



## یک روش معکوس برای تعیین ثابت‌های الاستیک مواد اورتوتروپیک، مونوکلینیک و غیر همسانگرد سه بعدی

راضیه ایزدی<sup>1</sup>، محمد رحیم همتیان<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

\*shiraz@modares.ac.ir، 71936، mhemat@shirazu.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 بهمن 1393

پذیرش: 26 اسفند 1393

ارائه در سایت: 23 فروردین 1394

کلیدواژگان:

ثابت‌های الاستیک

مواد غیرهمسانگرد

روش المان محدود

روش معکوس

شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد غیرهمسانگرد سه‌بعدی خیلی پیچیده‌تر از شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد دوبعدی غیرهمسانگرد است. این پیچیدگی به دلیل بیشتر بودن تعداد ثابت‌های الاستیک در مواد سه‌بعدی است. در این مقاله یک روش معکوس برای تعیین ثابت‌های الاستیک مواد اورتوتروپیک<sup>1</sup>، مونوکلینیک<sup>2</sup> و غیرهمسانگرد<sup>3</sup> سه‌بعدی با استفاده از اندازه‌گیری‌های الاستوستاتیک ارائه می‌شود. داده‌های اندازه‌گیری کرنش در تعدادی نقطه نمونه‌برداری که از چند آزمایش الاستوستاتیک استخراج شده‌اند به عنوان پاسخ الاستیک ماده در نظر گرفته شده‌اند. تحلیل مسأله با حداقل کردن اختلاف بین کرنش‌های اندازه‌گیری و مقادیر محاسباتی متناظر آن در نقاط نمونه برداری انجام می‌شود. روش المان محدود برای تحلیل حساسیت و روش هموارسازی تیخونوف برای پایدار کردن روند حل مورد استفاده قرار می‌گیرند. طراحی یک آزمایش الاستوستاتیک منحصر به فرد که در آن کلیه ثابت‌های الاستیک نمود داشته باشند خیلی مشکل است و غیرممکن به نظر می‌رسد. با استفاده از داده‌های استخراج شده از چند آزمایش مختلف قادر خواهیم بود اطلاعات کافی برای دستیابی به یک جواب پایدار و کم‌خطا را استخراج نماییم. در تحقیق حاضر 9 ثابت مواد اورتوتروپیک، 13 ثابت مواد مونوکلینیک و 21 ثابت مواد غیرهمسانگرد به‌طور موفق شناسایی شده‌اند. با ارائه چند مثال عددی تأثیر پارامترهای مختلف بر روی دقت و عملکرد روش پیشنهادی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## An inverse method for determination of elastic constants of three-dimensional orthotropic, monoclinic and anisotropic materials

Razie Izadi, Mohammad Rahim Hematiyan\*

Department of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

\* P.O.B. 71936 Shiraz, Iran, mhemat@shirazu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 21 January 2015  
Accepted 17 March 2015  
Available Online 12 April 2015

### Keywords:

Elastic constants  
anisotropic material  
finite element method  
inverse method

### ABSTRACT

Identification of elastic constants of three-dimensional anisotropic materials is much more complicated than the corresponding one in two-dimensional materials. This is because of the increased number of elastic constants in three-dimensional materials. In this paper, an inverse method for determination of elastic constants of three-dimensional orthotropic, monoclinic and anisotropic materials using elastostatic measurements is presented. Strain measurements at some sampling points obtained from several elastostatic experiments are considered as the elastic response of the material. The solution is based on minimization of the difference between measured strains and the corresponding calculated ones at sampling points. The finite element method is used for sensitivity analysis, while the Tikhonov regularization method is used for stabilizing the solution. Designing a single elastostatic experiment in which all of the material parameters affect the response distinctively is very difficult and seems impossible. By using the data obtained from a few different experiments, it is possible to collect enough information to reach a stable and accurate solution. In the present research, 9 constants of orthotropic materials, 13 constants of monoclinic materials and 21 constants of anisotropic materials have been successfully identified. Effects of different parameters on accuracy and efficiency of the proposed method are studied by presenting several numerical examples.

- 1- Orthotropic
- 2- Monoclinic
- 3- Anisotropic

Please cite this article using:

R. Izadi, M. R. Hematiyan, An inverse method for determination of elastic constants of three-dimensional orthotropic, monoclinic and anisotropic materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 367-376, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

R. Izadi, M. R. Hematiyan, An inverse method for determination of elastic constants of three-dimensional orthotropic, monoclinic and anisotropic materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 367-376, 2015 (In Persian)

## 1- مقدمه

شناسایی پارامترهای مادی و ثابت‌های الاستیک مواد یکی از حوزه‌های مهم مورد مطالعه در مسائل مهندسی می‌باشد. شناخت دقیق خصوصیات مواد در حوزه‌های طراحی، پیش‌بینی رفتار سازه و اطمینان از کیفیت سیستم‌های سازه‌ای پیشرفته از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این در حالی است که استفاده از مواد اورتوتروپیک و غیرهمسانگرد در ساخت سازه‌های پیشرفته در حوزه‌های معماری، هوانوردی و یا فضایی بسیار متداول گردیده است [1-3]. مواد بسیاری در شمار مواد اورتوتروپیک، مونوکلینیک و غیرهمسانگرد قرار دارند. از انواع کامپوزیت‌های صنعتی گرفته تا ورق‌های فلزی حاصل از نورد در حوزه مواد اورتوتروپیک و غیر همسانگرد جای می‌گیرند. همچنین بسیاری از مواد طبیعی نیز رفتار غیرهمسانگرد از خود بروز می‌دهند چوب یکی از متداول‌ترین مواد طبیعی اورتوتروپیک می‌باشد. مواد سنگی و صخره‌ای، ساقه‌های بامبو و همچنین بافت استخوان، مانند بسیاری از مواد طبیعی دیگر رفتار غیرهمسانگرد از خود نشان می‌دهند [4-8].

شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد در حوزه مسائل معکوس قرار می‌گیرد. پاسخ مسأله معکوس به اطلاعات ورودی بسیار حساس بوده و مقدار کمی خطا، پاسخ را به صورت قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌دهد [9،10] و این خصوصیت مسائل معکوس باعث می‌شود که تحلیل این دسته از مسائل در مقایسه با مسائل مستقیم بسیار پیچیده‌تر باشد.

عموماً روش‌هایی که در شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد اورتوتروپیک استفاده می‌شود بر پایه اندازه‌گیری‌های دینامیکی و یا استاتیکی می‌باشند. از نخستین تحقیقات مربوط به شناسایی پارامترهای مادی مواد اورتوتروپیک با استفاده از پاسخ‌های استاتیکی سازه می‌توان به مقاله فوجت و همکاران [11] اشاره نمود که در آن از روش المان محدود برای محاسبه داده‌های عددی استفاده نموده‌اند و برای فراهم نمودن داده‌های تجربی، از تغییر فرم به دست آمده در چندین نقطه حاصل از اعمال یک بارگذاری ساده بر صفحات نازک استفاده شده است. در تحقیق ونگ و کم [12]، برای شناسایی ثابت‌های الاستیک کامپوزیت‌های لایه‌ای، کرنش و جابه‌جایی به عنوان پاسخ سیستم در نظر گرفته شده است و از روش المان محدود برای محاسبه داده‌های عددی استفاده نموده‌اند. میگنونا و همکاران [13] برای تشخیص ثابت‌های الاستیک دسته‌ای از کامپوزیت‌های غیرهمسانگرد از سرعت موج‌های فراصوتی به عنوان پاسخ دینامیکی سازه استفاده نموده‌اند. پدرسون و فردریکسون [14] با در نظر گرفتن فرکانس‌های ویژه برای یک صفحه آزاد و مستطیلی ثابت‌های الاستیک یک ماده اورتوتروپیک را با استفاده از روش تجربی-عددی پیش بینی نمودند. همچنین مهرداد شکریه و همکاران برای تعیین ثوابت الاستیک ورق‌های اورتوتروپیک نازک و ضخیم و با چیدمان‌های مختلف و ورق‌های همگن از فرکانس‌های ویژه حاصل از ارتعاش عرضی ورق و الگوریتم بهینه‌سازی انبوه ذرات استفاده نموده‌اند [15].

تحقیقاتی که در زمینه شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد غیر همسانگرد انجام گرفته است، بسیار محدودتر از تحقیقات انجام گرفته در زمینه مواد اورتوتروپیک می‌باشد.

مقاله ون بوسکرک و همکاران [16] از معدود مقالاتی است که در آن شناسایی ثابت‌های الاستیک یک ماده غیرهمسانگرد سه بعدی مورد توجه قرار گرفته است، اما در روش ایشان به اندازه‌گیری چگالی ماده، سرعت انتشار موج در سه وضعیت و در شش راستای متفاوت و جابه‌جایی ذرات در هر یک از این حالت‌ها احتیاج است.

