مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص‌ص 225-235

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی عددی جریان تراکم‌پذیر به‌روش E-CUSP2011 (LDE) در ساختار داده‌ای ضلع‌محور در شبکه‌های مختلف

وحید اصفهانیان[1]، بهنود جدیری‌حبیبی[2]، مازیار شفائی‌روشنی[3*]

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
2- کارشناسی‌ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، 143951374، mshafaee@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 27 بهمن 1395
پذیرش: 26 اردیبهشت 1396
ارائه در سایت: 29 تیر 1396

کلید واژگان:
جریان غیرلزج دوبعدی
روش E-CUSP2011 (E-CUSP or LDE) (Low Diffusion)
روش CUSP1995
شبکه بی‌سازمان و باسازمان ضلع محور تراکم‌پذیر

چکیده

یکی از روش‌های حل معادلات ناویر- استوکس برای تحلیل جریان‌های آیرودینامیکی استفاده از روش حجم محدود است. با توجه به این‌که بیشتر این جریان‌ها در محدوده تراکم‌پذیر هستند در این‌جا به توصیف یکی از روش‌های چگالی محور CUSP برای حل معادلات پرداخته شده است. در این‌جا حالت LD به روش CUSP اعمال شده و روش LDE را با استفاده از گسسته‌سازی‌های جدید و بهبودیافته به وجود آورده، معادلات برای یک شبکه دوبعدی بی‌سازمان تعمیم داده شده است. با توجه به این‌که از ساختار داده‌ای ضلع محور استفاده شده در نتیجه قابلیت حل شبکه‌های بی‌سازمان و باسازمان برای شبکه‌هایی مورد نظر فراهم شده است. گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات نیز از روش رانگ- کوتا استفاده شده است. در این مطالعه از رانگ- کوتا مرتبه 4، با توجه به این‌که محدوده پایداری قابل قبولی در مقایسه با حجم محاسبات به کار رفته دارد، استفاده شده است. سپس به بررسی نتایج روش بهبود یافته جدید LDE(ECUSP2011) در شبکه بی‌سازمان دو بعدی پرداخته شده و نتایج آن را با روش قدیم CUSP1995 که این روش را نیز برای شبکه بی‌سازمان تعمیم یافته مقایسه شده است. نتایج بیانگر آن است که در روش جدید ارتقا یافته زمان همگرایی کاهش پیدا کرده و تعداد تکرار برای رسیدن به خطای مورد نظر کاهش یافته است. درصد خطای نتایج عددی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی (مانند ضریب فشار) در روش جدید نسبت به روش پیشین کاهش یافته است. قابلیت ترم استهلاکی روش جدیدتر در درست نشان‌دادن مکان شوک دلیل این بهبود یافتن نتایج است.

Numerical Analysis of compressible flow using E-CUSP2011 (LDE) method in Edge-based data structure in different meshes

Vahid Esfahanian[1], Behnoud Jodeiri Habibi[2], Maziar Shafaee Roshani[1*]

1- Faculty of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
2- Faculty of New Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran
* P.O.B. 143951374, Tehran, Iran, mshafaee@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 February 2017
Accepted 16 May 2017
Available Online 20 July 2017

Keywords:
Inviscid 2D Flow
CUSP2011 (Low Diffusion E-CUSP or LDE) Method
CUSP1995 Method
Unstructured and structured edge-based grid
Compressible Flow

ABSTRACT

One of the methods for solving Navier-Stokes equations in order to analyse aerodynamic flows is using finite volume method. Since aerodynamic flows are mostly in the range of compressible flows, here, one of the density based algorithms (CUSP) has been studied for connecting equations. So here by adding the LD (Low diffusion) part to the CUSP method a new method LDE (Low diffusion E-CUSP) has been created which contains new improved discretization and has been extended for an unstructured two dimensional mesh. Using the edge-based data structure the unstructured and structured meshes can be solved. Also, the discretization of time section is done explicitly by Runge-Kutta method. It has acceptable stability range in comparison with the amount of calculation utilized. Then, the results of the new improved method (LDE) have been studied for an unstructured 2d mesh and compared with the old method which has been improved for unstructured mesh. The results show that the convergence time and the number of iterations to reach desired error are reduced. Also, error percentage of numerical results like pressure coefficient is reduced. Moreover, dissipation of this new method works better than the first method in terms of capturing shock location in a proper way.

1- مقدمه

در علم مکانیک سیالات به‌دست آوردن میدان سرعت، دما و فشار برای محاسبه برایند نیروهای وارد بر سطوح و ضرایب برا و پسا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای این کار باید معادله ناویر- استوکس را با روش‌های عددی حل کرده و برای حل آن ترم‌های تشکیل‌دهنده این معادله از جمله ترم جابه‌جایی را گسسته‌سازی کرد. گسسته‌سازی بخش جابه‌جایی معادلات به‌گونه‌ای‌که متناسب با فیزیک جریان باشد، برای به‌دست آوردن پاسخ‌های قابل قبول یکی از مباحث بسیار مهم در شبیه‌سازی‌های عددی است. در این تحقیق نوع جدید گسسته‌سازی بخش جابه‌جایی پیاده می‌شود تا در مسائل مختلف از آن استفاده شود.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

V. Esfahanian, B. Jodeiri Habibi, M. Shafaee Roshani, Numerical Analysis of compressible flow using E-CUSP2011 (LDE) method in Edge-based data structure in different meshes, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 225-235, 2017 (in Persian)

محاسبه مقادیر شارها از سطوح حجم کنترل و شار جابه‌جایی عبوری از این مرزها مشکل اساسی در گسسته‌سازی جابه‌جایی است. اگر از شیوه گسسته‌سازی اختلاف مرکزی برای مدل کردن ترم جابه‌جایی استفاده شود مشاهده می‌شود که در برخی از معادلات مانند معادله جابه‌جایی- پخش[1] پایا پس از گسسته‌سازی در ضرایب مربوط به یک سلول و همسایه‌های آن مقادیر منفی وجود دارد و شرط پایداری که همان مثبت بودن ضرایب است ارضاء نمی‌شود. این امر در واقع سبب ایجاد پاسخ‌های نوسانی و غیرفیزیکی می‌شود. از سوی دیگر در طرح اختلاف مرکزی اثر تمام همسایه‌های یک نقطه برای محاسبه شار جابه‌جایی وارد می‌شود که در واقع قدرت تشخیص جهت جریان و فیزیک واقعی مسأله را از روش می‌گیرد.

با وجودی که روش اختلاف مرکزی از درجه دقت دو و روش بالادست از درجه دقت یک است، ولی به دلیل این که روش بالادست فیزیک جریان را بهتر در نظر می‌گیرد پاسخ‌های قابل قبول‌تری به‌دست می‌دهد، ولی به هر حال روش بالادست در گرفتن گرادیان‌های شدید و تغییرات شدید خواص دچار مشکل است و گرادیان‌ها را مستهلک می‌کند. روش بالادست نیز با توجه به این محدودیت‌ها روش مناسبی برای مدل ترم جابه‌جایی تشخیص داده می‌شود، نبود ترم استهلاک سبب ناکارآمدی این روش‌های بالادست در مکان‌های شوک می‌شود.

برای حل جریان‌های تراکم‌پذیر در ماخ‌های حدود صوت حول اجسام ابتدا معادلات ناویر- استوکس به فرم انتگرالی نوشته شده سپس به کمک طرح تفاضل مرکزی به صورت گسسته درمی‌آیند. مشکل اساسی در حل این معادلات که به دلیل پدیده شوک اتفاق می‌افتد، ناپایداری و ناپیوستگی حل در مکان شوک است. برای رفع این مشکل از طرح‌های اتلاف مصنوعی استفاده می‌شود و به این دلیل بحث اعمال اتلاف مصنوعی به وجود آمد.

طرح‌های تفاضل مرکزی برای حل معادلات ناویر- استوکس و اویلر مورد توجه است، زیرا این نوع طرح‌های تفاضلی اتلافات[2] ناچیز دارند؛ بنابراین اتلافات مصنوعی[3] به معادلات اضافه می‌شود که سهم مهمی در دقت حل معادلات ایفا می‌کند. به دو جهت یادشده در زیر لازم است که اتلافات مصنوعی به معادلات تفاضلی حاکم اعمال شود:

1- نخست از بین بردن نوسانات با فرکانس بالا

2- برای پیش‌بینی بهتر شوک‌ها

پایه و اساس طرح‌های انفصالی غیرنوسانی در دو دهه گذشته گذاشته شده است. یکی از نخستین طرح‌های پیشنهادی در این زمینه توسط جیمسون[4] ارائه شد. در این شکل از اتلافات مصنوعی و ترکیبی از جملات اتلافی مرتبه دوم و چهارم وجود دارد که توسط پژوهشگران متعددی مورد استفاده قرار گرفته است.

اساس این طرح بر این فرض استوار است که ابتدا جملات اتلاف مصنوعی مرتبه چهارم در سراسر ناحیه مورد بررسی برای ممانعت از ناپایداری‌های غیرخطی اضافه می‌شود [1]. این طرح گرچه در آن زمان بسیار موفق بود، ولی لزجت مصنوعی به نسبت زیادی به معادلات اضافه می‌شود.

