مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند1396، دوره 17، شماره 12، ص‌ص 382-390

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# مانور پیوسته‌ی پرنده بدون سرنشین به روش بسط مرتبه بالا برای مسئله کنترل بهینه

مهدی مقدسیان[1]، جعفر روشنی‌یان[2*]

1- دانشجو دکترا، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* تهران، صندوق پستی 16569-83911، roshanian@kntu.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 26 شهریور 1396
پذیرش: 02 آذر 1396
ارائه در سایت: 24 آذر 1396

*کلید واژگان:*
بسط مرتبه بالا
کنترل بهینه
مانور بهینه
پرنده بدون سرنشین

**چکیده**

در این پژوهش، بکارگیری روش بسط مرتبه بالا جهت حل مسئله کنترل بهینه به منظور انجام مانورهای پیوسته به وسیله پرنده بدون سرنشین تشریح می‌گردد. هدف اصلی در این پژوهش تبیین روشی جهت بکارگیری بسط سری برای حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از معادله ریکاتی جبری جهت بدست آوردن پاسخ‌های با کیفیت بیشتر در مسائل کنترل بهینه غیرخطی است. بر این اساس، از پسخورد متغیرهای حالت و توان‌های مرتبه بالاتر آن جهت تعیین فرمان بهینه بهره گرفته می‌شود. ناگفته مشخص است که فرمان بهینه محاسبه شده به شکل حلقه بسته و غیرخطی خواهد بود و نشان داده شده است که عملکردی بهتر برای مسئله غیرخطی هموار خواهد داشت. در این تحقیق علاوه‌بر بیان کاربرد و نحوه به کارگیری بسط مرتبه بالا، روشی متفاوت برای بکارگیری آن برای مسائل کنترل بهینه تبیین شده است. به منظور بررسی عملکرد و نشان دادن کاربرد این روش، مسئله مانور پیوسته یک پرنده بدون سرنشین نوعی پیاده‌سازی شده است. بسط مرتبه بالا در این مثال تا مرتبه سوم استخراج شده است و دو سناریوی متفاوت پرواز برای بررسی عملکرد آن ارائه شده است. با بررسی نتایج برای این مسئله، عملکرد برتر فرمان بهینه داده شده به شکل مرتبه سوم نسبت به فرمان بهینه مرتبه اول مشخص می‌گردد.

# Continuous maneuver of unmanned aerial vehicle using High Order Expansions method for optimal control problem

**Mehdi Moghadasian, Jafar Roshanian***

Department of Aerospace Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 16569-83911 Tehran, Iran, roshanian@ kntu.ac.ir

**ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper
Received 17 September 2017
Accepted 23 November 2017
Available Online 15 December 2017

*Keywords:*
High Order Expansions
Optimal Control
Optimal Maneuver
Unmanned Aerial Vehicle

**ABSTRACT**

In this research, the implementation of High Order Expansions method in order to obtain an optimal solution for continuous maneuver of an unmanned aerial vehicle is illustrated. The main goal of this research is to describe a specific approach for solving nonlinear optimal control problems by using series expansions and algebraic matrix Riccati equation in order to obtain a superior solution. Based on this, the state feedback control with higher order powers is used for optimal command calculations. Clearly, the control command would be of higher order and closed-loop; it has been shown it results in a superior performance in the smooth nonlinear problems. In this research, in addition to the implementation of High Order Expansions method and its usage, a different approach for dealing with optimal control problems based on this method has been given. The problem of continuous maneuver of an unmanned aerial vehicle is solved for investigating the performance of the proposed method. In this example, the high order expansions up to and including the third order are used and two different flight scenarios are simulated. By investigating the result of the solution to this problem, the superior performance of the third order optimal command with respect to the first order is illustrated.

## 1- مقدمه

می‌توان گفت که تمام پدیده‌های موجود در طبیعت غیرخطی هستند. گاهی می‌توان در مسائل مهندسی، این پدیده‌ها را به شکل مدل‌های ریاضی خطی در نظر گرفت؛ گاه خطی‌سازی مسئله، مدل مناسبی از رفتار کلی پدیده‌ی مد نظر ارائه نمی‌کند و محققین به ناچار از مدل‌های غیرخطی استفاده خواهند کرد. در این حالت، به منظور حل مسئله غیرخطی عموماً از روش‌های تکراری استفاده می‌شود. در این روش‌ها در هر مرحله از یک تقریب خطی استفاده شده و پاسخی برای مسئله یافت می‌شود. سپس همین روند ادامه پیدا می‌کند تا جایی که پاسخ حاصل با دقت مناسبی در مسئله غیرخطی صدق کند.

از میان این روش‌ها می‌توان به روش‌های شبه‌طیفی[1] اشاره کرد که در مسائل بسیاری از این روش بهره گرفته شده است. در [1] انواع روش‌های انتخاب نقاط برای حل شبه‌طیفی یک مسئله کنترل بهینه غیرخطی زمان‌نهایی محدود و غیرمحدود بحث شده است. سپس در [2] منحصراً چند جمله‌ای چبیشف و کاربرد آن در حل شبه‌طیفی مسئله کنترل بهینه، خصوصاً نحوه محاسبه متغیرهای شبه حالت مورد بحث و بررسی کامل قرار گرفته است. با رویکردی دیگر به کاربرد روش شبه‌طیفی، در [3] مسئله ترکیبی معادله دیفرانسیل-جبری خطی مدنظر قرار گرفته است. در [4] از روش شبه طیفی

[1] Pseudo-spectral method

**Please cite this article using:**

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Moghadasian, J. Roshanian, Continuous maneuver of unmanned aerial vehicle using High Order Expansions method for optimal control problem, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 382-390, 2018 (in Persian)

و روش شوتینگ[1] با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای طراحی مسیر بهینه یک کپسول فضایی بهره گرفته شده و این دو روش با هم مقایسه شده‌اند؛ در ادامه در [5] با توسعه و ترکیب روش شبه‌طیفی با روش‌های گرادیانی، روشی جدید برای طراحی مسیر بهینه پیشنهاد شده است. در حقیقت روش شبه‌طیفی یک روش حل عددی است که به شکل‌های متفاوت می‌توان از آن بهره برد. برای مسئله کنترل بهینه، معمولاً می‌توان از این روش برای بدست آوردن حل حلقه باز مسائل استفاده کرد. مزیت اصلی این روش، همگرایی بسیار سریع و عدم نیاز به استفاده از یک حدس اولیه‌ی دقیق است و ارائه حل حلقه باز عیب اصلی آن است. در عمل فرمان بهینه حاصل با تغییر شرایط اولیه مسئله بدون استفاده خواهند بود.

اخیراً، از روش آنالیز هموتوپی[2] در بسیاری از پژوهش‌های محققین بهره گرفته شده است. در [6]، لیائو روش آنالیز هموتوپی را برای حل مسئله غیرخطی به شکل تقریبی، برای اولین بار معرفی نموده و در [7] این روش را با هموتوپی اغتشاشی مقایسه می‌کند. براساس این تحقیق روش هموتوپی اغتشاشی به نوعی زیرمجموعه روش آنالیز هموتوپی است. روش آنالیز هموتوپی برای حل مسائل، از روش‌های تحلیلی بهره می‌گیرد. به عبارت دیگر، برخلاف روش شبه‌طیفی که یک روش عددی است، این روش به طور کلی یک روش تقریب تحلیلی تکرار شونده می‌باشد. با ترکیب این روش با روش حل شبه‌طیفی، می‌توان از مزایای هر دو بهره برد. در [8] روش آنالیز هموتوپی شبه‌طیفی ارائه شده است که در عمل یک روش ترکیبی (تحلیلی-عددی) است. با بهره‌گیری از این روش می‌توان مسائل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مقادیر مرزی جدا از هم را به شکل تقریبی حل کرد. از آن‌جا که عموماً مسائل کنترل بهینه نیز به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مقادیر مرزی جدا از هم فرموله می‌شود، چنین روشی در حل مسائل کنترل بهینه نیز کاربرد خواهد داشت. روش آنالیز هموتوپی، در [9] برای بررسی ارتعاشات اجباری رایزر[3]های دریایی استفاده شده است. در این تحقیق نتایج حاصل با حل به روش رانگ-کوتا[4] مرتبه چهارم مقایسه شده و همچنین نشان داده شد است که حل آنالیز هموتوپی سرعت خوبی در همگرایی به حل عددی رانگ-کوتا دارد. در کاربرد دیگر [10]، روش آنالیز هموتوپی با ترکیب با روش گره مرزی برای حل مسئله انتقال حرارت نقطه سکون در دو بعد مورد استفاده قرار گرفته است. بر اساس این تحقیق، به جهت ترکیب روش آنالیز هموتوپی و گره‌مرزی و در نتیجه انجام محاسبات ماتریسی، سرعت حل مسئله بیش از پیش افزایش خواهد یافت.