همچنین همتیان و همکاران [17] با استفاده از روش المان مرزی و انجام چندین بارگذاری روشی برای یافتن ثابت‌های الاستیک مواد اورتوتروپیک و غیر همسانگرد دوبعدی ارائه نموده‌اند. آن‌ها جابه‌جایی در چندین نقطه مرزی حاصل از چندین بارگذاری را به عنوان پاسخ سازه در نظر گرفته و از روش هموارسازی تیخونوف<sup>1</sup> [18،19] استفاده کردند.

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد روش‌های ارائه شده در شناسایی مواد اورتوتروپیک و همچنین روش‌های محدودی که در راستای شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد غیرهمسانگرد وجود دارد عمدتاً مربوط به محیط‌های دو بعدی بوده است. این در حالی است که آن چه در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرد، اکثراً مواد اورتوتروپیک و یا غیرهمسانگرد سه بعدی می‌باشند که تعداد ثابت‌های الاستیک آن‌ها به مراتب بیش از مواد دوبعدی بوده است و متعاقباً تحلیل این دسته از مسائل را بسیار پیچیده‌تر و حجیم‌تر خواهد نمود. در مقاله پیش رو با طراحی مناسب مجموعه بارگذاری‌ها و نقاط نمونه‌برداری به گونه‌ای که تمامی ثابت‌های الاستیک مورد نظر نمود مناسبی در پاسخ سازه داشته باشند، امکان شناسایی 9 ثابت الاستیک مواد اورتوتروپیک، 13 ثابت در مواد مونوکلینیک و 21 ثابت الاستیک مواد غیرهمسانگرد، با وجود تعداد نسبتاً زیاد ثابت‌های مجهول و تنها با انجام تست‌های ساده استاتیکی و اندازه‌گیری کرنش در تعدادی از نقاط مرزی فراهم گردیده است.

## 2- روابط حاکم بر مواد مونوکلینیک، اورتوتروپیک و غیرهمسانگرد

پیش از بحث در مورد مراحل تحلیل معکوس مسأله، مروری کوتاه بر معادلات مشخصه و ثابت‌های الاستیک مواد غیرهمسانگرد، مونوکلینیک و اورتوتروپیک خواهیم داشت. با فرض خطی بودن رابطه میان تنش و کرنش، قانون هوک در فرم کلی به صورت رابطه (1) بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  مولفه تانسور تنش،  $\epsilon_{ij}$  مولفه تانسور کرنش و  $C_{ijkl}$  نشان دهنده‌ی تمام مدول‌های سختی الاستیک می‌باشد [20]. رابطه هوک را برای نمایش راحت‌تر به کمک ماتریس زیر که ماتریس ویت<sup>2</sup> نام دارد، بیان می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{16} & \dots & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

روابط بالا برای مواد سه بعدی غیرهمسانگرد می‌باشد اما گاهی در مواد تقارن‌هایی مشاهده می‌شود که باعث کاهش تعداد ثابت‌های مستقل الاستیکی می‌گردد.

ماده مونوکلینیک ماده‌ای است که تنها یک صفحه تقارن دارد (به عنوان مثال صفحه  $xy$ ). با لحاظ کردن این تقارن مادی 13 ثابت الاستیک مستقل در این حالت باقی می‌ماند و ماتریس ویت نظیر آن به شکل معادله (3) در خواهد آمد:

1- Tikhonov  
2- Voigt matrix

- ماده اورتوتروپیک

$$[C] = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_8 \ C_9]^T \quad (6)$$

- ماده مونوکلینیک

$$[C] = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_{12} \ C_{13}]^T \quad (7)$$

- ماده غیرهمسانگرد

$$[C] = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_{20} \ C_{21}]^T \quad (8)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{11}, \quad C_2 = C_{22}, \quad C_3 = C_{33}, \quad C_4 = C_{12} \\ C_5 &= C_{13}, \quad C_6 = C_{23}, \quad C_7 = C_{44} \\ C_8 &= C_{55}, \quad C_9 = C_{66}, \quad C_{10} = C_{16}, \quad C_{11} = C_{26} \\ C_{12} &= C_{36}, \quad C_{13} = C_{45} \\ C_{14} &= C_{14}, \quad C_{15} = C_{15}, \quad C_{16} = C_{24}, \quad C_{17} = C_{25} \\ C_{18} &= C_{34}, \quad C_{19} = C_{35}, \quad C_{20} = C_{46}, \quad C_{21} = C_{56} \end{aligned} \quad (9)$$

برای یافتن ثابت‌های الاستیک مجهول تعدادی آزمایش متفاوت الاستوستاتیکی با بارگذاری و شرایط مرزی متفاوت را انجام می‌دهیم. تعداد این آزمایش‌ها بسته به تعداد مجهولات می‌تواند یک، دو و یا بیشتر باشد. فرض کنید که مطابق شکل 1 از سه بارگذاری استفاده می‌نماییم و در هر بارگذاری کرنش‌های نرمال در چند نقطه از نقاط مرزی اندازه‌گیری می‌شود. توجه شود که شرایط مرزی جابه‌جایی و حتی نقاطی که از آن‌ها داده‌برداری انجام می‌گیرد می‌تواند در هر بارگذاری متفاوت باشد.

اکنون فرض می‌کنیم  $N_1, N_2, N_3$  تعداد داده‌های اندازه‌گیری به ترتیب در بارگذاری اول، دوم و سوم باشند و همچنین  $[Y^{(1)}]$ ،  $[Y^{(2)}]$  و  $[Y^{(3)}]$  بردارهای مربوط به داده‌های اندازه‌گیری در هر بارگذاری می‌باشد که در آن  $[Y^{(1)}]$ ، به عنوان نمونه، داده‌های به دست آمده از بارگذاری اول می‌باشد و به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود:

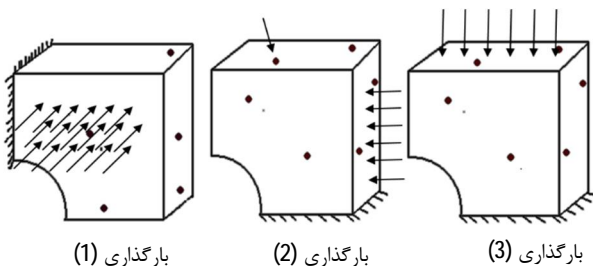
$$[Y^{(1)}] = [Y_1^{(1)} \ Y_2^{(1)} \ \dots \ Y_{N_1}^{(1)}]^T \quad (10)$$

که در آن  $Y_i^{(1)}$  کرنش اندازه‌گیری شده در بارگذاری اول مربوط به نقطه داده برداری  $i$  می‌باشد. همچنین بردار کرنش که در نقاط اندازه‌گیری در بارگذاری اول با فرض یک سری ثابت الاستیک محاسبه می‌شود با  $[E^{(1)}]$  نشان داده می‌شود و به صورت رابطه (11) تعریف می‌گردد:

$$[E^{(1)}] = [E_1^{(1)} \ E_2^{(1)} \ \dots \ E_{N_1}^{(1)}]^T \quad (11)$$

که در آن  $E_i^{(1)}$  کرنش محاسبه شده مربوط به بارگذاری اول در نقطه داده برداری  $i$  می‌باشد. بردارهای  $[E^{(2)}]$  و  $[E^{(3)}]$  به همین شیوه تعریف می‌گردند.

نقاط نمونه برداری



شکل 1 جسم سه بعدی تحت بارگذاری‌های متفاوت

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \text{Sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

اکنون ماده اورتوتروپیک را در نظر می‌گیریم که دو صفحه تقارن دارد (به عنوان مثال صفحات  $xy$  و  $yz$ ) که با اندکی دقت متوجه می‌شویم که برای این جسم صفحه  $xz$  نیز صفحه تقارن می‌باشد. مجدداً با در نظر گرفتن این تقارن، ماتریس ویت به شکل معادله (4) ساده می‌شود که دارای 9 ثابت الاستیک مستقل می‌باشد:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

علاوه بر روابط ذکر شده قبود دیگری نیز بر روی ترکیب‌های خاصی از ثابت‌های الاستیک وجود دارد که از ناوردایی چرخشی<sup>1</sup> و همچنین مثبت معین بودن<sup>2</sup> تابع انرژی کرنشی حاصل می‌گردد. به عنوان مثال برای یک ماده اورتوتروپیک رابطه (5) را داریم:

$$\begin{aligned} C_{11}C_{22} &> C_{12}^2, \quad C_{22}C_{33} > C_{23}^2, \quad C_{33}C_{11} > C_{13}^2 \\ C_{11}C_{22}C_{33} &+ 2C_{12}C_{23}C_{31} > C_{11}C_{23}^2 + C_{22}C_{13}^2 + C_{33}C_{12}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

که از این قیود برای اصلاح جواب‌ها در هر مرحله سعی و خطا می‌توان استفاده نمود.