در تعیین جملات اتلافی باید بسیار دقت کرد. به ویژه در مواردی که اتلافات فیزیکی نظیر لزجت موجود است، افزودن اتلاف بیش از حد سبب ایجاد گردیان‌های تند حتی در ناحیه غیرلزج می‌شود. لازم است که ضرایب اتلافی را در پایین‌ترین حد ممکن انتخاب کرد تا اندازه آن‌ها چنان باشد که فقط بتواند نوسانات را مستهلک کند [2].

به طور کلی طرح‌های تفاضل مرکزی بر پایه تخمین متقارنی از اطلاعات ذخیره شده در نقاط مجاور سطح سلول است. این روش جهتی را که اطلاعات از آن جهت به سلول می‌رسند در نظر نمی‌گیرند و از ماهیت هذلولی مسائل صرف نظر می‌کند.

دسته دوم روش‌های بالادست است. این روش‌ها بر پایه پخش اطلاعات جریان در امتداد جهات مشخصه در دامنه فیزیکی استوار است. این نوع روش‌ها تطابق خوبی با فیزیک جریان در سراسر میدان جریان سیال دارند. نخستین روش از گروه روش‌های بالادست به صورت ضمنی و با دقت درجه اول توسط کورانت [3] ارائه شد.

سپس لیو [4] روش بالادست AUSM را با استفاده از حالت اولیه ماتریس شار جابه‌جایی تعریف کرد که دقت درجه یک و نوع گسسته‌سازی این روش تطابق خوبی با فیزیک جریان دارد، اما نبود اتلافات مصنوعی سبب ناکارآمدی روش در برخی مواقع می‌شد.

سونسن وترکل[5] شکل ماتریس برای جملات اتلافات مصنوعی ارائه کردند که مقدار مناسبی از اتلاف را برای هر منطقه از حل به معادلات اضافه می‌کرد. این ماتریس در ترم اتلافات مصنوعی شامل شار جابه‌جایی سلول‌های شبکه بود، ولی با وجود این ماتریس زمان محاسبات عددی در این حالت به طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به طرح پیشین افزایش یافت [5].

جیمسون روش بالادست کاسپ اولیه را براساس اتلاف مصنوعی ارائه کرد [6-8] که هم سرعت بالای روش‌های بالادست را داشت و هم به دلیل ترم اتلافات مصنوعی مناسب مشکل ناپایداری و ناپیوستگی روش‌های اختلاف مرکزی را رفع می‌کرد.

سپس تاتسومی[6] و جیمسون طرح اتلاف مصنوعی کاسپ[7] را بهبود دادند (CUSP1995) که از نظر دقت قابل رقابت با طرح ماتریسی است و در مواردی حتی پاسخ‌های بهتری می‌دهد و از لحاظ محاسبات و زمان لازم حل را زودتر همگرا می‌کند [10,9].

هدف این مطالعه بررسی روش جدید بهبود و ارتقا یافته LDE(ECUSP2011) و مقایسه با روش CUSP1995 در حالت بی‌سازمان دوبعدی است.

2- معادلات حاکم

در این‌جا تنها به حل معادلات در ناحیه غیرلزج پرداخته خواهد شد [11]. در ادامه معادلاتی که تنها در ناحیه غیرلزج اعتبار دارد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این معادلات با حذف بخش‌های لزج و انتقال حرارت از معادله ناویر- استوکس به‌دست می‌آید. معادله به‌دست‌آمده برای ناحیه غیرلزج با هزینه محاسباتی کمتری نسبت به معادله ناویر- استوکس حل خواهد شد.

یکی از ملاحظات حل عددی، بی‌بعدسازی است. به اختصار بُعدسازی سبب می‌شود که بخش‌های مختلف معادلات هم مرتبه‌شده و درنتیجه خطاهای گردکردن کاهش یابد؛ بنابراین شکل ماتریسی معادلات بی‌بعد غیرلزج ناویر- استوکس برای حل عددی به کار برده می‌شود که به صورت رابطه (1) نوشته می‌شوند [12].

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F^I}{\partial x}+\frac{\partial G^I}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

هر یک از بخش‌های این معادله به صورت رابطه (2) است.

[1] Diffusion-Convection
[2] Dissipation
[3] Artificial Dissipation
[4] Jameson
[5] Swanson & Turkel
[6] Tatsumi
[7] CUSP

$$W=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho E\end{bmatrix}, F^I=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho uu+P\\ \rho vu\\ \rho Eu+Pu\end{bmatrix}, G^I=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho vv+P\\ \rho Ev+Pv\end{bmatrix} \quad (2)$$

در آن u بردار سرعت در جهت x و v بردار سرعت در جهت y است. پس از حل معادلات بالا که به‌وسیله چگالی به یکدیگر وابسته شده‌اند، چهار متغیر ρ, u, v, E به‌دست خواهد آمد. با استفاده از مقدار انرژی کل و رابطه بالا مقدار فشار در میدان به‌دست می‌آید و برای به‌دست آوردن مقدار دما از معادله گاز کامل بی‌بعد رابطه (3) استفاده خواهد شد.

$$\gamma P=\rho T \quad (3)$$

با دقت در روابط بالا پس از حل این معادلات، متغیرهای بردار W یعنی $\rho, \rho u, \rho v, \rho E$ به‌دست خواهد آمد که با قرار دادن مقدار ρ در سه پارامتر دیگر مقادیر u, v, E به‌دست می‌آید؛ بنابراین در این‌جا از پارامتر ρ برای وابسته کردن چهار معادله بالا استفاده می‌شود که به این نوع وابسته کردن معادلات در اصطلاح چگالی محور[1] گفته می‌شود. روشن است که در اعداد ماخ پایین که جریان به صورت غیرقابل تراکم در می‌آید از این نوع حل عددی نمی‌توان استفاده کرد و یا همگراشدن حل به تأخیر می‌افتد. این موضوع به این دلیل است که مقدار چگالی که به عنوان متغیر وابسته بین این روابط استفاده شده است به صورت یک ثابت درمی‌آید و وابسته‌شدن معادلات از بین می‌رود. در این موارد از مقدار فشار برای وابسته‌کردن معادلات استفاده و به آن دیدگاه فشار محور[2] گفته می‌شود.

برای گسسته‌سازی مکانی معادلات سه روش کلی اختلاف محدود، المان محدود و حجم محدود وجود دارد. گسسته‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود با ویژگی انعطاف‌پذیری مناسب بر شبکه‌های با ساختار ضلع‌محور انجام شده است.

2-1-گسسته‌سازی حجم محدود معادلات غیرلزج

در روش حجم محدود انتگرال‌گیری از شکل بقایی معادلات بر حجم کنترل نخستین گام برای گسسته‌سازی معادلات حاکم است. برای این کار رابطه (1) را در نظر آورید. با انتگرال‌گیری از این رابطه بر یک سطح بسته که در این‌جا همان سلول محاسباتی است رابطه (4) را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial t}d\Omega+\int_\Omega\left(\frac{\partial F^I}{\partial x}+\frac{\partial G^I}{\partial y}\right)d\Omega=0 \quad (4)$$

با استفاده از قضیه گوس می‌توان انتگرال مکانی روی یک سطح را به انتگرال روی مرزها و به صورت رابطه (5) تبدیل کرد [13].

$$\int_\Omega \nabla R d\Omega=\oint_s n.R ds \quad (5)$$

در این رابطه ds طول قطاع‌های تشکیل‌دهنده مرزهای حجم کنترل n بردار عمود (به‌سمت خارج از حجم کنترل) بر این قطاع‌هاست که در شکل 1 قابل مشاهده است.

با استفاده از قضیه گوس می‌توان رابطه (4) را به صورت رابطه (6) بازنویسی کرد.

$$\underbrace{\Omega\frac{\partial \bar{W}}{\partial t}}_{\text{بخش زمانی}}+\sum_{j=1}^{N_{edge}}\underbrace{N_xF^I+N_yG^I}_{\text{بخش جابه‌جایی}}=0 \quad (6)$$

باید توجه کرد که این معادلات برای هر کدام از سلول‌های محاسباتی از نظر

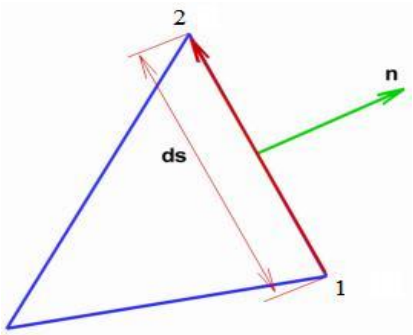

Fig. 1 Converting integral of the area to integral on the boundary

شکل 1 تبدیل انتگرال روی مساحت به انتگرال روی مرز

مکانی گسسته شده است و پس از محاسبه آن برای تمام سلول‌ها باید گسسته‌سازی زمانی نیز انجام پذیرد.