روش‌هایی چون آنالیز هموتوپی شبه‌طیفی و روش‌های ترکیبی امثال آن، ویژگی‌های یک حل عددی چون روش شبه‌طیفی و یک حل تحلیلی مانند آنالیز هموتوپی یا هموتوپی اغتشاشی را با هم ترکیب می‌کنند. در چنین روش‌های محاسباتی عموماً مصالحه‌ای بین دقت پاسخها و سرعت محاسبات برقرار می‌گردد. در نتیجه به طور کلی روش‌های ترکیبی برای حل مسائل واقعی با دقت بالا بسیار با اهمیت هستند. اگرچه روش آنالیز هموتوپی روش بسیار توان‌مندی برای برخورد با مسائل غیرخطی است اما این روش همچنین در برگزینش پارامترهای همگرایی با چالش‌هایی همراه است.

در این تحقیق با در نظر گرفتن برتری‌های یک حل ترکیبی با توجه به آن چه بیان شد، و با مبنا قرار دادن و توسعه روش بسط مرتبه بالا[5] و بکارگیری آن در مسئله کنترل بهینه، روشی نوآورانه برای حل تقریبی مسئله غیر خطی کنترل بهینه ارائه می‌گردد. در روش بسط مرتبه بالا با فرض کردن پاسخ مسئله به شکل سری توانی و قرار دادن آن در معادلات حاکم بر مسئله و سپس تعیین ضرایب سری به شکل حل تکرار شونده، می‌توان پاسخ تقریبی برای مسئله مورد نظر یافت. در روشی که در این تحقیق پیشنهاد می‌گردد، به جای حل کامل معادلات دیفرانسل متغیرهای حالت و شبه‌حالت، هر مرحله از حل در قالب یک مسئله ریکاتی جبری پیاده‌سازی خواهد شد. بدین منظور در هر مرحله از حل، با در نظر گرفتن بخش ناهمگنی، مسئله ریکاتی جبری حل شده و رابطه مستقیم بین متغیرهای شبه‌حالت و متغیرهای حالت حاصل می‌گردد. روش ارائه شده به گونه‌ای است که می‌توان آن را در مسائل متفاوت به کار گرفت. از آن جا که بسط مرتبه بالا یک روش ترکیبی است، نیاز به حل مجدد برخط مسئله برطرف می‌گردد. سیاست کنترلی ارائه شده به شکل حلقه بسته است و عبارت‌های متفاوت از مرتبه 1 تا مرتبه دلخواه در آن استفاده می‌گردد. در این تحقیق برای بیان و شفاف‌سازی عملکرد و کاربرد روش پیشنهادی، حل مسئله مانور پیوسته یک پرنده بدون سرنشین ارائه خواهد شد. از آن‌جا که در این مسئله اهداف به شکل اتفاقی تعیین می‌گردند، در نتیجه با ارائه یک فرمان هدایت چابک‌تر می‌توان عملکرد پرنده بدون-سرنشین را افزایش داد؛ برای این منظور با بکارگیری روش پیشنهادی، معادلات سینماتیک تغییرات خط دید در قالب یک مسئله کنترل بهینه تا مرتبه‌ی سوم حل می‌گردد.

در ادامه این تحقیق، ابتدا در بخش دوم روش بسط مرتبه بالا تشریح شده و روش حل پیشنهادی ارائه می‌شود. سپس در ادامه، مدل‌سازی ریاضی مسئله هدایت و همچنین معادلات حاکم بر پرواز پرنده بدون سرنشین در بخش سوم تشریح می‌گردد. حل مسئله هدایت پرنده بدون سرنشین با استفاده از روش ارائه شده، در بخش چهارم آورده شده و نهایتاً نتایج شبیه-سازی‌ها و تحلیل کیفی آن در بخش پنجم بیان شده و در پایان دست‌آورد-های این تحقیق آورده شده است.

## 2- روش حل: توسعه بسط مرتبه بالا و مسئله کنترل بهینه

از گذشته، برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی نسبتاً ساده، از روش‌های بسط سری استفاده می‌شده است. روش بسط مرتبه بالا، نسخه عمومیت داده شده روش بسط سری است. در سال 2008 میلادی، در [11] کاربرد روش بسط مرتبه بالا برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مقادیر مرزی بیان شده است. در این تحقیق جریان حساسیت‌های مرتبه بالا در معادلات دیفرانسیل با به کارگیری روش اویلر محاسبه می‌شود. دو سال بعد، در [12] تحقیق مشابهی برای بیان کاربرد بسط مرتبه بالا ارائه شده است؛ در این تحقیق مانور مداری با کمک جاذبه مدنظر بوده است. اشاره مستقیم کاربرد بسط مرتبه بالا در حل مسئله کنترل بهینه در [13] ارائه گردید؛ در این پژوهش حل مسئله کنترل بهینه به شکل حلقه باز ارائه شده است. به علاوه حل حلقه بسته مرتبه بالا مسئله کنترل بهینه در [14] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در [14-11] برای حل معادلات دیفرانسیل از روش ساده اویلر و برای انجام محاسبات از روش جبر دیفرانسیلی[6] بهره گرفته شده است. از مطالعات دیگر در زمینه بسط مرتبه بالا می‌توان به [15] اشاره کرد که در آن به شکل نوآورانه‌ای بسط مرتبه بالا برای حل مسئله شبیه‌سازی مونت کارلوی برخورد اجسام فضایی استفاده شده است. همچنین، اخیراً در [16] از روش بسط مرتبه بالا بر پایه جبر دیفرانسیلی برای بررسی و تحلیل آماری

[1] Shooting method
[2] Homotopy Analysis Method
[3] Riser
[4] Runge-Kutta
[5] High Order Expansions Method
[6] Differential Algebra

دینامیک مداری بر پایه روابط معمول و همچنین روش میانگین‌گیری استفاده شده است.

در حقیقت روش بسط مرتبه بالا نیز همانند روش آنالیز هموتوپی یک روش تحلیلی است. در این روش، با استفاده از روش‌هایی مانند بسط سری تیلور حول حل نامی مسئله، می‌توان پاسخ مسئله غیرخطی را نزدیک به حل نامی، به شکل تقریبی بدست آورد. برای این منظور یک مسئله خطی ناهمگن مکرراً تا مرتبه‌ی دلخواه حل می‌گردد.

در این بخش ابتدا بسط مرتبه بالا تشریح شده و سپس روشی جدید که ویژگی‌های یک حل ترکیبی را به همراه دارد، برای حل تقریبی مسئله کنترل بهینه بر پایه بسط مرتبه بالا تشریح می‌شود.

### 2-1- بسط مرتبه بالا

فرض کنید دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل $n$ معادله و متغیر حالت وابسته $z_1,\dots,z_n$ داده شده است که در آن زمان، $t$ متغیر مستقل است. دستگاه معادلات به شکل معادلات معمولی غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط اولیه می‌توان دستگاه معادلات را با روش‌های عددی مثل رانگ-کوتا حل کرد. اگر فرض شود $z_1(t),\dots,z_n(t)$ مقادیر نامی حل مسئله باشد، مسیر مغشوش شده در نتیجه انحرافات اولیه را می‌توان به شکل $z_1^p(t),\dots,z_n^p(t)$ نشان داد. حال با فرض اینکه انحرافات برای شرایط اولیه متغیرهای حالت را می‌توان با $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ نشان داد در نتیجه معادله (1) رابطه بین مقادیر نامی و مغشوش متغیرهای حالت را بیان می‌کند.

$$z_i^p(t;\ \alpha_1,\dots,\alpha_n)=z_i(t)+z_i^d(t,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$
$$i=1,2,\dots,n \tag{1}$$