### 3- تحلیل معکوس

شناسایی ثابت‌های الاستیک مواد در حوزه مسائل معکوس قرار می‌گیرد؛ مسائلی که در آن‌ها متغیرهای میدانی مسأله مانند جابه‌جایی، کرنش، شتاب و یا فرکانس طبیعی معلوم بوده و در پی یافتن پارامترهای ورودی مسأله مانند خصوصیات مادی، هندسه، شرایط مرزی و یا ترکیبی از آن‌ها می‌باشیم. از آنجایی که پاسخ مسأله معکوس به اطلاعات ورودی بسیار حساس بوده و مقدار کمی خطا، پاسخ را به صورت قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌دهد [9,10]، باید راه حل مناسبی برای مهار کردن خطاهای ورودی در نظر گرفته شود. برای حل این مشکل معمولاً از یک روش هموارسازی در تحلیل مسائل معکوس استفاده می‌شود و پارامتر هموارسازی مورد استفاده در این روش‌ها باید به دقت انتخاب گردد [21-24]. در این مقاله سعی شده با استفاده از انجام چند بارگذاری متفاوت برای یک نمونه و فراهم آوردن داده‌های متعدد و متفاوتی که خصوصیات مادی جسم را به خوبی بیان کنند تا حد امکان از استفاده از روش‌های هموارسازی بی‌نیاز گردیم.

### 4- تعریف مسأله و فرمول بندی

یک ماده اورتوتروپیک یا یک ماده مونوکلینیک و یا یک ماده غیرهمسانگرد سه بعدی که ثابت‌های الاستیک نظیر آن‌ها مجهول می‌باشد را در نظر می‌گیریم. بردار  $[C]$  که شامل ثابت‌های مجهول الاستیک است را به صورت روابط (6) تا (9) تعریف می‌کنیم:

1- Rotational invariance  
2- Positive definite

$$[E] = [\tilde{E}] + [S]([C] - [\tilde{C}]) \quad (20)$$

که رابطه (20) جمله اول از بسط تیلور  $[E]$  حول بردار  $[\tilde{C}]$  می باشد و

$$[\tilde{E}] = \begin{bmatrix} [\tilde{E}^{(1)}] \\ [\tilde{E}^{(2)}] \\ [\tilde{E}^{(3)}] \end{bmatrix} \quad (21)$$

با جای گذاری رابطه (20) در رابطه (14) و انجام کمی محاسبات ریاضی به رابطه (22) می‌رسیم:

$$[C] = \{[S]^T [S] + \mu [I]\}^{-1} \{[S]^T ([Y] - [\tilde{E}]) + [S]^T [S][\tilde{C}]\} \quad (22)$$

که این رابطه را به صورت رابطه (23) می‌توان در روش سعی و خطا مورد استفاده قرار داد:

$$[C^{k+1}] = \{[S^k]^T [S^k] + \mu^k [I]\}^{-1} \{[S^k]^T ([Y] - [E^k]) + [S^k]^T [S^k][C^k]\} \quad (23)$$

که در آن  $k$  و  $k+1$  شماره مرحله سعی و خطا می‌باشد.

معیار توقف مسأله معکوس را به صورت رابطه (24) در نظر می‌گیریم:

$$\| [C^{k+1}] - [C^k] \| \leq \delta \quad (24)$$

که در آن  $\delta$  تلورانس مورد نظر می‌باشد.

### 5- انتخاب پارامتر هموارسازی

پارامتر هموارسازی در هر مرحله باید به دقت انتخاب گردد. فرض کنید که داده‌های اندازه‌گیری دارای خطایی با توزیع نرمال باشند. اگر بردار  $[Er]$  نشان‌دهنده خطای مقادیر محاسبه شده کرنش نسبت به داده‌های اندازه‌گیری باشد با توجه به معادله (25) می‌توان نوشت:

$$[Er] = [E][C^{k+1}] - [Y] = [E^k] + [S^k]([C^{k+1}] - [C^k]) - [Y] \quad (25)$$

زمانی که تعداد داده‌های اندازه‌گیری کم باشد، مثلاً برابر با تعداد مجهولات مسأله، با در نظر گرفتن  $\mu_k = 0$  مقدار نرم  $[Er]$  بسیار کم خواهد بود و انحراف معیار موجود در  $[Er]$  کمتر از انحراف معیار مربوط به داده‌های اندازه‌گیری می‌باشد اما پاسخ مسأله دستخوش اغتشاش خواهد بود. افزایش مقدار پارامتر هموارسازی باعث بهتر شدن پاسخ خواهد شد در حالی که نرم  $[Er]$  را افزایش خواهد داد. زمانی که تعداد داده‌های اندازه‌گیری به اندازه کافی زیاد باشد به این معنا که به اندازه قابل توجهی از پارامترهای مجهول بیشتر باشد، انحراف معیار بردار خطا حتی در حالت  $\mu_k = 0$  بیشتر از انحراف معیار داده‌های اندازه‌گیری می‌باشد. در این حالت پاسخ‌های مناسبی با در نظر گرفتن  $\mu_k = 0$  به دست خواهد آمد. در مقاله حاضر با انجام چند بارگذاری، داده‌های مناسب و کافی برای حل مسأله فراهم آمده است و بدین وسیله نیاز به استفاده از پارامتر هموارسازی مرتفع گردیده است.

### 6- حدس اولیه برای ثابت‌های الاستیک

استفاده از یک حدس اولیه مناسب برای ثابت‌های الاستیک می‌تواند به مراتب تعداد مراحل سعی و خطا را کاهش دهد. معمولاً اطلاعاتی در مورد ثابت‌های ماده وجود دارد که امکان ارائه حدس‌های اولیه مناسبی را برای ثابت‌های مجهول فراهم می‌نماید. اما در صورتی که اطلاعاتی در رابطه با مقادیر ثابت‌های اولیه نداشته باشیم باید پیشنهاد مناسبی برای حدس اولیه داشته باشیم.

برای این منظور با استفاده از روش پیشنهادی همتیان و همکاران [17] از ثابت‌های الاستیک ماده همسانگرد جایگزین به عنوان حدس اولیه استفاده

برای یافتن ثابت‌های الاستیک از روش هموارسازی تیخونوف [25] استفاده می‌شود و تابع هدف  $\Pi$  به صورت رابطه (12) تشکیل می‌گردد:

$$\Pi = \{[Y] - [E]\}^T \{[Y] - [E]\} + \mu [C]^T [C] \quad (12)$$

در عبارت (12) بردارهای  $[Y]$  و  $[E]$  به صورت رابطه (13) تعریف می‌شوند:

$$[E] = \begin{bmatrix} [E^{(1)}] \\ [E^{(2)}] \\ [E^{(3)}] \end{bmatrix}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} [Y^{(1)}] \\ [Y^{(2)}] \\ [Y^{(3)}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

بردار مجهول  $[C]$  با کمینه کردن عبارت  $\Pi$  محاسبه می‌شود. در این عبارت  $\mu$  پارامتر هموارسازی می‌باشد. عبارت اول برای کم کردن اختلاف  $[Y]$  و  $[E]$  در نظر گرفته شده است و عبارت دوم جهت جلوگیری از بزرگ شدن نرم (اندازه) بردار  $[C]$  در نظر گرفته شده است.

مقادیر کوچک  $\mu$  باعث می‌شود پاسخ‌ها حالت نوسانی داشته باشند. این در حالی است که با بزرگ شدن مقادیر  $\mu$  این نوسانات کاهش می‌یابد اما از طرفی اختلاف بردارهای  $[Y]$  و  $[E]$  افزایش می‌یابد.

کمینه کردن  $\Pi$  نسبت به بردار  $[C]$  رابطه (14) را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial [C]} = 2[S]^T \{[Y] - [E]\} + 2\mu [C] = [0] \quad (14)$$

ماتریس  $[S]$  در معادله بالا، ماتریس حساسیت در تمامی بارگذاری‌ها می‌باشد که به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$[S] = \frac{\partial [E]}{\partial [C]} \quad (15)$$

که در آن:

$$[S] = \begin{bmatrix} [S^{(1)}] \\ [S^{(2)}] \\ [S^{(3)}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

$[S^{(L)}]$  ماتریس حساسیت برای بارگذاری  $L$  است که به صورت رابطه (17) تعریف می‌شود:

$$[S^{(L)}] = \begin{bmatrix} S_{11}^{(L)} & S_{12}^{(L)} & \dots & S_{1K}^{(L)} \\ S_{21}^{(L)} & S_{22}^{(L)} & \dots & S_{2K}^{(L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N_L 1}^{(L)} & S_{N_L 2}^{(L)} & \dots & S_{N_L K}^{(L)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

که  $N_L$  تعداد نقاط داده‌برداری در هر بارگذاری و  $K$  تعداد پارامترهای مجهول در بردار  $[C]$  می‌باشد. هر مؤلفه از ماتریس  $[S^{(L)}]$  به صورت رابطه (18) تعریف می‌شود:

$$S_{ij}^{(L)} = \frac{\partial E_i}{\partial C_j} \quad (18)$$

برای محاسبه مؤلفه‌های ماتریس حساسیت به مشتق کرنش‌های مرزی نسبت به هر یک از ثابت‌های الاستیک احتیاج است. مؤلفه‌های ماتریس حساسیت را از رابطه (19) محاسبه می‌نماییم:

$$S_{ij}^{(L)} = \frac{\partial E_i}{\partial C_j} = \frac{E_i^{(L)}|_{C_j + \delta C_j} - E_i^{(L)}|_{C_j}}{\delta C_j} \quad (19)$$