2-1-1-گسسته‌سازی زمانی صریح

روش صریح انتگرال‌گیری چند مرحله‌ای رانگ-کوتا یکی از روش‌های صریحی که دارای کارایی بسیار مناسب است و کاربرد بسیاری در حل جریان‌های دائم دارد [14]. اگر در معادله دیفرانسیل زیر مانده کل به صورت رابطه (7) تعریف شود.

$$Res_i(W)=R_i(W)=F_i^I+G_i^I \quad (7)$$

در این صورت شکل کلی الگوریتم صریح انتگرال‌گیری m مرحله‌ای برای حل رابطه بالا به صورت رابطه (8) است.

$$\begin{aligned}W_i^{(0)}&=W_i^{(n)}\\ W_i^{(1)}&=W_i^{(0)}-a_1\frac{Dt}{A_i}\mathrm{Res}_i^{(0)}\\ &\vdots\\ W_i^{(m-1)}&=W_i^{(0)}-a_{m-1}\frac{Dt}{A_i}\mathrm{Res}_i^{(m-2)}\\ W_i^{(m)}&=W_i^{(0)}-a_m\frac{Dt}{A_i}\mathrm{Res}_i^{(m-1)}\\ W_i^{(n+1)}&=W_i^{(m)}\end{aligned} \quad (8)$$

در رابطه بالا Dt و A_i به ترتیب مقدار گام زمانی و مساحت سلول محاسباتی است. بالانویس n نشان‌دهنده مرحله زمانی و بالانویس m نشان‌دهنده مرحله رانگ-کوتاست. مقدار استاندارد ضرایب a_1 تا a_m از رابطه (9) قابل محاسبه است.

$$\alpha_x=\frac{1}{m-k+1}\quad ;\quad k=1,\cdots,m \quad (9)$$

در این‌جا از رانگ-کوتا 4 مرحله‌ای استفاده شده است.

2-1-2-گسسته‌سازی بخش جابه‌جایی معادلات

اگر مرزهای حجم کنترل را مانند شکل 2 در یک شبکه محاسباتی به صورت گسسته‌شده در نظر بگیریم، بخش جابه‌جایی به صورت رابطه (10) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\text{بخش جابه‌جایی معادلات}&=\sum_{j=1}^{N_{edge}}F_j^I\Delta L_jn_{xj}+G_j^I\Delta L_jn_{yj}\\ \Delta x_j&=x_{j+1}-x_j\ ;\ \Delta y_j=y_{j+1}-y_j\\ \Delta L_j&=\sqrt{\Delta x_j^2+\Delta y_j^2}\\ n_{xj}&=-\frac{\Delta y_j}{\Delta L_j}\ ;\ n_{yj}=\frac{\Delta x_j}{\Delta L_j}\end{aligned} \quad (10)$$

[1] Density based
[2] Pressure based

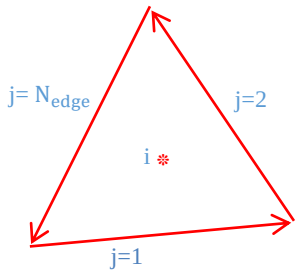

Fig. 2 Discrete boundaries of a cell

شکل 2 مرزهای گسسته‌شده یک سلول

در رابطه (14) j شمارنده اضلاع حجم کنترل است. با در نظر گرفتن رابطه (14) می‌توان بخش جابه‌جایی معادلات را به صورت رابطه (11) بازنویسی کرد.

$$\text{بخش جابه‌جایی معادلات} = F^l n_x \Delta L + G^l n_y \Delta L = \begin{bmatrix} \rho u n_x \\ \rho u u n_x + P n_x \\ \rho v u n_x \\ \rho H u n_x \end{bmatrix} \Delta L + \begin{bmatrix} \rho v n_y \\ \rho u v n_y \\ \rho v v n_y + P n_y \\ \rho H v n_y \end{bmatrix} \Delta L = \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + P n_x \\ \rho v V_n + P n_y \\ \rho H V_n \end{bmatrix} \Delta L = F_C; V_n = u n_x + v n_y \quad (11)$$

2-2- حل بخش جابه‌جایی به روش CUSP

CUSP(1995) -1-2-2

در روش CUSP اولیه [16,15,10] شار جابه‌جایی به صورتی تعریف می‌شود که روش قابلیت روش‌های بالادست را داراست و ترم اتلافات مصنوعی نیز به صورت رابطه (12) سبب جلوگیری از نوسانات حل گردد.

$$\text{بخش جابه‌جایی معادلات} = \frac{1}{2}(\vec{F}_c(\vec{W}_R) + \vec{F}_c(\vec{W}_L)) - \vec{D}_{I+1/2} \quad (12)$$

در آن F_C به‌صورت رابطه (13) تعریف می‌شود.

$$F_C = M_n \begin{bmatrix} \rho c \\ \rho u c + n_x p \\ \rho v c + n_y p \\ \rho H c \end{bmatrix} \quad (13)$$

با توجه به این‌که ترم اتلافات مصنوعی برای جلوگیری از نوسانات حل به معادلات اضافه می‌شود [17] این ترم به صورت رابطه (14) تعریف می‌شود.

$$D_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\alpha^* c)_{I+\frac{1}{2}} \{ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \emptyset \end{bmatrix}_R - \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \emptyset \end{bmatrix}_L \} + \frac{1}{2}\beta_{I+\frac{1}{2}} \{ \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho H V \end{bmatrix}_R - \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho H V \end{bmatrix}_L \} \quad (14)$$

در این‌جا $I+1/2$ در شبکه باسازمان همان مقادیر روی وجه سلول در شبکه بی‌سازمان است. همان‌گونه که پیشتر بیان شد در این‌جا برای ترم $\emptyset$ دو انتخاب وجود دارد. ترم $\emptyset$ در این‌جا یا به صورت انرژی کل E و یا به صورت آنتالپی کل H بیان می‌شود. در انتخاب اولی روش ما به صورت($\emptyset = E$) E-CUSP بیان می‌شود و در حالت دیگر اگر ($\emptyset = H$) در نظر گرفته شود روش ما روش H-CUSP نامیده خواهد شد و این روش برای سیالات غیرلزج بهتر است.

مقادیر ماخ و فشار در مرکز وجوه سلول در شبکه بی‌سازمان یا همان روی صفحه $I+1/2$ در شبکه باسازمان به‌دست می‌آیند پس ضرایب $\alpha^* c$ و β در ترم اتلافات مصنوعی به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود [16].

$$\alpha^* c = \begin{cases} |\tilde{V}| & \text{اگر } \beta = 0 \\ -(1+\beta)\Lambda^- & \text{اگر } \beta > 0 \;\; 0 < M_n < 1 \\ +(1-\beta)\Lambda^+ & \text{اگر } \beta < 0 \;\; -1 < M_n < 0 \\ 0 & \text{اگر } |M_n| \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\beta = \begin{cases} +\max\left(0, \frac{\tilde{V}+\Lambda^-}{\tilde{V}-\Lambda^-}\right) & \text{اگر } 0 \leq M_n < 1 \\ -\max\left(0, \frac{\tilde{V}+\Lambda^+}{\tilde{V}-\Lambda^+}\right) & \text{اگر } -1 < M_n < 0 \\ \text{sign}(M_n) & \text{اگر } |M_n| \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

از آن‌جایی‌که می‌دانیم ضرایب $\alpha^* c$ و β مقادیرشان روی صفحه محاسبه می‌شود به همین دلیل باید مقادیر M_n و V را نیز با استفاده مقادیر سلول سمت چپ و راست مقادیر آن‌ها را روی صفحه $(I+1/2)$ محاسبه کرد.

از طرفی هم با توجه به این‌که در شبکه بی‌سازمان این روش CUSP اعمال می‌شود؛ بنابراین محاسبه ماخ نیاز به محاسبه مقادیر ویژه دارد که از $M_n = \tilde{V}/\tilde{C}$ [15] و همچنین مقادیر ویژه Λ^+ و Λ^- در ضریب β نیز به صورت رابطه (17) محاسبه می‌شود [18].

$$\Lambda^{\pm} = \frac{\gamma+1}{2}\tilde{V} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\tilde{V}\right)^2 + \frac{\tilde{C}^2}{\gamma}} \quad (17)$$

$\tilde{V}$ و $\tilde{C}$ نیز با استفاده از میانگین‌گیری روش رو[1] می‌توان به صورت روابط (18-22) نوشت و محاسبه کرد [19].

$$\tilde{v}_{I+1/2} = \frac{v_L\sqrt{\rho_L} + v_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (18)$$

$$\tilde{u}_{I+1/2} = \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (19)$$

$$\tilde{H}_{I+1/2} = \frac{H_L\sqrt{\rho_L} + H_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (20)$$

$$\tilde{c}_{I+1/2} = \sqrt{(\gamma-1)(\tilde{H} - \frac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{2})_{I+1\backslash 2}} \quad (21)$$

$$\tilde{V}_{I+1/2} = \tilde{u}_{I+1/2} n_x + \tilde{v}_{I+1/2} n_y \quad (22)$$

ECUSP(2011) -2-2-2

در روش ECUSP2011 [21,20] که بهبود یافته روش CUSP1995 است حالت LD را به روش پیشین اعمال کرده که سبب ترم اتلافات مصنوعی بهتر می‌شود. در روش ارتقا یافته مقادیر ماتریس شار جابه‌جایی بر اضلاع سلول‌ها محاسبه می‌شود. ترم اتلافات مصنوعی این روش هم از گسسته‌سازی جدیدی برای ترم فشار بهره می‌برد که سبب جلوگیری از نوسانات حل می‌شود. حال این روش بهبودیافته LDE را برای شبکه بی‌سازمان تعمیم داده می‌شود که در رابطه (22) بیان شده است.