در این رابطه بالانویس $d$ اغتشاشات را برای متغیرهای حالت نشان می‌دهد. با بررسی این معادله می‌توان دید که فرض شده است متغیرهای اغتشاشات تابعی نامعین از زمان و انحرافات اولیه است؛ فرم کلی این متغیر را می‌توان به شکل بسط سری تیلور چند متغیره ارائه کرد. در نتیجه

$$z_i^d(t,\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\sum_{j=1}^{n}S_{\alpha_j}^i\,\alpha_j+\sum_{j=1,k=1}^{n}S_{\alpha_j,\alpha_k}^i\,\alpha_j\alpha_k+\cdots \tag{2}$$

که در آن $S_{\alpha_j}^i$ و $S_{\alpha_j,\alpha_k}^i$ به طور عمومی توابعی از زمان هستند که باید تعیین گردند؛ این توابع حساسیت نامیده می‌شوند. در نهایت معادله (1) را می‌توان به شکل ارائه شده در (3) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}z_i^p(t;\ \alpha_1,\dots,\alpha_n)=z_i(t)&+S_{\alpha_1}^i\alpha_1+\cdots+S_{\alpha_n}^i\alpha_n\\&+S_{\alpha_1^2}^i\alpha_1^2+S_{\alpha_1,\alpha_2}^i\alpha_1\alpha_2+\cdots\\&+H.O.T\end{aligned} \tag{3}$$

اکنون با فرض اینکه دستگاه معادلات دیفرانسیل مسئله را می‌توان به شکل رابطه (4) ارائه کرد،

$$\dot{z}_i=f_i(z_1,\dots,z_n);\ i=1\dots n \tag{4}$$

با قرار دادن معادله (3) در (4) و با استفاده از بسط سری تیلور حول مقادیر نامی، مسئله کلی را پس از ساده سازی می‌توان در قالب ماتریسی به شکل معادله (5) ارائه کرد.

$$\begin{bmatrix}\dot{S}_{\alpha_1}^1 & \cdots & \dot{S}_{{\alpha_1}^2}^1 & \cdots\\ & & \vdots & \\ \dot{S}_{\alpha_1}^n & \cdots & \dot{S}_{{\alpha_1}^2}^n & \cdots\end{bmatrix}=$$
$$.O.T$$

$$\begin{bmatrix}d_1^1 & \cdots & d_n^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ d_1^n & \cdots & d_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_{\alpha_1}^1 & \cdots & S_{\alpha_1^2}^1 & \cdots\\ & & \vdots & \\ S_{\alpha_1}^n & \cdots & S_{\alpha_1^2}^n & \cdots\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}d_{1,1}^1 & d_{1,2}^1 & \cdots & d_{2,2}^1 & d_{2,3}^1 & \cdots & d_{n,n}^1\\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots\\ d_{1,1}^n & d_{1,2}^n & \cdots & d_{2,2}^n & d_{2,3}^n & \cdots & d_{n,n}^n\end{bmatrix}\times$$
$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & S_{\alpha_1}^1S_{\alpha_1}^1 & \cdots\\ 0 & \cdots & 2S_{\alpha_1}^1S_{\alpha_1}^2 & \cdots\\ & & \vdots & \\ 0 & \cdots & S_{\alpha_1}^2S_{\alpha_1}^2 & \cdots\\ 0 & \cdots & 2S_{\alpha_1}^2S_{\alpha_1}^3 & \cdots\\ & & \vdots & \\ 0 & \cdots & S_{\alpha_1}^nS_{\alpha_1}^n & \cdots\end{bmatrix}+H \tag{5}$$

معادله (5) رابطه اصلی برای حل مسئله بسط مرتبه بالا است. در سمت چپ این معادله ماتریس حساسیت قرار دارد که هر ستون آن را می‌توان به شکل مستقل حل کرد. البته روند حل باید به ترتیب برای ستون اول تا ستون آخر دنبال گردد. با حل هر ستون، مقادیر حساسیت‌های محاسبه شده برای محاسبه حساسیت‌های ستون‌های بعدی، به شکل عبارت ناهمگنی استفاده می‌گردد. در معادله (5)، $d_j^i$ و $d_{j,k}^i$ مقادیر مشتقات مرتبه اول و دوم معادله (4) حول مسیر نامی هستند.

### 2-2- توسعه بسط مرتبه بالا برای حل مسئله کنترل بهینه غیرخطی

پس از بیان خلاصه روش بسط مرتبه بالا، در این بخش کاربرد این روش برای حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از حل معادله ریکاتی جبری بیان می‌گردد. فرض می‌شود مسئله کنترل بهینه به شکل زمان و شرایط نهایی آزاد مدل شده است. به علاوه جهت تسهیل روند حل فرض می‌گردد که مشتقات محاسبه شده نیز به شکل لحظه‌ای ثابت هستند. فرض کنید مسئله کنترل بهینه مورد نظر به شکل رابطه (6) ارائه می‌گردد.

$$\begin{gathered}J=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TRu\right)dt\\ \dot{x}=f_x(x,u)\\ \mathcal{H}=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TRu+p^Tf_x(x,u)\\ \dot{p}=f_p(x,p,u)=-\nabla_x\mathcal{H}\\ \nabla_u\mathcal{H}=0\end{gathered} \tag{6}$$

درعبارت فوق $x$، $p$، $u$، $Q$ و $R$ به ترتیب بردار متغیر حالت، بردار متغیر شبه-حالت، بردار متغیر کنترل، ماتریس وزنی نامنفی معین متغیرهای حالت و ماتریس مثبت معین وزنی متغیر کنترل هستند. به علاوه $f_x$ و $f_p$ توابعی غیرخطی و عمومی برای نرخ تغییرات متغیر حالت و شبه‌حالت هستند. با فرض این که بردار فرمان کنترلی $u$ به شکل صریح قابل محاسبه است، پس از محاسبه آن و جایگذاری در معادلات حالت و شبه‌حالت، دستگاه معادلات دیفرانسل متغیرهای حالت و شبه‌حالت به فرم عمومی معادله (4) حاصل می‌گردد. سپس با محاسبه مشتقات بر روی مسیرنامی و استفاده از بسط سری تیلور برای $f_x$ و $f_p$ و قرار دادن شکل اغتشاشی متغیرهای حالت و شبه‌حالت، دستگاه معادلات دیفرانسل حساسیت‌ها به فرم معادله (5) حاصل می‌شود. اکنون با توجه به این که در هر مرحله، دستگاه معادلات دیفرانسیل حساسیت‌ها در روش بسط مرتبه بالا، برای هر ستون به شکل جداگانه قابل ارائه است، در نتیجه

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_x^i\\ \dot{s}_p^i\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}s_x^i\\ s_p^i\end{bmatrix}+\Psi^i;\ i=1\dots m \tag{7}$$

در رابطه (7) ، بردار $\Psi^i$ که عبارت ناهمگنی نامیده می‌شود، برای حل مرتبه اول برابر با بردار صفر و برای مرتبه‌های بالاتر با استفاده از حساسیت‌های مرتبه پایین‌تر محاسبه می‌گردد. برای محاسبه عبارت ناهمگنی و بسط معادلات باید از نرم‌افزارهای حل تحلیلی مانند میپل[1] بهره گرفت. به علاوه، در این رابطه $M$ به شکل معادله (8) تعریف می‌شود و $s_x^i$ و $s_p^i$ به ترتیب حساسیت‌های متغیرهای حالت و شبه‌حالت برای حل مرتبه $i$اُم هستند.

$$M = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \tag{8}$$

در معادله (8)، $A$ و $B$ به ترتیب مشتقات مرتبه اول $f_x$ نسبت به متغیرهای حالت و کنترل هستند.

برای حل مرتبه اول صرفاً معادله ریکاتی حل می‌گردد چرا که عبارت ناهمگنی در این حالت برابر با صفر است؛ از آن جا که پارامترهای $A$، $B$، $Q$ و $R$ ثابت با زمان در نظر گرفته شده‌اند و با توجه به تعریف تابع هزینه در رابطه (6) و همچنین با در نظر گرفتن زمان و شرایط نهایی آزاد در مسئله کنترل بهینه، معادله ریکاتی به شکل جبری خواهد بود. این حالت مشابه مسئله کنترل بهینه خطی ثابت با زمان با فرضیات داده شده در بالا است. معادله جبری ریکاتی در (9) داده شده است. در صورتی که جفت ماتریس‌های $A$ و $B$ کنترل‌پذیر باشند می‌توان از رابطه (9) برای حل مسئله بهره گرفت.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \tag{9}$$

در نتیجه

$$s_p^i = Ks_x^i \tag{10}$$

برای مراتب بالاتر، از آن جا که عبارت ناهمگنی صفر نیست در نتیجه

$$s_p^i = Ks_x^i + T^i \tag{11}$$

که در آن $T^i$ ناشی از وجود عبارت ناهمگن در دستگاه معادلات است. عبارت $T^i$ را به شکل عددی و در برخی موارد که مسائل ساده‌تر هستند می‌توان به شکل تحلیلی بدست آورد.

