مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند1396، دوره 17، شماره 12، ص‌ص 145-156

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل دینامیکی منیپولاتورهای انعطاف پذیر ساخته شده از مواد تابعی

وحید رضایی[1]، علی محمد شافعی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

* کرمان، صندوق پستی 133-76175، shafei@uk.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 شهریور 1396
پذیرش: 30 مهر 1396
ارائه در سایت: 10 آذر 1396

کلید واژگان:
تئوری تیر تیموشنکو
منیپولاتورهای انعطاف پذیر
مواد تابعی
گیبس-اپل
روش مودهای فرضی

چکیده

در این تحقیق، معادلات حرکت یک منیپولاتور n لینکی ساخته شده از مواد تابعی که خواص آن یک بار در راستای طول و بار دیگر در راستای ضخامت به صورت پیوسته تغییر می‌کند مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای استخراج معادلات حرکت از فرمولاسیون گیبس-اپل و جهت مدل‌سازی خاصیت انعطاف‌پذیری لینک‌ها از تئوری تیر تیموشنکو بر پایه‌ی روش مودهای فرضی استفاده شده است. در ادامه اثر تغییر در شاخص قانون توانی بر روی رفتار ارتعاشی یک منیپولاتور دولینکی، ساخته شده از مواد تابعی برای هر دو حالتی که خواص مکانیکی لینک‌ها یک بار در راستای طول و بار دیگر در راستای ضخامت تغییر می‌کند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با معرفی پارامتری به نام انرژی سیگنال نشان داده می‌شود که تغییر در اندیس قانون توانی اثر قابل ملاحظه‌ای بر روی رفتار ارتعاشی سیستم می‌گذارد؛ به طوری که با انتخاب شاخص قانون توانی مناسب، ارتعاشات سیستم را می‌توان به طور قابل ملاحظه‌ای به صورت غیر فعال (پسیو) کاهش داد.

Dynamic analysis of flexible robotic manipulators constructed of functionally graded materials

Vahid Rezaei, Ali Mohammad Shafei*

Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.
* P.O.B. 133-76175 Kerman, Iran, shafei@uk.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 September 2017
Accepted 22 October 2017
Available Online 01 December 2017

Keywords:
Timoshenko Beam Theory
Flexible Manipulators
Functionally Graded Materials
Gibbs-Appell
Assumed Mode Method

ABSTRACT

In this article, the dynamic equations of multiple flexible links robotic manipulators fabricated of functionally graded materials (FGM), whose properties vary continuously along the axial direction and also along the thickness, are examined. Gibbs-Appell methodology and Timoshenko Beam Theory according to the Assumed Mode Method are utilized to obtain the equations of motion and to model the flexible characteristics of links, respectively. Subsequently, the influence of power law index on the vibration response of a two-link functionally graded robotic manipulator is studied for two cases in which the mechanical properties of links vary once along the axial direction and again along the thickness direction of each link. By introducing a parameter called signal energy, it is shown that the power law index has a substantial effect on the vibrational behaviors of the mentioned system; and that by choosing a proper power law index, system vibrations can be reduced considerably in a passive way.

1- مقدمه

مدل‌سازی ربات‌ها با بازوهای انعطاف‌پذیر، به دلیل هزینه‌ی کمتر، سرعت بالاتر، مصرف انرژی پایین‌تر و عملگرهای کوچکتر توجه محققان بسیاری را به سمت خود معطوف کرده است. اما وزن پایین و طول بلند بازوهای این‌گونه از ربات‌ها، افزایش ارتعاشات سیستم را به دنبال خواهد داشت. ارتعاشات باعث می‌شود که مجری نهایی در موقعیت از پیش تعیین شده خود قرار نگیرد. بنابراین ضروری است که یک توازن بین انعطاف‌پذیری و وزن لینک‌ها ایجاد شود. برای رسیدن به این هدف، در این مقاله از مواد کامپوزیتی مانند مواد تابعی (FGM) بهره گرفته شده است.

مواد تابعی مواد همگنی هستند که از ترکیب دو یا چند ماده‌ی مختلف ساخته شده‌اند؛ به طوری که چگالی و مدول الاستیسیته به طور پیوسته از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر پیدا می‌کند [1]. تحقیقات زیادی در ارتباط با ارتعاشات تیرهای ساخته شده از مواد تابعی انجام شده است. سو و همکاران [2]، از روش سختی دینامیکی[1] برای تعیین رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته شده از مواد تابعی استفاده کردند. کالیم [3]، ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد تابعی در راستای طول تیر[2] و تحت بارهای ضربه‌ای و بستر ویسکوالاستیک را بررسی کرد. لی و لی [4]، با پیشنهاد روش ماتریس انتقال دقیق[3]، رفتار ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از مواد تابعی را

[1] Dynamic stiffness method
[2] Axially functionally graded materials
[3] Exact transfer matrix method

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

V. Rezaei, A. M. Shafei, Dynamic analysis of flexible robotic manipulators constructed of functionally graded materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 145-156, 2018 (in Persian)

مورد مطالعه قرار دادند. هوانگ و لی [5]، با به کار گیری معادلات انتگرالی فردهلم[1]، پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از مواد تابعی در راستای طول تیر و با سطح مقطع متغیر را بررسی کردند. در روش پیشنهادی آن‌ها معادلات دیفرانسیلی سیستم به معادلات جبری با ضرایب مجهول تغییر داده می‌شود سپس با حل کردن این معادلات جبری، فرکانس‌های طبیعی سیستم بدست می‌آیند. جین و ونگ [6]، ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از مواد تابعی را با استفاده از روش المان مربعی[2] مورد تحلیل قرار دادند. ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از روش ریلی-ریتز[3] توسط پرادهان و چاکراورتی [7]، مورد بررسی قرار گرفت. گیونتا و همکاران [8]، ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته شده از مواد تابعی را با استفاده از مدل‌های سلسله مراتبی[4] مطالعه کردند. تسیاتس و چارالامپاکیس [9]، با استفاده از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی[5]، تیر ساخته شده از مواد تابعی در راستای طول را بهینه کردند. ارتعاشات آزاد تیر ساده‌ی ساخته شده از مواد تابعی توسط آیدوگدو و تاسکین [10] با کمک تئوری تیر کلاسیک[6]، تئوری تیر تغییر شکل برشی سهموی[7] و تئوری تغییر شکل برشی توانی[8] مورد مطالعه قرار گرفت. اما همه‌ی این کارها محدود به تحلیل ارتعاشی تیرهای انعطاف‌پذیر بوده و حرکت بزرگ تیر در تحلیل‌ها در نظر گرفته نشده است.

در زمینه‌ی کاهش ارتعاشات بازوهای انعطاف‌پذیر، یک مدل دقیق به منظور مطالعه‌ی رفتار ارتعاشی این‌گونه از لینک‌ها مورد نیاز است. لذا مدل‌سازی ریاضی یک مرحله‌ی ضروری برای بررسی رفتار دینامیکی منیپولاتورهای انعطاف‌پذیر است. کمبرا و بتله [11]، به مطالعه‌ی مسیر حرکت مجری نهایی برای یک ربات تک لینکی انعطاف‌پذیر با استفاده از یک مود ارتعاشی پرداختند. شاوکی و همکاران [12]، حرکت انتهایی یک منیپولاتور انعطاف‌پذیر را با استفاده از روش مودهای فرضی بررسی نمودند. جی وی و همکاران [13]، برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم، از روش مودهای کلی[9] استفاده کردند. لودینی و همکاران [14]، از تئوری تیر تیموشنکو برای استخراج معادلات حرکت یک ربات الاستیک که یک بار متمرکز را در انتهای خود حمل می‌کرد، استفاده نمودند. وایت و هپلر [15]، یک تیر انعطاف‌پذیر متصل به یک هاب دوار را بر مبنای تئوری تیر تیموشنکو مدل‌سازی کردند. موریس و مدنی [16]، اثرات تغییر شکل برشی را برای تحلیل یک لینک انعطاف‌پذیر در نظر گرفتند. ونگ و گوان [17]، اثرات اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی و بار حمل شده توسط مجری نهایی را در رفتار ارتعاشی منیپولاتورهای انعطاف‌پذیر در نظر گرفتند. کارای و همکاران [18]، مدل دینامیکی سیستم را با استفاده از دیدگاه لاگرانژین بازگشتی و روش مودهای فرضی استخراج کردند. تادیکندا و بارو [19]، از تئوری تیر اویلر برنولی برای توصیف انعطاف‌پذیری استفاده نمودند و اثر حرکت الاستیک را بر روی حرکت انتقالی در نظر گرفتند. جنیفنه و فهیم [20]، یک منیپولاتور تک لینکی را با در نظر گرفتن دو مود اول تیر یک سر گیردار شبیه سازی کردند. سان و همکاران [21]، یک منیپولاتور انعطاف‌پذیر را به عنوان یک تیر کنسول حامل بار و با سطح مقطع ثابت مدل‌سازی کردند به طوری که برای مدل‌سازی خاصیت انعطاف‌پذیری لینک‌ها، از روش مودهای فرضی استفاده شد. گورسس و همکاران [22]، مدل دینامیکی یک ربات تک لینکی انعطاف‌پذیر را با اعمال کردن تقریب اویلر-برنولی و استفاده از روش اجزاء محدود استخراج کردند. هوانگ و لین [23]، مسأله‌ی دنبال کردن مسیر حرکت یک بازوی ربات را با استفاده از روش مودهای فرضی حل کردند. پایو و همکاران [24]، پاسخ دینامیکی یک منیپولاتور انعطاف‌پذیر بسیار سبک که با محیط پیرامون خود برخورد می‌کند را مورد مطالعه قرار دادند. اما همه‌ی کارهایی که در تاریخچه‌ی موضوع به آن‌ها اشاره شد به ربات‌های تک لینکی ساخته شده از یک جنس ثابت محدود می‌شوند.

کارهای زیادی در حوزه‌ی دینامیک ربات‌های انعطاف‌پذیر دو لینکی و چند لینکی انجام شده است. بوک و اوبرگفل [25]، با اتخاذ روش مودهای فرضی برای تحلیل یک منیپولاتور دو لینکی، نتایج بدست آمده از مدل‌سازی ریاضی و داده‌های تجربی را مورد مقایسه قرار دادند. لوچان و همکاران [26]، روش پارامتر فشرده[10] را برای مدل‌سازی منیپولاتور دو لینکی انعطاف‌پذیر پیشنهاد کردند. آتا و همکاران [27]، با در نظر گرفتن سه نوع شرط مرزی در مدل‌سازی منیپولاتور، نشان دادند که پاسخ دینامیکی سیستم شدیداً وابسته به شرایط مرزی می‌باشد. ظهور و خرسندی‌جو [28]، مدل دینامیکی یک بازوی دو لینکی بسیار انعطاف‌پذیر را با در نظر گرفتن تغییر فرم پیچشی، کششی-فشاری و خمشی استخراج نمودند. میرزائی و همکاران [29]، معادلات حاکمه‌ی حرکت را برای یک منیپولاتور دو لینکی با استفاده از اصل همیلتون تعمیم یافته و روش مودهای فرضی بدست آوردند. چن [30]، با بهره گیری از معادلات لاگرانژ برای منیپولاتورهای انعطاف‌پذیر چند لینکی و استفاده از روش مودهای فرضی، معادلات حرکت را استخراج کرد. اما تقریباً همه این کارها از پیچیدگی محاسباتی بالایی برخوردار هستند؛ به‌گونه‌ای که زمان زیادی صرف شبیه سازی عددی آنها می‌گردد.