حال ترم جابه‌جایی با توجه به رابطه (14) به‌صورت دیگر تعمیم داده می‌شود [21].

$$\text{بخش جابه‌جایی معادلات} = F^c + F^p = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V \\ \rho v V \\ \rho e V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ p \\ p u \end{pmatrix} \quad (23)$$

همان‌طور که در رابطه (16) دیده می‌شود بخش جابه‌جایی معادلات بعد از ساده‌سازی فقط ماخ نشات گرفته از سرعت مؤثر را در بیرون ماتریس

[1] Roe average method

محاسبه می‌شود و برای مقدار این ماخ روی وجه میانی معادلات مناسب ارائه داده می‌شود حال اگر علاوه‌بر ماخ تعداد پارامترهایی که از ماتریس بیرون کشیده شده زیاد شود و برای تمام مقادیر این پارامترها روی وجه میانی معادلات مناسب آن‌ها ارائه داده می‌شود درنتیجه در این حالت به صورت رابطه (23) به پاسخ‌های بهتری نائل خواهد شد:

$$F^c = V\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{pmatrix} = CM\rho f^c \quad , \quad f^c = \begin{pmatrix}1\\ u\\ v\\ e\end{pmatrix} \tag{24}$$

در نهایت گسسته‌سازی آن به صورت رابطه (24) حاصل می‌شود.

$$F_{\frac{1}{2}} = c_{\frac{1}{2}}(\rho_L C^+(M) f_L^c + \rho_R C^-(M) f_R^c) + P_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ l_x\\ l_y\\ C^+C_L + C^-C_R\end{pmatrix}_l \tag{25}$$

گسسته‌سازی ترم سرعت صوت و فشار براساس رابطه (25) است.

$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(c_L + c_R) \tag{26}$$

برای این‌که این روش در شبکه‌های ضلع‌محور بی‌سازمان تعمیم داده شود علاوه‌بر مقاله‌های این روش از مقاله‌های روش بهبودیافته AUSM[1] و نحوه گسسته‌سازی روش جدیدتر برای اعمال بر این شبکه‌ها به صورت رابطه (26) استفاده می‌شود [22].

$$P_{\frac{1}{2}} = D_L{}^+P_L + D_R{}^-P_R \tag{27}$$

برای گسسته‌سازی ماخ نیز از تعاریف رابطه (27) استفاده می‌شود.

$$M_L = \frac{u_L}{a_{\frac{1}{2}}}, M_R = \frac{u_R}{a_{\frac{1}{2}}} \tag{28}$$

اگر سیال سرعتش بزرگ‌تر از صفر باشد به صورت روابط (29,28) است.

$$C^+(M) = \alpha_L^+(1+\beta_L)M_L - \frac{1}{4}\beta_L(M_L+1)^2 - M_{\frac{1}{2}}^+ \tag{29}$$

$$C^-(M) = \alpha_R^-(1+\beta_R)M_R + \frac{1}{4}\beta_R(M_R-1)^2 + M_{\frac{1}{2}}^- \tag{30}$$

که $M_{\frac{1}{2}}^-$ و $M_{\frac{1}{2}}^+$ به صورت روابط (31,30) قابل محاسبه است [23].

$$M_{\frac{1}{2}}^+ = M_{\frac{1}{2}}\frac{c_R + c_l\emptyset}{c_R + c_l} \tag{31}$$

$$M_{\frac{1}{2}}^- = M_{\frac{1}{2}}\frac{a_l + a_R/\emptyset}{a_R + a_l} \tag{32}$$

محاسبه ماخ روی ضلع به صورت رابطه (32) تعریف می‌شود.

$$M_{\frac{1}{2}} = \beta_L\delta^+M_L^- - \beta_R\delta^-M_R^+ \tag{33}$$

همچنین $\emptyset$ مورد استفاده در ماخ مثبت و منفی روی ضلع نیز به صورت رابطه (33) تعریف می‌شود.

$$\emptyset = \frac{(\rho a^2)_R}{(\rho a^2)_L} \tag{34}$$

حال به تعریف ماخ سمت چپ منفی و ماخ سمت راست مثبت به صورت رابطه (34) پرداخته می‌شود.

$$M_{L,R}^{\pm} = \pm\frac{1}{4}(M_{L,R}\pm 1)^2 \tag{35}$$

رابطه (35) برای گسسته‌سازی ترم فشار در شبکه بی‌سازمان برقرار است [20].

$$D_{L,R}^{\pm} = \alpha_{L,R}^{\pm}(1+\beta_{L,R}) - \frac{1}{4}\beta_{L,R}(M_{L,R}\pm 1)^2(2\mp M_{L,R}) \tag{36}$$

حال به تعریف باقی پارامترها که در معادلات به کار رفته است به صورت روابط (36-38) پرداخته می‌شود.

$$\alpha_{l,r}^{\pm} = \frac{1}{2}[1\pm \mathrm{sign}(m_{l,r})] \tag{37}$$

$$\beta_{l,r} = -\max[0,1-\mathrm{int}(|m_{l,r}|)] \tag{38}$$

$$\delta^{\pm} = \frac{1}{2}[1\pm \mathrm{sign}(\frac{1}{2}(m_l+m_r))] \tag{39}$$

3-2- بررسی ساختار داده‌ای شبکه

گسسته‌سازی میدان جریان با استفاده از شبکه به صورت ضلع محور انجام می‌گیرد و گسسته‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود با ویژگی انعطاف‌پذیری مناسب بر این‌گونه شبکه‌ها انجام شده است.

الگوریتم‌های حل معادلات جریان به‌روش حجم محدود بر شبکه بی‌سازمان به دو صورت سلول‌محور[2] و گره‌محور[3] است. در دیدگاه نخست نقطه کنترلی (نقطه‌ای که خواص جریان در آن محاسبه می‌شود) نقطه وسط سلول بوده و در دیدگاه دوم رئوس سلول‌ها به عنوان نقاط کنترلی برای ذخیره اطلاعات در نظر گرفته می‌شوند. در این‌جا از دیدگاه سلول محور استفاده و مقادیر جریان بر مرکز سلول‌ها ذخیره می‌شود.

ساختار داده‌ای برای ذخیره شبکه محاسباتی می‌تواند به دو صورت ضلع محور[4] یا سلول محور[5] در نظر گرفته شود. در ساختار داده‌ای سلول محور اطلاعات سلول‌ها و در دومی اطلاعات اضلاع شبکه برای گسسته‌سازی معادلات و محاسبه شارها به صورت شکل 3 استفاده می‌شود.

در ساختار داده‌ای ضلع محور اطلاعات اضلاع شبکه برای گسسته‌سازی معادلات و محاسبه شارها مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آن‌جا که ساختار داده‌ای ضلع محور نیاز به حجم حافظه کمتر و انعطاف‌پذیری بیشتر برای استفاده از شبکه ترکیبی[6] دارد، از این نوع ساختار داده‌ای ضلع محور استفاده خواهد شد. مزیت این نوع ساختار داده‌ای این است که در شبکه بی‌سازمان و در شبکه باسازمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این ساختار داده‌ای اطلاعات شبکه به صورت شکل 4 ذخیره می‌شود.

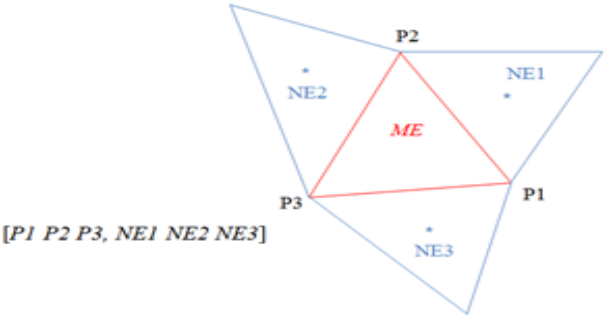

Fig. 3 Cell-Based data structure

شکل 3 ساختار داده‌ای سلول محور

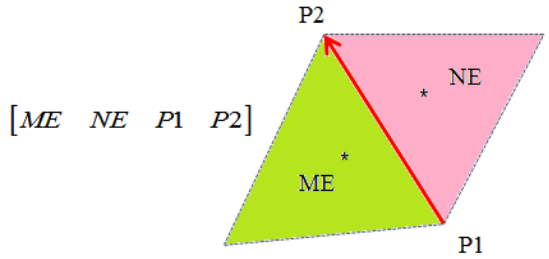

Fig. 4 Edge-Based data structure

شکل 4 ساختار داده‌ای ضلع محور

[1] Advection Upwind Splitting Mach

[2] Cell-Center
[3] Cell-Vertex
[4] Edge-Based
[5] Cell-Based
[6] Hybrid Mesh

با توجه به اطلاعات زیر برای هر کدام از اضلاع تشکیل‌دهنده شبکه محاسباتی ذخیره می‌شود.