با بدست آوردن حساسیت‌ها تا مرتبه دلخواه برای متغیر شبه‌حالت و سپس محاسبه صریح فرمان کنترل بهینه براساس آن می‌توان قانون کنترل حلقه بسته مرتبه بالا را برای مسئله غیرخطی مورد نظر پیدا کرد. در ادامه و در بخش 4، با استفاده از این روش مسئله هدایت بهینه برای یک پرنده بدون سرنشین حل می‌گردد.

## 3- مدل‌سازی ریاضی مسئله مانور پرنده بدون سرنشین

پیش از طراحی قانون هدایت، ابتدا در این بخش مدل‌سازی ریاضی مسئله غیرخطی مانور پیوسته پرنده بدون سرنشین نوعی ارائه می‌گردد. فرض بر این است که این مسئله در صفحه عمودی و به شکل دو درجه آزادی مدل‌سازی می‌شود؛ جاذبه و چگالی نیز به دلیل تغییرات ارتفاع کم، ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌گردد جرم پرنده بدون سرنشین بدون تغییر است. در این بخش ابتدا مدل ریاضی دینامیک حرکت پرنده بدون سرنشین ارائه می‌گردد و سپس مدل سینماتیکی تغییرات خط دید جهت حل مسئله هدایت بهینه بیان می‌شود.

### 3-1- مدل ریاضی پرواز پرنده بدون سرنشین در دو بعد

مدل استفاده شده در این تحقیق بر گرفته از [17] است. در این مدل فرض می‌شود جاذبه، چگالی و جرم ثابت است و حرکت پرنده در صفحه عمودی اتفاق می‌افتد. به علاوه پرنده بدون سرنشین نوعی، به شکل جسم ذره‌ای در نظر گرفته می‌شود. معادلات ارائه شده در (12) معادلات حرکت این پرنده بدون سرنشین را بیان می‌کند.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= v\sin\gamma \\ \dot{x} &= v\cos\gamma \\ \dot{v} &= -D' - g\sin\gamma + T' \\ \dot{\gamma} &= \frac{L'}{v} + \frac{g\cos\gamma}{v} \\ \dot{T}' &= -\frac{T' - T_c'}{\tau_{T'}} \end{aligned} \tag{12}$$

در معادله‌ی (12)، $h$، $x$، $v$ و $\gamma$ به ترتیب ارتفاع، برد، سرعت و زاویه‌ی مسیر هستند. به علاوه، $T'$ شتاب در راستای بردار سرعت است. در این رابطه $D'$، $L'$ و $T_c'$ به ترتیب پسا و برا بر واحد جرم و فرمان شتاب در راستای بردار سرعت هستند و $g$ شتاب جاذبه و برابر با 9.81 متر بر مجذور ثانیه است. برای محاسبه این پارامترها از معادله (13) می‌توان بهره برد.

$$\begin{aligned} L' &= \eta C_l v^2 \\ D' &= \eta C_d v^2 \\ C_d &= C_{d_0} + C_{d_1}C_l + C_{d_2}C_l^2 \\ C_l &= C_{l_{max}} u \end{aligned} \tag{13}$$

در معادله (13)، $C_l$ و $C_d$ به ترتیب ضرایب آیرودینامیکی برا و پسا هستند. برای محاسبه این ضرایب پارامترهای $C_{d_0}$، $C_{d_1}$، $C_{d_2}$ و $C_{l_{max}}$ به ترتیب برابر با 0.05، 0.01، 0.025 و 0.5 هستند و $\eta$ ثابت و معادل با 0.01916 است. این عبارت برابر با نصف چگالی ضرب در سطح مشخصه آیرودینامیکی برای بی‌بعدسازی است. در معادله (13)، $u$ متغیر کنترلی برا است.

به این ترتیب با داشتن اندازه متغیر کنترلی برا و مقادیر اولیه متغیرهای حالت می‌توان مسیر حرکت پرنده را شبیه‌سازی کرد. برای این منظور باید توجه داشت که فرمان شتاب در راستای سرعت برابر با $D'$ در نظر گرفته می‌شود.

### 3-2- مدل سینماتیکی مسئله هدایت

معمولاً در بیشتر مسائل از مدل خطی سینماتیک نرخ خط دید استفاده می‌شود. در این تحقیق روند استخراج معادلات دیفرانسیل خط دید غیرخطی به طور خلاصه تشریح می‌شود؛ علاقه‌مندان برای بررسی جزئیات می‌توانند [18] را بررسی نمایند. در شکل 1 هندسه خط دید نشان داده شده است. در این شکل $I$ نقطه اولیه، $F$ نقطه هدف، $\delta h$ و $\delta x$ مقدار تفاضلی ارتفاع و برد نقطه اولیه و هدف و $\lambda$ زاویه خط دید هستند.

بدین ترتیب می‌توان نوشت

$$\lambda = \arctan\frac{\delta h}{\delta x} \tag{14}$$

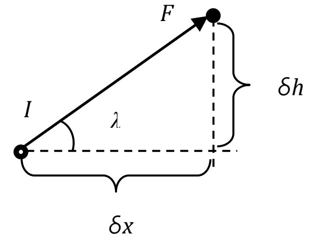


**Fig. 1** Line of sight geometry

**شکل 1** هندسه خط دید

[1] Maple

با مشتق‌گیری از طرفین معادله

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\delta \dot{h}}{\delta x} - \delta \dot{x}\frac{\delta h}{\delta x^2}}{\left(\frac{\delta h}{\delta x}\right)^2 + 1} \tag{15}$$

اکنون با در نظر گرفتن اندازه بردار خط دید $r$ به شکلی که در معادله (16) آمده است، می‌توان معادله (15) را به شکل ساده‌تر معادله (17) نوشت.

$$r = (\delta x^2 + \delta h^2)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\delta x \delta \dot{h} - \delta \dot{x} \delta h}{r^2} \tag{17}$$

توجه شود که در این معادلات تمامی متغیرها تابعی از زمان هستند. پس از محاسبه نرخ خط دید، مشتق دوم آن را می‌توان با مشتق‌گیری دوباره یافت. با صرف‌نظر از جزئیات و پس از ساده‌سازی معادلات مشتق دوم خط دید به شکل معادله (18) محاسبه می‌گردد.

$$\ddot{\lambda}\cos(\lambda) - \dot{\lambda}\sin(\lambda) = a_1 \sin(\lambda) + a_2 \cos(\lambda)\,\dot{\lambda} + b u_N \tag{18}$$

که در آن

$$a_1 = -\frac{\ddot{r}}{r}$$
$$a_2 = -\frac{2\dot{r}}{r}$$
$$b = -\frac{1}{r} \tag{19}$$

که تمامی آن‌ها تابعی از زمان هستند. پس از ساده‌سازی بیشتر

$$\ddot{\lambda} = \dot{\lambda}^2 \tan(\lambda) + a_1 \tan(\lambda) + a_2\dot{\lambda} + \frac{b}{\cos\lambda} u_N \tag{20}$$

معادله (20) فرم نهایی معادله دیفرانسیلی تغییرات خط دید است. در بخش چهارم از این معادله برای طراحی فرمان هدایت حلقه‌بسته مرتبه بالا استفاده خواهد شد.