یکی از روش‌های مورد استفاده در استخراج معادلات حاکمه‌ی سیستم‌های مکانیکی، فرمولاسیون گیبس-اپل است که از تابع گیبس در استخراج معادلات استفاده می‌کند. شافعی و شافعی [31]، از فرمولاسیون گیبس-اپل بازگشتی به‌منظور استخراج معادلات حرکت منیپولاتورهای چند لینکی انعطاف‌پذیر استفاده کردند. به‌منظور کاهش عملیات ریاضی برای بدست آوردن معادلات دینامیکی، کورایم و همکاران [32]، فرمولاسیون گیبس-اپل و ماتریس‌های تبدیل 3×3 را پیشنهاد کردند. آنها یک ستاپ آزمایشگاهی ساختند تا نتایج حاصل از مدل‌سازی دینامیکی را با نتایج حاصل از آزمایش اعتبار سنجی کنند. کورایم و شافعی [33]، از فرمولاسیون گیبس-اپل بازگشتی و روش مودهای فرضی با در نظر گرفتن اثرات میرایی سازه‌ای (کلوین-ویت) و میرایی ناشی از ویسکوزیته‌ی هوا برای استخراج معادلات حرکت یک منیپولاتور n لینکی انعطاف‌پذیر استفاده کردند. در مدل‌سازی لینک‌ها، از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شد. اما تمامی کارهای اشاره شده در بالا، محدود به استفاده از لینک‌های ساخته شده از یک ماده می‌شود.

هدف اصلی این مقاله، استخراج معادلات حرکت یک ربات n لینکی انعطاف پذیر ساخته شده از مواد تابعی است که خواص آن هم در راستای طول و هم در راستای ضخامت به صورت پیوسته تغییر می‌کند. تا آنجایی که به اطلاعات نویسندگان مربوط می‌شود، این اولین کاری است که در زمینه‌ی تحلیل دینامیکی ربات‌های الاستیک ساخته شده از مواد تابعی ارائه شده است. لذا بخش‌بندی مقاله بصورت زیر ارائه می‌گردد: در بخشهای دوم و سوم به‌ترتیب سینماتیک و دینامیک منیپولاتورهای ساخته شده از مواد تابعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به‌منظور صحه‌گذاری بر نتایج بدست آمده، در بخش چهارم شبیه‌سازی دینامیکی سیستم انجام می‌گیرد؛ و در پایان در

[1] Fredholm integral equations
[2] Quadrature element method
[3] Raleigh-Ritz
[4] Hierarchical modelling
[5] Differential evolution
[6] Classical beam theory
[7] Parabolic shear deformation beam theory
[8] Exponential shear deformation beam theory
[9] Global mode method
[10] Lumped parameter method

بخش پنجم نتایج تحقیق صورت گرفته در این مقاله ارائه می‌گردد.

2- سینماتیک منیپولاتورهای ساخته شده از مواد تابعی

روش به کار رفته در این مقاله، همان روش به کار گرفته شده در مقاله مرجع [33] است. در این مقاله نحوه‌ی اختصاص دستگاه‌های مختصات به بازوها، روش مدل‌سازی انعطاف‌پذیری در لینک‌ها (روش مودهای فرضی) و بقیه‌ی موارد با ذکر جزئیات آورده شده و برای اجتناب از طولانی شدن مقاله، از آوردن آن جزئیات در این کار اجتناب شده است. تفاوت اصلی این کار با کار مرجع [33]، در این است که جنس ماده در راستای طول و همچنین در راستای ضخامت لینک‌ها به صورت تابعی تغییر می‌کند. برای نشان دادن این موضوع، همان‌گونه که در شکل 1 نشان داده شده است رنگ بازوها از ابتدا تا انتهای لینک به صورت طیفی تغییر می‌کند. در ادامه نحوه‌ی تغییرات جرم واحد طول و مدول الاستیسیته هم در راستای طول و هم در راستای ضخامت بیان خواهد شد.

2-1- نحوه‌ی تغییرات خواص مکانیکی (جرم واحد طول و مدول الاستیسیته) در راستای طول

نحوه تغییرات جرم واحد طول و مدول الاستیسیته بر حسب طول لینک از روابط (1) و (2) بدست می‌آید:

$$\mu_{ia}(\eta) = \left(\mu_{ie} - \mu_{if}\right)\left(\frac{\eta}{l_i}\right)^{\lambda} + \mu_{if} \tag{1}$$

$$E_{ia}(\eta) = \left(E_{ie} - E_{if}\right)\left(\frac{\eta}{l_i}\right)^{\lambda} + E_{if} \tag{2}$$

که در آن $\mu_{ia}(\eta)$ و $E_{ia}(\eta)$ به ترتیب تغییرات جرم واحد طول و مدول الاستیسیته را برای لینک iام و در راستای طول لینک نشان می‌دهند.

همچنین μ_{if} و μ_{ie} به ترتیب جرم واحد طول در ابتدا و انتهای لینک iام، l_i طول بازوی iام و λ به شاخص قانون توانی اشاره می‌کند. از طرفی E_{if} و E_{ie} به ترتیب مدول‌های الاستیسیته در ابتدا و انتهای لینک iام را مشخص می‌کنند. نحوه‌ی تغییرات مدول الاستیسیته در راستای طول به‌صورت بی‌بعد بر حسب متغیر λ، در شکل 2 نشان داده شده است. شبیه شکل 2 را برای جرم واحد طول نیز می‌توان ارائه نمود.

2-2- نحوه‌ی تغییرات خواص مکانیکی (جرم واحد حجم و مدول الاستیسیته) در راستای ضخامت

نحوه تغییرات جرم واحد حجم در راستای ضخامت از رابطه (3) تبعیت می‌کند:

$$\rho_{ith}(y) = \left(\rho_{if} - \rho_{ib}\right)v_t + \rho_{ib} \qquad , \quad v_t = \left(\frac{y}{t_i} + \frac{1}{2}\right)^{\lambda} \tag{3}$$

که در آن $\rho_{ith}(y)$، بیانگر جرم واحد حجم برای لینک iام در راستای ضخامت است. همچنین ρ_{if} و ρ_{ib} به ترتیب، جرم واحد حجم را در صفحات رو به رو و عقب لینک iام نشان می‌دهند. از طرفی t_i ضخامت بازوی انعطاف‌پذیر iام و y فاصله‌ی صفحه‌ی میانی تیر تا المان دیفرانسیلی را نشان می‌دهد (شکل 3).

اکنون با داشتن جرم واحد حجم، می‌توان جرم واحد طول را از رابطه‌ی (4) بدست آورد:

$$\mu_{ith}(y) = \rho_{ith}(y) l_i h_i \tag{4}$$

که در آن h_i ارتفاع لینک iام را بیان می‌کند. همچنین تغییرات مدول الاستیسیته از رابطه‌ی (5) قابل محاسبه است:

$$E_{ith}(y) = \left(E_{if} - E_{ib}\right)v_t + E_{ib} \qquad , \quad v_t = \left(\frac{y}{t_i} + \frac{1}{2}\right)^{\lambda} \tag{5}$$

که در آن $E_{ith}(y)$ بیانگر مدول الاستیسیته در راستای ضخامت است. همچنین E_{if} و E_{ib} به ترتیب مدول الاستیسیته را در صفحات رو به رو و