جهت یافتن بردار  $[C]$  در معادله (14) از روش سعی و خطا استفاده می‌نماییم. فرض کنید بردار  $[\tilde{C}]$  تخمینی برای بردار ثابت‌های الاستیک باشد و  $[\tilde{E}^{(1)}]$ ،  $[\tilde{E}^{(2)}]$  و  $[\tilde{E}^{(3)}]$  بردارهای کرنش نظیر آن برای بارگذاری‌های 1، 2 و 3 باشند. بردار کرنش را می‌توان توسط رابطه (20) تقریب زد:

ثابت‌های الاستیک محاسبه می‌گردد. در هر مرحله بایستی ماتریس حساسیت با توجه به رابطه (15) و (19) برای هر ثابت الاستیک محاسبه گردد برای محاسبه هر یک از مؤلفه‌های این ماتریس همان‌طور که از رابطه (19) برمی‌آید بایستی هر یک از این ثابت‌ها به مقدار جزئی تغییر کرده و سپس پاسخ سازه مورد نظر با تغییر این ثابت برای تمام بارگذاری‌ها استخراج گردد. در نتیجه به عنوان مثال برای حصول کرنش‌های موردنیاز در محاسبه ماتریس حساسیت تنها در یک مرحله از مراحل سعی و خطا برای ماده غیرهمسانگرد، سازه بایستی بیش از صد بار مورد تحلیل قرار بگیرد که این امر به کمک برنامه‌نویسی به زبان ماکرو در نرم‌افزار انسیس انجام گردیده است. برنامه مورد نظر داده‌های حاصل از تحلیل سازه را در یک فایل متنی ذخیره می‌کند، این داده‌ها توسط برنامه‌ای که در نرم‌افزار متلب نوشته شده است خوانده می‌شود. در نرم‌افزار متلب ماتریس حساسیت محاسبه گردیده، مراحل تحلیل معکوس انجام گرفته و با استفاده از رابطه بازگشتی (23) ثابت‌های الاستیک برای مرحله بعد محاسبه می‌شود. سپس نتایج را در یک فایل متنی ذخیره می‌نماید. مجدداً برنامه نوشته شده در نرم‌افزار انسیس فایل متنی حاوی ثابت‌های الاستیک را خوانده و سازه را مورد تحلیل قرار می‌دهد. این رابطه دوری میان دو نرم افزار تا برقرار شدن شرط همگرایی که طبق رابطه (24) تعریف شده است ادامه می‌یابد.

#### 8-مثال‌ها

اکنون کارایی روش ارائه شده در قسمت‌های قبل در قالب چند مثال بررسی می‌گردد. همچنین در این مثال‌ها تأثیر طراحی مناسب بارگذاری‌ها و نقاط نمونه برداری و افزایش و کاهش تعداد هر یک از آن‌ها در رسیدن به پاسخی پایدارتر و صحیح‌تر بررسی خواهد گردید. در تمامی مثال‌ها با فرض کردن مقادیر مشخصی برای ثابت‌های الاستیک (که همان مقادیر دقیق ارائه شده در جداول هستند)، یک تحلیل مستقیم بر روی مسأله مورد نظر انجام گرفته و کرنش‌های حاصل در چند نقطه بر روی سطح نمونه را به جای داده‌های آزمایشگاهی مورد استفاده قرار می‌دهیم و برای شبیه سازی خطاهای احتمالی یک بردار خطا را با داده‌های تحلیل مستقیم جمع می‌نماییم.

#### 8-1- یافتن پارامترهای مادی ماده اورتوتروپیک سه بعدی

در این قسمت قصد داریم ثابت‌های الاستیک یک ماده اورتوتروپیک سه بعدی را با استفاده از روش ارائه شده در قسمت‌های قبل بیابیم. در این مثال فرض می‌کنیم که هیچ اطلاعی در مورد ثابت‌های الاستیک مذکور در دست نداریم، لذا مقادیری را به عنوان حدس اولیه پیشنهاد می‌نماییم. هندسه و هیأت نمونه مورد بررسی در شکل 2 نشان داده شده است. همچنین نقاطی که کرنش‌های نرمال در آن‌ها اندازه‌گیری شده‌اند و راستای مربوط به آن‌ها در این شکل مشخص گردیده است. منظور از کرنش‌های نرمال، کرنش‌های  $\epsilon_{xx}$ ،  $\epsilon_{yy}$  و  $\epsilon_{zz}$  می‌باشند. (نه کرنش‌های عمود بر سطح) و در هر سطح، کرنش‌های نرمال در راستای مماس به همان سطح اندازه گرفته می‌شود. به عنوان مثال در شکل 2 کرنش‌های اندازه‌گیری شده مربوط به صفحه بالایی، کرنش‌های  $\epsilon_{xx}$  و  $\epsilon_{zz}$  می‌باشند. در عمل این کرنش‌ها را به کمک نصب کرنش‌سنج در نقاط مختلف می‌توان اندازه گرفت.

نمونه را تحت چهار بارگذاری نشان داده شده در شکل 3 قرار می‌دهیم. در هر بارگذاری بر هر سطح فشاری معادل با 5 MPa وارد شده است. باید توجه داشت که بهترین مجموعه بارگذاری، مجموعه‌ای است که ثابت‌های الاستیک مورد نظر بهترین نمود را در آن داشته باشند. در واقع سعی شده است که

می‌کنیم. بدین معنی که اگر قرار باشد یک ماده همسانگرد داده‌هایی تا حد امکان نزدیک به داده‌های خروجی اندازه‌گیری شده را تولید کند، چه مدول الاستیکی باید داشته باشد. سپس ضرایب الاستیک مربوط به این ماده را به عنوان حدس اولیه در نظر خواهیم گرفت. شایان ذکر است که این حدس اولیه تأثیر کاملاً مشهودی بر روی سرعت همگرایی پاسخ خواهد داشت. ثابت‌های الاستیک ماده همسانگرد به صورت رابطه (26) می‌باشند:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & C_2 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & C_3 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ C_4 &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & C_5 &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & C_6 &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ C_7 &= C_8 = C_9 = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ C_{10} &= C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} \\ C_{16} &= C_{17} = C_{19} = C_{20} = C_{21} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

اکنون سعی می‌کنیم مدول یانگ ( $E$ ) را برای یک ماده همسانگرد با  $\nu = 0.3$  به گونه‌ای پیدا کنیم که بردار کرنش در نقاط نمونه برداری در بارگذاری اول نزدیک به مقادیر اندازه‌گیری شده حقیقی باشد. فرض کنید که بردار کرنش در نقاط نمونه برداری در بارگذاری اول با در نظر گرفتن  $E = 1$  و  $\nu = 0.3$  برابر با  $[\bar{E}_1]$ ، رابطه (27) باشد:

$$[\bar{E}_1] = [E_1]_{E=1, \nu=0.3} \quad (27)$$

همچنین  $[\bar{E}_E]$  را به صورت رابطه (28) تعریف می‌کنیم:

$$[\bar{E}_E] = [E_1]_{E=E, \nu=0.3} \quad (28)$$

با توجه به خطی بودن مسأله می‌توان طبق رابطه (29) نوشت:

$$[\bar{E}_E] = a[\bar{E}_1] \quad (29)$$

که در آن طبق رابطه (30):

$$a = 1/E \quad (30)$$

برای یافتن مقدار مناسبی برای  $a$  سعی می‌کنیم عبارت رابطه (31) را کمینه کنیم:

$$F = \{[Y^{(1)}] - a[\bar{E}_1]\}^T \{[Y^{(1)}] - a[\bar{E}_1]\} \quad (31)$$

که رابطه (32) را نتیجه می‌دهد:

$$E = \frac{1}{a} = \frac{[\bar{E}_1]^T [\bar{E}_1]}{[\bar{E}_1]^T [Y^{(1)}]} \quad (32)$$

در رابطه (32)،  $E$  بدون هیچ‌گونه هموارسازی و یا سعی و خطا محاسبه گردیده است و بدین ترتیب حدس اولیه با جایگذاری مدول یانگ محاسبه شده و  $\nu = 0.3$  محاسبه می‌گردد.

اکنون ثابت‌های الاستیک برای ماده همسانگرد به دست آمده است. برای ماده اورتوتروپیک از همین ثابت‌ها به عنوان حدس اولیه استفاده می‌نماییم. در ماده مونوکلینیک و ماده غیرهمسانگرد برای مقادیر  $C_1$  تا  $C_9$  از ثابت‌های الاستیک ماده همسانگرد و برای 4 ثابت دیگر در ماده مونوکلینیک و 12 ثابت دیگر در ماده غیرهمسانگرد مقدار غیر صفر  $\pm 0.1a$  را در نظر می‌گیریم.

