



# انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک حفره مربعی با وجود مانع گرم به روش شبکه‌بولتزمن

محسن نظری<sup>۱\*</sup>، سپیده رضانی<sup>۲</sup>

۱- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

\*شاهرود، صندوق پستی: ۳۶۱۹۹۵۱۶۱ nazari\_me@yahoo.com

**چکیده-** در این مقاله، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محفظه مربعی بسته، با وجود یک مانع گرم مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل معادله انرژی، از مدل حرارتی شبکه‌بولتزمن استفاده شده است. معادلات مومنوم نیز با استفاده از اعمال نیروی حجمی در معادله‌بولتزمن استخراج شده‌اند. انتخاب نیروی حجمی در معادله‌بولتزمن به‌گونه‌ای است که معادلات ماکروسکوپی حاکم بر انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی، با استفاده از بسط چابمن-انساگ به دست می‌آیند. جریان سیال، دو بعدی و سیال مورد بررسی، هوا در نظر گرفته شده است. بررسی جریان سیال و انتقال حرارت برای نسبت‌های مختلف طول مانع به ابعاد حفره و همچنین با قرار دادن مانع در موقعیت‌های مختلف، برای اعداد گراشهف از  $10^3$  تا  $10^5$  انجام شده است. با افزایش عدد گراشهف، انتقال حرارت برای هر دو موقعیت افقی و عمودی مانع افزایش می‌یابد. با کاهش نسبت ابعاد مانع به حفره، انتقال حرارت کاهش یافته و برای موقعیت‌های عمودی مانع، انتقال حرارت نسبت به موقعیت‌های افقی مقدار بیشتری دارد. نتایج به دست آمده از روش شبکه‌بولتزمن، با نتایج و داده‌های موجود، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. استفاده از شبکه‌بولتزمن به‌عنوان یک روش مسوسکوپی، برای بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در حضور مانع گرم، برای اولین بار در این مقاله مطرح شده است.

**کلید واژگان:** انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد، روش شبکه‌بولتزمن، مانع، محفظه بسته.

## Natural Convection in a Square Cavity with a Heated Obstacle Using Lattice Boltzmann Method

M. Nazari<sup>1\*</sup>, S. Ramzani<sup>2</sup>

1- Assist. Prof. of Mechanical Engineering, Shahrood Univ. of Tech.

2- M. Sc. Student, Dep. of Mechanical Engineering, Shahrood Univ. of Tech.

\*P.O. B. 3619995161 Shahrood, Iran. nazari\_me@yahoo.com

**Abstract-** Natural convection heat transfer in a square cavity induced by heated plate is investigated using the lattice Boltzmann method. A suitable forcing term is represented in the Boltzmann equation. With the representation, the Navier-Stokes equation can be derived from the lattice Boltzmann equation through the Chapman-Enskog expansion. Top and bottom of the cavity are adiabatic; the two vertical walls of the cavity have constant temperatures lower than the plate's temperature. The flow is assumed to be two-dimensional. Air is chosen as a working fluid ( $Pr=0.71$ ). The study is performed for different values of Grashof number ranging from  $10^3$  to  $10^5$  for different aspect ratios and position of heated plate. The effect of the position and aspect ratio of heated plate on heat transfer are discussed. With increase of the Grashof number, heat transfer rate is increased in both vertical and horizontal position of the plate. The obtained results of the lattice Boltzmann method are validated with those presented in the literature.

**Keywords:** Natural Convection Heat Transfer, Lattice Boltzmann Method, Obstacle, Cavity.

## ۱- مقدمه

پدیده جابه‌جایی آزاد در یک محفظه بسته، دارای کاربردهای مهندسی فراوانی است. انتقال حرارت در کلکتورهای خورشیدی، طراحی تجهیزات خنک‌کننده، انتقال حرارت در پنجره‌های دوجداره و بهینه‌سازی مسائل مهندسی از جمله کاربردهای این شاخه است. در دهه‌های اخیر مطالعات عددی، آزمایشگاهی و تحلیلی زیادی بر روی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد انجام شده است. به‌عنوان نمونه، مطالعاتی توسط رفای و ویوانویچ [۱] بر روی اثر منابع حرارتی بر روی نرخ انتقال حرارت در پدیده جابه‌جایی آزاد در یک محفظه مربعی که با هوا پر شده، انجام شده است. نلسون [۲] نیز به‌صورت آزمایشگاهی، مطالعاتی پیرامون انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در مخازن خنک‌کننده آب انجام داد. اولیوسکی [۳] میدان جریان و انتقال حرارت را در پدیده جابه‌جایی آزاد، در مخازن ذخیره به‌صورت عددی و آزمایشگاهی بررسی کرد. مراجع [۱] و [۲] از جمله مطالعات پرارجاع در زمینه انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد هستند و بطور کامل به بررسی جوانب مختلف این مساله پرداخته‌اند.

در دهه اخیر، روش شبکه بولتزمن به‌عنوان روشی جدید در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، برای حل جریان سیال و انتقال حرارت، مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. روش شبکه بولتزمن بر پایه مدل میکروسکوپی استوار است که در آن مجموعه رفتار ذرات در یک سیستم، برای شبیه‌سازی مکانیک پیوسته از یک سیستم به‌کار گرفته می‌شود [۴]. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی و قابلیت موازی‌شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است. از کاربردهای آن می‌توان به شبیه‌سازی جریان سیال و انتقال حرارت در مسائلی مانند جریان با مرزهای پیچیده، جریان چندفازی و جریان سیال غیرنیوتنی اشاره کرد. مساله انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محفظه بسته مایل، با کمک روش شبکه بولتزمن توسط جامی و همکاران [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. مولفین از روش شبکه بولتزمن هیبرید و روش

تفاضل محدود برای حل معادلات حاکم استفاده کرده‌اند و اثر زوایای مختلف محفظه بسته، بر انتقال حرارت را مورد ملاحظه قرار داده‌اند. در تحقیق دیگری، همین گروه [۶]، با استفاده از روش شبکه بولتزمن، به تحلیل انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محفظه بسته با وجود یک استوانه گرم داخلی پرداخته‌اند. مزرها و همکاران [۷] نیز با ترکیب روش شبکه بولتزمن و روش تفاضل محدود، انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در یک محفظه بسته را تحلیل کردند. محمد و همکاران [۸] با استفاده از روش شبکه بولتزمن، به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در یک محفظه باز اقدام کرده‌اند. اعمال شرط مرزی در قسمت باز محفظه، مورد بحث قرار گرفته است. همچنین، عدد ناسلت متوسط، الگوی جریان و خطوط همدم، در اعداد رایلی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

دیکسیت و بابو [۹] با استفاده از روش شبکه بولتزمن به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محفظه بسته مربعی شکل، در اعداد رایلی بزرگ پرداختند. مولفین از شبکه غیریکنواخت در حل عددی استفاده کرده و برای انتقال نتایج عددی از شبکه ریز محاسباتی به شبکه یکنواخت بولتزمن، از میانمایی بهره برده‌اند. کوزدیک و همکاران [۱۰] نیز با در نظر گرفتن شبکه غیریکنواخت در ناحیه محاسباتی، به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محفظه مربعی بسته پرداختند. با در نظر گرفتن شبکه غیریکنواخت، اعداد رایلی بزرگ نیز مورد تحلیل محققین قرار گرفته است.