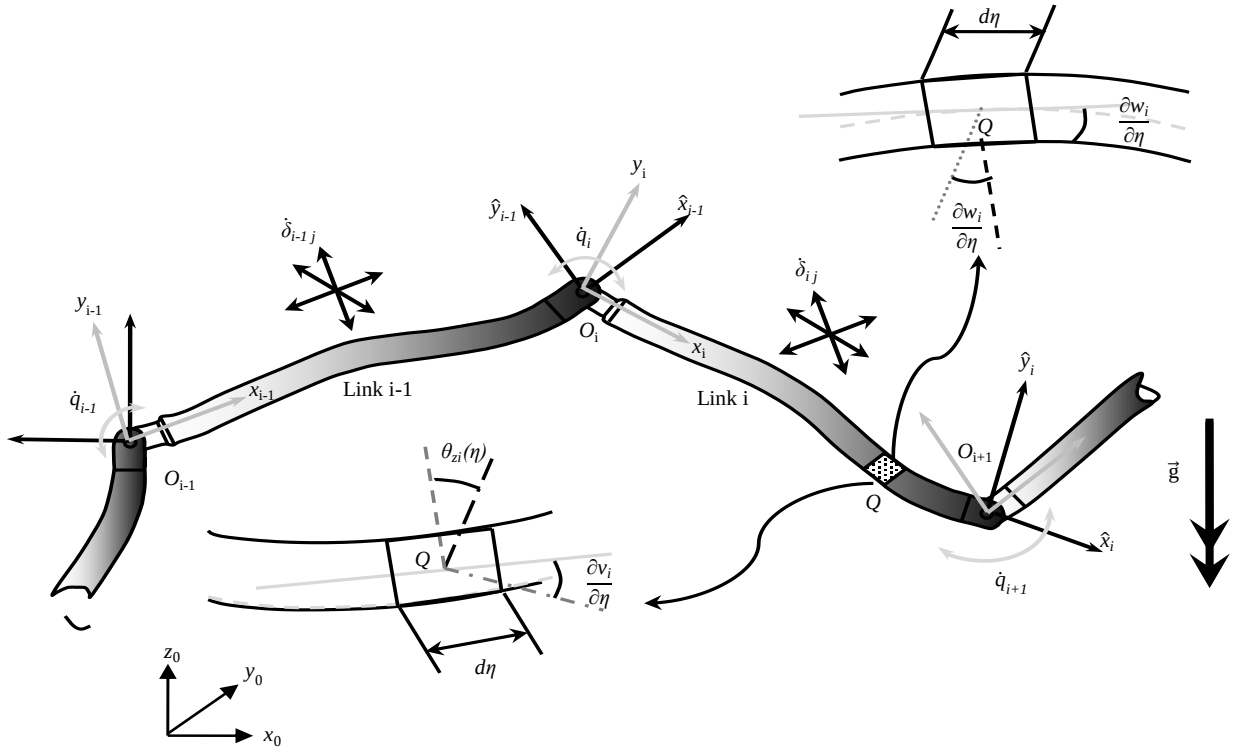

Fig. 1 Flexible manipulator constructed of functionally graded materials

شکل 1 منیپولاتور الاستیک ساخته شده از مواد تابعی

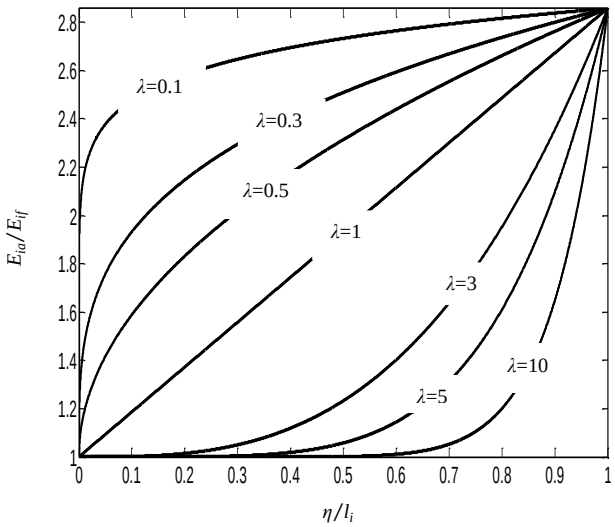

Fig. 2 The variation of modulus of elasticity in the axial directions of links

شکل 2 تغییرات مدول الاستیسیته در راستای طول لینک‌ها

عقبی لینک iام نشان می‌دهند. با رسم تابع مدول الاستیسیته بر حسب λ، نحوه‌ی تغییرات جنس در راستای ضخامت به گونه‌ای که در شکل 4 نشان داده شده است، ارائه می‌گردد. شبیه همین نمودار را می‌توان برای $\mu_{ith}(y)$ (جرم واحد طول) نیز رسم نمود.

3- دینامیک منیپولاتورهای ساخته شده از مواد تابعی

همان‌گونه که پیشتر نیز اشاره شد، این کار بسطی از مرجع [33] است. روش به کار گرفته شده در آن تحقیق، استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل بود. در آنجا تابع گیبس یا انرژی شتاب برای یک زنجیره از بازوهای انعطاف‌پذیر متشکل از n لینک، همانند رابطه‌ی (6) ارائه گردید:

$$\mathrm{S}=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} ds_i \tag{6}$$

با استفاده از رابطه (6)، اگر خواص مکانیکی در راستای طول تیر تغییر کند، آنگاه با انتگرال‌گیری از تابع گیبس بر روی کل لینک از 0 تا l_i، انرژی شتاب کل سیستم (S_a) از رابطه‌ی (7) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_a=&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}B_{0i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}+{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot{}^i\vec{B}_{1i}-2\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot B_{2i}\,{}^i\vec{\omega}_i\\&-{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot B_{3i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i-{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot{}^i\tilde{\omega}_i B_{3i}\,{}^i\vec{\omega}_i+\frac{1}{2}B_{4i}-2\,{}^i\vec{\omega}_i^{\,T}\cdot{}^i\vec{B}_{5i}\\&+{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot{}^i\vec{B}_{6i}-{}^i\vec{\omega}_i^{\,T}\cdot B_{7i}\,{}^i\vec{\omega}_i+2\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot B_{8i}\,{}^i\vec{\omega}_i+\frac{1}{2}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot B_{9i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i\\&+{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot{}^i\tilde{\omega}_i B_{9i}\,{}^i\vec{\omega}_i+\frac{1}{2}B_{10i}+\text{ترم‌های نامربوط}\end{aligned} \tag{7}$$

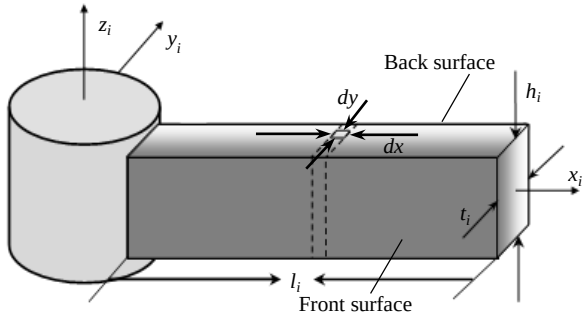

Fig. 3 Variation of mechanical properties in thickness direction

شکل 3 تغییرات خواص مکانیکی در راستای ضخامت

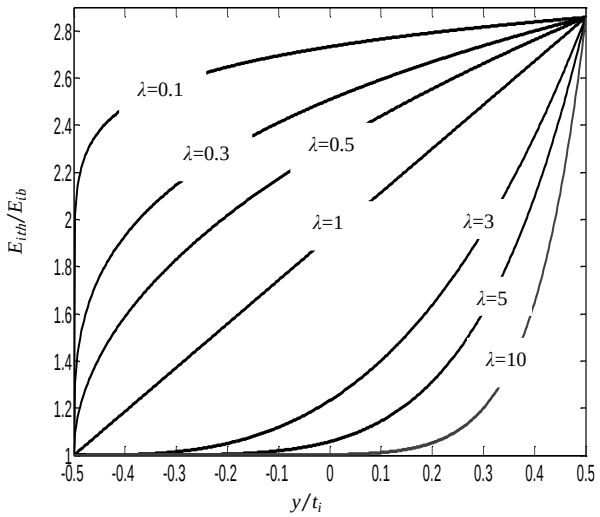

Fig. 4 The variation of modulus of elasticity in the thickness directions of links

شکل 4 تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت لینک‌ها

که در آن ضرایب B در رابطه‌ی (8) ارائه شده‌اند (مرجع [33]):

$$\begin{aligned}&B_{0i}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)d\eta &&{}^i\vec{B}_{1i}=\sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\vec{C}_{1ij}\\&B_{2i}=\sum_{j=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\tilde{C}_{1ij} &&B_{3i}=C_{2i}+\sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}\tilde{C}_{1ij}\\&B_{4i}=\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\ddot{\delta}_{ik}C_{3ijk} &&{}^i\vec{B}_{5i}=\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\dot{\delta}_{ik}\vec{C}_{3ijk}\\&{}^i\vec{B}_{6i}=\sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\vec{\alpha}_{ij} &&B_{7i}=\sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\beta_{ij}\\&B_{8i}=\sum_{j=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\beta_{ij} &&B_{9i}=C_{5i}+\sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}\left(C_{6ij}^T+\beta_{ij}\right)\\&B_{10i}=\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\ddot{\delta}_{ik}C_{7ijk}\end{aligned} \tag{8}$$

همچنین ضرایب C در رابطه (8) مطابق با روابط ارائه شده در مرجع [33]، از طریق رابطه‌ی (9) اصلاح شده‌اند:

$$\begin{aligned}&\vec{C}_{1ij}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\vec{r}_{ij}d\eta &&C_{2i}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\tilde{\eta}d\eta\\&C_{3ijk}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\vec{r}_{ij}^{\,T}\cdot\vec{r}_{ik}d\eta &&\vec{C}_{4ijk}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\tilde{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ik}d\eta\\&C_{5i}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\tilde{\eta}^T\tilde{\eta}d\eta &&C_{6ij}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\tilde{\eta}^T\tilde{r}_{ij}d\eta\\&C_{7ijk}=\int_0^{l_i}\vec{\theta}_{ij}^{\,T}\cdot J_{ia}(\eta)\vec{\theta}_{ik}d\eta &&\vec{C}_{8ij}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\tilde{\eta}\vec{r}_{ij}d\eta\\&C_{9ijk}=\int_0^{l_i}\mu_{ia}(\eta)\tilde{r}_{ij}^T\tilde{r}_{ik}d\eta\end{aligned} \tag{9}$$

اگر خواص مکانیکی در راستای ضخامت تغییر کند، آنگاه تابع انرژی شتاب کل سیستم با نماد S_{th} نشان داده می‌شود. در این حالت کافیست $\mu_{ia}(\eta)$ در روابط (8) و (9) به $\mu_{ith}(y)$ تبدیل شود.

3-1- انرژی پتانسیل لینک ساخته شده از مواد تابعی

برای محاسبه انرژی پتانسیل کرنشی، اگر خواص مکانیکی در راستای طول تیر تغییر کند، آنگاه معادله (38) مرجع [33] از طریق رابطه‌ی (10) اصلاح می‌گردد:

$$U_a=\sum_{i=1}^{n}U_{ia}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int_0^{l_i}\Big[kA_iG_{ia}(\eta)\big(\varphi_{yi}^2+\varphi_{zi}^2\big)+G_{ia}(\eta)I_{xi}\left(\frac{\partial\theta_{xi}}{\partial\eta}\right)^2+E_{ia}(\eta)I_{zi}\left(\frac{\partial\theta_{zi}}{\partial\eta}\right)^2+E_{ia}(\eta)I_{yi}\left(\frac{\partial\theta_{yi}}{\partial\eta}\right)^2+E_{ia}(\eta)A_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\right)^2\Big]d\eta \tag{10}$$

اما اگر تغییرات خواص مکانیکی در راستای ضخامت تیر باشد، آنگاه هر ترم انرژی پتانسیل کرنشی مطابق روابط ارائه شده در بخش‌های 3-1-1 تا 3-1-4 دستخوش تغییر می‌گردد.

3-1-1- انرژی کرنشی ناشی از ارتعاشات خمشی

انرژی کرنشی ناشی از خمش در صفحه xy برای یک المان دیفرانسیلی واقع شده بر روی لینک iام از رابطه‌ی (11) محاسبه می‌شود:

$$dU_{ibz}=\frac{1}{2}E_{ith}(y)\left(\frac{\partial\theta_{zi}}{\partial\eta}y\right)^2dV_i \tag{11}$$

که در آن $\theta_{zi}(\eta)$ چرخش المان دیفرانسیلی حول محور O_iz_i، y فاصله از تار خنثی تا المان دیفرانسیلی، dV_i حجم المان دیفرانسیلی و $E_{ith}(y)$ مدول الاستیسیته را به‌صورت تابعی از y نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری از رابطه (11) بر روی حجم لینک iام، انرژی کرنشی ناشی از خمش از رابطه‌ی (12) به دست می‌آید:

$$U_{ibz}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial\theta_{zi}}{\partial\eta}\right)^2d\eta\overbrace{\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}E_{ith}(y)y^2dy\underbrace{\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}dz}_{h_i}}^{E_{ith}I_{zi}} \tag{12}$$

لذا با ساده کردن رابطه‌ی (12)، رابطه‌ی (13) به دست می‌آید:

$$U_{ibz}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}E_{ith}I_{zi}\left(\frac{\partial\theta_{zi}}{\partial\eta}\right)^2d\eta \tag{13}$$