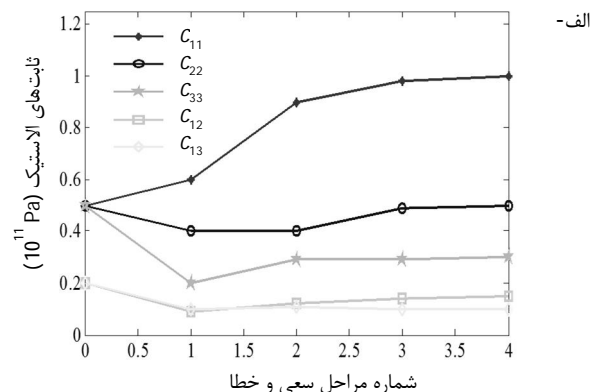
#### 7- کدهای تدوین شده و ایجاد حلقه تکرار بین دو نرم‌افزار انسیس

##### و متلب

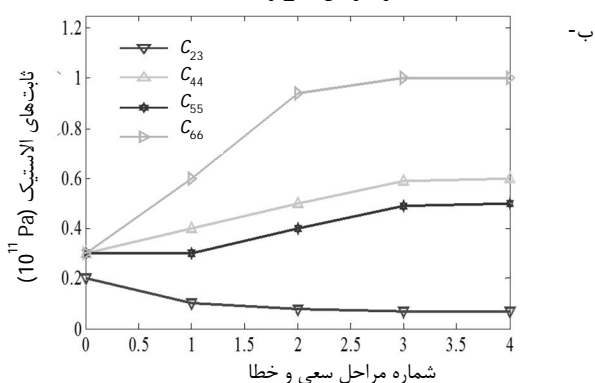
در این پژوهش داده‌های عددی مورد نیاز در هر مرحله از مراحل سعی و خطا و در محاسبه ماتریس حساسیت به کمک برنامه نویسی در نرم افزار انسیس و با استفاده از زبان ماکرو فراهم آمده است.

در ابتدا با استفاده از روش ذکر شده در قسمت 6 حدس اولیه برای

قسمت در جدول 1 و 2 نشان داده شده است. همچنین شکل 4 مقادیر ثابت‌های الاستیک را برحسب شماره مراحل سعی و خطا نشان می‌دهد. با توجه به نمودارها دیده می‌شود که تمام ثابت‌های الاستیک در مراحل آخر به مقدار نهایی خود همگرا شده‌اند و شرط همگرایی رابطه (24) را ارضا نموده‌اند.



الف-



ب-

شکل 4 همگرایی مسئله به ثابت‌های الاستیک ماده اورتوتروپیک سه بعدی مفروض: الف- پنج ثابت الاستیک، ب- چهار ثابت الاستیک دیگر

جدول 1 مقادیر عددی پنج ثابت الاستیک به دست آمده برای ماده اورتوتروپیک سه بعدی (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبی می‌باشند).

$C_{13}$	$C_{12}$	$C_{33}$	$C_{22}$	$C_{11}$	
0/1	0/15	0/3	0/5	1	مقدار دقیق ( $10^{11}$ Pa)
0/11	0/15	0/30	0/49	1/05	مقدار محاسبه شده با خطای اندازه‌گیری 3%
(10)	(5/6)	(0/02)	(0/5)	(4/9)	
0/11	0/15	0/29	0/48	1/04	مقدار محاسبه شده با خطای اندازه‌گیری 5%
(14)	(0/6)	(0/6)	(2/1)	(4/1)	

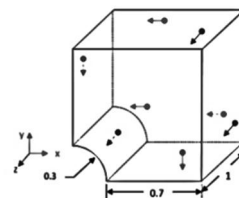
جدول 2 مقادیر عددی چهار ثابت الاستیک دیگر به دست آمده برای ماده اورتوتروپیک سه بعدی (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبی می‌باشند).

$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$	
0/07	0/6	0/5	1	مقدار دقیق ( $10^{11}$ Pa)
0/07	0/61	0/42	0/99	مقادیر محاسبه شده با خطای اندازه‌گیری 3%
(19)	(3)	(14)	(0/74)	
0/07	0/66	0/38	1/16	مقادیر محاسبه شده با خطای اندازه‌گیری 5%
(4/6)	(10)	(22)	(16/32)	

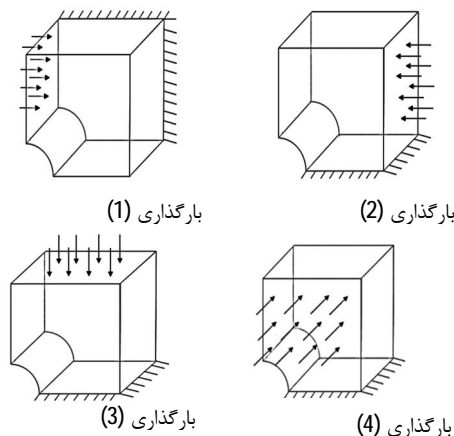
مجموعه بارگذاری‌ها به گونه‌ای انتخاب گردد که در هر یک از آن‌ها دسته‌ای از ثابت‌های الاستیک بر روی پاسخ‌های حاصل تأثیر بیشتری داشته باشند. به عنوان مثال بارگذاری سوم از شکل 3 را در نظر بگیرید. در این بارگذاری پاسخ نسبت به تغییر ثابت  $C_{22}$  که متأثر از مدول الاستیک  $E_y$  می‌باشد، حساس‌تر خواهد بود. بدین معنا که به کمک داده‌های حاصل از این بارگذاری این ثابت با سرعت بیشتری نسبت به سایر ثابت‌ها به مقدار حقیقی خود همگرا می‌شود و یا در بارگذاری اول پاسخ نسبت به تغییر ثابت‌های  $C_{66}$  و  $C_{11}$  که به ترتیب با مدول الاستیک  $E_x$  و  $G_{xz}$  مرتبط می‌باشند، حساس‌تر می‌باشد. همچنین ثابت  $C_{44}$  در بارگذاری دوم و یا ثابت‌های  $C_{33}$  و  $C_{55}$  در بارگذاری چهارم نمود بیشتری خواهند داشت. در واقع متناسب با هر ثابت الاستیک راستای بارگذاری و شرایط مرزی مربوطه طراحی می‌گردد که البته می‌توان با بررسی پاسخ‌های حاصل میزان کارایی هر بارگذاری و تأثیر آن بر روند همگرایی مسئله را بررسی نمود.

همچنین نقاط نمونه برداری در هر بارگذاری متناسب با همان بارگذاری و به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که حساسیت بیشتری نسبت به تغییر ثابت‌های الاستیک در آن بارگذاری داشته باشند، به عبارتی مؤلفه‌های ماتریس حساسیت برای آن‌ها نسبت به سایر نقاط بزرگتر باشند. به عنوان مثال در بارگذاری اول از شکل 3 کرنش‌های  $\epsilon_{zz}$  و  $\epsilon_{xx}$  برای نقاط روی صفحه بالایی داده‌های مناسبی را برای محاسبه ثابت  $C_{66}$  که با مدول الاستیک  $G_{xz}$  مرتبط است، فراهم خواهند آورد.

در این مرحله در هر بارگذاری کرنش‌های نرمال ایجاد شده در 8 نقطه را در نظر می‌گیریم و با کمک 32 داده حاصل از 4 بارگذاری در پی یافتن 9 ثابت الاستیک مربوط به ماده اورتوتروپیک سه بعدی مذکور می‌باشیم. همچنین برای بردار خطا در این مرحله به صورت یک در میان  $+1\%$  و  $-1\%$  مقدار هر داده را با آن جمع نموده‌ایم. سپس این عمل را با در نظر گرفتن خطا به مقدار 3% و 5% مقدار داده‌ها تکرار نموده‌ایم. نتایج حاصل از این



شکل 2 هندسه نمونه مورد بررسی و نقاط داده برداری



شکل 3 چهار بارگذاری اعمال شده به جسم برای تعیین ثابت‌های الاستیک آن

خود این ثابت‌ها در مراحل قبل، آسیب‌پذیرتر بوده و درصد خطای بیشتری را متحمل می‌شوند و این خود شاهدهی بر این مدعاست که اعمال بارگذاری‌های مناسب و متفاوت در افزایش سرعت همگرایی و رسیدن به پاسخی دقیق‌تر ما را یاری خواهد نمود. با توجه به همگرا شدن پاسخ به مقادیر مفروض این تعداد از بارگذاری‌ها برای رسیدن به نتایج کفایت می‌کند. هر چند در صورت اضافه نمودن یک بارگذاری مناسب ثابت‌های متناظر با آن با سرعت بیشتری به مقدار نهایی خود همگرا می‌شوند.