بخش‌های این مقاله به شرح زیر است: در قسمت ۲، معادلات حاکم بر مساله، به روش شبکه بولتزمن، به تفصیل گزارش شده است. توابع توزیع احتمال برای حل جریان و انتقال حرارت بیان شده و نیروی حجمی مورد نیاز استخراج شده است. در قسمت ۳، ابتدا نتایج به‌دست‌آمده از روش شبکه بولتزمن، با نتایج منتشرشده در این زمینه، مقایسه شده و سپس به طور کامل به تحلیل جریان و انتقال حرارت پرداخته شده است. اثرات قرارگرفتن مانع گرم در قسمت‌های مختلف محفظه، بر روی نرخ انتقال حرارت و الگوی جریان نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر چند که مطالعات مختلفی توسط محققین، در مورد انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در یک

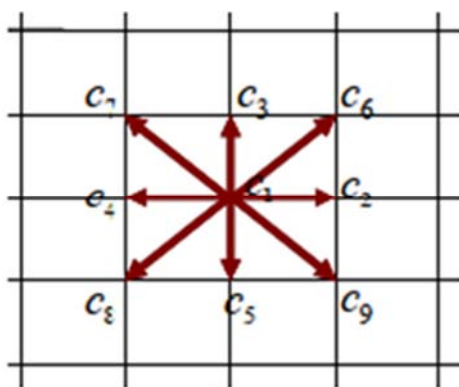
برخورد (سمت راست) که بیانگر برخورد ذرات به یکدیگر، در محل نقاط شبکه است. برای تابع برخورد اپراتورهای مختلفی در نظر گرفته شده است. در سال ۱۹۵۴ بتینگر و همکارانش اپراتور برخورد بسیار ساده‌ای با یک زمان آرامش، به شکل زیر پیشنهاد کردند [۱۷].

$$\Omega = -\frac{f(x,t) - f^{eq}(x,t)}{\tau} \quad (2)$$

در معادله فوق  $f^{eq}$ ، تابع توزیع تعادلی و  $\tau$  زمان آرامش بدون بعد، متناسب با معادله (۱) می‌باشد. به بیان دیگر، ذرات سیال بعد از برخورد، نزدیک به حالت تعادلی خود می‌باشند، که این اختلاف، با زمان آرامش متناسب است. با جایگذاری اپراتور برخورد در معادله بولتزمن، به شکل زیر خواهیم رسید:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i - f_i^{eq}] + \Delta t F_i \quad (3)$$

که  $F_i \Delta t$  در معادله (۳) معرف نیروی خارجی است و در مساله مدل‌سازی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد، به کمک شبکه بولتزمن، می‌تواند برابر  $\beta \Delta T c_{y_i} g$  در نظر گرفته شود [۸]. مدل شبکه در حالت کلی به صورت  $D_n Q_m$  بیان می‌شود که  $n$  بعد هندسی مساله و  $m$  تعداد بردارهای سرعت گسسته شده است. در این مقاله، از مدل ۹ سرعت استفاده شده است ( $D_3 Q_9$ ). شبکه استفاده شده برای حل عددی در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱ شبکه  $D_3 Q_9$

محفظه بسته انجام شده است، اما، بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در حضور یک صفحه گرم داخلی، و با چیدمان‌های مختلف، با استفاده از روش شبکه بولتزمن، برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲- شبکه بولتزمن

حل عددی بر مبنای معادله بولتزمن، به روش شبکه بولتزمن معروف است که ابتدا در سال ۱۹۸۶ توسط فریش و همکارانش پیشنهاد شد [۱۱]. این روش در سال ۱۹۸۸ توسط مک نامارا [۱۲]، سال ۱۹۸۹ توسط هیگورا و جیمز [۱۳] و در سال ۱۹۹۲ توسط چن و همکارانش گسترش و توسعه پیدا کرد [۱۴].

در روش شبکه بولتزمن درجات آزادی حرکت ذرات تشکیل دهنده محیط، محدود شده و فرض بر این است که ذرات فقط در موقعیت‌های خاصی (نقاط شبکه) قرار داشته و مجاز به حرکت در جهات مشخصی می‌باشند. مدل‌های موجود در روش شبکه بولتزمن به دو دسته تقسیم می‌شوند، دسته اول مربوط به مدل چندسرته [۱۵] است که توزیع تعادلی چگالی برای به دست آوردن معادله انرژی و توزیع تعادلی دما استفاده می‌شود. دسته دوم، مربوط به مدل‌های چندگانه توزیع تعادلی می‌باشد، که در آن علاوه بر توزیع تعادلی چگالی، یک تابع توزیع نیز برای دما ارائه شده است [۱۶]. در روش شبکه بولتزمن، از تابع احتمال توزیع ذرات استفاده می‌شود،  $f(\mathbf{x}, t)$  که نشان‌دهنده احتمال حضور ذرات در یک حجم کوچک حول نقطه  $\mathbf{x}$  و در لحظه  $t$  می‌باشد.

### ۲-۱- معادله بولتزمن برای تحلیل جریان

تغییرات تابع توزیع احتمال  $f$ ، از معادله بولتزمن پیروی می‌کند که می‌توان آنرا به صورت زیر بازنویسی کرد [۱۷]:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i(f) \quad (1)$$

این معادله شامل دو بخش است، جاری شدن و برخورد. در مرحله جاری شدن (سمت چپ معادله)، توابع توزیع در جهت سرعت خود به سمت گره‌های مجاور جاری می‌شوند و بخش

تابع توزیع تعادلی در این شبکه عبارتست از:

$$g_i^{eq} = T w_i \left[ 1 + \frac{1}{c_s^2} c_i \cdot u \right] \quad (11)$$

که در آن  $c_s$  سرعت صوت می‌باشد و به دلیل انتخاب شبکه یکنواخت ( $\Delta x = \Delta y = \Delta t$ ) در میدان محاسباتی، برابر  $1/\sqrt{3}$  در نظر گرفته شده است. با استفاده از تابع توزیع احتمال معرفی شده، دما در هر نقطه از میدان محاسباتی، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$T = \sum_{i=1}^9 g_i \quad (12)$$

و  $\tau_h$  زمان آرامش حرارتی است که با ضریب پخش شبکه، با رابطه (۱۳) مرتبط می‌باشد [۸].

$$\tau_h = 3\alpha + \frac{1}{2} \quad (13)$$

### ۲-۳- اعمال شرایط مرزی

با در نظر گرفتن ثابت بودن دیواره‌های محفظه و شرط عدم لغزش بر روی این دیواره‌ها، از مدل بونس‌بک<sup>۱</sup> در روش شبکه بولتزمن استفاده شده است [۱۹]. این مدل، ساده‌ترین الگویی است که شرط عدم لغزش را بیان می‌کند و در آن، ذره برخورد کننده به دیواره جامد، در جهت مخالف، به داخل میدان منعکس می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد محاسبه توابع توزیع مجهول روی هر دیواره، می‌توان به مدل زو و هی [۱۹] مراجعه کرد. برای اعمال شرط مرزی دما ثابت، مقادیر  $g_4, g_6, g_9$  روی دیواره سمت چپ محفظه مجهول هستند. به طور مشابه و با مراجعه به شکل (۱)، مقادیر  $g_4, g_7, g_8$  نیز روی دیواره سمت راست محفظه باید تعیین شوند. مقادیر مجهول روی هر دیواره، به صورت زیر تعیین شده است [۸]:

$$g_2 = -g_4, g_9 = -g_7, g_6 = -g_8 \quad (14)$$

برای دیواره سمت راست:

$$g_4 = -g_2, g_7 = -g_9, g_8 = -g_6 \quad (15)$$

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[ 1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(c_i \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right] \quad (4)$$

که در آن  $w_i$  توابع وزنی هستند.

$$w_1 = \frac{4}{9}, w_{2\sim 5} = \frac{1}{9}, w_{6\sim 9} = \frac{1}{36} \quad (5)$$

و بردارهای سرعت ذرات به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_x &= [0, 1, 0, -1, 0, 1, -1, -1, 1] \\ c_y &= [0, 0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, -1] \end{aligned} \quad (6)$$

مقادیر ماکروسکوپی، چگالی و سرعت نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho = \sum_{i=1}^9 f_i \quad (7)$$

$$\rho \cdot u = \sum_{i=1}^9 c_i f_i \quad (8)$$

به کمک آنالیز چاپمن-انسکوگ نشان داده شده است که معادله استفاده شده در روش شبکه بولتزمن، و نیروی حجمی اضافه شده در معادله (۳)، قابلیت بازیافت معادلات ناویر استوکس را دارا می‌باشد [۱۸]. در این بسط، رابطه بین زمان آرامش و لزجت شبکه بولتزمن به شکل زیر بیان می‌شود [۸]:

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2} \quad (9)$$

با توجه به رابطه فوق، برای اینکه مقدار فیزیکی مثبتی برای پارامتر  $\nu$  به دست آید و همچنین با ملاحظه شرط پایداری روش شبکه بولتزمن، مقدار  $\nu > 0/5$  انتخاب می‌شود.