اکنون انرژی کرنشی ناشی از ارتعاشات خمشی لینک iام در صفحه xz مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت فاصله‌ی المان دیفرانسیلی تا تار خنثی برابر با z است. که برای المان دیفرانسیلی از رابطه‌ی (14) قابل محاسبه خواهد بود:

$$dU_{iby}=\frac{1}{2}E_{ith}(y)\left(\frac{\partial\theta_{yi}}{\partial\eta}z\right)^2dV_i \tag{14}$$

با انتگرال گیری از رابطه‌ی (14) روی حجم لینک iام رابطه‌ی (15) نتیجه خواهد شد:

$$U_{iby}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial\theta_{yi}}{\partial\eta}\right)^2d\eta\overbrace{\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}E_{ith}(y)dy\underbrace{\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}z^2dz}_{\frac{h_i^3}{12}}}^{E_{ith}I_{yi}} \tag{15}$$

بنابراین با ساده سازی رابطه (15)، رابطه‌ی (16) نتیجه خواهد شد:

$$U_{iby}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}E_{ith}I_{yi}\left(\frac{\partial\theta_{yi}}{\partial\eta}\right)^2d\eta \tag{16}$$

3-1-2- انرژی کرنشی ناشی از ارتعاشات محوری

انرژی کرنشی ناشی از تغییر فرم محوری برای یک المان دیفرانسیلی واقع شده بر روی لینک iام از رابطه‌ی (17) قابل محاسبه است:

$$dU_{il}=\frac{1}{2}E_{ith}(y)\left(\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\right)^2dV_i \tag{17}$$

که در آن $u_i(\eta)$، جابجایی محوری المان دیفرانسیلی در راستای O_ix_i را نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری از رابطه (18):

$$U_{il}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\right)^2d\eta\overbrace{\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}E_{ith}(y)dy\underbrace{\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}dz}_{h_i}}^{E_{ith}A_i} \tag{18}$$

انرژی کرنشی ناشی از تغییر فرم محوری به صورت رابطه‌ی (19) است:

$$U_{il}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}E_{ith}A_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\right)^2d\eta \tag{19}$$

3-1-3- انرژی کرنشی ناشی از تغییر فرم برشی

انرژی کرنشی ناشی از تغییر فرم برشی برای یک المان دیفرانسیلی به حجم dV_i از رابطه (20) قابل محاسبه است:

$$dU_{is}=\frac{1}{2}kG_{ith}(y)\big(\gamma_{ixy}^2+\gamma_{ixz}^2\big)dV_i \tag{20}$$

که در آن k ضریب تصحیح برش، $G_{ith}(y)$ مدول برشی لینک iام و γ_{ixy} و γ_{ixz} به‌ترتیب کرنش برشی در صفحات xy و xz از لینک iام را نشان می‌دهد. رابطه (20) بر حسب شیب خط میانی المان تغییر فرم یافته به‌صورت رابطه‌ی (21) بازنویسی شده است:

$$dU_{is}=\frac{1}{2}kG_{ith}(y)\big(\varphi_{iz}^2+\varphi_{iy}^2\big)dV_i \tag{21}$$

برای محاسبه‌ی انرژی کرنشی ناشی از برش، کافیست از رابطه‌ی (21) بر روی حجم لینک iام انتگرال‌گیری شود که رابطه‌ی (22) نتیجه می‌شود:

$$U_{is}=\frac{1}{2}k\int_0^{l_i}\big(\varphi_{iz}^2+\varphi_{iy}^2\big)d\eta\overbrace{\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}G_{ith}(y)dy\underbrace{\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}dz}_{h_i}}^{G_{ith}A_i} \tag{22}$$

بنابراین انرژی پتانسیل ناشی از تغییر فرم برشی از رابطه‌ی (23) به دست می‌آید:

$$U_{is}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}kA_iG_{ith}\big(\varphi_{iy}^2+\varphi_{iz}^2\big)d\eta \tag{23}$$

3-1-4- انرژی کرنشی ناشی از تغییر فرم پیچشی

انرژی کرنشی پیچشی برای یک المان دیفرانسیلی به حجم dV_i که در فاصله r از محور O_ix_i واقع شده است و به میزان ϕ_i دوران می‌کند از رابطه‌ی (24) قابل محاسبه است:

$$dU_{it}=\frac{1}{2}G_{ith}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\eta}r\right)^2dV_i \tag{24}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (24) بر روی حجم لینک رابطه‌ی (25) به دست می‌آید:

$$U_{it}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\eta}\right)^2\underbrace{\int_{A_i}G_{ith}r^2\,dA_i}_{G_{ith}I_{xi}} \tag{25}$$

به طوری که از رابطه‌ی (26):

$$U_{it}=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}G_{ith}I_{xi}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\eta}\right)^2d\eta \tag{26}$$

بنابراین انرژی پتانسیل کل سیستم از حاصل جمع روابط (13)، (16)، (19)، (23) و (26) به صورت رابطه‌ی (27) بدست می‌آید:

$$U_{it}=\sum_{i=1}^{n}\big(U_{ibz}+U_{iby}+U_{il}+U_{is}+U_{it}\big) \tag{27}$$

3-2- معادلات حرکت منیپولاتورهای الاستیک ساخته شده از مواد تابعی

همانند مرجع [33]، پس از بدست آوردن تابع انرژی شتاب (S_a یا S_{th}) و تابع انرژی پتانسیل (U_a یا U_{th})، فرم معکوس معادلات حرکت از روابط (28) و (29) بدست می‌آید.

3-2-1- معادلات حاکمه مربوط به حرکت بزرگ مفاصل

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}=\tau_j \qquad , \qquad j=1,2,\dots,n \tag{28}$$

3-2-2- معادلات حاکمه مربوط به حرکت ارتعاشی لینکها

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}}+\frac{\partial U}{\partial \delta_{jf}}=0 \qquad , \ j=1,2,\dots,n; f=1,2,\dots,m_j \tag{29}$$

با تبدیل معادلات دینامیک معکوس به فرم دینامیک مستقیم، رابطه‌ی (30) نتیجه خواهد شد.

$$I\ddot{\vec{\theta}}=\overrightarrow{Re} \tag{30}$$

جزئیات نحوه‌ی تبدیل فرم دینامیک معکوس به دینامیک مستقیم در مرجع [33] ارائه شده است. در رابطه (48) I ماتریس اینرسی کل سیستم؛ $\overrightarrow{Re}$ ترمهای دینامیکی باقیمانده متشکل از شتاب کوریولیس و اثرات جانب مرکز؛ و $\ddot{\vec{\theta}}$ بردار شتاب‌های تعمیم یافته می‌باشد. در ادامه با استفاده از معادله (30) می‌توان معادلات حرکت را شبیه سازی نمود.

4- شبیه‌سازی کامپیوتری

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی ارتعاشات آزاد برای دو حالتی که یک بار لینک‌ها از مواد تابعی در راستای طولی و بار دیگر از مواد تابعی در راستای ضخامت درست شده‌اند، ارائه خواهد شد.

4-1- حالت اول: لینک‌ها از مواد تابعی در راستای طولی درست شده باشند

شکل 5، یک سیستم دو لینکی ساخته شده از مواد تابعی در راستای طولی را

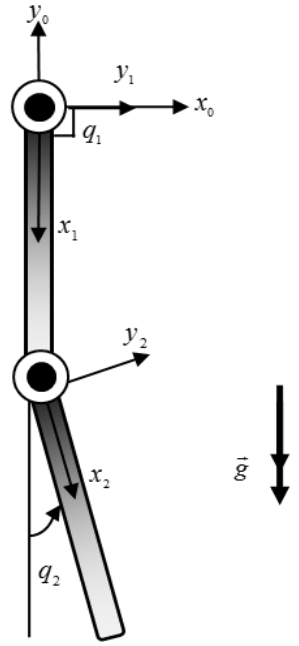

Fig. 5 A two-link axially FGM flexible robotic manipulator

شکل 5 ربات الاستیک دولینکی ساخته شده از مواد تابعی در راستای طولی

نشان می‌دهد. مشخصات این سیستم رباتیکی در جدول 1 آورده شده است.

برای شبیه سازی سیستم رباتیکی فوق، از دستور $ode45$ نرم‌افزار متلب استفاده شده است. شکل‌های 6 و 7 به‌ترتیب موقعیت مجری نهایی را در راستاهای x_0 و y_0 به ازای شاخص‌های توانی 0.4، 1 و ∞ نشان می‌دهد. در این شبیه‌سازی این‌گونه فرض شده است که ابتدای هر دو لینک از جنس فولاد و انتهای هر دو لینک از جنس آلومینیوم است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد تغییرات شاخص قانون توانی اثر چندانی بر روی حرکت بزرگ سیستم ندارد. با میل دادن λ به سمت بی‌نهایت، تمامی لینک به سمت فولاد میل می‌کند که در این حالت، نتایج به تحقیق صورت گرفته در مرجع [34] همگرا می‌شود (در این مقاله یک ربات دولینکی ساخته شده از جنس فولاد با شرایط اولیه مشابه با شرایط اولیه‌ی این مقاله، شبیه سازی شده است). این موضوع می‌تواند معیاری از درستی مدل ارائه شده در این مقاله باشد.

شکل‌های 8 و 9، به ترتیب تغییر مکان الاستیک نقاط انتهای لینک اول و لینک دوم را برای حالتی که ابتدای لینک‌ها از جنس فولاد خالص و انتهای آن‌ها از جنس آلومینیوم خالص باشد را نشان می‌دهند.