ME[1]:سلول سمت چپ

NE[2]:سلول سمت راست

P1: نقطه ابتدایی ضلع

P2: نقطه انتهایی ضلع

در این نوع شبکه‌بندی که بر پایه ضلع‌محور است می‌توان بر روش شبکه باسازمان و بی‌سازمان کار کرد.

3- نتایج نمونه‌ها

در این بخش تعدادی از آزمون‌ها استاندارد که پدیده‌های مختلف آیرودینامیکی در آن‌ها وجود دارد، جهت اطمینان از صحت پیاده‌سازی برنامه و سنجش توانایی آن بررسی خواهد شد. آزمایشات زیر بر کد حاضر انجام شده است و نتایج در ادامه نشان داده خواهد شد. مشخصات و تصاویر مربوط به شبکه‌های استفاده شده در جدول 1 آورده می‌شود.

در این‌جا از شرایط مرزی دیوار برای اضلاع روی دیوار و شرایط مرزی ریمان برای اضلاع واقع بر مرز دوردست استفاده شده است. جهت گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات از روش صریح رانگ- کوتا 4 مرحله‌ای با عدد کورانت 0.9 استفاده شده و بخش جابه‌جایی معادلات نیز توسط دو روش مختلف CUSP گسسته‌سازی شده است. از آن‌جا که حل حالت پایدار مورد نظر است از گام‌های زمانی متغیر استفاده شده است (براساس جدول 2 یعنی برای هر تکرار گام زمانی متفاوت و گام زمانی هر سلول با سلول دیگر متفاوت است).

3-1- نمودار استقلال از شبکه

با توجه به شکل 5 بررسی سه شبکه ریز، متوسط و درشت حول ایرفویل NACA0012 پرداخته و ضریب فشار هر سه شبکه را رسم می‌شود.

جدول 1 آزمایشات انجام شده برای اعتبارسنجی کد حاضر

Table 1 Tests for validate the code

آزمایش	ماخ	زاویه حمله	عنوان هندسه	شبکه استفاده	
1	0.5	3.0	NACA0012	I1	درشت
				I2	متوسط
				I3	ریز
2	0.185	13.1	فلاپ+NLR7301	I5	
3	0.38	0.0	سیلندر	I4	باسازمان[3]
4	0.85	1.0	NACA0012	I2	

جدول 2 شبکه‌های مورد استفاده

Table 2 Used grids

شماره شبکه	تعداد سلول‌ها	تعداد نقاط	تعداد نقاط روی دیوار	تعداد نقاط مرزدوردست
I1	2904	1522	100	40
I2	11616	5948	200	80
I3	46468	23512	400	160
I4	2600	2652	52	52
I5	10116	5262	360	50

[1] Main Element
[2] Neighboring Element
[3] Just cylandr mesh is structured

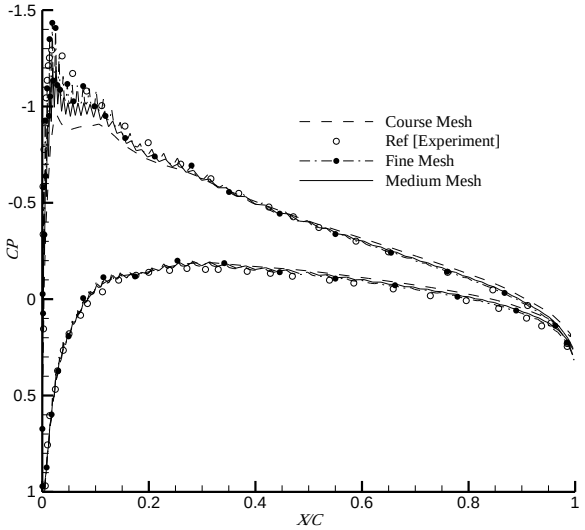

Fig. 5 Difference between pressure coefficient graph for course, fine and medium grid (Mach = 0.5 & angle of attack = 3.0)

شکل 5 مقایسه نمودار ضریب فشار برای شبکه درشت، متوسط و ریز (عدد ماخ 0.5 و زاویه حمله 3.0 درجه)

از نمودار قابل دریافت است که شبکه‌های متوسط بی‌سازمان شبکه‌های مناسبی برای حل است و چون نوسانات کمتری نسبت به شبکه‌های ریز دارند و همچنین این شبکه‌های متوسط دارای نتایج دقیق‌تری نسبت به شبکه‌های درشت داراست.

3-1-1- آزمایش 1

در این آزمایش تأثیر ریزی شبکه بررسی می‌شود. شبکه درشت دارای 2904 سلول بوده، شبکه متوسط 11616 و شبکه ریز دارای 46468 سلول است. همان‌گونه که از شکل 6 ضریب فشار مشاهده می‌شود، با ریز شدن شبکه نمودار ضریب فشار دقیق‌تر می‌شود، اما به‌دلیل خطای عددی با ریز شدن شبکه در لبه حمله این نمودار دارای نوسانات شدیدی می‌شود. در این مطالعه تفاوت دو روش گسسته‌سازی جابه‌جایی CUSP و این‌که کدام دقت بهتری دارد نتیجه‌گیری می‌شود.

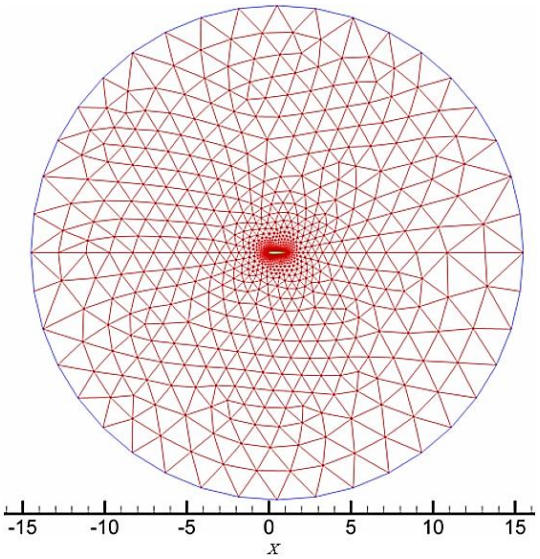

Fig. 6 Unstructured mesh around airfoil naca0012(Far View)

شکل 6 شبکه بی سازمان اطراف ایرفویل NACA0012 (نمای دور)

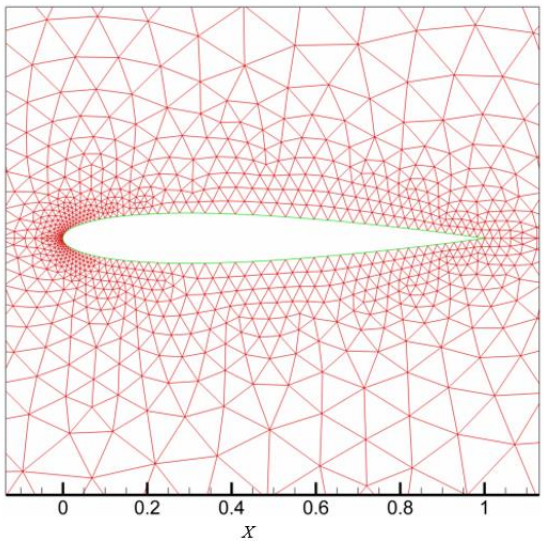

Fig. 7 Unstructured mesh around airfoil naca0012(Near View)

شکل 7 شبکه بی‌سازمان اطراف ایرفویل NACA0012 (نمای نزدیک)

همان‌طور که در بالا نشان داده شده است در شکل 5 ابتدا نمای دور شبکه نشان داده‌شده و سپس نمای نزدیک این شبکه در شکل 6 نمایان شده است. باید توجه کرد که این شبکه درشت حول ایرفویل و شبکه ریز آن حاوی تعداد سلول‌های زیاد و مثلث‌های دور ایرفویل کوچک‌تر است، و به دلیل زیاد نشدن شکل‌ها از آوردن آن‌ها خودداری شده است.

حال به بررسی ضریب فشار در شبکه درشت در دو روش مختلف پرداخته شده است.

همان‌طور که از شکل نیز مشخص است در نواحی غیر شوک تفاوت آنچنانب ندارند ولی در نواحی شوک درصد خطای روش جدید CUSP2011 در حدود 7% کمتر است. حال به بررسی زمان همگرایی پرداخته می‌شود.