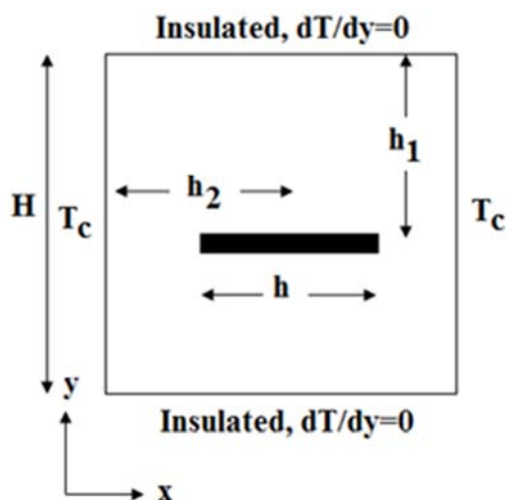
### ۲-۲- معادله بولتزمن برای تحلیل انرژی

تابع توزیع احتمال استفاده شده برای بازیابی معادله انرژی، به صورت زیر است [۸]:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) &= g_i(\mathbf{x}, t) \\ &- \frac{1}{\tau_h} [g_i - g_i^{eq}] \end{aligned} \quad (10)$$

که  $g^{eq}$  تابع توزیع تعادلی است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

<sup>1</sup> Bounce-Back



شکل ۳ مانع در موقعیت افقی

پارامترهای بدون بعد به صورت زیر تعریف شده اند:

$$Gr = g\beta\Delta T H^3 / \nu^2, \quad Pr = \nu / \alpha, \quad \theta = (T - T_c) / (T_h - T_c) \quad (17)$$

$$A = \frac{h}{H}, \quad A_1 = \frac{h_1}{H}, \quad A_2 = \frac{h_2}{H}$$

که در آن Gr عدد گراشهف، Pr عدد پرانتل و  $\theta$  دمای بی بعد است. پارامترهای بدون بعد A،  $A_1$  و  $A_2$  به ترتیب نشان دهنده طول بدون بعد مانع گرم، فاصله بدون بعد مانع تا دیواره موازی خود و فاصله نقطه مرکزی مانع تا دیواره است. عدد ناسلت محلی و متوسط بر روی دیواره سمت چپ حفره به صورت تعریف می شوند.

$$Nu = \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (18)$$

$$Nu_{Avg} = \int_0^1 Nu \, dX.$$

#### ۴- نتایج

##### ۴-۱- اعتبارسنجی

در این بخش نخست مقایسه ای بین نتایج حاصل از این تحقیق و کار انجام شده توسط لی و همکارانش [۲۱] انجام شده است. این نتایج برای مانع افقی، در جدول ۱ و برای مانع عمودی در جدول ۲ نشان داده شده است.

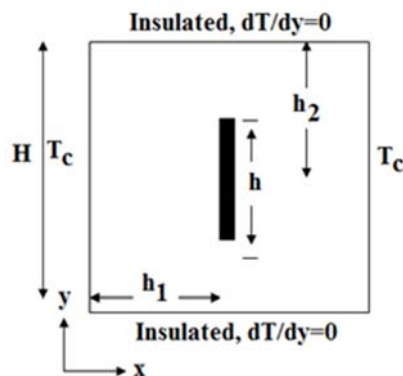
در معادلات (۱۴) و (۱۵)، باید دقت شود که دمای بدون بعد روی هر دو دیواره برابر  $\theta=0$  است و شرط مرزی دیواره، بعد از ساده سازی به صورت فوق نوشته شده است. در مورد اعمال شرط مرزی عایق برای دیواره های بالا و پایین، فرض می شود که گرادیان تابع توزیع احتمال در جهت عمود بر دیواره برابر صفر است. این شرط، مشابه اعمال شرط بونس بک برای سرعت است [۸].  
بر روی دیواره های مانع گرم داخل محفظه، شرط مرزی به صورت زیر اعمال می شود [۲۰]:

$$g_i = \theta_w (w_i + w_{Oppi}) - g_{Oppi} \quad (16)$$

که در معادله فوق،  $i$  جهتی است که مقدار تابع توزیع احتمال، در آن محاسبه می شود و  $Oppi = -i$  به معنی جهت مخالف  $i$  در مدل  $D_p Q_p$  است.

#### ۳- تحلیل عددی

در این مقاله، جریان سیال و انتقال حرارت در یک حفره مربعی بررسی شده است. دیواره های سمت چپ و راست، سرد بوده و دیواره بالا و پایین محفظه، عایق هستند. مانع گرم در موقعیت های مختلف، در دو حالت افقی و عمودی در داخل حفره قرار گرفته است. سیال عامل، هوا انتخاب شده و مطالعه برای اعداد گراشهف مختلف، از  $10^3$  تا  $10^5$  انجام شده است. نرخ انتقال حرارت در حفره، با محاسبه عدد ناسلت گزارش شده است. در شکل های (۲) و (۳)، شرایط مرزی و هندسه مورد بررسی، نشان داده شده است.



شکل ۲ مانع در موقعیت قائم

شود. مطابق رابطه (۱۷)، عدد پرانتل در حل به روش شبکه بولتزمن، برابر  $0.71$  در نظر گرفته شده و مطالعه برای اعداد گراشهف مختلف، از  $10^3$  تا  $10^5$  انجام شده است. در مساله حاضر، مقدار بزرگی سرعت ( $u$ ) در شبکه بولتزمن از مرتبه  $(g\beta\Delta T M)^{1/5}$  است که  $M$  تعداد نقاط شبکه (در راستای عمودی) می‌باشد. بنابراین انتخاب پارامترهای شبکه بولتزمن (مثل  $u$  و  $\alpha$ )، به‌گونه‌ای باید انجام شود که عدد ماخ ( $u/c_s$ ) تا حد امکان کوچک باشد. کوچک بودن عدد ماخ به معنی کوچک بودن خطای تراکم‌پذیری است. در این مساله، عدد ماخ کوچک‌تر از  $0.1$  در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که با این روش انتخاب پارامترهای شبکه بولتزمن ( $u$  و  $\alpha$ )، زمان آرامش حرارتی و هیدرولیکی در محدوده مجاز ذکر شده در قسمت ۲-۱، قرار خواهند گرفت. علاوه بر مطالب ذکر شده، انتخاب پارامترهای مربوط به شبکه بولتزمن، باید به‌گونه‌ای باشد که مقادیر پارامترهای فیزیکی (مورد نظر در حل عددی) استخراج شوند.

#### ۴-۲- مانع افقی

شکل ۳ خطوط جریان و خطوط هم‌دما را برای  $A=0.5$ ، با قراردادن مانع در مرکز حفره، برای اعداد گراشهف مختلف نشان می‌دهد. در عدد گراشهف  $10^3$ ، شکل ۱-۳، جریان سیال در داخل محفظه به علت اثر غالب انتقال حرارت هدایت، کاملاً متقارن است. با افزایش عدد گراشهف، سهم انتقال حرارت جابه‌جایی بیشتر شده و چرخش جریان سیال در بالای مانع قوت می‌گیرد. تغییر الگوی جریان در حالتی که اثرات جابه‌جایی نسبت به اثرات هدایتی، غالب است، در دو شکل ۲-۳ و ۳-۳ مشخص است. مقادیر بدون بعد دما بر روی خطوط دما ثابت به نمایش درآمده است. برای وضوح بیشتر الگوی جریان، از نمایش مقادیر ثابت هر خط جریان اجتناب شده است.