همان‌گونه که مشاهده می‌گردد برای $\lambda=1$ میزان ارتعاشات نسبت به حالتی که λ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، کمتر است. در اینجا نیز زمانی که λ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، نتایج شبیه‌سازی به نتایج ارائه شده در

جدول 1 پارامترهای مورد نیاز جهت شبیه‌سازی ربات ساخته شده از مواد تابعی در راستای طولی

Table 1 Required parameters for simulating the axially FGM robotic system

پارامتر	مقدار	واحد
مدول الاستیسیته‌ی فولاد	$E_{St}=2\times10^{11}$	Pa
مدول الاستیسیته‌ی آلومینیوم	$E_{Al}=0.7\times10^{11}$	Pa
جرم واحد طول فولاد	$\mu_{St}=3$	$\frac{kg}{m}$
جرم واحد طول آلومینیوم	$\mu_{Al}=1.0385$	$\frac{kg}{m}$
سطح مقطع لینک شماره‌ی 1	$A_1=8\times10^{-5}$	m^2
سطح مقطع لینک شماره‌ی 2	$A_2=8\times10^{-5}$	m^2
مدول برشی فولاد	$G_{St}=76.923\times10^{9}$	Pa
مدول برشی آلومینیوم	$G_{Al}=26.923\times10^{9}$	Pa
گشتاور اعمالی به مفاصل	$\tau_1=\tau_2=0$	nm
جاذبه‌ی گرانش	$g=9.81$	$\frac{m}{s^2}$
ممان اینرسی سطحی	$I_{z1}=I_{z2}=5\times10^{-9}$	m^4

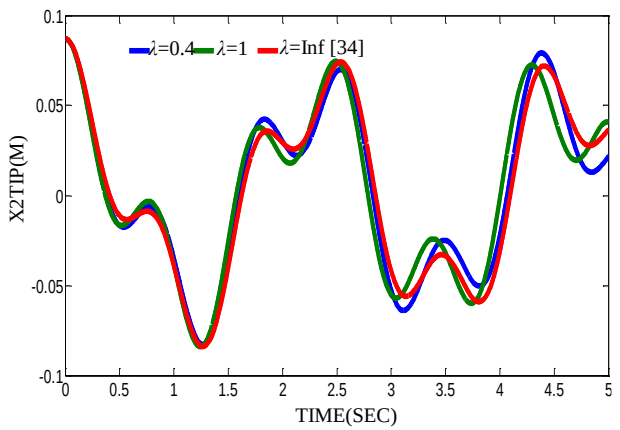

Fig. 6 Position of the end effector in x_0 direction

شکل 6 موقعیت مجری نهایی در راستای x_0

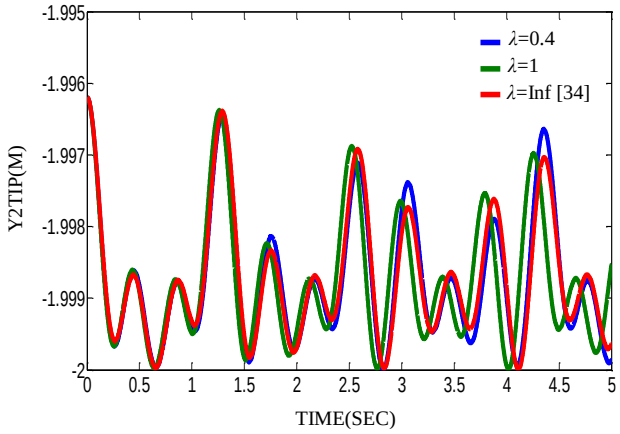

Fig. 7 Position of the end effector in y_0 direction

شکل 7 موقعیت مجری نهایی در راستای y_0

مرجع [34] منطبق می‌شود. همچنین از نتایج ارائه شده در شکل‌های 6 تا 9 این‌گونه نتیجه می‌شود که تغییر شاخص قانون توانی، اثر قابل ملاحظه‌تری بر روی رفتار ارتعاشی سیستم نسبت به حرکت بزرگ آن دارد.

4-1-1- تحلیل کمّی ربات الاستیک ساخته شده از مواد تابعی در راستای طولی

برای داشتن یک تحلیل کمّی از نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی ارتعاشی سیستم مذکور، از مفهوم جذر میانگین مربعات[1] یا به اختصار RMS که معیاری از انرژی سیگنال می‌باشد و توان آن را بیان می‌کند، طبق رابطه‌ی (31) استفاده می‌شود.

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \tag{31}$$

که x_{rms}، مجذور متوسط مربعات اعداد x_1 تا x_n است؛ به‌طوری که n تعداد داده‌ها را مشخص می‌کند. بدیهی است که هر اندازه که مقدار این کمّیت بیشتر باشد، ارتعاشات سیستم بیشتر خواهد شد.

نمودارهای a-10 تا d-10 تغییرات انرژی سیگنال را نسبت به لگاریتم شاخص قانون توانی برای یک منیپولاتور دو لینکی و به ازاء شرایط اولیه‌ی $q_2 = 5°$، $q_2 = 10°$، $q_2 = 15°$ و $q_2 = 20°$ نشان می‌دهد. دیگر شرایط اولیه مشابه شرایط اولیه ارائه شده در مرجع [34] می‌باشد. لینک‌ها از مواد تابعی بگونه‌ای ساخته شده‌اند که ابتدای لینک‌ها از جنس آلومینیوم خالص و

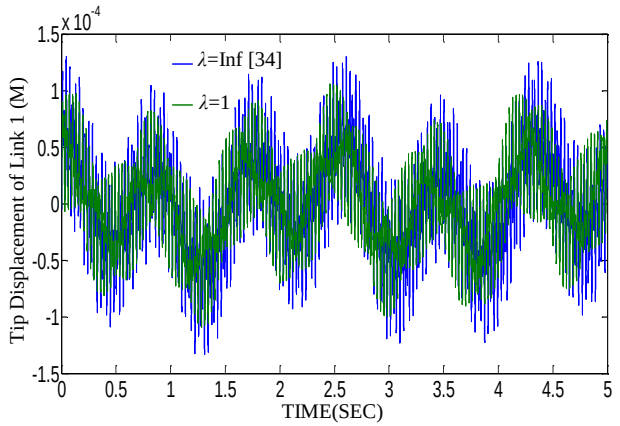

Fig. 8 End point elastic displacement of the first link

شکل 8 تغییر مکان الاستیک نقطه‌ی انتهایی لینک اول

1 Root of mean square value

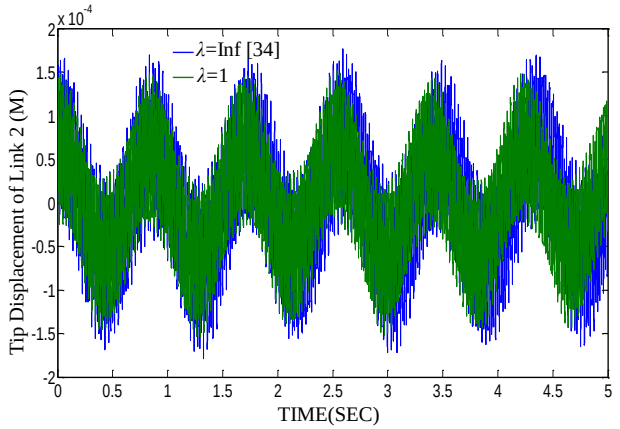

Fig. 9 End point elastic displacement of the Second link

شکل 9 تغییر مکان الاستیک نقطه‌ی انتهایی لینک دوم

انتهای لینک‌ها از جنس فولاد خالص می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد با افزایش شاخص قانون توانی تا $\lambda = 2$ انرژی سیگنال به‌صورت پیوسته افزایش می‌یابد؛ بطوری‌که در $\lambda = 2$ انرژی سیگنال به ازای تمامی مقادیر q_2 حداکثر مقدار خود را پیدا می‌کند؛ و پس از آن با افزایش در شاخص قانون توانی، انرژی سیگنال کاهش می‌یابد.

4-1-2- اثر جابجایی مواد در لینک‌های ساخته شده از مواد تابعی در راستای طولی

به‌منظور مطالعه تأثیر جابجایی مواد بر روی پاسخ دینامیکی لینک‌های ساخته شده از مواد تابعی، دو نوع ترتیب ماده برای اینگونه از لینکها در نظر گرفته شد. در حالت اول آلومینیوم خالص در ابتدای لینکها و فولاد خالص در انتهای آنها قرار دارد؛ حال آنکه در حالت دوم فولاد در ابتدا و آلومینیوم در انتهای لینک‌ها قرار گرفته است. شکل 11، مقدار انرژی سیگنال را بر حسب لگاریتم شاخص قانون توانی نشان می‌دهد. همان‌گونه که در حالت اول مشاهده می‌شود، با افزایش شاخص قانون توانی انرژی سیگنال با نرخ زیادی افزایش می‌یابد تا به بیشترین مقدار خود در $\lambda = 2$ می‌رسد. سپس با افزایش شاخص قانون توانی انرژی سیگنال شروع به کاهش می‌کند. در حالت دوم، با افزایش در شاخص قانون توانی انرژی سیگنال شروع به کاهش می‌کند تا زمانیکه به کمترین مقدار خود در $\lambda = 1$ می‌رسد. پس از آن با افزایش λ انرژی سیگنال افزایش می‌یابد. بدیهی است که اگر λ به سمت بی‌نهایت میل کند تمام لینک‌ها تبدیل به یک جنس می‌شوند (آلومینیوم یا فولاد). اگر این وضعیت با حالتی که تمام لینک‌ها از یک ماده‌ی خالص ساخته شده‌اند مقایسه گردد، می‌تواند به عنوان معیاری برای درستی مدل ارائه شده در این مقاله استفاده شود. لذا اگر در حالت دوم λ به سمت بی‌نهایت میل کند، جنس کل لینک‌ها تبدیل به فولاد خالص می‌شوند. این حالت دقیقاً شبیه سیستم رباتیکی است که در تحقیق یوسورو و همکاران [34] با استفاده از روش اجزاء محدود شبیه‌سازی شده است. با مقایسه نتایج ارائه شده در این مقاله با نتایج ارائه شده در مرجع [34]، مشاهده می‌شود که پاسخ زمانی سیستم در هر دو حالت از تطابق بسیار خوبی برخوردار هستند.

4-1-3- اثر افزایش شکل مود بر روی انرژی سیگنال

شکل 12 اثر افزایش شکل مود را بر روی انرژی سیگنال به ازای λهای متفاوت و شرایط اولیه $q_2 = 5°$ نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود انتخاب تنها یک شکل مود منجر به ایجاد خطای زیادی در مقدار

انرژی سیگنال می‌شود. حال آنکه مقادیر انرژی سیگنال به ازای انتخاب دو و سه شکل مود به هم نزدیک هستند. لذا با توجه به اینکه زمان انجام