#### 8-4- یافتن پارامترهای مادی ماده مونوکلینیک

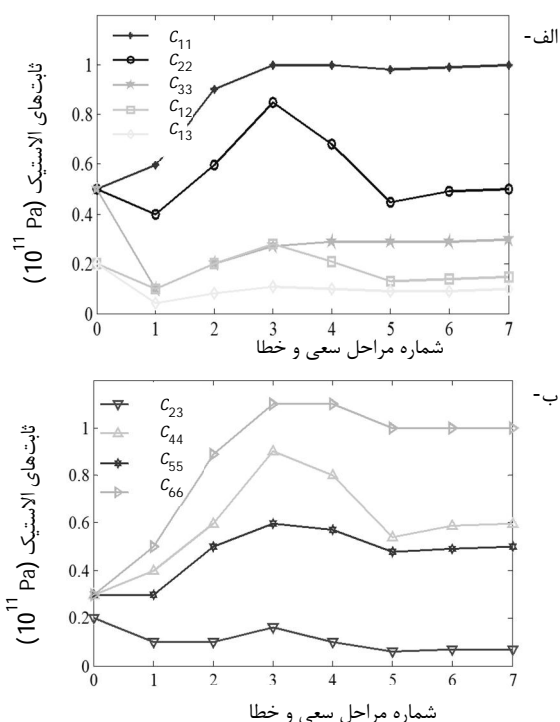
در این قسمت در پی یافتن ثابت‌های یک ماده مونو کلینیک سه بعدی

**جدول 5** مقادیر عددی پنج ثابت الاستیک حاصل برای ماده اورتوتروپیک سه بعدی پس از حذف بارگذاری سوم با در نظر گرفتن خطای 5% در اندازه‌گیری

$C_{66}$	$C_{55}$	$C_{44}$	$C_{23}$	$C_{13}$	
1	0/5	0/6	0/07	0/1	مقدار دقیق ( $10^{11}$ Pa)
1/23	0/41	1/36	0/12	0/14	مقدار محاسبه شده
(23)	(16)	(127)	(74)	(40)	(درصد خطای نسبی)

**جدول 6** مقادیر عددی چهار ثابت الاستیک دیگر حاصل برای ماده اورتوتروپیک سه بعدی پس از حذف بارگذاری سوم با در نظر گرفتن خطای 5% در اندازه‌گیری

$C_{12}$	$C_{33}$	$C_{22}$	$C_{11}$	
0/15	0/3	0/5	1	مقدار دقیق ( $10^{11}$ Pa)
0/26	0/39	0/74	1/18	مقدار محاسبه شده
(75)	(3)	(49)	(18)	(درصد خطای نسبی)



**شکل 5** همگرایی مسأله به ثابت‌های الاستیک ماده اورتوتروپیک سه بعدی مفروض پس از حذف بارگذاری سوم: الف- پنج ثابت الاستیک ب- چهار ثابت الاستیک دیگر

#### 8-2- بررسی اثر کاهش تعداد داده‌های اندازه‌گیری بر نتایج حاصل

اکنون می‌خواهیم تأثیر کاهش تعداد داده‌های اندازه‌گیری را بر روی نتایج حاصل بررسی کنیم. ابتدا با توجه به ماتریس حساسیت محاسبه شده، داده‌هایی را که مؤلفه‌های ماتریس حساسیت مربوط به آن‌ها بزرگتر و در مجموع چهار بارگذاری مؤثرتر محسوب می‌شوند، شناسایی و به کمک آن تعداد نقاط اندازه‌گیری را از 8 نقطه (32 داده حاصل از 4 بارگذاری)، ابتدا به 4 نقطه (16 داده) و سپس به 3 نقطه (12 داده) تقلیل می‌دهیم که نتایج مربوط به سه نقطه داده برداری در جداول 3 و 4 آورده شده است. در هر دو مورد مذکور پس از چندین مرحله سعی و خطا ثابت‌ها نهایتاً به مقادیر حقیقی خود همگرا می‌شوند. در نهایت با رساندن تعداد نقاط به دو عدد (8 داده) ملاحظه می‌شود که مسأله به هیچ جوابی همگرا نمی‌شود.

بنابراین همان‌طور که ملاحظه شد برای همگرایی مسأله مذکور به داده‌هایی بیشتر از تعداد ثابت‌های الاستیک مورد نظر احتیاج داریم و افزایش تعداد داده‌ها بیش از حد مورد نیاز برای همگرایی مسأله تأثیری در سرعت همگرایی و یا دقت نهایی نخواهد داشت.

#### 8-3- بررسی اثر کاهش تعداد بارگذاری‌های اعمالی بر نتایج حاصل

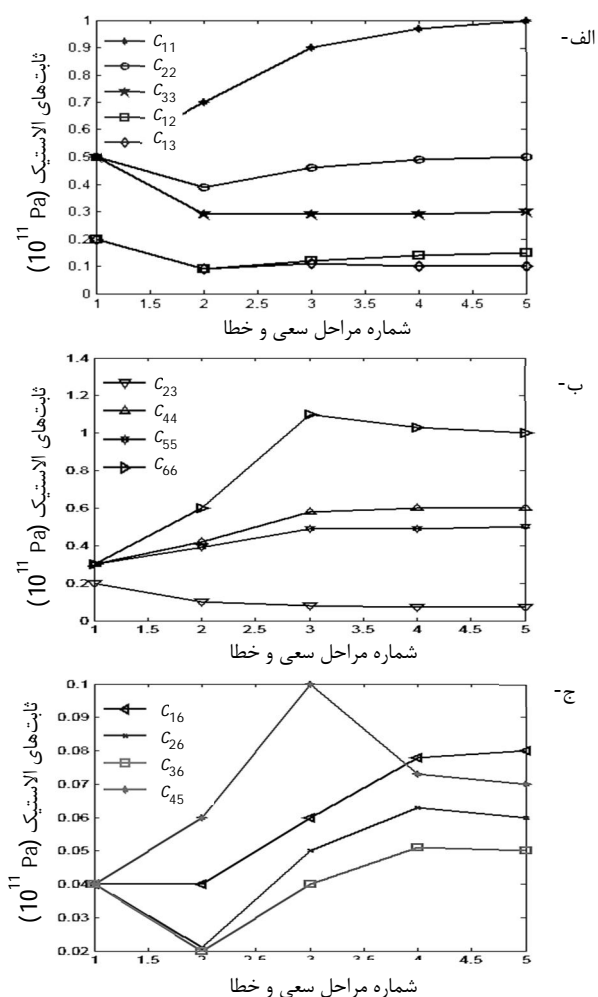
اکنون با تغییر تعداد بارگذاری‌ها قصد داریم تأثیر آن را بر روی نتایج مسأله پیش رو بررسی کنیم. در این راستا پس از بررسی ماتریس حساسیت، بارگذاری 3 را که وابستگی مجموعه داده‌ها به آن کم‌تر می‌باشد حذف می‌نماییم. از آن جا که همچنان تعداد داده‌ها از تعداد ثابت‌های الاستیک بیشتر می‌باشد، مسأله به مقدار نهایی خود همگرا می‌شود، اما تعداد مراحل سعی و خطا افزایش می‌یابد. این در حالی است که همان‌طور که در شکل 5 ملاحظه می‌شود، داده‌های  $C_{22}$ ،  $C_{12}$ ،  $C_{23}$  و  $C_{44}$  که در بارگذاری 3 نسبت به سایر داده‌ها نمود بیشتری داشته‌اند، با سرعت کمتری به مقدار نهایی خود همگرا می‌شوند. همچنین مطابق جداول 5 و 6 ثابت‌های مذکور با اعمال خطای 5% نسبت به سایر ثابت‌ها در این مرحله و همچنین نسبت به

**جدول 3** مقادیر عددی پنج ثابت الاستیک برحسب  $10^{11}$  Pa بدست آمده برای ماده اورتوتروپیک سه بعدی با سه داده برداری (در مجموع 12 داده)

$C_{12}$	$C_{33}$	$C_{22}$	$C_{11}$	
0/15	0/3	0/5	1	دقیق
0/16	0/28	0/63	0/98	محاسبه شده با خطای اندازه‌گیری 10% (درصد خطای نسبی)
(6/7)	(6/6)	(26)	(2)	
0/20	0/28	0/61	1/01	محاسبه شده با خطای اندازه‌گیری 20% (درصد خطای نسبی)
(33)	(6)	(22)	(1)	

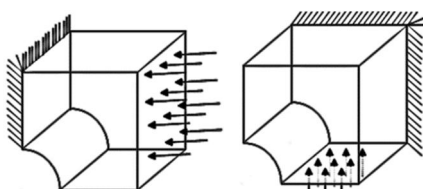
**جدول 4** مقادیر عددی چهار ثابت الاستیک برحسب  $10^{11}$  Pa دیگر بدست آمده برای ماده اورتوتروپیک سه بعدی با سه داده برداری (در مجموع 12 داده)

$C_{66}$	$C_{55}$	$C_{44}$	$C_{23}$	$C_{13}$	
1	0/5	0/6	0/07	0/1	دقیق
1/3	0/53	0/7	0/08	0/09	محاسباتی با خطای اندازه‌گیری 10% (درصد خطای نسبی)
(30)	(6)	(16)	(14)	(10)	
1/1	0/45	0/64	0/11	0/10	محاسباتی با خطای اندازه‌گیری 20% (درصد خطای نسبی)
(10)	(10)	(6)	(57)	(5)	



شکل 6 همگرایی مسأله به ثابت‌های الاستیک ماده مونوکلینیک سه بعدی مفروض:

الف- پنج ثابت الاستیک، ب- چهار ثابت دیگر، ج- چهار ثابت بعدی



شکل 7 دو بارگذاری اضافه شده در حالت غیرهمسانگرد

جدول 9 مقادیر هفت ثابت الاستیک برحسب Pa  $10^{11}$  به دست آمده برای ماده غیرهمسانگرد سه بعدی با خطای 10% در اندازه‌گیری (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبی می‌باشند).