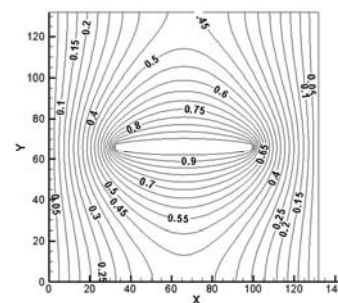
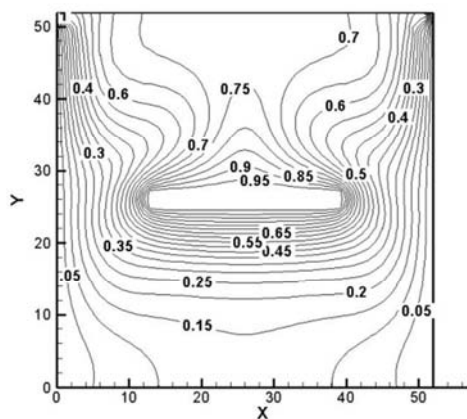
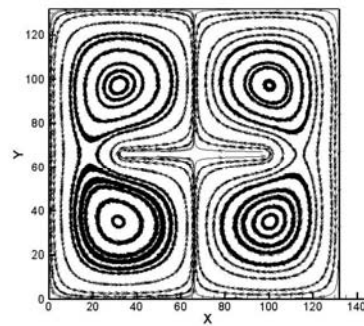
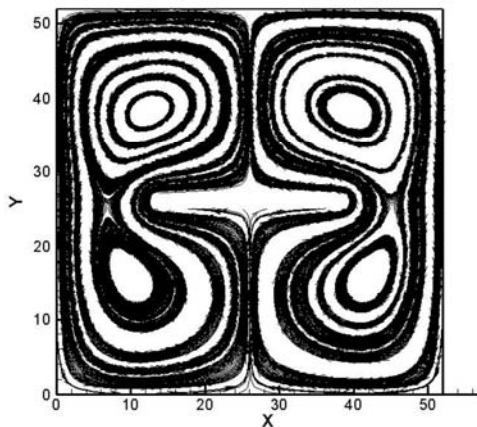
جدول ۱ مقایسه نتایج تحقیق حاضر برای مانع افقی و نتایج انجام شده توسط لی [۲۱]، به ازای  $A=0.5$  و  $A_1=0.5$

| عدد گراشهف | اندازه شبکه در بررسی لی | اندازه شبکه در تحقیق حاضر | ناسلت متوسط در بررسی لی | ناسلت متوسط در تحقیق حاضر |
|------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $10^3$     | $50 \times 50$          | $132 \times 132$          | ۱/۸۶۶                   | ۱/۹۴۶                     |
| $10^4$     | $50 \times 50$          | $52 \times 52$            | ۲/۲۰۲                   | ۲/۲۱۹                     |
| $10^5$     | $50 \times 50$          | $52 \times 52$            | ۴/۱۲۹                   | ۴/۱۰۲                     |

جدول ۲ مقایسه نتایج تحقیق حاضر برای مانع عمودی و نتایج انجام شده توسط لی [۲۱]، به ازای  $A=0.5$  و  $A_1=0.5$

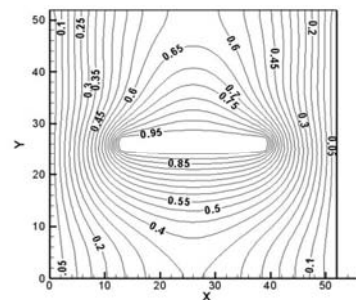
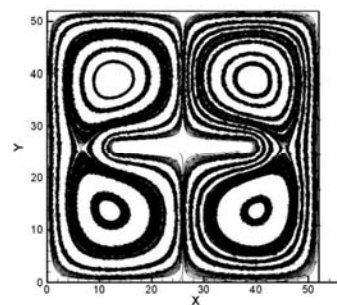
| عدد گراشهف | اندازه شبکه در بررسی لی | اندازه شبکه در تحقیق حاضر | ناسلت متوسط در بررسی لی | ناسلت متوسط در تحقیق حاضر |
|------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $10^3$     | $50 \times 50$          | $100 \times 100$          | ۱/۷۱۱                   | ۱/۷۲۸                     |
| $10^4$     | $50 \times 50$          | $52 \times 52$            | ۲/۵۰۱                   | ۲/۵۳۵                     |
| $10^5$     | $50 \times 50$          | $52 \times 52$            | ۵/۰۵۱                   | ۵/۰۸۲                     |

تعداد نقاط شبکه مورد استفاده در روش شبکه بولتزمن، در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است. در این تحقیق، به منظور اطمینان از نتایج حل عددی، تعداد نقاط مختلفی برای شبکه (برای هر عدد گراشهف) در نظر گرفته شده، به‌گونه‌ای که نتایج نهایی حل عددی، مستقل از اندازه شبکه ذکر شده در جداول ۱ و ۲ است. معیار انتخاب شبکه مناسب در حل عددی، عدم تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره حفره می‌باشد. به بیان دیگر، در هر شبکه انتخاب شده، عدد ناسلت متوسط روی دیواره، اندازه‌گیری شده و تغییرات آن، بر حسب تابعی از اندازه شبکه ثبت می‌شود، و این کار تا جایی که تغییرات عدد ناسلت در مقابل اندازه شبکه کوچک باشد، ادامه خواهد یافت. از طرف دیگر، حل عددی، زمانی همگرا می‌شود که عدد ناسلت متوسط (بر حسب تابعی از تعداد تکرار) به صورت مجانب‌گونه، به یک عدد ثابت نزدیک



شکل ۱-۳ خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A_1=0.5$  و  $A=0.5$  گراشهف ۱۰۳

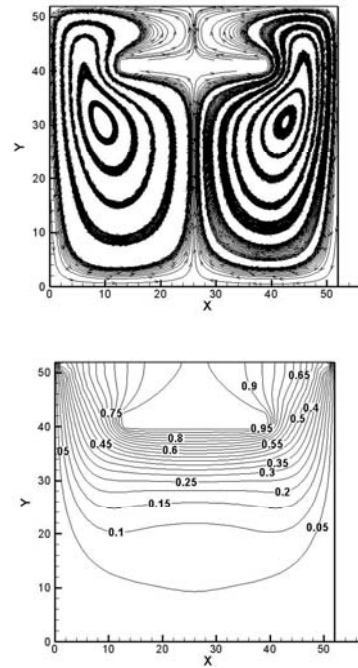
شکل ۳-۳ خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A_1=0.5$  و  $A=0.5$  گراشهف ۱۰۵



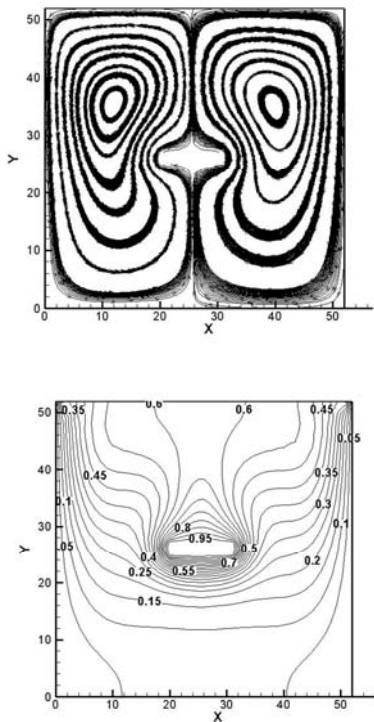
شکل ۲-۳ خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A_1=0.5$  و  $A=0.5$  گراشهف ۱۰۴

شکل ۴ خطوط جریان و خطوط همدمای را برای  $A=0.5$ ، با قراردادن مانع در دو موقعیت حدی مختلف، در عدد گراشهف  $10^5$  نشان می‌دهد. با توجه به خطوط همدمای، در حالتیکه صفحه گرم در موقعیت  $A_1=1/8$  قرار دارد، انتقال حرارت جابه‌جایی بسیار قوی‌تر از حالتی است که صفحه در موقعیت  $A_1=0/2$  قرار گرفته است. به بیان دیگر، هر چه صفحه گرم به دیواره بالایی نزدیکتر باشد انتقال حرارت جابه‌جایی کمتر خواهد بود. در حالتی که صفحه گرم به دیواره بالایی محفظه نزدیک است، سیال در قسمت زیرین صفحه، عملاً غیر فعال است.

