, Y. Benveniste, Mori-Tanaka estimates of the overall elastic moduli of certain composite materials, *ASME Transactions Series E Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 539-546, 1992.
- [13] J. Čadek, H. Oikawa, V. Šustek, Threshold creep behaviour of discontinuous aluminium and aluminium alloy matrix composites: An overview, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 190, No. 1, pp. 9-23, 1995.
- [14] Y. Li, F. Mohamed, An investigation of creep behavior in an SiC 2124 Al composite, *Acta materialia*, Vol. 45, No. 11, pp. 4775-4785, 1997.
- [15] S. S. Vel, Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 11, pp. 2712-2727, 2010.
- [16] J. Guedes, N. Kikuchi, Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 83, No. 2, pp. 143-198, 1990.
- [17] J. Čadek, H. Oikawa, V. Šustek, Threshold creep behaviour of discontinuous aluminium and aluminium alloy matrix composites: An overview, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 190, No. 1, pp. 9-23, 1995.
- [18] A. J. Goupee, S. S. Vel, Multi-objective optimization of functionally graded materials with temperature-dependent material properties, *Materials & design*, Vol. 28, No. 6, pp. 1861-1879, 2007.
- [19] S. C. Tjong, Z. Ma, Microstructural and mechanical characteristics of in situ metal matrix composites, *Materials Science and Engineering: R: Reports*, Vol. 29, No. 3, pp. 49-113, 2000.
- [20] Z. Ma, S. Tjong, Creep deformation characteristics of discontinuously reinforced aluminium-matrix composites, *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 5, pp. 771-786, 2001.
- [21] A. Pandey, R. Mishra, Y. Mahajan, High-temperature creep of Al TiB₂ particulate composites, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 189, No. 1, pp. 95-104, 1994.
- [22] JAHM Software, *Material Properties Database MPDB*, v7.59, 2012.
- [23] V. Gupta, S. Singh, H. Chandrawat, S. Ray, Modeling of creep behavior of a rotating disc in the presence of both composition and thermal gradients, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 127, No. 1, pp. 97-105, 2005.
- [24] A. Geiger, D. Hasselman, K. Donaldson, Effect of reinforcement particle size on the thermal conductivity of a particulate silicon carbide-reinforced aluminium-matrix composite, *Journal of Materials Science Letters*, Vol. 12, No. 6, pp. 420-423, 1993.

$$(63) \quad 0\% < V_i < 40\%, 0\% < V_o < 40\%, 0 < \zeta < 4, -2 < \eta < 2$$

انتخاب مقادیر ضرایب جریمه در سرعت همگرایی الگوریتم مؤثر خواهد بود. بدین منظور، مقدار ضرایب جریمه مختلف با هم مقایسه شده‌اند. مقادیر مختلف ضرایب جریمه ($K1$ و $K2$) مورد آزمایش قرار گرفته در بهینه‌سازی تک‌هدفه ضریب اطمینان در جدول 9 موجود است. چنان که مشهود است ضرایب جریمه 7 و 7 مناسب‌ترند. نمودار همگرایی این مورد در شکل 10 مشاهده می‌شود.

پس از بهینه‌سازی تک‌هدفه، بهینه‌سازی در حالت سه‌هدفه انجام شده است. نتایج این مرحله به شکل نمودار پارتو در شکل 11 ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، اهداف با هم در تناقض هستند و از این رو بهینه‌سازی به مجموعه جواب‌ها نامغلوب منتهی می‌شود و پاسخی یکتا به‌دست نمی‌آید. با توجه به شکل 11، مشاهده می‌شود اهداف کاهش وزن و افزایش ضریب اطمینان همواره با هم در تناقض هستند، ولی تناقض دو هدف کاهش وزن با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان و همچنین دو هدف افزایش ضریب اطمینان کمینه با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان در طول دامنه طراحی دچار تغییر می‌شوند. برای تبدیل مسئله بیشینه‌سازی ضریب اطمینان به مسئله کمینه‌سازی، قرینه آن مورد بررسی قرار گرفته است (علت وجود علامت منفی در محور ضریب اطمینان در شکل 11). نمونه‌ای از پاسخ‌های به‌دست آمده برای متغیرهای طراحی در حالت‌های حدی مربوط به بیشترین ضریب اطمینان، کمترین اختلاف بازه ضرایب اطمینان و کمترین وزن که به‌ترتیب با سه نقطه A ، B و C در شکل 11 مشخص شده‌اند، در جدول 10 آمده است. چنان که مشاهده می‌شود تغییرات توان الگوی توزیع مواد و پروفیل ضخامت اهمیت ویژه‌ای دارد.

12- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش با گسترش معادلات تحلیل ترمومکانیکی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر، به بهینه‌سازی تک‌هدفه و چندهدفه‌ای آن با در نظر گرفتن رفتار خزشی پرداخته شده است. بدین منظور تمامی خواص فیزیکی تابع دما و درصد حجمی مواد فرض شده‌اند و برای یافتن خواص معادل از دو مدل موری-تاناکا و هاشین-اشتریکمن استفاده شده است. به‌منظور اعتبارسنجی این دو مدل مواد، خواص به‌دست آمده از این دو روش با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن مقایسه شده است که نشان‌دهنده توافق نتایج است. با توجه به اینکه حل تحلیلی معادلات در تمامی حالات بعید به‌نظر می‌رسد، معادلات با استفاده از روش شبه‌تحلیلی حل شده‌اند و با تعیین پاسخ تحلیلی برای حالتی خاص، نتایج دو روش با هم مقایسه شدند که از دقت بالای روش شبه‌تحلیلی حکایت دارد. بهینه‌سازی توزیع مواد و پروفیل ضخامت در دو مرحله انجام گرفته است و با توجه به بازآرایی تنش‌ها با وقوع خزش، بهینه‌سازی در طی زمان و وابسته به زمان در نظر گرفته شده است. با توجه به بهره‌گیری از تابع جریمه برای اعمال قیود، اهمیت مقدار ضرایب جریمه مورد بحث قرار گرفته و مقدار ضریب جریمه مناسب از میان چند حالت انتخاب شده است. نتایج برای حالت مورد بررسی حاکی از نیاز به وجود درصد حجمی ذرات سیلیکون کاربید در جدار خارجی دیسک دوار و همچنین لزوم وجود پروفیل ضخامت نزولی با شعاع است. نتایج بهینه‌سازی چندهدفه حاکی از تناقض اهداف کاهش وزن و افزایش ضریب اطمینان در تمام دامنه طراحی است، ولی تناقض دو هدف کاهش وزن با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان و همچنین دو هدف افزایش ضریب اطمینان کمینه با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان در طول دامنه طراحی دچار تغییر می‌شوند.

- [28] A. Konak, D. W. Coit, A. E. Smith, Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial, *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 91, No. 9, pp. 992-1007, 2006.
- [29] K. Deb, D. E. Goldberg, An investigation of niche and species formation in genetic function optimization, in *Proceeding of Morgan Kaufmann Publishers Inc.*, pp. 42-50, 1989.
- [30] A. Sanuddin, A. Ali, M. A. Hanim, Fabrication of Al/Al₂O₃ FGM rotating disc, *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering (IJAME)*, Vol. 5, pp. 622-629, 2012.
- [25] T. Srivatsan, M. Al-Hajri, M. Petraroli, B. Hotton, P. Lam, Influence of silicon carbide particulate reinforcement on quasi static and cyclic fatigue fracture behavior of 6061 aluminum alloy composites, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 325, No. 1, pp. 202-214, 2002.
- [26] R. U. Vaidya, K. Chawla, Thermal expansion of metal-matrix composites, *Composites Science and Technology*, Vol. 50, No. 1, pp. 13-22, 1994.
- [27] H. Kim, T. Kobayashi, H. Yoon, E. Yoon, Micromechanical fracture process of SiC-particle-reinforced aluminium alloy 6061-T6 metal matrix composites, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 154, No. 1, pp. 35-41, 1992.