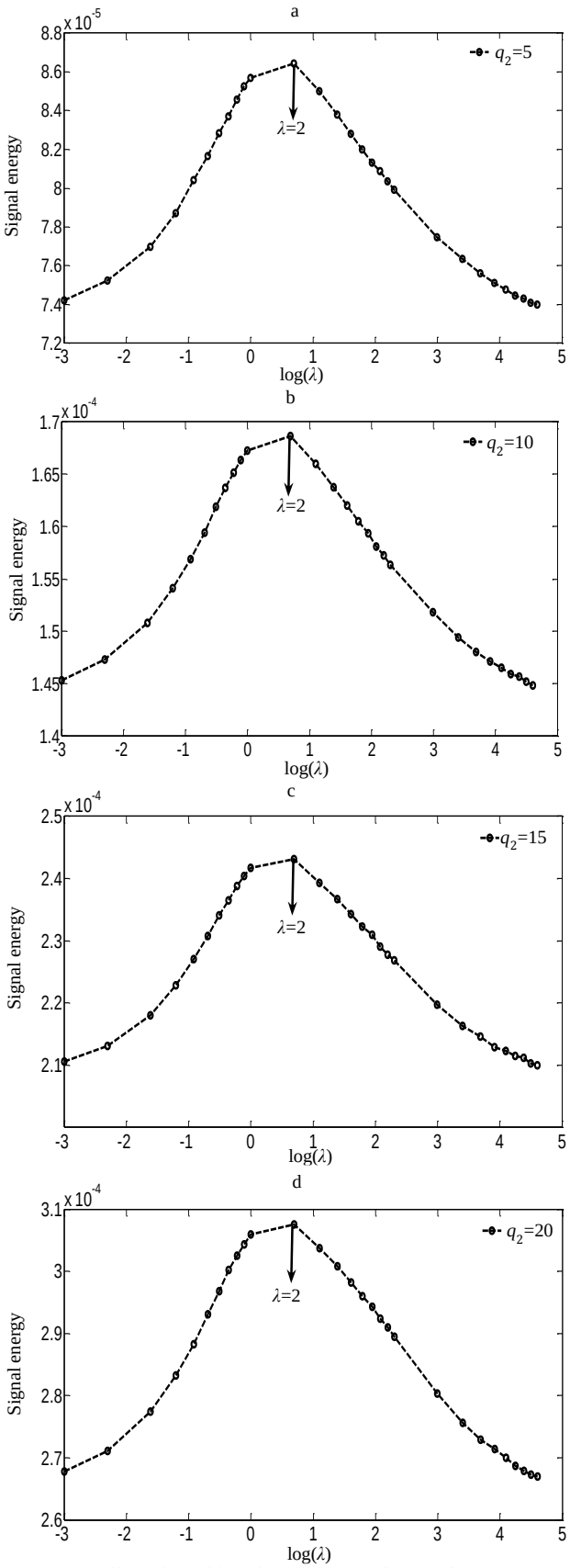

Fig. 10 The effect of λ and initial conditions on the signal energy

شکل 10 اثر λ و شرایط اولیه بر روی انرژی سیگنال

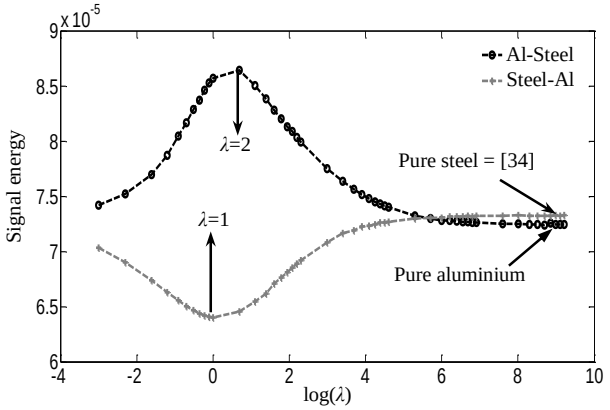

Fig. 11 The effect of material order on the signal energy

شکل 11 اثر ترتیب مواد بر روی انرژی سیگنال

محاسبات ریاضی برای سه شکل مود بسیار طولانی است، می‌توان با یک تقریب قابل قبول تنها از دو شکل مود جهت مدلسازی خاصیت انعطاف‌پذیری هر لینک استفاده نمود.

4-1-4- تحلیل فرکانسی سیستم

شکل 13، تغییرات دامنه را نسبت به فرکانس برای شاخص‌های قانون توانی $\lambda = 0.3$، $\lambda = 0.5$، $\lambda = 0.7$، $\lambda = 1$ نشان می‌دهد. هرکدام از لینک‌ها با دو شکل مود مدل‌سازی شده‌اند و از شرایط اولیه $q_2 = 5°$ رها می‌گردند. بنابراین 6 فرکانس داریم که دو تای اول مربوط به حرکت صلب و چهارتای دیگر، فرکانس‌های طبیعی مربوط به حرکت الاستیک می‌باشند. تغییر در شاخص قانون توانی اثری بر روی فرکانس‌های طبیعی حرکت صلب ندارد؛ بگونه‌ای که به ازای مقادیر مختلف λ، فرکانس‌های اول و دوم حرکت صلب به ترتیب برابر $f_1 = 0.4$ Hz و $f_2 = 1.2$ Hz هرتز می‌باشند (پیک‌های اول و دوم). اما همان‌گونه که در شکل 13 نشان داده شده است، فرکانس‌های حرکت الاستیک با تغییرات λ جابجا خواهد شد.

5-1-4- روند تغییرات فرکانس‌های سوم و چهارم نسبت به تغییرات λ

شکل 14 روند تغییرات فرکانس را برحسب لگاریتم λ برای پیک‌های سوم و چهارم نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود پیک سوم با تغییر در مقدار λ، تغییرات زیادی از خود نشان نمی‌دهد و مقدار فرکانس طبیعی سوم تقریباً ثابت است. اما فرکانس طبیعی چهارم (پیک چهارم)، مقدارش به ازای λهای متفاوت تغییر می‌کند؛ به‌طوری که با افزایش مقدار λ، فرکانس طبیعی

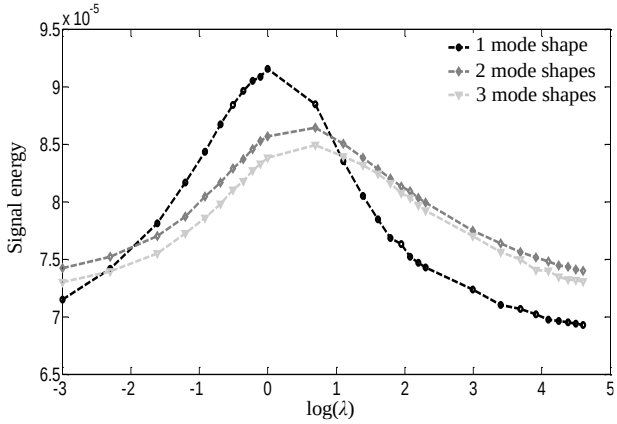

Fig. 12 The effect of mode shape increasing on signal energy

شکل 12 اثر افزایش شکل مود بر روی انرژی سیگنال

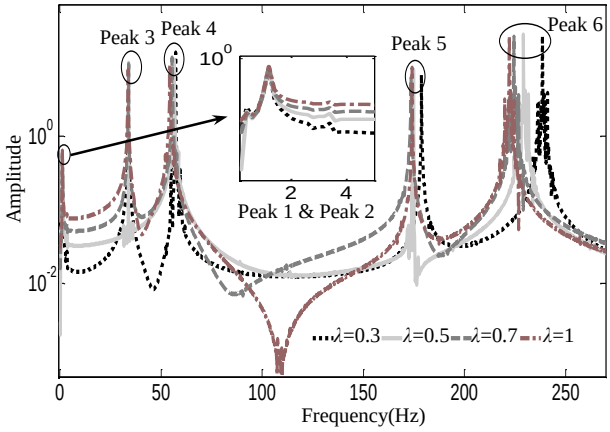

Fig. 13 Frequency response function for different values of λ

شکل 13 تابع پاسخ فرکانسی برای λهای متفاوت

چهارم کاهش پیدا می‌کند تا اینکه به ازای $\lambda = 6$ حداقل مقدار خود را تجربه می‌کند. سپس با افزایش مقدار λ، فرکانس طبیعی چهارم نیز افزایش می‌یابد. برای توجیه این روند تغییرات فرکانس، رابطه $\omega = \sqrt{k/m}$ به‌عنوان معیاری برای تحلیل کیفی فرکانس سیستم در نظر گرفته می‌شود. زمانی‌که شاخص قانون توانی بطور پیوسته افزایش می‌یابد، میزان آلومینیوم در ابتدای هر لینک نسبت به میزان فولاد به‌صورت تدریجی افزایش پیدا می‌کند. از آنجایی که سختی و چگالی آلومینیوم کمتر از فولاد است، لذا طبق رابطه ارائه شده برای ω، سختی و جرم کل هر لینک کاهش می‌یابد. برای $\lambda \leq 6$، نرخ کاهش در مقدار k بیشتر از نرخ کاهش در m است. بنابراین فرکانس یک روند کاهشی خواهد داشت. اما برای $\lambda \geq 6$، نرخ کاهش m، بیشتر از نرخ کاهش k است. لذا فرکانس سیستم افزایش می‌یابد.

4-2- حالت دوم: لینک‌ها از مواد تابعی در راستای ضخامت درست شده باشند

شکل 15، یک منیپولاتور دو لینکی الاستیک ساخته شده از مواد تابعی در راستای ضخامت لینک‌ها را نشان می‌دهد. در اینجا نیز به‌منظور تعیین پاسخ زمانی سیستم، ربات را با شرایط اولیه‌ای مشابه شرایط اولیه‌ی ارائه شده در مرجع [34] شبیه سازی می‌شود. همچنین پارامترهای مربوط به این ربات در جدول 2 ارائه شده است. با حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار سیستم، پاسخ زمانی سیستم مشابه آنچه که در شکل‌های 16 و 17 ارائه شده است، تعیین می‌گردد.

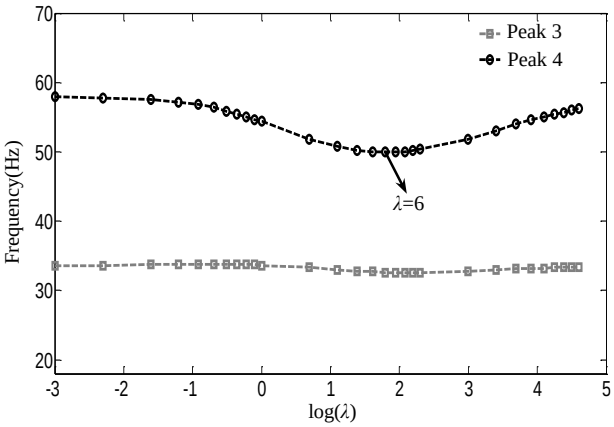

Fig. 14 The trend of frequency variations with respect to λ

شکل 14 روند تغییرات فرکانس نسبت به λ

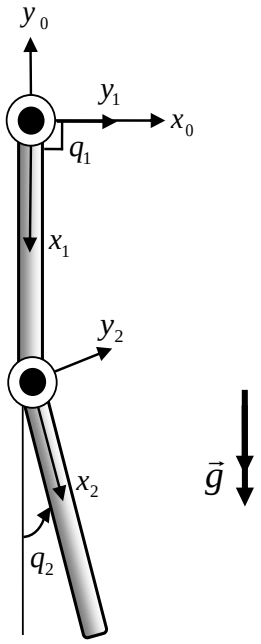

Fig. 15 A two-link flexible robotic manipulator constructed of functionally graded materials along the thickness direction

شکل 15 ربات الاستیک دولینکی ساخته شده از مواد تابعی در راستای ضخامت

Table 2 Required parameters for simulating the axially FGM robotic system

جدول 2 پارامترهای مورد نیاز جهت شبیه‌سازی ربات ساخته شده از مواد تابعی در راستای ضخامت

پارامتر	مقدار	واحد
طول لینک اول	$l_1 = 0.5$	m
ضخامت لینک اول	$t_1 = 0.004$	m
ارتفاع لینک اول	$h_1 = 0.04$	m
طول لینک دوم	$l_2 = 0.5$	m
ضخامت لینک دوم	$t_2 = 0.0015$	m
ارتفاع لینک دوم	$h_2 = 0.0517$	m
مدول الاستیسیته‌ی فولاد	$E_{St} = 2 \times 10^{11}$	Pa
مدول الاستیسیته‌ی آلومینیوم	$E_{Al} = 0.7 \times 10^{11}$	Pa
جرم واحد حجم فولاد	$\rho_{St} = 7800$	$\frac{kg}{m}$
جرم واحد حجم آلومینیوم	$\rho_{Al} = 2700$	$\frac{kg}{m}$
مدول برشی فولاد	$G_{St} = 76.923 \times 10^9$	Pa
مدول برشی آلومینیوم	$G_{Al} = 26.923 \times 10^9$	Pa
گشتاور اعمالی به مفاصل	$\tau_1 = \tau_2 = 0$	nm
جاذبه‌ی گرانش	$g = 9.81$	$\frac{m}{s^2}$
ممان اینرسی سطحی	$I_{z1} = I_{z2} = 5 \times 10^{-9}$	m^4

در این دو شکل تغییر مکان الاستیک انتهای لینک‌های اول و دوم به ازای $\lambda = 0.4$ و $\lambda = 7$ نشان داده شده است. همان‌گونه که از این دو شکل نتیجه می‌شود به ازای $\lambda = 0.4$ دامنه‌ی ارتعاشات به مراتب بزرگتر از $\lambda = 7$ می‌باشد. بنابراین بدیهی است که انرژی سیگنال برای $\lambda = 0.4$ بیشتر از $\lambda = 7$ بدست خواهد آمد.