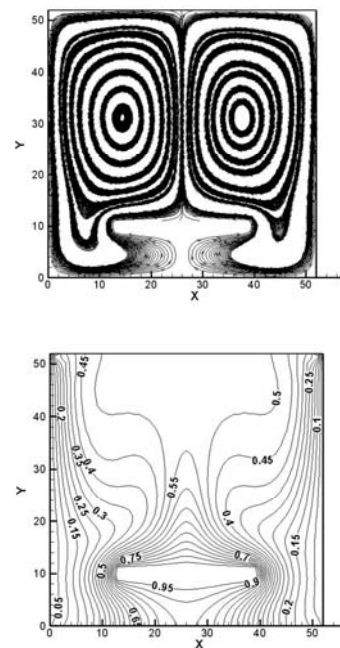
شکل ۵ خطوط جریان و خطوط هم‌دما را با تغییر ابعاد مانع (پارامتر  $A$ ) در عدد گراشهف  $10^5$  نشان می‌دهد. با افزایش ابعاد مانع، با توجه به الگوی خطوط جریان، چرخش سیال تحت تاثیر قرار گرفته، مقدار انتقال حرارت جابه‌جایی افزایش می‌یابد. در حالتیکه  $A=0/2$  است مقدار عدد ناسلت متوسط (روی دیواره سمت چپ) برابر  $3/165$  و با افزایش طول مانع به  $A=0/5$ ، حدود  $1/3$  برابر، و در  $A=0/8$  حدود  $1/9$  برابر می‌شود. در شکل ۳-۵، تشکیل دو سلول چرخشی دورانی متقارن دیده می‌شود که در مقالات مختلف در حالت گرمایش از کف، به آن اشاره شده است. با افزایش طول مانع، فاصله بین مانع و دیواره محفظه کاهش پیدا می‌کند و در قسمت زیر مانع، حرکت سیال محدود می‌گردد. در این حالت، انتظار می‌رود که در قسمت زیرین مانع گرم، خطوط هم‌دما به حالت افقی نمایان شوند.

شکل ۱-۴ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ ،

$$A_1=0/2, A=0/5$$

شکل ۱-۵ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A_1=0/5$  و  $A=0/5$ ،

$$A=0/2$$

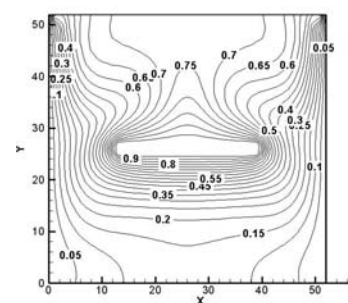
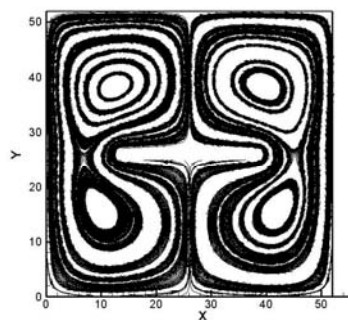
شکل ۲-۴ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ ،

$$A_1=0/8, A=0/5$$



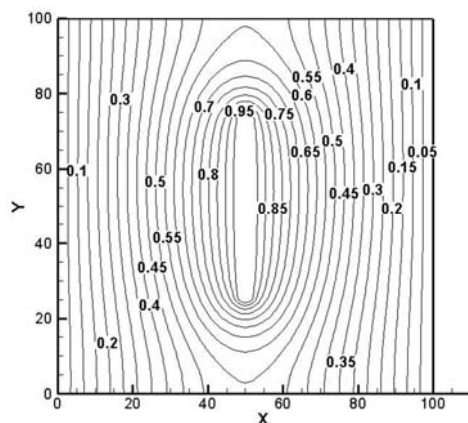
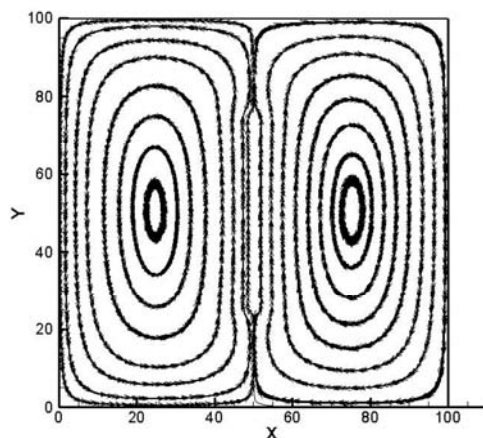
۴-۳- مانع عمودی

شکل ۶ خطوط جریان و خطوط هم‌دما را برای  $A=0/5$ ، با قراردادن مانع در مرکز حفره، برای اعداد گراش‌هف مختلف نشان می‌دهد. در عدد گراش‌هف  $10^3$ ، جریان سیال در داخل محفظه به علت اثر غالب انتقال حرارت هدایت، کاملاً متقارن است. ضمناً، خطوط دما ثابت نمایش خوبی از انتقال حرارت جابه‌جایی ضعیف را نشان می‌دهد. با افزایش عدد گراش‌هف، سهم انتقال حرارت جابه‌جایی افزایش می‌یابد. در گراش‌هف  $10^3$  مقدار عدد ناسلت متوسط (روی دیواره سمت چپ) برابر  $1/711$  و با افزایش گراش‌هف به  $10^4$  حدود  $1/5$  برابر، و در گراش‌هف  $10^5$  حدود ۳ برابر می‌شود.



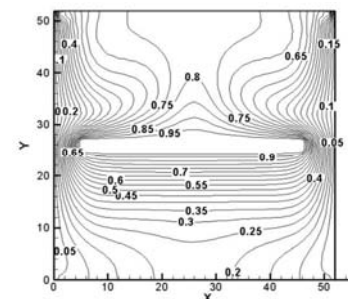
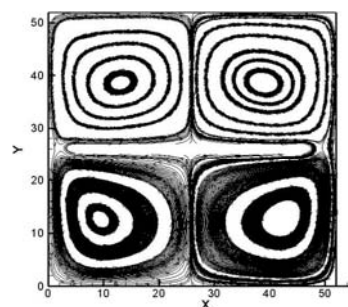
شکل ۵-۲ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A_1=0/5$  و

$A=0/5, A_2=0/5$



شکل ۶-۱ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0/5$  و  $A_1=0/5$

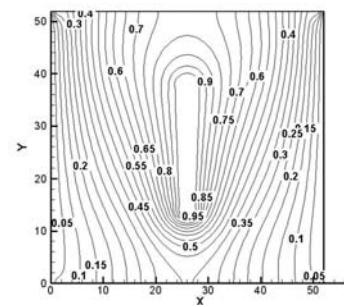
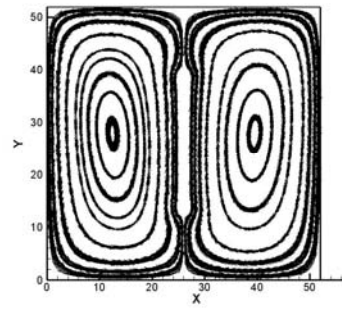
$A_2=0/5$ ، گراش‌هف  $10^3$