### 3-3- روش حل و شبیه‌سازی مسئله پرواز پرنده بدون سرنشین

در زیر بخش اول معادلات دینامیکی یک پرنده بدون سرنشین ارائه شد. فرض شده است پرنده می‌تواند با اعمال تراست برابر با نیروی پسا، با کاهش سرعت مقابله نماید. البته در رابطه (12) یک دینامیک مرتبه اول برای اعمال شتاب در راستای سرعت در نظر گرفته شده است تا مسئله به واقعیت نزدیک‌تر باشد. در صورتی که $u$ در رابطه (13) به طریقی مشخص گردد، با تعیین شرایط اولیه می‌توان شبیه‌سازی پرواز را انجام داد. متغیر $u$ تعیین کننده اندازه شتاب اعمالی عمود بر بردار سرعت است؛ به بیان دیگر $u$ مشخص می‌کند چه میزان از توانایی تولید برا وسیله پرنده، $C_{l_{\max}}$، باید مورد استفاده قرار بگیرد. در صورتی که هدف پرنده بدون سرنشین تعیین شده باشد، با محاسبه خط دید و نرخ تغییرات آن می‌توان شتاب مورد نیاز برای ثابت کردن خط دید را با استفاده از یک قانون هدایت محاسبه کرد. بدین ترتیب $u$ چنان تعیین می‌شود که شتاب عمود بر سرعت برابر با شتاب درخواستی برای ایجاد شرایط خط دید ثابت باشد. از آن جا که شتاب درخواستی برای صفر کردن نرخ خط دید (خط دید ثابت) متناسب با نرخ تغییرات خط دید است، با استخراج روابط سینماتیک نرخ خط دید می‌توان قانون هدایتی بهینه برای تعیین شتاب مورد نیاز را طراحی کرد. بدین منظور در بخش چهارم، با استفاده از بسط مرتبه بالا، مسئله سینماتیک نرخ تغییرات خط دید به شکل غیرخطی حل می‌گردد. با به کارگیری قانون هدایت پیشنهاد شده، می‌توان فرمان شتاب درخواستی را محاسبه نمود؛ سپس $u$ چنان تعیین می‌شود که اندازه شتاب عمود بر بردار سرعت برابر با شتاب درخواستی گردد.

## 4- حل مسئله هدایت به روش بسط مرتبه بالا

معادلات دیفرانسیل نرخ تغییرات زاویه خط دید استخراج شده را می توان در فضای حالت به شکل معادله (21) بازنویسی کرد.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2^2 \tan(x_1) + a_1 \tan(x_1) + a_2 x_2 + \frac{b}{\cos x_1} u_N \tag{21}$$

در معادله (21)، $x_1$ و $x_2$ به ترتیب زاویه خط دید و مشتق اول زاویه خط دید است. اکنون می‌توان معادله فوق را حول نقطه تعادل آن یعنی زاویه خط دید و نرخ خط دید صفر با استفاده از سری تیلور تا مرتبه 3 برای متغیرهای حالت و تا مرتبه 1 برای متغیر کنترل بسط داد. بدین ترتیب با صرف نظر کردن از عبارت‌های مرتبه بالاتر

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \frac{a_1}{3} x_1^3 + x_1 x_2^2 + b u_N \tag{22}$$

همچنین فرض می‌شود حساسیت‌ها نیز تا مرتبه 3 در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه

$$\begin{aligned} x_i^d = {} & s_{x_i}^{\alpha_{x_1}} \alpha_{x_1} + s_{x_i}^{\alpha_{x_2}} \alpha_{x_2} + s_{x_i}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_1} \\ & + s_{x_i}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_2} \\ & + s_{x_i}^{\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_2}\alpha_{x_2} \\ & + s_{x_i}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1},\alpha_{x_1}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_1}\alpha_{x_1} \\ & + s_{x_i}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_1}\alpha_{x_2} \\ & + s_{x_i}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_2}\alpha_{x_2} \\ & + s_{x_i}^{\alpha_{x_2},\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_2}\alpha_{x_2}\alpha_{x_2} \end{aligned} \tag{23}$$

در حالی که $i = 1,2$. به شکل مشابه برای متغیرهای شبه‌حالت نیز یک بسط مشابه در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن تابع هزینه به فرم معادله (24)

$$J = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\infty} (Q_{11} x_1^2 + Q_{22} x_2^2 + R u_N^2) dt \tag{24}$$

و همچنین با توجه به این که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \tag{25}$$

در نتیجه می‌توان معادله جبری ریکاتی (9) را حل کرد. در این مورد خاص می‌توان حل مسئله ریکاتی را به شکل تحلیلی بدست آورد. حل معادله ریکاتی برای این مسئله در (26) داده شده است.

$$K_{11} = \frac{a_1 R}{b^2} + \sqrt{\frac{Q_{11} R}{b^2} + \left(\frac{a_1 R}{b^2}\right)^2}$$
$$K_{12} = -K_{12} a_2 - K_{22} a_1 + \frac{K_{12} K_{22} b^2}{R}$$
$$K_{22} = \frac{a_2 R}{b^2} + \sqrt{\frac{Q_{22} R}{b^2} + \frac{2 K_{12} R}{b^2} + \left(\frac{a_2 R}{b^2}\right)^2} \tag{26}$$

پاسخ فوق زمانی معتبر است که مسئله کنترل بهینه مورد نظر به طور کامل کنترل‌پذیر بوده و پارامترها به شکل لحظه‌ای ثابت با زمان در نظر گرفته شده باشند. در نتیجه بر اساس (10) برای حساسیت‌های مرتبه 1 متغیرهای شبه-حالت می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} s_{p_1}^{\alpha_{x_i}} \\ s_{p_2}^{\alpha_{x_i}} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} s_{x_1}^{\alpha_{x_i}} \\ s_{x_2}^{\alpha_{x_i}} \end{bmatrix}; i = 1,2 \tag{27}$$

در این مسئله از نامگذاری متفاوتی برای حساسیت‌ها استفاده شده است که در آن پایین‌نویس به معنی "حساسیت برای" و بالانویس با مفهوم "ناشی از" است. با ادامه این روند بر اساس معادله (11) و محاسبه تمام حساسیت‌ها تا مرتبه 3 فرمان کنترل بهینه مرتبه 3 را می‌توان به شکل معادله (28) ارائه کرد. از آن جا که در مسئله مورد نظر پارامترهای مسئله به شکل لحظه‌ای ثابت در نظر گرفته شده و هم‌چنین زمان نهایی آزاد است، در نتیجه حساسیت‌ها برای متغیرهای حالت و شبه‌حالت برای برآورد رابطه (28) در زمان عمومی $t = t_0$ مد نظر قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned} u_N = -\frac{b}{R} p_2^d = -\frac{b}{R} (& s_{p_2}^{\alpha_{x_1}} \alpha_{x_1} + s_{p_2}^{\alpha_{x_2}} \alpha_{x_2} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_1} + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_2} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_2}\alpha_{x_2} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1},\alpha_{x_1}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_1}\alpha_{x_1} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_1}\alpha_{x_2} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_1}\alpha_{x_2}\alpha_{x_2} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_2},\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \alpha_{x_2}\alpha_{x_2}\alpha_{x_2}) \end{aligned} \tag{28}$$

اکنون با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \alpha_{x_i} = x_i^p = x_i - 0 = x_i; i = 1,2 \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{29}$$

نهایتاً

$$\begin{aligned} u_N = -\frac{b}{R} (& s_{p_2}^{\alpha_{x_1}} \lambda + s_{p_2}^{\alpha_{x_2}} \dot{\lambda} + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1}} \lambda^2 + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_2}} \lambda\dot{\lambda} \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \dot{\lambda}^2 + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1},\alpha_{x_1}} \lambda^3 \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_1},\alpha_{x_2}} \lambda^2\dot{\lambda} + s_{p_2}^{\alpha_{x_1},\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \lambda\dot{\lambda}^2 \\ & + s_{p_2}^{\alpha_{x_2},\alpha_{x_2},\alpha_{x_2}} \dot{\lambda}^3) \end{aligned} \tag{30}$$

معادله (30) رابطه نهایی فرمان هدایت بهینه حلقه بسته از مرتبه 3 است. در رابطه (30)، $u_N$ شتاب عمود بر بردار سرعت مورد نیاز است. در بخش بعد این رابطه برای محاسبه فرامین هدایت بهینه برای مانور یک پرنده بدون سرنشین نوعی استفاده خواهد شد.