$C_{44}$	$C_{23}$	$C_{13}$	$C_{12}$	$C_{33}$	$C_{22}$	$C_{11}$	
0/6	0/07	0/1	0/15	0/3	0/5	1	مقدار دقیق
0/57	0/072	0/11	0/155	0/29	0/500	1/03	محاسبه شده
(2/4)	(0/21)	(1)	(0/45)	(0/48)	(0/01)	(3)	

جدول 10 مقادیر هفت ثابت الاستیک دیگر برحسب Pa  $10^{11}$  به دست آمده برای ماده غیرهمسانگرد سه بعدی با خطای 10% در اندازه‌گیری (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبی می‌باشند).

$C_{14}$	$C_{45}$	$C_{36}$	$C_{26}$	$C_{16}$	$C_{66}$	$C_{55}$	
-0/1	0/07	-0/05	0/06	-0/08	1	0/5	مقدار دقیق
-0/1	0/06	-0/03	0/07	-0/053	1/1	0/57	محاسبه شده
(0/8)	(0/7)	(2)	(1/08)	(2/72)	(16)	(3)	

هستیم. همان‌طور که اشاره شد ماده مونوکلینیک به کمک 13 ثابت الاستیک مستقل تعریف می‌گردد. مجموعه بارگذاری را در این قسمت مشابه مجموعه بارگذاری منتخب برای ماده اورتوتروپیک در نظر می‌گیریم. در این مثال نیز فرض می‌کنیم که اطلاعاتی در مورد ثابت‌های الاستیک مذکور در دسترس نیست. لذا، همان‌طور که قبلاً ذکر شد، برای 9 ثابت اول از ثابت‌های مربوط به ماده همسانگرد جایگزین و برای سایر ثابت‌ها  $0.1E$  را به عنوان حدس اولیه در نظر می‌گیریم. هندسه جسم مشابه با قسمت قبل می‌باشد و در مرحله اول در هر بارگذاری کرنش‌های نرمال در 8 نقطه خوانده می‌شود. همچنین برای شبیه‌سازی خطا، به صورت یک در میان 5%+ و 5%- مقدار هر داده را با آن جمع نموده‌ایم. نتایج حاصل از این قسمت در جداول 7 و 8 و شکل 6 آورده شده است.

### 8-5- یافتن پارامترهای مادی ماده غیر همسانگرد سه بعدی

اکنون قصد داریم 21 ثابت یک مادهی غیرهمسانگرد عمومی با هندسه‌ای شبیه به قسمت 8-1 را بیابیم. ابتدا از مجموعه بارگذاری منتخب که در شکل 3 نشان داده شده است، استفاده می‌نماییم و تعداد نقاط نمونه‌برداری را 8 نقطه (در مجموع 32 داده) در نظر می‌گیریم. مسأله با وجود بیشتر بودن تعداد داده‌ها نسبت به ثابت‌های مجهول حتی در حالت بدون خطا به مقدار نهایی خود همگرا نمی‌شود. نقاط داده‌برداری را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که حساسیت مسأله نسبت به ثابت‌های ضعیف‌تر افزایش یابد. در این حالت پاسخ‌ها به مقادیر حقیقی خود نزدیک‌تر شده اما باز هم همگرا نمی‌شوند. با افزایش تعداد نقاط داده‌برداری به 15 داده، مسأله در حالت بدون خطا به مقدار حقیقی خود همگرا خواهد شد اما نتایج حاصل در اثر خطای اعمالی بسیار آسیب‌پذیر می‌باشند. در نهایت پس از بررسی‌های متعدد، با اضافه کردن دو بارگذاری که در شکل 7 نشان داده شده است به مجموعه بارگذاری اعمال شده در قسمت (8-1) و همچنین اضافه کردن تعدادی نقاط مناسب برای داده‌برداری که ثابت‌های ضعیف‌تر در پاسخ آن‌ها نمود بهتری داشته باشند، 21 ثابت ماده غیر همسانگرد پس از 12 مرحله با اعمال خطای 10% با توزیع نرمال مطابق جداول 9-11 و اشکال 8 و 9 به مقادیر مناسبی همگرا می‌شوند. این مثال به خوبی تأثیر افزایش تعداد ثابت‌های الاستیک بر افزایش پیچیدگی مسأله را نمایان می‌کند.

جدول 7 مقادیر عددی هفت ثابت الاستیک برحسب Pa  $10^{11}$  به دست آمده برای ماده مونوکلینیک سه بعدی با در نظر گرفتن خطای 5% در اندازه‌گیری (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبت می‌باشند).

$C_{44}$	$C_{23}$	$C_{13}$	$C_{12}$	$C_{33}$	$C_{22}$	$C_{11}$	
0/6	0/07	0/1	0/15	0/3	0/5	1	دقیق
0/61	0/072	0/116	0/155	0/298	0/48	1/03	محاسبه شده
(1)	(0/20)	(0/011)	(0/49)	(0/02)	(2)	(3)	

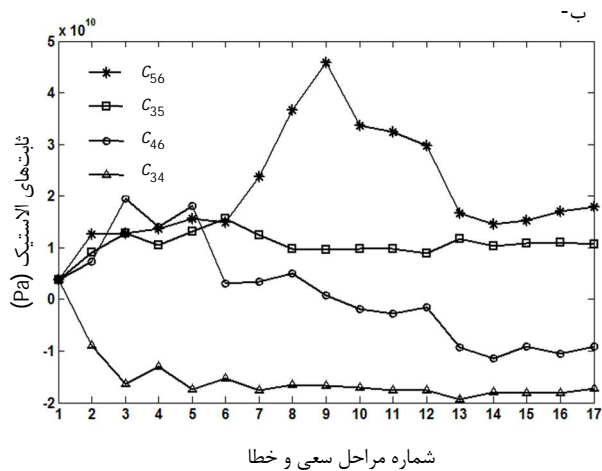
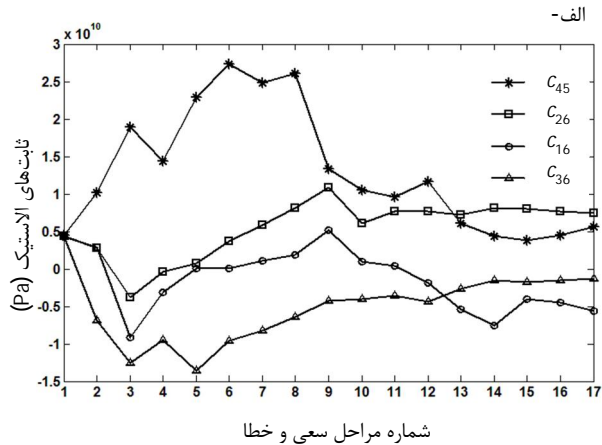
جدول 8 مقادیر عددی شش ثابت الاستیک دیگر برحسب Pa  $10^{11}$  به دست آمده برای ماده مونوکلینیک سه بعدی با در نظر گرفتن خطای 5% در اندازه‌گیری (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبت می‌باشند).