شکل ۵-۳ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A_1=0/5$  و

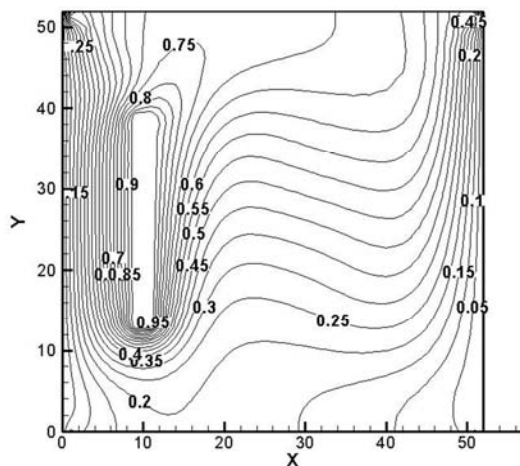
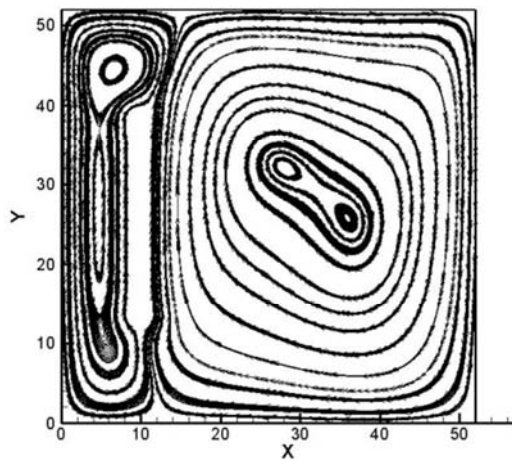
$A=0/8, A_2=0/5$

شکل ۷ خطوط جریان و خطوط هم‌دما را برای حالت  $A=0/5$  و با قراردادن مانع درموقعیت‌های مختلف، در عدد گراشهف  $10^5$  نشان می‌دهد. در حالتیکه  $A_1=0/8$  است، مقدار عدد ناسلت متوسط (بر روی دیواره سمت چپ) برابر  $4/417$  و با کاهش فاصله از دیواره سمت چپ ( $A_1=0/5$ ) حدود  $1/15$  برابر، و در  $A_1=0/2$  حدود  $1/3$  برابر می‌شود. باید دقت کنیم که به دلیل شرط مرزی دمایی متقارن روی دیواره‌های محفظه، دو حالت  $A_1=0/8$  و  $A_1=0/2$  مشابه هستند و عدد ناسلت متوسط فقط روی دیواره سمت چپ گزارش شده است.



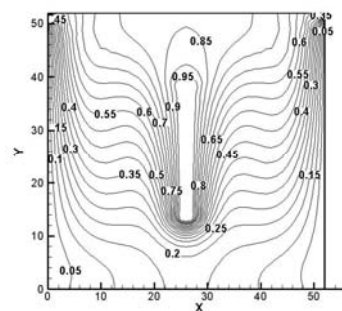
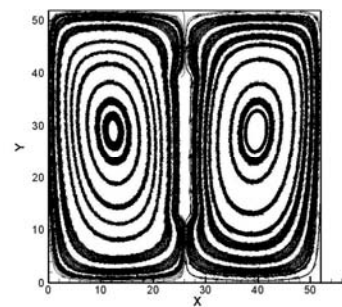
شکل ۲-۶ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0/5$

و  $A_1=0/5, A_2=0/5, A_3=0/5$  گراشهف  $10^4$



شکل ۱-۷ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ .

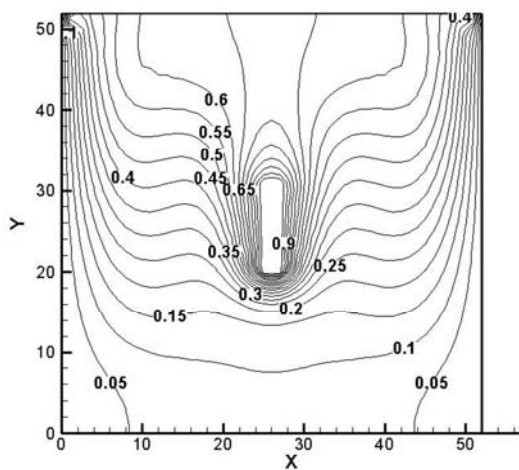
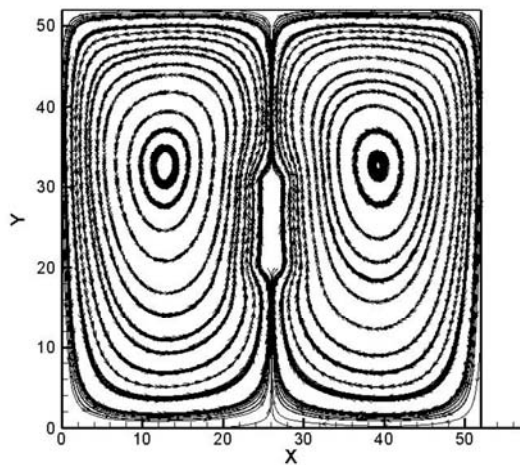
$A_1=0/2, A_2=0/5$



شکل ۳-۶ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0/5$  و  $A_1=0/5$

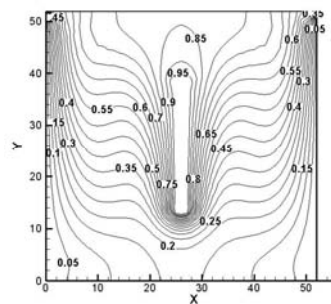
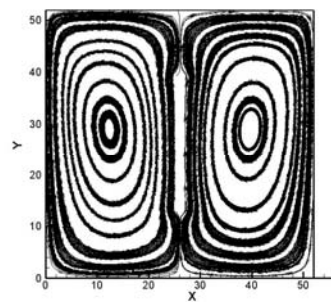
$A_2=0/5, A_3=0/5$  گراشهف  $10^5$

در شکل ۸ خطوط جریان و خطوط هم‌دما با تغییر ابعاد مانع (پارامتر  $A$ ) نشان داده شده است. با افزایش طول مانع، در واقع میزان سطح گرم شده افزایش می‌یابد که باعث افزایش گرادیان دما شده و در نهایت انتقال حرارت جابه‌جایی افزایش می‌یابد. در حالتیکه  $A=0/2$  است مقدار عدد ناسلت متوسط (در دیواره سمت چپ) برابر  $3/73$  و با افزایش طول مانع به  $A=0/5$  حدود  $1/35$  برابر، و در  $A=0/8$  حدود  $1/55$  برابر می‌شود. در حالت  $A=0/8$  می‌توان فرض کرد که با دو محفظه مجزا، با دیواره‌های قائم سرد و گرم مواجه هستیم.



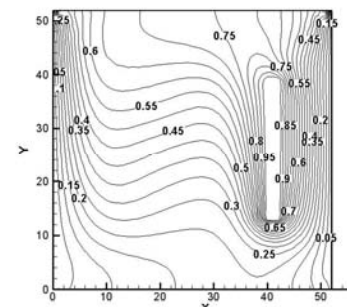
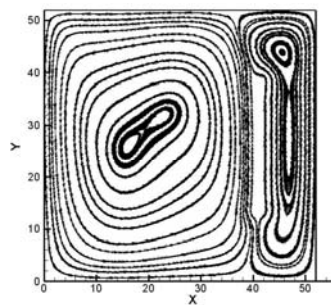
شکل ۱-۸ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ .

$$A=0/2, A_1=0/5$$



شکل ۲-۷ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ .

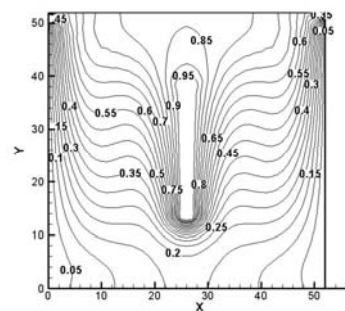
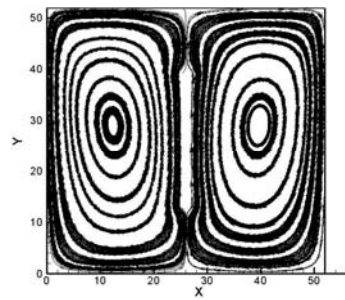
$$A_1=0/5, A=0/5$$



شکل ۳-۷ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ .

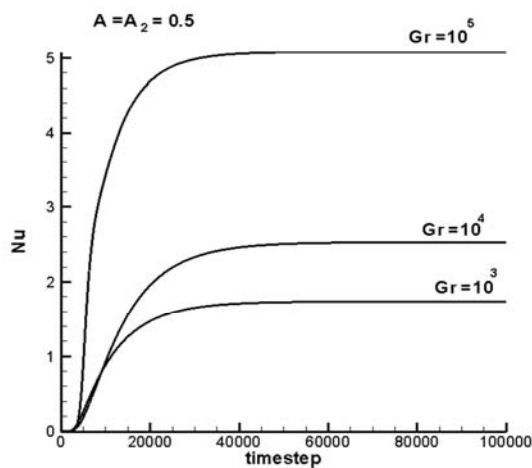
$$A_1=0/8, A=0/5$$

عامل اصلی در پدیده جابه‌جایی آزاد، ایجاد گرادیان چگالی، ناشی از گرادیان دما و نیروی حجمی حاصل از گرانش است. به منظور بررسی انتقال حرارت، از عدد بی‌بعد ناسلت استفاده می‌شود که به صورت نسبت انتقال حرارت جابه‌جایی به انتقال گرمای هدایت تعریف می‌شود و همان گرادیان دمای بی‌بعد در سطح است. شکل ۹ عدد ناسلت متوسط را برای مانع عمودی در اعداد گراشهف مختلف نشان می‌دهد. در یک مقدار ثابت طول مانع (پارامتر  $A$ )، با افزایش عدد گراشهف، گرادیان دما افزایش می‌یابد، و عدد ناسلت که معیاری از انتقال حرارت جابه‌جایی است، افزایش خواهد یافت. به بیان دیگر، با افزایش عدد گراشهف، شاهد افزایش سهم انتقال حرارت جابه‌جایی در مقابل هدایت هستیم.



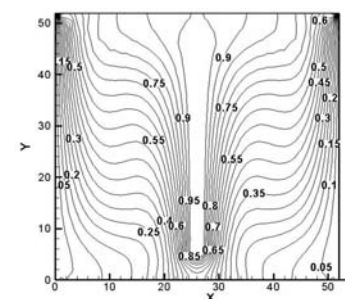
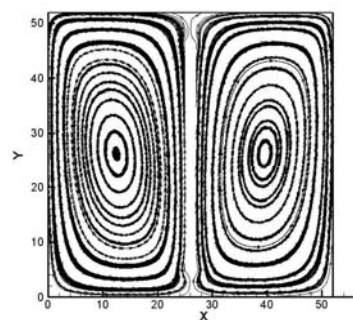
شکل ۸-۲ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ ،

$$A=0/\Delta, A_1=0/\Delta$$



شکل ۹ عدد ناسلت متوسط برای مانع عمودی در اعداد گراشهف مختلف

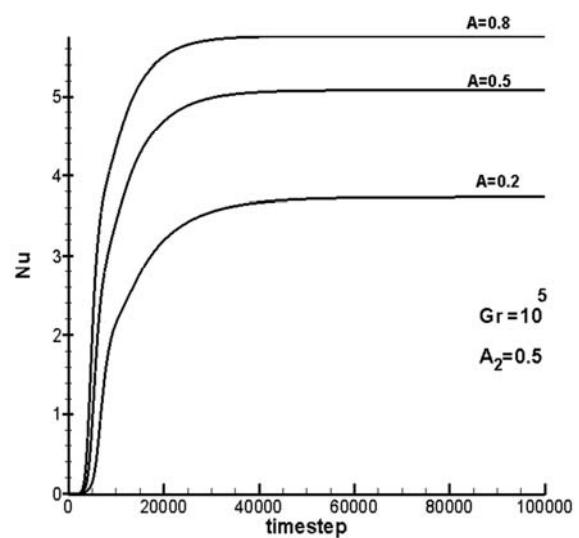
به منظور بررسی اثر ابعاد مانع، در شکل ۱۰، عدد ناسلت متوسط با تغییر طول مانع در عدد گراشهف  $10^5$  رسم شده است. با افزایش ابعاد مانع، در واقع میزان سطح گرم‌شده افزایش می‌یابد که باعث افزایش گرادیان دما و گرادیان چگالی می‌شود. با افزایش نیروی شناوری، نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد. همانطور که انتظار داریم و در شکل نشان داده شده است، با افزایش ابعاد مانع، انتقال حرارت افزایش یافته است.



شکل ۸-۳ خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای عدد گراشهف  $10^5$ ،

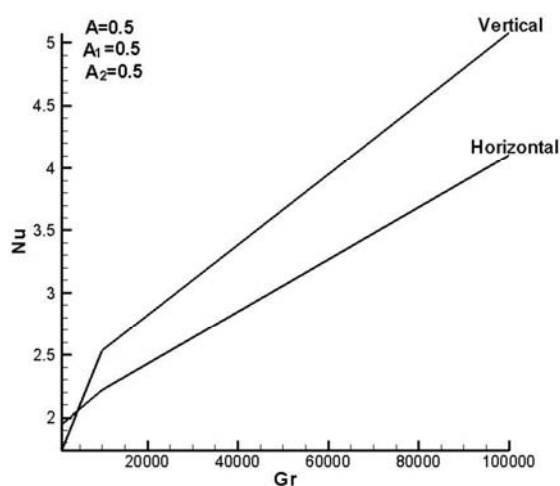
$$A=0/8, A_1=0/5$$

به منظور مقایسه دو حالت افقی و عمودی مانع، در شکل ۱۲ عدد ناسلت متوسط برای هر دو حالت رسم شده است. همانطور که گفتیم یکی از عوامل موثر در پدیده جابه‌جایی آزاد، نیروی جسمی حاصل از گرانش است، در حالتیکه صفحه به شکل عمودی در داخل محفظه قرار گرفته است، صفحه گرم در امتداد بردار گرانش زمین است و گرادیان دما در داخل محفظه، موجب جریان سیال به سمت بالا، و در امتداد مانع گرم می‌شود. در مقابل، در حالتیکه صفحه به صورت افقی در داخل محفظه قرار گرفته، به دلیل کاهش نیروی بالابرنده سیال، انتظار می‌رود که نرخ انتقال حرارت نیز کاهش یابد. ضمناً در حالت وجود مانع افقی، سیال قرار گرفته در زیر مانع، غیر فعال و سهم جابه‌جایی ضعیف است. همانطور که در شکل نشان داده شده است، مقدار انتقال حرارت در حالتیکه مانع در موقعیت عمودی قرار گرفته بیشتر از حالت افقی است.



شکل ۱۰ عدد ناسلت متوسط برای مانع عمودی با تغییر طول مانع

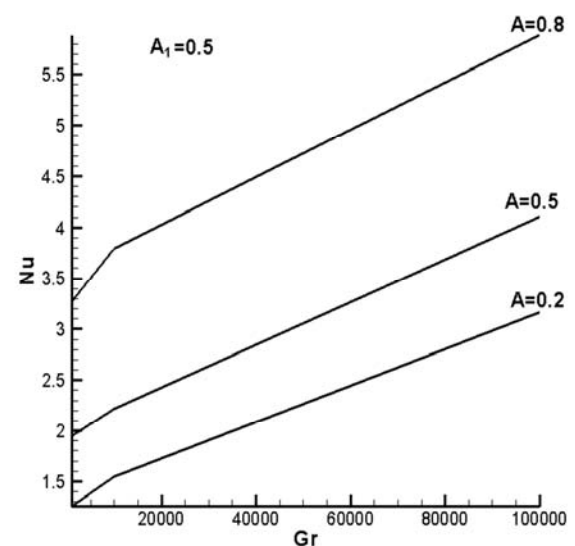
شکل ۱۱ انتقال حرارت را برای مقادیر مختلف عدد گراشهف و طول مانع، برای مانع افقی نشان می‌دهد. مشخص است که، افزایش عدد گراشهف منجر به افزایش گرادیان دما و انتقال حرارت می‌شود. همچنین با افزایش طول مانع در واقع میزان سطح گرم شده افزایش می‌یابد و در نتیجه میزان انتقال حرارت افزایش می‌یابد.