4-2-1- تحلیل کمّی ربات دو لینکی انعطاف‌پذیر

همانند بخش قبل برای آنکه یک تحلیل کمی از میزان ارتعاشات به دست آید، از مفهوم RMS به‌منظور محاسبه‌ی انرژی سیگنال‌ها استفاده شده است.

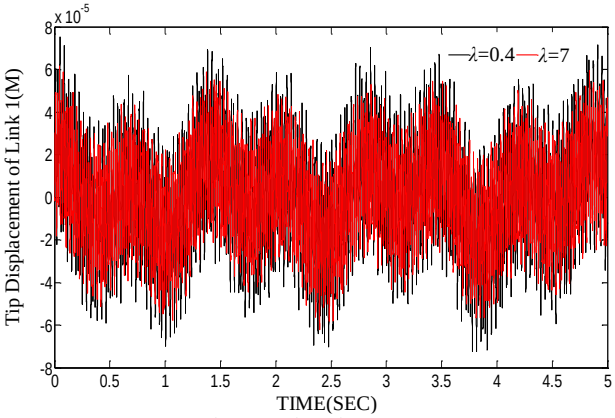

Fig. 16 The end point deflection of the first link

شکل 16 تغییر مکان الاستیک نقطه‌ی انتهایی لینک اول

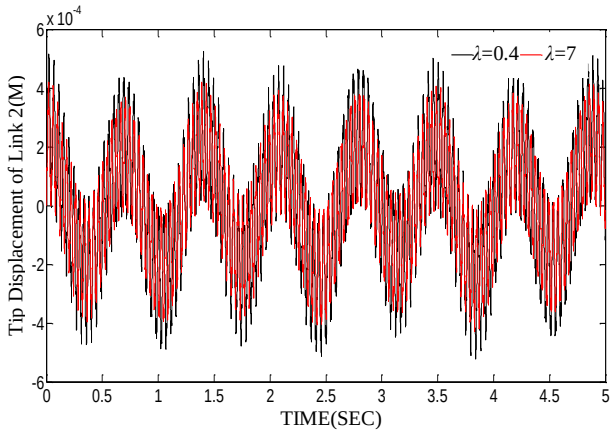

Fig. 17 The end point deflection of the second link

شکل 17 تغییر مکان الاستیک نقطه‌ی انتهایی لینک دوم

شکل‌های a-18 تا d-18، تغییرات انرژی مربوط به ارتعاشات نقطه‌ی انتهایی لینک دوم را نسبت به لگاریتم λ و به ازای q_2های متفاوت نشان می‌دهد. نکته‌ی حائز اهمیت در این شکل‌ها این است که ماکزیمم و مینیمم انرژی سیگنال تابع شرایط اولیه نیستند و به ازای شرایط اولیه‌ی متفاوت، ماکزیمم انرژی سیگنال در $\lambda = 0.4$ و مینیمم آن در $\lambda = 7$ رخ می‌دهد.

4-2-2- اثر جابجایی مواد در لینک‌های ساخته شده از مواد تابعی در راستای ضخامت

شکل 19، اثر ترتیب ماده را برای لینک‌های ساخته شده از مواد تابعی در راستای ضخامت و برای دو حالت مختلف نشان می‌دهد.

در حالت اول، صفحه‌ی سمت چپ لینک‌ها در شکل 15 از آلومینیوم خالص و صفحه‌ی سمت راست آن‌ها از فولاد خالص درست شده است. در این حالت حداکثر انرژی سیگنال در $\lambda = 0.4$ و حداقل انرژی سیگنال در $\lambda = 7$ رخ می‌دهد. اگر λ به‌سمت بی‌نهایت میل کند، سیستم رفتاری ارتعاشی مشابه با لینکهای ساخته شده از آلومینیوم خالص خواهد داشت. این حالت دقیقاً شبیه ستاپ آزمایشگاهی است که توسط کورایم و همکاران [32] ساخته شده است. با مقایسه نتایج ارائه شده در این مقاله با نتایج ارائه شده در مرجع [32]، مشاهده می‌شود که پاسخ زمانی سیستم در هر دو حالت از تطابق بسیار خوبی برخوردار هستند. در حالت دوم، صفحه‌ی سمت چپ لینک‌ها با فولاد خالص شروع شده و در نهایت به آلومینیوم خالص در صفحه‌ی سمت راست می‌رسد. در این حالت نیز حداقل انرژی سیگنال متعلق به $\lambda = 0.3$ و حداکثر مقدار آن متعلق به $\lambda = 5$ است.

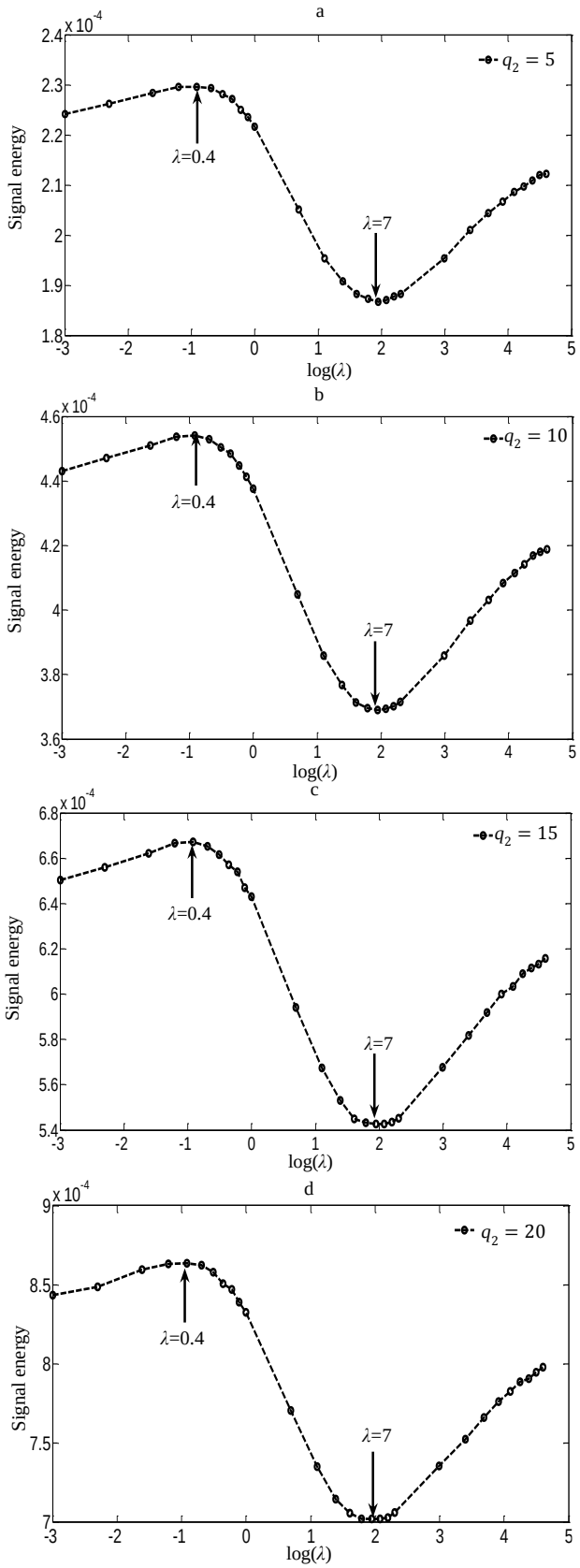

Fig. 18a to 18d The effect of λ and initial conditions on the signal energy

شکل 18a تا 18d اثر λ و شرایط اولیه بر روی انرژی سیگنال

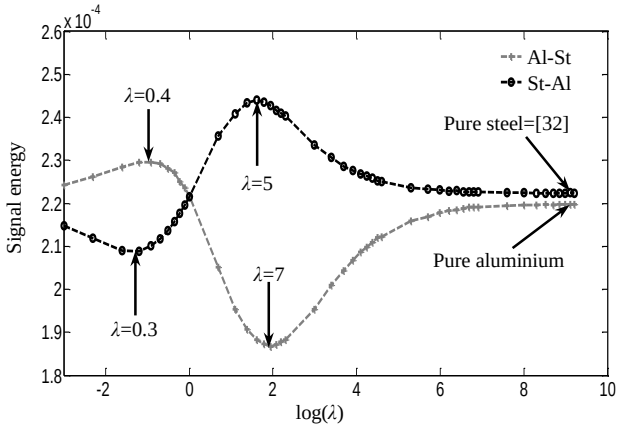

Fig. 19 The effect of material order on the signal energy

شکل 19 اثر ترتیب مواد بر روی انرژی سیگنال

4-2-3- اثر افزایش شکل مود بر روی انرژی سیگنال

نمودار 20 به بررسی اثر افزایش شکل مود بر رو انرژی سیگنال یک منیپولاتور دو لینکی رها شده از شرایط اولیه‌ی $q_2 = 5°$ می‌پردازد. همان‌گونه که از این شکل معلوم است، در حالت سه شکل مود، نمودار انرژی سیگنال بین نمودار یک و دو شکل مود قرار می‌گیرد. از آنجایی‌که اختلاف مقادیر انرژی سیگنال در حالت دو و سه شکل مود بسیار ناچیز است، لذا به منظور کاهش دادن زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی کامپیوتری، تمامی نمودارها و نتایج بر مبنای مدل‌سازی با دو شکل مود ارائه شده است.