## 5- مانور پیوسته بهینه یک پرنده بدون سرنشین

پس از استخراج فرمان مانور بهینه مرتبه سوم در بخش قبل، در این بخش مسئله مانور پیوسته پرنده بدون سرنشین با استفاده از این فرمان هدایت بررسی خواهد شد. در بخش 3 معادلات برای شبیه‌سازی پرواز این پرنده بدون سرنشین ارائه شد. فرض می‌شود با شروع شبیه‌سازی 15 نقطه ثابت به شکل تصادفی با ارتفاع و برد متفاوت تعیین می‌گردد و پرنده بدون سرنشین باید به شکل پیوسته از این نقاط عبور نماید. پرنده تنها داده‌های نزدیک‌ترین نقطه را در اختیار دارد و به محض عبور از آن نقطه هدف به‌روز می‌گردد و هدف بعدی برای پرنده مشخص می‌شود. نقاط به شکلی تعیین شده اند که مانور پرنده چالش برانگیز بوده و پرنده باید از نظر تولید و اجرای فرامین هدایت چابک باشد. در این شبیه‌سازی‌ها فرض می‌شود که ترجیح بر آن است که پرنده با رسیدن به هدف خط دید خود را به 70 درصد مقدار اولیه کاهش داده و نرخ خط دید را صفر کند. برای انجام شبیه‌سازی‌ها فرض می‌شود مقادیر اولیه به شکل معادله (31) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} x(0) = 0 \\ h(0) = 1500 \text{ m} \\ v(0) = 175 \text{ m/s} \\ \gamma(0) = 0 \text{ deg} \end{aligned} \tag{31}$$

به علاوه پارامترهای مسئله کنترل بهینه به شکل معادله (32) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} Q_{11} = 2 \\ Q_{22} = 5 \\ R = 1 \end{aligned} \tag{32}$$

عموماً تعیین وزن برای تابع هزینه به شکلی انجام می‌گردد که نیازهای کلی مسئله برآورده گردد؛ به بیان دیگر، طراح باید مصالحه‌ای بین ویژگی‌های عملکردی متفاوت برقرار نماید. وزن‌های فوق به شکلی انتخاب شده‌اند که پرنده بدون سرنشین بتواند از اهداف عبور نموده و همچنین فرامین شتاب درخواستی در بازه‌ی توانایی پرنده باشد.

به منظور انجام شبیه‌سازی‌ها، دو پرنده مختلف در نظر گرفته شده است. پرنده اول دارای قانون هدایت مرتبه 1 است. به بیان دیگر قانون هدایت استفاده شده در پرنده اول معادل با یک قانون هدایت بهینه خطی است. اما در پرنده دوم حساسیت‌ها تا مرتبه 3 درنظر گرفته شده و در نتیجه یک قانون هدایت غیرخطی بهینه خواهد بود.

برای ارزیابی عملکرد 2 سناریو متفاوت از اجرای شبیه‌سازی‌ها آورده شده است. در هر دو سناریو فرامین مرتبه 1 و مرتبه 3 با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در سناریو اول هر دو روش ماموریت را به پایان می‌رسانند حال آن که در سناریوی دوم هدایت مرتبه اول قادر به تکمیل ماموریت نیست و پرنده به زمین برخورد می‌نماید؛ از طرفی هدایت مرتبه 3 به سادگی ماموریت را به انجام می‌رساند.

در شکل 2 تا 5 به ترتیب نمودارهای مسیر حرکت، زاویه خط دید، نرخ زاویه‌ی خط دید و فرمان کنترل برای سناریوی اول ارائه شده است. نمودارهای مشابه برای سناریوی دوم در شکل 6 تا 9 آورده شده است.

در سناریوی اول هر دو فرمان هدایت مرتبه اول و سوم به خوبی ماموریت را به پایان می‌رسانند؛ با این حال فرمان هدایت برای هر دو حالت در لحظات پایانی از 1- تجاوز می‌نماید. با بررسی نمودار مسیر حرکت می‌توان دید که پرنده‌ای که با قانون هدایت مرتبه سوم فرامین مانور را تولید می‌نماید عملکردی چابک‌تر نسبت به پرنده دیگر دارد. این عملکرد بهتر را می‌توان همچنین در نمودارهای خط دید و نرخ خط دید نیز به خوبی مشاهده کرد.

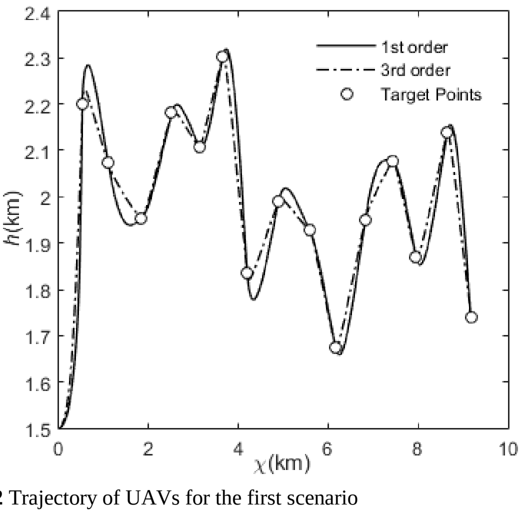


**Fig. 2** Trajectory of UAVs for the first scenario

**شکل 2** مسیر حرکت دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی اول

نرخ خط دید برای هدایت مرتبه سوم با سرعت و شیب بیشتر به صفر میل می‌کند به علاوه در نمودار زاویه‌ی خط دید نیز قله‌ها و دره‌های نمودار عملکرد مطلوب‌تر برای فرمان هدایت مرتبه سوم را نشان می‌دهند. علاوه‌بر این به سادگی می‌توان دید که اندازه فرمان هدایت نیز برای قانون هدایت مرتبه سوم کوچکتر از مرتبه اول است. برای سناریو دوم نیز رفتار کلی هر دو قانون هدایت مشابه سناریوی اول است. همان طور که می‌توان دید، در شرایط دشوار عملکرد قانون هدایت مرتبه سوم نسبت به مرتبه اول برتر است. نمونه این شرایط دشوار را می‌توان در سناریوی دوم بین نقطه هدف 11 و 12 به سادگی مشاهده کرد؛ قانون هدایت مرتبه اول توانایی تولید فرامین هدایت مطلوب را ندارد.