همان‌طور که از شکل 8 مشخص است زمان همگرایی روش CUSP2011 کمتر از روش پیشین است و دلیل این نیز وجود پارامترهای مختلف در خارج از ماتریس جابه‌جایی و سبب پاسخ‌های بهتر و زمان همگرایی کمتر است؛

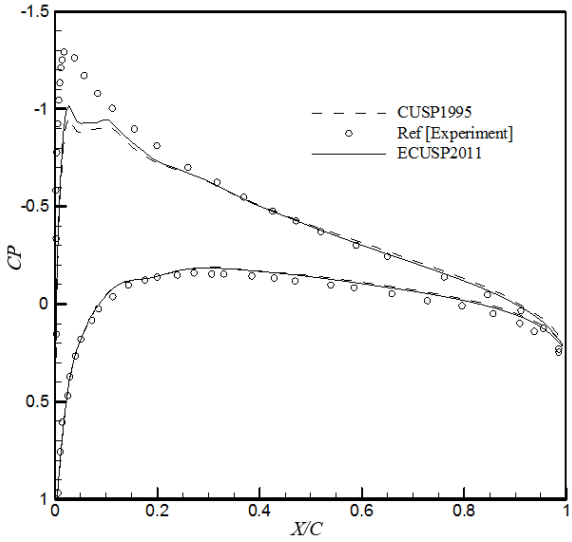

Fig. 8 Difference between pressure coefficient graph for course grid (Mach = 0.5 & angle of attack = 3.0)

شکل 8 مقایسه نمودار ضریب فشار برای شبکه درشت (عدد ماخ 0.5 و زاویه حمله 3.0 درجه)

بنابراین با توجه به این‌که روش CUSP2011 روش بهتری است از این روش برای 3 شبکه درشت و متوسط و ریز روی ایرفویل آزمایش می‌شود که نتایج از قرار زیر است.

براساس شکل 9 با ریز شدن شبکه نمودار ضریب فشار دقیق‌تر می‌شود، اما به دلیل خطای عددی که ناشی از عدم وجود ترم ویسکوز که نبود این ترم سبب تغییرات فشار ناگهانی می‌شود. نمودار 10 با ریز شدن شبکه در لبه حمله دارای نوسانات شدیدی می‌شود. به این دلیل شبکه با مش‌بندی متوسط مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال کانتور فشار را برای شبکه درشت در روش CUSP2011 کشیده می‌شود.

3-1-2- آزمایش 2

در این آزمایش جریان اطراف یک ایرفویل دو المانه شبیه‌سازی و نتایج آن با

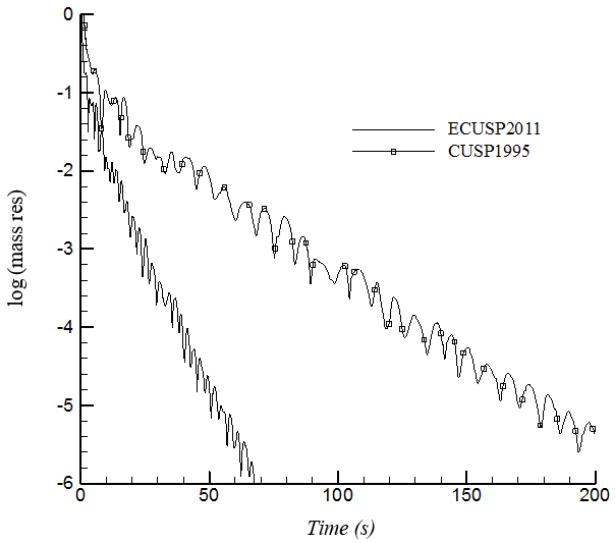

Fig. 9 Difference between time convergence graph for course grid (Mach = 0.5 & angle of attack = 3.0)

شکل 9 مقایسه نمودار همگرایی زمان برای شبکه درشت (عدد ماخ 0.5 و زاویه حمله 3.0 درجه)

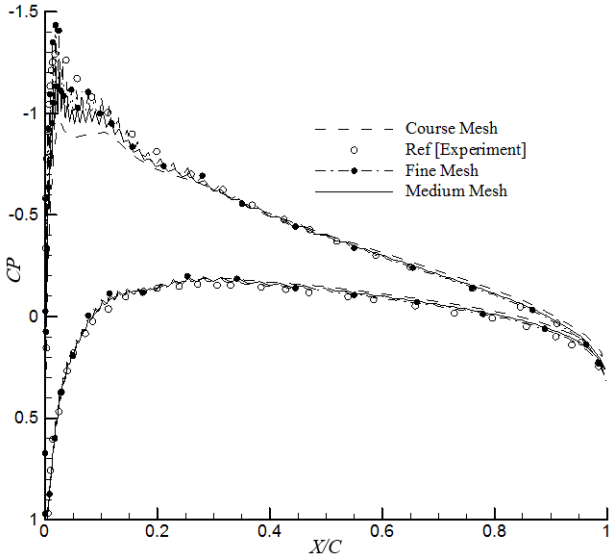

Fig. 10 Difference between pressure coefficient graph for course, fine and medium grid (Mach = 0.5 & angle of attack = 3.0)

شکل 10 مقایسه نمودار ضریب فشار برای شبکه درشت، متوسط و ریز (عدد ماخ 0.5 و زاویه حمله 3.0 درجه)

نتایج مربوط به داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است. این آزمایش می‌تواند توانایی کد توسعه داده‌شده برای هندسه‌های پیچیده را نشان‌دهد. شکل 11 مربوط به فلاپ +NLR7301 و در شکل 12 توسط روش CUSP2011 و در آزمایش پیشین این روش جدید بهتر است، کانتور فشار این روش را در این آزمایش به‌دست آورده می‌شود.

با توجه به شکل 12 حال جهت اعتبارسنجی به دو روش مختلف CUSP و سپس به مقایسه این دو روش پرداخته می‌شود تا به بررسی ضریب فشار هر دو روش با نتایج آزمایشگاهی پرداخته شود.

همان‌طور که در این آزمایش در شکل 13 هم مشاهده می‌شود مانند آزمایش پیشین روش CUSP2011 از روش CUSP1995 به نتایج آزمایشگاهی نزدیک و خطای روش جدید از روش قدیمی کمتر است.

در ادامه تعداد تکرار این دو روش بررسی و مشاهده می‌شود که به ازای چند تکرار به مقدار خطای مورد نظر رسیده می‌شود.

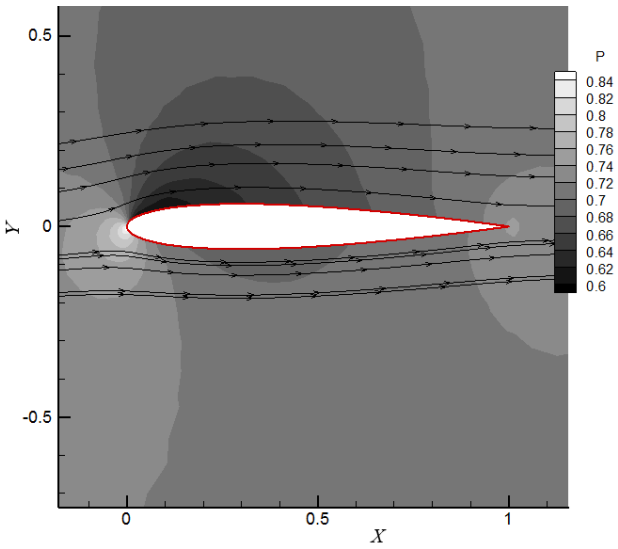

Fig. 11 Pressure contour for course grid (Mach = 0.5 & angle of attack = 3.0)

شکل 11 کانتور فشار برای شبکه درشت (عدد ماخ 0.5 و زاویه حمله 3.0 درجه)

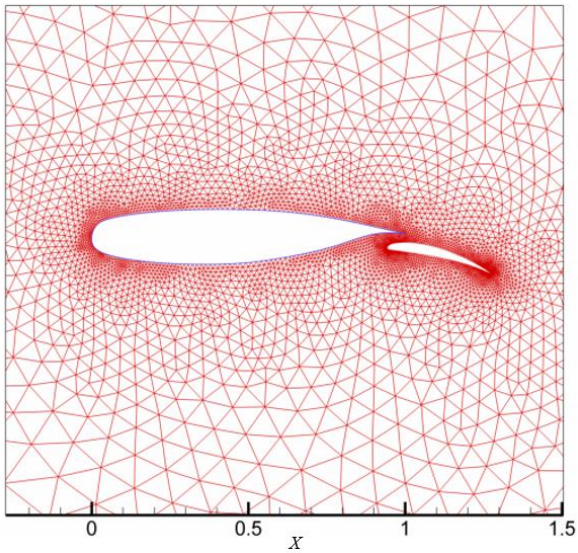

Fig. 12 Unstructured mesh around airfoil NLR7301+Flap (Near View)

شکل 12 شبکه بی‌سازمان اطراف ایرفویل NLR7301+Flap (نمای نزدیک)

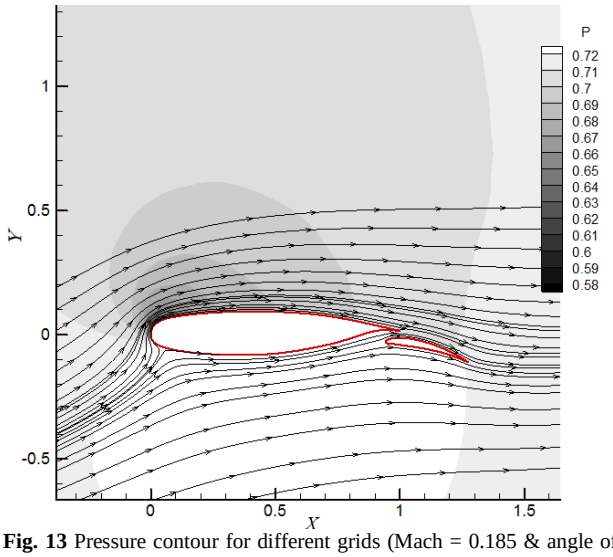

Fig. 13 Pressure contour for different grids (Mach = 0.185 & angle of attack = 13.1)

شکل 13 کانتور فشار برای شبکه‌های مختلف (عدد ماخ 0.185 و زاویه حمله 13.1 درجه)

در شکل 14 مشاهده می‌شود که روش CUSP2011 به ازای تکرار کمتر به مقدار خطای دلخواه می‌رسد که می‌توان نتیجه گرفت که زمان همگرایی این روش از روش CUSP1995 کمتر بوده و سریع‌تر به مقدار خطای دلخواه می‌رسد.