شکل ۱۲ عدد ناسلت متوسط برای دو حالت عمودی و افقی مانع

### ۵- نتیجه‌گیری

جریان سیال و انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محفظه بسته، با وجود مانع گرم داخلی مورد بررسی قرار گرفت. برای حل معادلات، از روش شبکه بولتزمن استفاده شد. نرخ انتقال حرارت در محفظه، بستگی به موقعیت مانع داخلی دارد و با



شکل ۱۱ عدد ناسلت متوسط برای مانع افقی با تغییر طول مانع

|                           |          |
|---------------------------|----------|
| چگالی ( $\text{Kg/m}^3$ ) | $\rho$   |
| زمان آرامش هیدرودینامیکی  | $\tau$   |
| زمان آرامش حرارتی         | $\tau_h$ |
| فاکتور وزنی               | $w$      |

افزایش طول مانع، که منجر به افزایش گرادیان دما و گرادیان چگالی می‌شود، مقدار آن افزایش می‌یابد. با افزایش عدد گراشهف، انتقال حرارت افزایش یافته و در حالتیکه مانع به حالت عمودی قرار گرفته است، بیشتر از حالتی است که مانع به حالت افقی قرار دارد. روش شبکه بولتزمن به خوبی الگوی جریان و انتقال حرارت را مدل‌سازی کرده است. مدل‌سازی موانع مایل و منحنی شکل در داخل محفظه، به کمک روش شبکه بولتزمن توسط مولفین در حال بررسی است.

## ۶- منابع

- [1] Refai, A. G., Yovanovich, M. M.; "Influence of Discrete Heat Source Location on Natural Convection Heat Transfer in a Vertical Square Enclosure"; Journal of Electronic Packaging, Vol. 113, No. 3, 1991, pp. 268-274.
- [2] Nelson, J.E.B., Balakrishnan, A.R., Murthy, S.S.; "Experiments on stratified chilled water tanks"; Int. J. Refrig., Vol. 22 (3), 1999, pp.216-234.
- [3] Oliveski, R.D.C., Krenzinger, A., Vielmo, H.A.; "Cooling of cylindrical vertical tank submitted to natural internal convection"; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.46 (11), 2003, pp. 2015-2026.
- [4] Huang, K.; Thermodynamics and statistical mechanics, New York, John Wiley, 2<sup>nd</sup> Ed., 1987.
- [5] Jami, M., Mezrhab, A., Bouzidi, M., Lallemand, P.; "Lattice-Boltzmann computation of natural convection in a partitioned enclosure with inclined partitions attached to its hot wall"; Physica A, Vol.368, 2006, pp. 481-494.
- [6] Jami, M., Mezrhab, A., Bouzidi, M., Lallemand, P.; "Lattice Boltzmann method applied to the laminar natural convection in an enclosure with a heat-generating cylinder conducting body"; International Journal of Thermal Sciences, Vol. 46, 2007, pp. 38-47.
- [7] Mezrhab, A., Bouzidi, M., Lallemand, P.; "Hybrid lattice-Boltzmann finite-difference simulation of convective flows"; Computers & Fluids, Vol.33, 2004, pp. 623-641.
- [8] Mohamad, A.A., El-Ganaoui, M., Bennacer, R.; "Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an open ended cavity"; International Journal of Thermal Sciences, Vol.48, 2009, pp. 1870-1875.
- [9] Dixit, H.N., Babu, V.; " Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method"; International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 49, 2006, pp. 727-739.
- [10] Kuznik, F., Vareillesa, J., Rusaouena, G., Kraussa, G.; "A double-population lattice Boltzmann method with non-uniform mesh for the simulation of natural convection in a square cavity"; Int.

## ۵- علائم و نشانه‌ها

|  |            |
|--|------------|
| طول بدون بعد مانع گرم                    | A          |
| فاصله بدون بعد مانع تا دیواره موازی خود  | $A_1$      |
| فاصله بدون بعد نقطه مرکزی مانع تا دیواره | $A_2$      |
| سرعت گسسته‌شده شبکه بولتزمن              | $c_i$      |
| تابع توزیع تعادلی چگالی                  | $f_i^{eq}$ |
| تابع توزیع چگالی                         | $f_i$      |
| تابع توزیع تعادلی انرژی درونی            | $g_i^{eq}$ |
| تابع توزیع انرژی درونی                   | $g_i$      |
| عدد گراشهف                               | Gr         |
| طول حفره (m)                             | H          |
| طول مانع (m)                             | h          |
| فاصله مانع تا دیوار موازی (m)            | $h_1$      |
| فاصله مانع تا دیوار (m)                  | $h_2$      |
| عدد ناسلت محلی                           | Nu         |
| عدد ناسلت متوسط                          | $Nu_{Avg}$ |
| عدد پرانتل                               | Pr         |
| دما (K)                                  | T          |
| دمای مانع (K)                            | $T_h$      |
| دمای دیواره حفره (K)                     | $T_c$      |
| سرعت سیال (m/s)                          | u          |
| ضریب نفوذپذیری شبکه بولتزمن              | $\alpha$   |
| ضریب انبساط گرمایی ( $1/K$ )             | $\beta$    |
| دمای بی‌بعد                              | $\theta$   |
| لزجت سینماتیکی شبکه بولتزمن              | $\nu$      |

- [17] Bhatnaggar, P.L., Groos, E.P., Krook, M.; "a model for collision processes in gases small amplitude processes in charged and neutral one-component systems"; Phys. Rev. A, Vol. 94, 1954, pp. 511-525.
- [18] Luo, L. S., He, X.; "Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation"; J. Stat. Phys., Vol. 88, 1997, pp. 927-944.
- [19] Zou, Q., He, X.; "On pressure and velocity flow boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model"; Phys. Fluids, Vol. 9 (6), 1997, pp. 1591-1599.
- [20] Alamyane, A.A., Mohamad, A.A.; "Simulation of forced convection in a channel with extended surfaces by the lattice Boltzmann method"; Computers and Mathematics with Applications, Vol.59, 2010, pp. 2421-2430.
- [21] Kandaswamy, P., Lee, J., Abdul Hakeem, A. K.; "Natural Convection in a Square Cavity in the Presence of Heated Plate"; Nonlinear Analysis: Modeling and Control, Vol. 12, No. 2, 2007, pp. 203-212.
- Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28 (5),2007, pp. 862-870.
- [11] Frisch, U., hasslacher, B., Pameau, Y.; "Lattice-Gas Automata For Navier-Stokes Equation"; Phys. Rev. Lett., Vol. 56, 1986, pp. 1505-1508.
- [12] McNamara, G., Zanetti, G.; "Use of the Boltzmann equation to simulate the lattice gas automata"; Phys. Rev. Lett., Vol. 61, 1988, pp. 2332-2335.
- [13] Higuera, F.J., Jimenez, J.; "Boltzman approach to lattice-gas simulation"; Euro phys. Lett., Vol. 9, 1989, pp.663-668.
- [14] Hudong, C.; "Recovery of Navier-Stokes equation using a lattice-gas Boltzmann equation method "; Physical Review A., Vol.45(8), 1992, pp.5339-5342.
- [15] Teixeira, C., Chen, H., Freed, D.M.; "Multi-speed thermal lattice Boltzmann method stabilization via equilibrium under-relaxation"; Comput. Phys. Commun., Vol.129 (1/3), 2000, pp. 207-226.
- [16] Shan, X.; "simulation of Rayleigh-Benard convection using a lattice Boltzmann method"; Phy. Rev. E, Vol. 55, 1997, pp. 2780-2788.