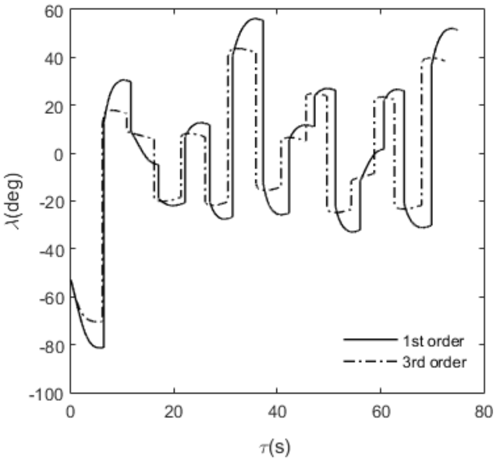


**Fig. 3** LOS angle time history of UAVs for the first scenario

**شکل 3** تغییرات خط دید دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی اول

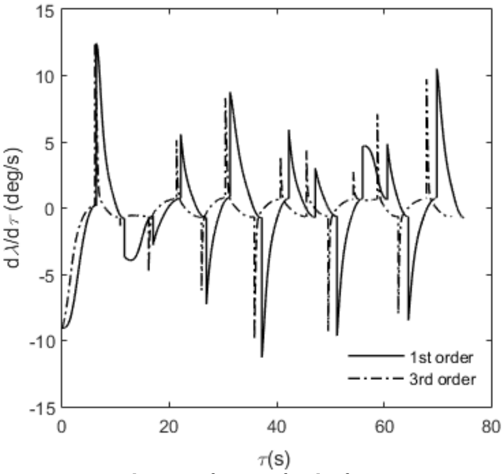


**Fig. 4** LOS rate time history of UAVs for the first scenario

**شکل 4** تغییرات نرخ خط دید دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی اول

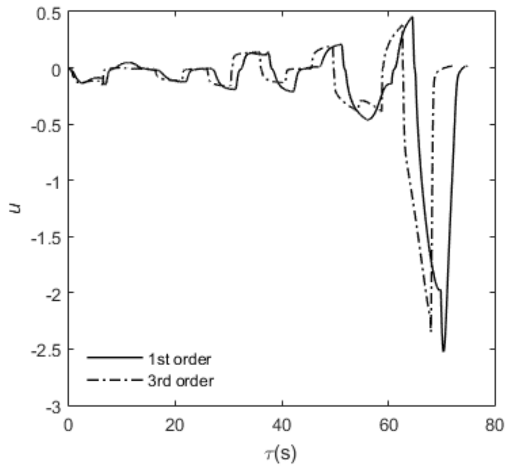


**Fig. 5** Guidance command time history of UAVs for the first scenario

**شکل 5** فرامین هدایت دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی اول

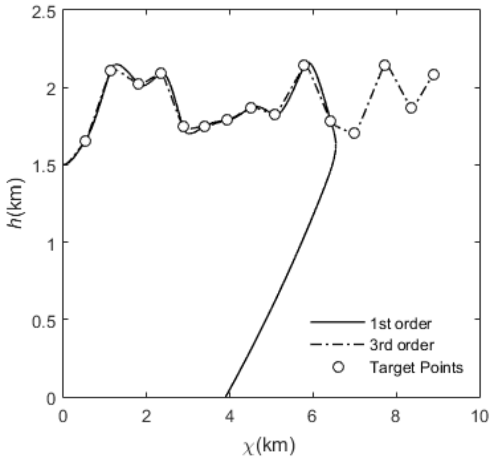


**Fig. 6** Trajectory of UAVs for the second scenario

**شکل 6** مسیر حرکت دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی دوم

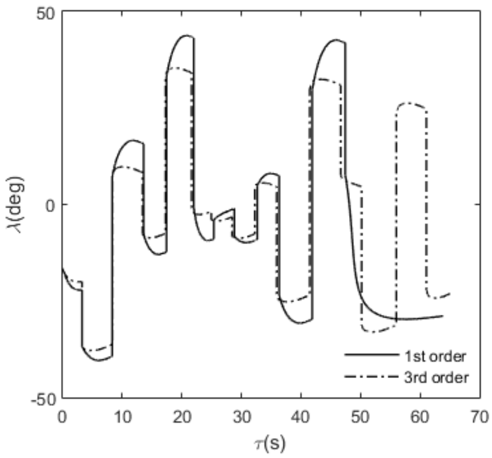


**Fig. 7** LOS angle time history of UAVs for the second scenario

**شکل 7** تغییرات خط دید دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی دوم

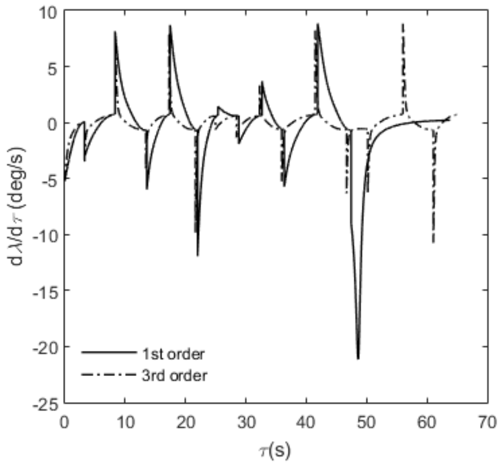


**Fig. 8** LOS rate time history of UAVs for the second scenario

**شکل 8** تغییرات نرخ خط دید دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی دوم

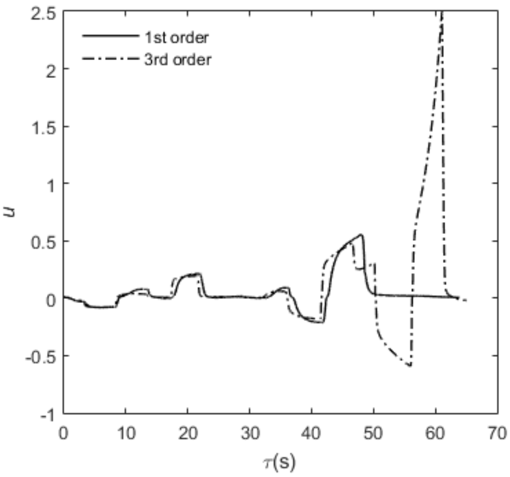


**Fig. 9** Guidance command time history of UAVs for the second scenario

**شکل 9** فرامین هدایت دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی دوم

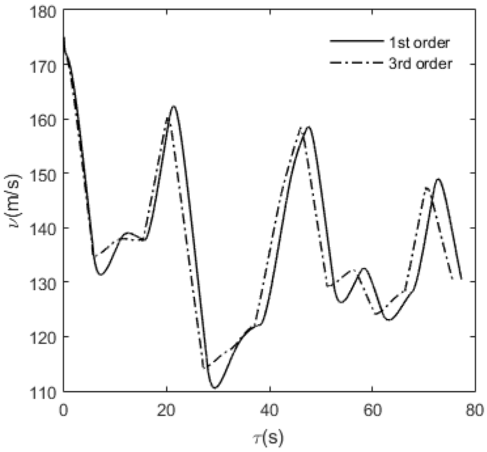


**Fig. 10** Velocity time history of UAVs for the first scenario

**شکل 10** تغییرات سرعت دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی اول

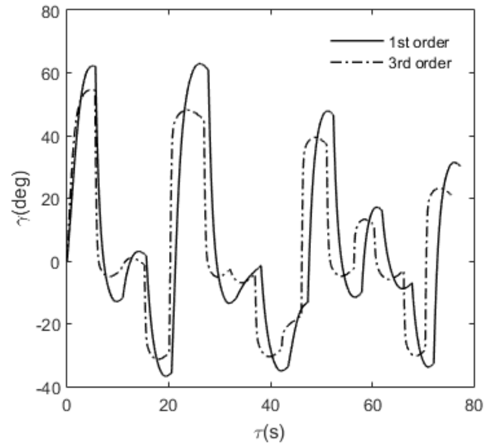


**Fig. 11** Flight path angle time history of UAVs for the first scenario

**شکل 11** تغییرات زاویه مسیر دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی اول

بین نقطه هدف 11 و 12، برای هدایت مرتبه اول واگرایی در حل حادث می-گردد. از آن جا که قوانین هدایت به شکل تقریبی پاسخی بهینه برای مسئله غیرخطی سینماتیک تغییرات خط دید هستند در نتیجه بازه اعتبار این قوانین نیز محدود است. مهم‌تر آن که بازه اعتبار قانون هدایت مرتبه 1 محدودتر از قانون هدایت مرتبه 3 خواهد بود. به همین دلیل در نقطه 11، قانون هدایت مرتبه 3 عملکردی بهتر از قانون هدایت مرتبه 1 نشان می‌دهد. در پایان در شکل 10 تا 13 نمودارهای مربوط به اندازه سرعت و زاویه مسیر برای هر دو سناریو آورده شده است.

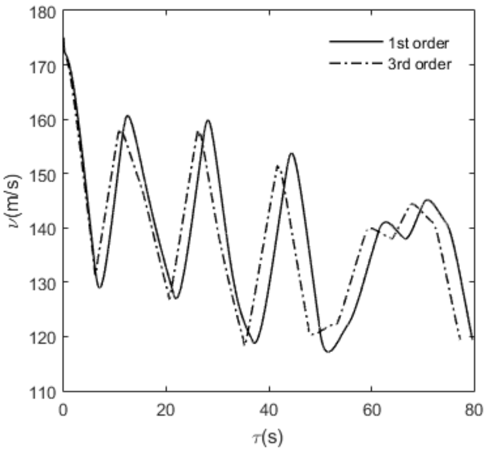


**Fig. 12** Velocity time history of UAVs for the second scenario

**شکل 12** تغییرات سرعت دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی دوم

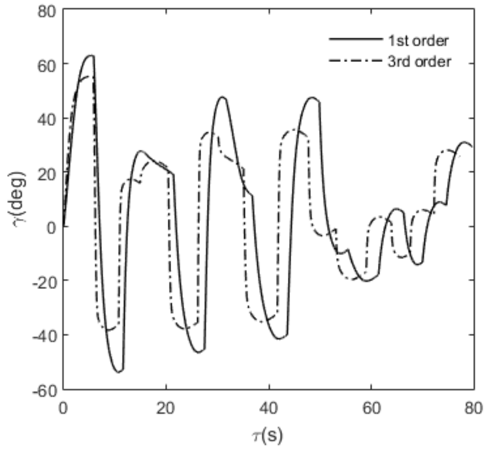


**Fig. 13** Flight path angle time history of UAVs for the second scenario

**شکل 13** تغییرات زاویه مسیر دو پرنده بدون سرنشین برای سناریوی دوم

## 6- دست‌آوردهای پژوهش و سخن پایانی

در این پژوهش، با به‌کارگیری بسط مرتبه بالا، روش جدیدی برای حل مرتبه بالای مسئله کنترل بهینه بر مبنای حل معادله ریکاتی جبری تشریح شده است. با در نظر گرفتن فرضیات ساده‌کننده، فرم حلقه بسته و مرتبه بالای مسئله غیرخطی کنترل تغییرات خط دید استخراج شد و عملکرد بهتر قانون هدایت مرتبه بالا نسبت به قانون هدایت مرتبه اول با استفاده از شبیه‌سازی پرواز برای یک پرنده بدون سرنشین نوعی نشان داده شد. هدف از این شبیه-سازی انجام مانور پیوسته بهینه و بررسی عملکرد قانون هدایت مرتبه بالا در شرایط دشوار است. در مجموع نشان داده شده است که عملکرد قانون هدایت مرتبه بالا برتر از قانون هدایت مرتبه اول است حال آن که به‌کاگیری این قانون هدایت به شکل برخط چندان پیچیدگی بیشتری نسبت به قانون هدایت بهینه مرتبه اول ندارد.