4-2-4- تحلیل فرکانسی سیستم

نمودار 21، پاسخ فرکانسی سیستم را به ازای دو شکل مود برای هر لینک و برای $\lambda = 0.1$، $\lambda = 0.5$، $\lambda = 0.7$ و $\lambda = 1$ نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نمودار دارای 6 پیک می‌باشد؛ بگونه‌ای که دو فرکانس اول $f_1 = 0.6$ Hz و $f_2 = 1.4$ Hz مربوط به فرکانس‌های حرکت صلب و چهار فرکانس دیگر متعلق به حرکت الاستیک هستند.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که تغییرات شاخص قانون توانی، اثری بر روی فرکانس‌های حرکت صلب ندارد و مقادیرشان ثابت می‌ماند. حال آنکه فرکانس‌های حرکت الاستیک تابعی از پارامتر λ می‌باشند و با تغییرات λ مقادیرشان تغییر می‌کنند.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، معادلات حرکت یک منیپولاتور n لینکی انعطاف‌پذیر که از مواد

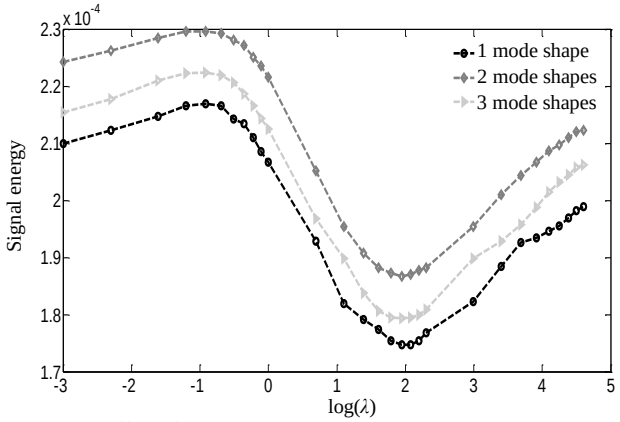

Fig. 20 The effect of mode shape increasing on signal energy

شکل 20 اثر افزایش شکل مود بر روی انرژی سیگنال

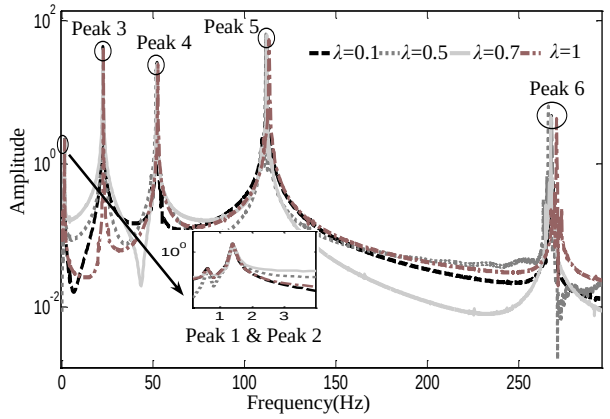

Fig. 21 Frequency response function for different values of λ

شکل 21 پاسخ فرکانسی برای λ های متفاوت

تابعی ساخته شده است با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل و تئوری تیر تیموشنکو بر پایه روش مودهای فرضی بدست آورده شد. به‌منظور تحلیل کیفی نتایج، انرژی سیگنال برای هر دو حالتی که خصوصیات مکانیکی لینک‌ها به‌صورت پیوسته یک بار در راستای طول و بار دیگر در جهت ضخامت تغییر می‌کند، محاسبه گردید. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد λهایی که مقدار انرژی سیگنال را ماکزیمم یا مینیمم می‌کنند، تابع شرایط اولیه نیستند. با بررسی اثر افزایش شکل مود بر روی پاسخ سیستم، نتیجه گردید که انتخاب دو شکل مود نتایج با دقت قابل قبولی را ارائه می‌دهد. در پایان با انجام تحلیل فرکانسی، مشاهده می‌شود که λ، تأثیری بر روی فرکانس‌های حرکت صلب سیستم ندارد؛ ولی شدیداً بر روی فرکانس‌های طبیعی حرکت ارتعاشی سیستم تأثیر گذار است. همچنین اثر ترتیب مواد بر روی رفتار ارتعاشی سیستم نتیجه می‌دهد که اگر فولاد در ابتدا و آلومینیوم در انتهای لینک ها قرار بگیرد، انرژی سیگنال دارای یک مقدار کمینه خواهد شد. لذا با انتخاب مناسب شاخص قانون توانی، می‌توان به صورت غیر فعال ارتعاشات سیستم را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد.

تحقیق صورت گرفته در این مقاله محدود به ارائه مدل دینامیکی و شبیه‌سازی کامپیوتری می‌باشد. لذا به عنوان کارهای آینده ساخت ربات انعطاف‌پذیر با لینک‌های ساخته شده از مواد تابعی و مقایسه نتایج حاصل از تئوری و ستاپ آزمایشگاهی پیشنهاد می‌گردد.

6- مراجع

[1] K. Sarkar, R. Ganguli, Closed-form solutions for axially functionally graded Timoshenko beams having uniform cross-section and fixed–fixed boundary condition, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 58, pp. 361-370, 2014.
[2] H. Su, J. R. Banerjee, C.W. Cheung, Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 854-862, 2013.
[3] F. F. Calim, Free and forced vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko beams on two-parameter viscoelastic foundation, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 103, pp. 98-112, 2016.
[4] J. W. Lee, J. Y. Lee, Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 122, pp. 1-17, 2017.
[5] Y. Huang, X. F. Li, A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section, *Journal of sound and vibration*, Vol. 329, No. 11, pp. 2291-2303, 2010.
[6] C. Jin, X. Wang, Accurate free vibration analysis of Euler functionally graded beams by the weak form quadrature element method, *Composite Structures*, Vol. 125, pp. 41-50, 2015.
[7] K. K. Pradhan, S. Chakraverty, Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, pp. 175-184, 2013.
[8] G. Giunta, D. Crisafulli, S. Belouettar, Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 68-74, 2011.

[9] G. C. Tsiatas, A. E. Charalampakis, Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches, *Composite Structures*, Vol. 160, pp. 256-266, 2017.
[10] M. Aydogdu, V. Taskin, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, *Materials & design*, Vol. 28, No. 5, pp. 1651-1656, 2007.
[11] J. C. Cambera, V. Feliu-Batlle, Input-state feedback linearization control of a single-link flexible robot arm moving under gravity and joint friction, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 88, pp. 24-36, 2017.
[12] A. Shawky, D. Zydek, Y. Z. Elhalwagy, A. Ordys, Modeling and nonlinear control of a flexible-link manipulator, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 23, pp. 9591-9602, 2013.
[13] J. Wei, D. Cao, L. Liu, W. Huang, Global mode method for dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint manipulator with tip mass, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 48, pp. 787-805, 2017.
[14] M. Loudini, D. Boukhetala, M. Tadjine, M. A. Boumehdi, Application of Timoshenko beam theory for deriving motion equations of a lightweight elastic link robot manipulator, *ICGST-ARAS Journal*, Vol. 5, No. 2, pp. 11-18, 2006.
[15] M. W. D. White, G. R. Heppler, A Timoshenko model of a flexible slewing link, *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, Seattle, WA, pp. 2815-2819, 1995.
[16] A. S. Morris, A. Madani, Inclusion of shear deformation term to improve accuracy in flexible-link robot modelling, *Mechatronics*, Vol. 6, No. 6, pp. 631-647, 1996.
[17] F. Y. Wang, G. Guan, Influences of rotatory inertia, shear and loading on vibrations of flexible manipulators, *Journal of sound and vibration*, Vol. 171, No. 4, pp. 433-452, 1994.
[18] F. Karray, S. Tafazolli, W. Gueaieb, Robust tracking of a lightweight manipulator system, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 20, No. 2, pp. 169-179, 1999.
[19] S. S. Tadikonda, H. Baruh, Dynamics and control of a translating flexible beam with a prismatic joint, *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, Vol. 114, No. 3, pp. 422-427, 1992.
[20] A. Jnifene, A. Fahim, A computed torque/time delay approach to the end-point control of a one-link flexible manipulator, *Dynamics and Control*, Vol. 7, No. 2, pp. 171-189, 1997.
[21] D. Sun, J. K. Mills, J. Shan, S. K. Tso, A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement, *Mechatronics*, Vol. 14, No. 4, pp. 381-401, 2004.
[22] K. Gurses, B. J. Buckham, E. J. Park, Vibration control of a single-link flexible manipulator using an array of fiber optic curvature sensors and PZT actuators, *Mechatronics*, Vol. 19, No. 2, pp. 167-177, 2009.
[23] J. W. Huang, J. S. Lin, Backstepping control design of a single-link flexible robotic manipulator, *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 41, No. 2, pp. 11775-11780, 2008.
[24] I. Payo, V. Feliu, O. D. Cortázar, Force control of a very lightweight single-link flexible arm based on coupling torque feedback, *Mechatronics*, Vol. 19, No. 3, pp. 334-347, 2009.
[25] W. Book, K. Obergfell, Practical models for practical flexible arms, *In Robotics and Automation. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on* , San Francisco, CA, USA, pp. 835-842, 2000.
[26] K. Lochan, B. K. Roy, B. Subudhi, SMC controlled chaotic trajectory tracking of two-link flexible manipulator with PID sliding surface, IFAC-PapersOnLine, Vol. 49, No. 1, pp. 219-224, 2016.
[27] A. A. Ata, W. F. Fares, M. Y. Sa'adeh, Dynamic analysis of a two-link flexible manipulator subject to different sets of conditions, *Procedia Engineering*, Vol. 41, pp. 1253-1260, 2012.
[28] H. Zohoor, S. M. Khorsandijou, Dynamic model of a flying manipulator with two highly flexible links, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 32, No. 10, pp. 2117-2132, 2008.
[29] E. Mirzaee, M. Eghtesad, S.A. Fazelzadeh, Maneuver control and active vibration suppression of a two-link flexible arm using a hybrid variable structure/Lyapunov control design, *Acta Astronautica*, Vol. 67, No. 9, pp. 1218-1232, 2010.
[30] W. Chen, Dynamic modeling of multi-link flexible robotic manipulators, *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 2, pp. 183-195, 2001.
[31] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Oblique Impact of Multi-Flexible-Link Systems, *Journal of Vibration and Control*, 1077546316654854, 2016.
[32] M. H. Korayem, A. M. Shafei, M. Doosthoseini, F. Absalan, B. Kadkhodaei, Theoretical and experimental investigation of viscoelastic serial robotic manipulators with motors at the joints using Timoshenko beam theory and Gibbs–Appell formulation, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. 230, No. 1, pp. 37-51, 2016.
[33] M. H. Korayem, A. M. Shafei, Application of recursive Gibbs–Appell formulation in deriving the equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory, *Acta Astronautica*, Vol. 83, pp. 273-294, 2013.
[34] P. B. Usoro, R. Nadira, S. S. Mahil, A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, Vol. 108, No. 3, pp. 198-205, 1986.