$C_{45}$	$C_{36}$	$C_{26}$	$C_{16}$	$C_{66}$	$C_{55}$	
0/07	0/05	0/06	0/08	1	0/5	دقیق
0/063	0/045	0/057	0/087	1/08	0/36	محاسبه شده
(0/7)	(0/5)	(3)	(0/7)	(8)	(14)	



جدول 11 مقادیر هفت ثابت الاستیک بعدی برحسب  $10^{11}$  Pa به دست آمده برای ماده غیرهمسانگرد سه بعدی با خطای 10% در اندازه‌گیری (اعداد داخل پرانتز درصد خطای نسبی می‌باشند)

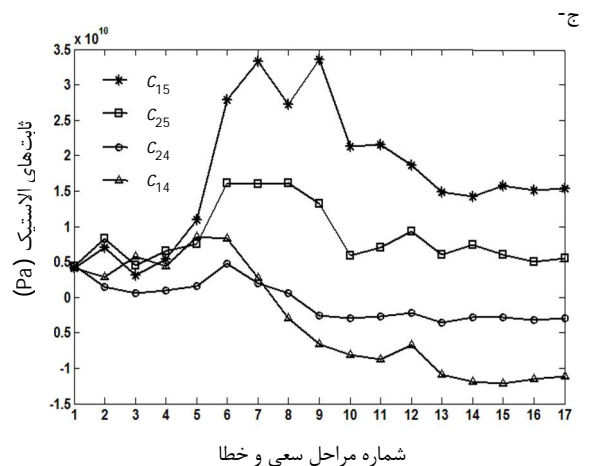
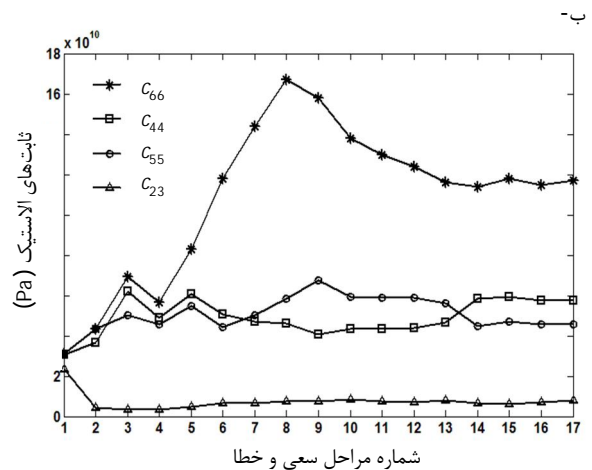
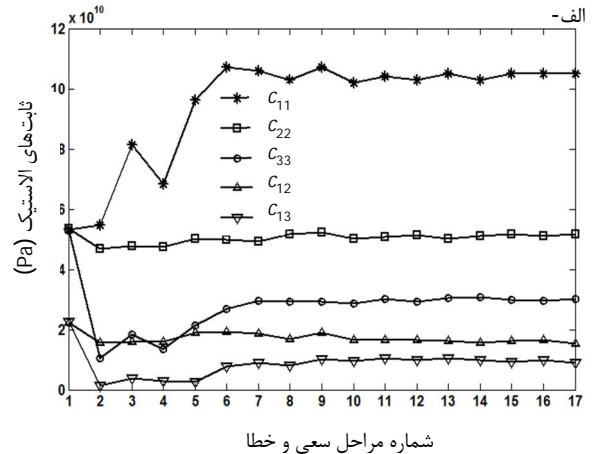
$C_{56}$	$C_{46}$	$C_{35}$	$C_{34}$	$C_{25}$	$C_{24}$	$C_{15}$	
0/15	-0/08	0/09	-0/2	0/03	-0/04	0/09	دقیق
0/17	-0/09	0/10	-0/18	0/05	-0/035	0/15	محاسبه
(1/9)	(1/1)	(1/9)	(1)	(2/97)	(0/44)	(6/2)	شده



شکل 9 همگرایی مسئله به سایر ثابت‌های الاستیک ماده غیرهمسانگرد سه بعدی مفروض: الف- چهار ثابت الاستیک، ب- چهار ثابت آخر

### 9- نتیجه‌گیری

روشی برای شناسایی ثابت‌های الاستیک ماده اورتوتروپیک، مونوکلینیک و غیرهمسانگرد سه بعدی با استفاده از روش تحلیل معکوس ارائه گردید که در آن کرنش‌های ایجاد شده در نقاط مختلف و حاصل از اعمال چندین بارگذاری به عنوان داده‌های اندازه‌گیری در نظر گرفته شد. تحلیل معکوس بر پایه کمینه‌سازی اختلاف مقادیر کرنش اندازه‌گیری شده و مقادیر کرنش محاسبه شده به انجام رسید. با طراحی یک مجموعه مناسب بارگذاری و نقاط داده برداری متناسب به قسمی که ثابت‌های الاستیک نمود مناسبی در پاسخ سازه داشته باشند قادر هستیم ثابت‌های الاستیک مواد سه بعدی را با وجود تعداد زیاد این ثابت‌ها شناسایی کنیم. تأثیر انتخاب یک بارگذاری به گونه‌ای است که با حذف و یا تغییر یک بارگذاری مناسب شناسایی ثابت‌های الاستیک مربوط به آن به شدت آسیب خواهند دید، بدین معنا که تعداد مراحل لازم برای همگرایی آن ثابت افزایش یافته و تأثیر خطای موجود در اندازه‌گیری بر روی ثابت مذکور به مراتب بیشتر خواهد شد. هر چند هر مسئله بسته به پارامترهای مختلفی مانند تعداد ثابت‌های مجهول و هندسه به تعداد حداقل نقاط داده‌برداری برای فراهم آوردن داده‌های مورد نیاز احتیاج دارد اما افزایش تعداد داده‌ها از حد مورد نیاز برای همگرایی مسئله، تأثیری در روند همگرایی و صحت و پایداری پاسخ نخواهد داشت و در واقع اطلاعات جدیدی در اختیار فرایند تحلیل معکوس قرار نخواهد داد.



شکل 8 همگرایی مسئله به ثابت‌های الاستیک ماده غیرهمسانگرد سه بعدی مفروض: الف- پنج ثابت الاستیک، ب- چهار ثابت دیگر، ج- چهار ثابت بعدی

## 10- مراجع

- [11] A. Foudjet, C. Surry and J. Jullien, Indirect identification methods for the elastic constants of orthotropic materials and their application to wood, *Wood Science and Technology*, Vol. 16, issue 3, pp 215-222, 1982.
- [12] W.T. Wang and T.Y. Kam, Material characterization of laminated composite plates via static testing, *Composite Structures*, Vol. 50, pp. 347-352, 2000.
- [13] R.B. Mignogna, N.K. Batra and K.E. Simmonds, *Determination of elastic constants of anisotropic materials from oblique angle ultrasonic measurements. I: analysis II: experimental*, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, D.O. Thompson and D.E. Chimenti, Eds., Plenum Press, New York, page 1669, 1991.
- [14] P. Pedersen and P.S. Frederiksen, Identification of orthotropic material moduli by a combined experimental/numerical method, *Measurement*, Vol. 10, issue 3, pp. 113-118, 1992.
- [15] M. Mehrdad Shokrieh, R. Madoliat, B. Bostani, A. Ghasemi Ghalebahmani and V. Mahmoodian, A new inverse method for determination of unidirectional ply mechanical properties of a laminated composite, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 352-360, 2015 (In Persian)
- [16] W.C. Van Buskirk, S.C. Cowin, and R. Carter Jr, A theory of acoustic measurement of the elastic constants of a general anisotropic solid, *Journal of Materials Science*, Vol. 21, issue 8, pp 2759-2762, 1986.
- [17] M.R. Hematyian, A. Khosravifard, Y.C. Shiah and C.L. Tan, Identification of material parameters of two-dimensional anisotropic bodies using an inverse multi-loading boundary element technique, *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, Vol. 87, issue 1, pp.55-76, 2012.
- [18] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsein, *Solution of Ill-posed Problems*, John-Wiley & Sons, New York, 1977.
- [19] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsein, *Methods for Solving Ill-posed Problems*, Nauka, Moscow, 1986.
- [1] J. Liu, Strength criteria for orthotropic materials, *ICCE/8, Eighth Annual International Conference on Composites Engineering*, Tenerife, Canary Islands, Spain, 2001.
- [2] C.B. Norris, *Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses*, Forest Product Laboratory, Madison, Wisconsin, 1962.
- [3] J.F. Davalos, P. Qiao and L. Shan, *Advanced fiber rein-forced polymer (FRP) composites for use in civil engineering*, West Virginia University, USA, 2006.
- [4] T. Ohkami, Y. Ichikawa and T. Kawamoto, A boundary element method for identifying orthotropic material parameters, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 15, pp. 609-625, 1991.
- [5] E. Silva, M. Walters, and G. Paulino, Modeling bamboo as a functionally graded material: Lessons for the analysis of affordable materials, *Journal of Materials Science*, Vol. 41, pp. 6991-7004, 2006.
- [6] J. P. Geng, K. Tan and G.R. Liu, Application of finite element Analysis in Implant Dentistry: a Review of Literature, *The Journal of Prosthetic Dentistry*, Vol. 85, pp 585-598, 2001.
- [7] Z. Fan, J.G. Sweder, J.Y. Rho, M.E. Roy and G.M. Pharr, Anisotropic Properties of Human Tibial Cortical Bone as Measured by Nanoindentation, *Journal of Orthopaedic Research*, Vol. 20, pp. 806-810, 2002.
- [8] D. DeTolla, S. Adreana, A. Patra, R. Buhite and B. Comella, Role of Finite Element Model in Dental Implants, *The Journal of Oral Implantology*, Vol. 26, pp. 77-81, 2000.
- [9] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, 1923.
- [10] X. Ling and S.N. Atluri, Stability analysis for inverse heat conduction problems, *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, Vol. 13, pp. 219-228, 2006.