3-1-3- آزمایش 3

در این آزمایش به بررسی دو روش مختلف CUSP در شبکه باسازمان سیلندر پرداخته می‌شود. با توجه به این‌که ساختار داده‌ای ضلع محور برای شبکه‌بندی استفاده و توضیحاتی که بالا داده شده است اگر شبکه‌بندی به صورت ضلع محور ذخیره شود در نتیجه می‌توان برای شبکه باسازمان و شبکه بی‌سازمان کدی را تهیه کرد که در هر دو شبکه مورد استفاده قرار گیرد. پس در شکل 15 شبکه باسازمان سیلندر به صورت بی‌سازمان ضلع محور ذخیره‌شده است.

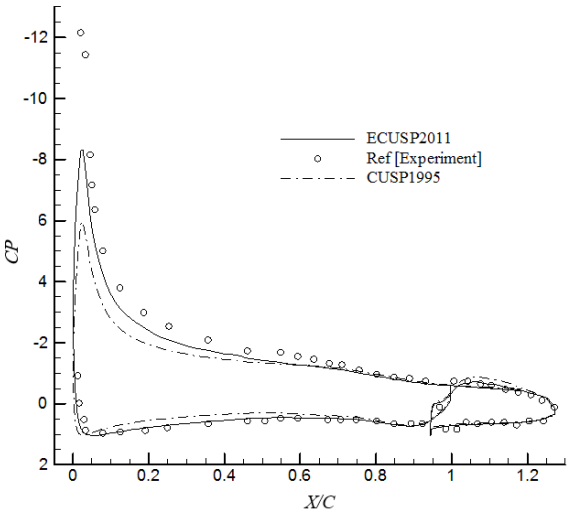

Fig. 14 Difference between pressure coefficient graph for NLR7301+Flap (Mach = 0.185 & angle of attack = 13.1)

شکل 14 مقایسه نمودار ضریب فشار برای NLR7301+Flap (عدد ماخ 0.185 و زاویه حمله 13.1 درجه)

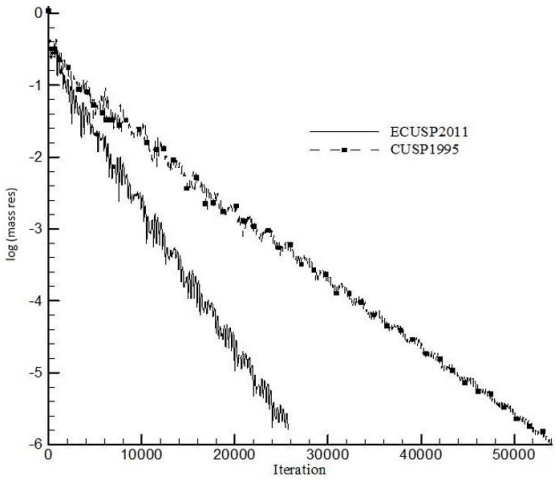

Fig. 15 Difference between iteration convergence graph for NLR7301+Flap (Mach = 0.185 & angle of attack = 13.1)

شکل 15 مقایسه نمودار نکرار-همگرایی خطا برای NLR7301+Flap (عدد ماخ 0.185 و زاویه حمله 13.1 درجه)

براساس شکل 16 ضریب فشار روش CUSP2011 بهتر از روش پیشین در شبکه باسازمان سیلندر است. در ادامه به بررسی نمودار کانتور فشار روش بهتر CUSP2011 پرداخته می‌شود.

با توجه به شکل 17 به بررسی ضریب فشار این دو روش مختلف می‌پردازیم.

3-1-4- آزمایش 4

در این آزمایش هدف بررسی جریان مافوق صوت است که در آن‌ها شوک روش می‌دهد. هدف این است که کدام روش محل مکان شوک را دقیق‌تر پیش‌بینی می‌کند. در این آزمایش شکل 18 مورد نظر ایرفویل NACA0012 به صورت شبکه بی‌سازمان است. شکل بی‌سازمان این ایرفویل مانند شکل 6، با این تفاوت که تعداد سلول‌های مورد نظر برای این آزمایش نسبت به شکل 6 بیشتر و دلیل این زیاد بودن تعداد سلول‌ها نیز جهت کمک برای نشان دادن دقیق محل شوک است. حال به بررسی ضریب برا برای این دو روش پرداخته می‌شود.

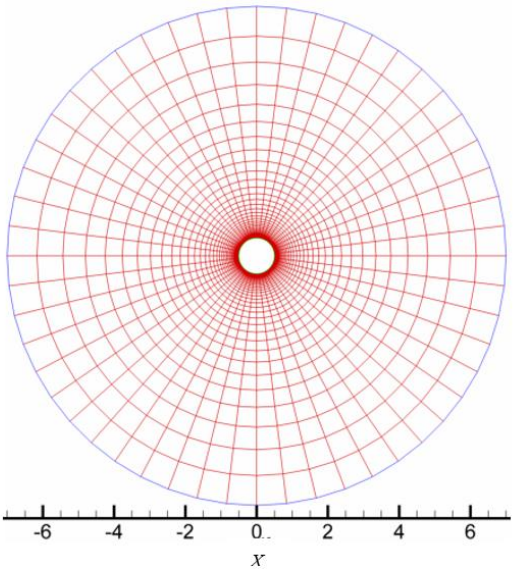

Fig. 16 Structure mesh around Cylinder (Near View)

شکل 16 شبکه باسازمان اطراف سیلندر (نمای نزدیک)

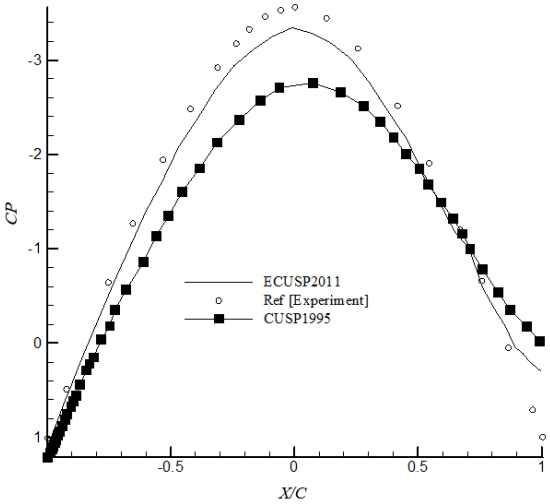

Fig. 17 Difference between pressure coefficient graph for Cylinder (Mach = 0.38 & angle of attack = 0.0)

شکل 17 مقایسه نمودار ضریب فشار برای سیلندر (عدد ماخ 0.38 و زاویه حمله 0.0 درجه)

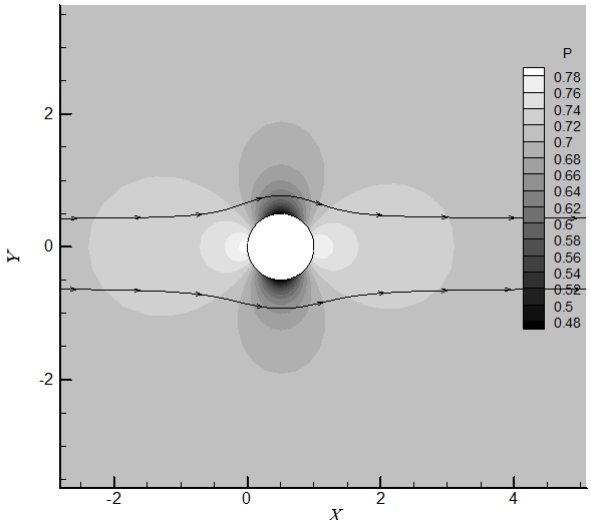

Fig. 18 Pressure contour for Cylinder grid (Mach = 0.38 & angle of attack = 0.0)

شکل 18 کانتور فشار برای شبکه سیلندر (عدد ماخ 0.38 و زاویه حمله 0.0 درجه)

همان‌طور که در شکل 19 مشاهده می‌شود روش ECUSP2011 نسبت به روش پیشین در جریان مافوق صوت به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است و محل شوک را نسبت به روش پیشین در حدود 6% بهتر تخمین می‌زند که می‌توان دلیل آن را وجود پارامترهای مختلف در خارج ماتریس و محاسبه آن‌ها روی اضلاع دانست.