به طور کلی، اگرچه امروزه بسط مرتبه بالا روشی محبوب است اما نحوه به کارگیری این روش در مسائل مختلف تا کنون عمومیت داده نشده است. در روش ارائه شده سعی شده است برای دسته مشخصی از مسائل کنترل بهینه با فرضیات بیان شده، روش بسط مرتبه بالا با استفاده از حل ماتریس

ریکاتی جبری توسعه داده شود. بدین ترتیب روش پیشنهاد شده در این تحقیق ویژگی‌های یک حل ترکیبی (تحلیلی-عددی) را با خود به همراه خواهد داشت. از طرفی، با وجود این که قانون هدایت طراحی شده در این تحقیق به منظور هدایت یک پرنده بدون سرنشین مورد استفاده قرار گرفته است، می‌توان از این قانون هدایت در مسائلی مانند هدایت موشک پدافندی و... نیز بهره برد؛ خصوصاً، انتظار می‌رود عملکرد این قانون هدایت برای شرایط نزدیک به برخودر قابل توجه باشد. همچنین می‌توان روش حل ارائه شده را برای طراحی کنترل کننده‌های مرتبه بالا در سامانه‌های دیگر استفاده کرد. به طور کلی قانون کنترل بهینه طراحی شده با این روش، گزینه‌ای برای کنترل سامانه‌هایی است که نیازمند چابکی و دقت مضاعف در ارائه سیاست-های کنترلی هستند.

## 7- فهرست علایم

$d_j^i$ مشتقات مرتبه اول مربوط به متغیر $j$ ام
$d_{j,k}^i$ مشتقات مرتبه دوم مربوط به متغیر $j$ ام
$g$ شتاب جاذبه $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$
$h$ ارتفاع (متر)
$p$ بردار متغیر شبه‌حالت
$r$ فاصله تا هدف (متر)
$s_j^i$ حساسیت‌های مرتبه اول مربوط به متغیر $j$ ام
$s_{j,k}^i$ حساسیت‌های مرتبه دوم مربوط به متغیر $j$ ام
$t$ زمان (s)
$u$ فرمان کنترل یا نسبت ضریب برآ بیشینه
$u_N$ فرمان درخواستی شتاب $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$
$v$ سرعت $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$
$x$ بردار متغیر حالت
$x_i$ متغیر حالت
$z_i$ متغیر حالت عمومی
$z_i^p$ متغیر حالت عمومی مغشوش
$z_i^d$ متغیر حالت عمومی انحراف (اغتشاشات)
$A$ ماتریس عمومی ضرایب فضای حالت
$B$ ماتریس عمومی ضرایب کنترل
$C_{d_0}$ ضریب پسا برا صفر
$C_{d_1}$ ضریب پسا اول
$C_{d_2}$ ضریب پسا دوم
$C_l$ ضریب برا
$C_{l_{\max}}$ ضریب برا بیشینه
$D'$ پسا بر واحد جرم $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$
$J$ تابع هزینه
$K$ ماتریس ریکاتی
$L'$ برا بر واحد جرم $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$
$M$ ماتریس ضرایب حساسیت
$Q$ ماتریس وزن متغیرهای حالت
$R$ ماتریس وزن متغیرهای کنترل
$T^i$ پاسخ ناشی از عبارت ناهمگنی $i$ام
$T'$ شتاب در راستای سرعت $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$
$T_c'$ فرمان شتاب در راستای سرعت $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$

### علایم یونانی

$\alpha_i$ انحراف اولیه متغیر $i$ام
$\gamma$ زاویه مسیر (درجه)
$\delta x$ اختلاف برد (m)
$\delta h$ اختلاف ارتفاع (m)
$\eta$ نصف چگالی در سطح مشخصه آیرودینامیک
$\tau_{T'}$ ثابت زمانی فرمان شتاب در راستای بردار سرعت (s)
$\psi^i$ عبارت ناهمگنی $i$ام

## 8- فهرست مراجع

[1] D. Garg, W. W. Hager, A. V. Rao, Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems, *Automatica,* Vol. 47, No. 4, pp. 829-837, 2011.
[2] Q. Gong, I. M. Ross, F. Fahroo, Costate computation by a Chebyshev pseudospectral method, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 33, No. 2, pp. 623-628, 2010.
[3] M. Saravi, E. Babolian, R. England, M. Bromilow, System of linear ordinary differential and differential-algebraic equations and pseudo-spectral method, *Computers and Mathematics with Applications,* Vol. 59, No. 4, pp. 1524-1531, 2010.
[4] A. R. Alemi Naeeni, J. Roshanian, Optimal trajectory design for a space capsule using of multiple interval derect methods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 63-71, 2014. (in Persian فارسی)
[5] A. R. Alemi Naeeni, J. Roshanian, Developing a hybrid algorithm to design the optimal trajectory of reentry vehicles, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 63-71, 2014. (in Persian فارسی)
[6] S. Liao, An approximate solution technique not dependent on small parameters: A special example, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 30, No. 3, pp. 371-380, 1995.
[7] S. Liao, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 169, No. 2, pp. 1186-1194, 2005.
[8] S. S. Motsa, P. Sibanda, S. Shateyi, A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* Vol. 15, No. 9, pp. 2293-2302, 2010.
[9] M. Pourjamshidian, S. Mahjoub Moghadas, A. A. Mottalebi, J. Sheikhi, Forced vibration analysis of a nonlinear marine riser using homotopy analysis method, *Journal of Marine Engineering*, Vol. 10, No. 19, pp. 67-74, 2014. (in Persian فارسی)
[10] E. Zamani, H. R. Nazif, A novel semi-analytical solution for the dynamic and heat transfer analysis of stagnation point flow using BK-HAM Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 270-280, 2017. (in Persian فارسی)
[11] P. Di Lizia, R. Armellin, M. Lavagna, Application of high order expansions of two-point boundary value problems to astrodynamics, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy,* Vol. 102, No. 4, pp. 355-375, 2008.
[12] R. Armellin, P. Di Lizia, F. Topputo, M. Lavagna, F. Bernelli-Zazzera, M. Berz, Gravity assist space pruning based on differential algebra, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy,* Vol. 106, No. 1, pp. 1-24, 2009.
[13] P. Di Lizia, R. Armellin, F. Bernelli-Zazzera, M. Berz, High order optimal control of space trajectories with uncertain boundary conditions, *Acta Astronautica*, Vol. 93, No. 1, pp. 217-229, 2014.
[14] P. Di Lizia, R. Armellin, A. Morselli, F. Bernelli-Zazzera, High order optimal feedback control of space trajectories with bounded control, *Acta Astronautica*, Vol. 94, No. 1, pp. 383-394, 2014.
[15] A. Morselli, R. Armellin, P. De Lizia, F. Bernelli-Zazzera, A high order method for orbital conjuctions analysis: Monte Carlo collision probability computations, *Advances in Space Researches*, Vol. 55, No. 4, pp. 311-333, 2015.
[16] A. Witting, C. Collombo, R. Armellin, Long-term density evolution through semi-analytical and differential algebra technicques, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 128, No. 1, pp. 435-452, 2017.
[17] B. L. Pierson, I. Chen, Minimum landing-approach distance for a sailplane, *Journal of Aircraft,* Vol. 16, No. 4, pp. 287-288, 1979.
[18] R. Yanushevdky, Concerning Lyapunov-Based Guidance, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, pp. 509-511, 2006.