در شکل 20 به نمایش نمودار ماخ در روش بهتر ECUSP2011 پرداخته می‌شود.

4-نتیجه گیری

همان‌طور که در نتایج ملاحظه می‌شود روش CUSP2011 تعمیم یافته بهتر از روش CUSP1995 است. دلیل این امر وجود پارامترهای مختلف مانند سرعت صوت، ماخ و چگالی در خارج از ماتریس شار جابه‌جایی است که سبب می‌شود مقادیر پارامترها روی صفحه ضلع محاسبه شود که این نیز خود دلیل به وجود آمدن نتایج بهتری می‌شود.

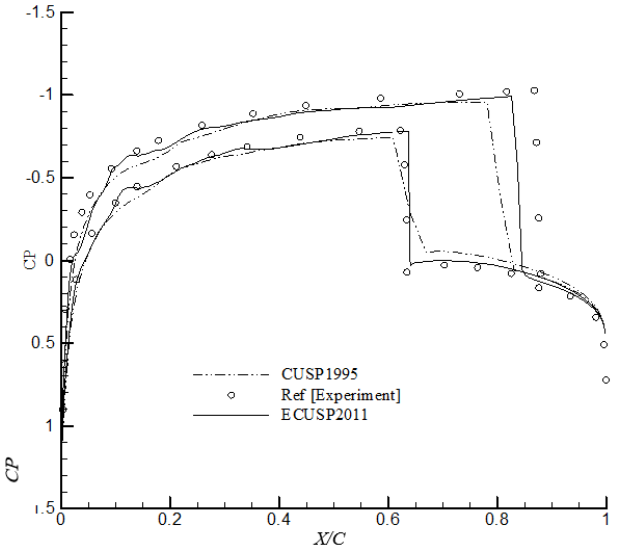

Fig. 19 Difference between pressure coefficient graph for NACA0012 (Mach = 0.85 & angle of attack = 1.0)

شکل 19 مقایسه نمودار ضریب فشار برای ایرفویل (عدد ماخ 0.85 و زاویه حمله 1.0 درجه)

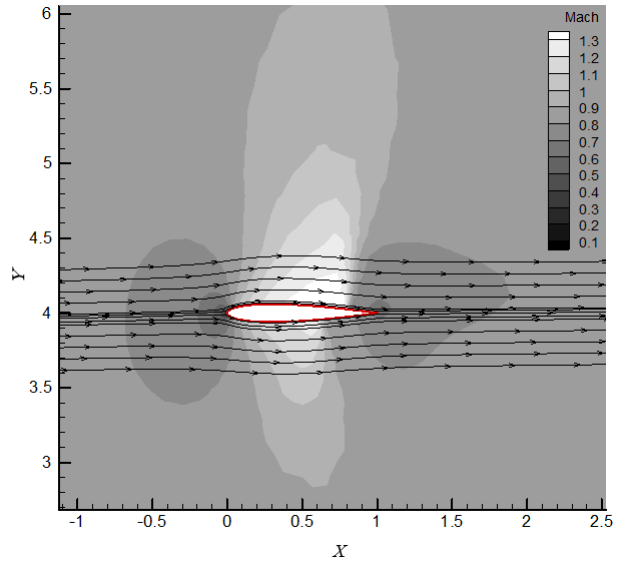

Fig. 20 Mach contour for NACA0012 grid (Mach = 0.85 & angle of attack = 1.0)

شکل 20 کانتور ماخ برای شبکه ایرفویل (عدد ماخ 0.85 و زاویه حمله 1.0 درجه)

روش CUSP2011 به دلیل این‌که ترم اتلافات مصنوعی این تطابق بیشتری با فیزیک جریان دارد در نتیجه در نشان دادن مکان شوک نسبت به روش CUSP1995 بهتر عمل می‌کند.

همان‌طور که مشاهده شد در نقطه سکون دارای بیشترین فشار و کمترین سرعت است. در این نقطه با افزایش فشار با فرض گاز کامل هوا مشاهده می‌شود که دما نیز افزایش یافته است. این دو رابطه عکسی با ماخ به عنوان عامل سرعت‌ساز دارند. در منحنی مربوط به ضریب فشار قابل مشاهده است که c_p در نوک ایرفویل تقریباً برابر یک و بیشترین اختلاف ضریب فشار روی لبه حمله مشاهده می‌شود.

در روش جدید تعمیم یافته CUSP2011 نسبت به روش CUSP1995 زمان همگرایی کاسته شده و تعداد تکرار برای رسیدن به خطای مورد نظر کاهش می‌یابد. درصد خطای نتایج عددی روش جدید نیز با توجه به نتایج کاهش می یابد.

5- تقدیر و تشکر

از مدیریت و استادان محترم دانشگاه تهران که با رهنمودهای‌شان و فراهم‌کردن رایانه‌های مناسب جهت انجام کارهای تحقیقاتی بنده را یاری کردند بسیار سپاس‌گزارم.

6- مراجع

[1] A. Jameson, W. Schmidt, Some recent developments in numerical methods for transonic flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, No. 1, pp. 467-493, 1985.
[2] N. Hirata, O. Faltinsen, Computation of Cobblestone effect with unsteady viscous flow under a stern seal bag of a SES, *fluids and structures*, Vol. 14, No. 7, pp. 1053-1069, 2000.
[3] R. Courant, E. Isaacson, M. Rees, On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, No. 3, pp. 243-255, 1952.
[4] M. S. Liou, C. J. Steffen Jr, A new flux splitting scheme, *Computational Physics*, Vol. 107, No. 1, pp. 23-39, 1991.
[5] R. C. Swanson, E. Turkel, On central-difference and upwind schemes, *Computational Physics*, Vol. 101, No. 2, pp. 292-306, 1992.
[6] A. Jameson, Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows, *Proceeding of 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Orlando, U.S.A, July 6-9, pp. 93-3359.
[7] A. Jameson, Positive schemes and shock modelling for compressible flows, *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 743-776, 1995.
[8] A. Jameson, Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence, *Computational Fluid Dynamics*, Vol. 4, No. 3-4, pp. 171-218, 1995.
[9] S. Tatsumi, L. Martinelli, A. Jameson, Design, implementation, and validation of flux limited schemes for the solution of the compressible Navier-Stokes equations, *Proceeding of AIAA 32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit Conference*, Reno, Nevada, Jan 10-13, pp. 94-0647, 1994.
[10] S. Tatsumi, L. Martinelli, A. Jameson, A new high resolution scheme for compressible viscous flows with shocks, *AIAA paper*, Vol. 95, pp. 0466, 1995.
[11] J. Bardina, P. Huang, T. Coakley, J. Bardina, P. Huang, T. Coakley, Turbulence modeling validation, *Proceeding of 28th Fluid Dynamics Conference*, Snowmass Village, CO, U.S.A., June 29, pp. 2121-2137, 1997.
[12] R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, D. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Third Eddition, pp. 315-347, Boca Raton, CRC Press, 2012.
[13] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, Secound Eddition, pp. 224-225, London, Pearson Education, 2007.
[14] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics*, Secound Eddition, pp. 441-460, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2007.
[15] K. Kirkköprü, M. Uygun, Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods: Central versus Upwind Schemes, *Aeronautics and Space Technologies*, Vol. 2, No. 1, pp. 47-55, 2005.
[16] M. Nemec, D. Zingg, Aerodynamic computations using the convective-upstream split-pressure scheme with local preconditioning, *AIAA journal*, Vol. 38, No. 3, pp. 402-410, 2000.
[17] J. Blazek, *Computational fluid dynamics: principles and applications*, Third Eddition, pp. 100-103, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2015.
[18] A. Jameson, Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 2: Artificial diffusion and discrete shock structure, *Computational Fluid Dynamics*, Vol. 5, No. 1-2, pp. 1-38, 1995.

[19]P. L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *Computational Physics*, Vol. 43, No. 2, pp. 357-372, 1981.
[20]Y. Shen, G. Zha, M. A. Huerta, Rotated hybrid low diffusion ecusp-hll scheme and its applications to hypersonic flows, *AIAA Paper*, Vol. 3545, pp. 2011, 2011.
[21]G. C. Zha, Y. Shen, B. Wang, An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme, *Computers & Fluids*, Vol. 48, No. 1, pp. 214-220, 2011.
[22]M. S. Liou, Ten years in the making-AUSM-family, *Proceeding of 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, CA, U.S.A., June 11-14, pp. 2001-2521, 2001.
[23]M. S. Liou, A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds, *Computational Physics*, Vol. 214, No. 1, pp. 137-170, 2006.