



افزایش دامنه عدد رینولدز در شبیه‌سازی با استفاده از روش المان مرزی

قاسم حیدری‌نژاد^{1*}، امیر یوسفی²

1-استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2-دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

*تهران، صندوق پستی 14115-143، gheidari@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 21 دی 1396

پذیرش: 11 اسفند 1396

ارائه در سایت: 26 اسفند 1396

کلید واژگان:

روش المان مرزی

جریان سیال لزج

معادله ناویر استوکس

حفره

الاستوستاتیک

چکیده

با توسعه روزافزون رایانه‌ها، استفاده از روش‌های عددی برای حل مسائل مهندسی کاربرد بسیاری یافته است. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش‌هایی همچون تفاضل محدود، المان محدود، حجم محدود، روش المان مرزی و ... اشاره نمود. در این پژوهش از روش المان مرزی برای شبیه‌سازی عددی استفاده شده است. تفاوت روش المان مرزی با روش‌هایی همچون روش المان محدود در ریاضیات حاکم بر مسأله است. در این روش ابتدا از معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله یک‌بار انتگرال گرفته می‌شود. این انتگرال‌گیری منجر به کاهش یک بعد از ابعاد مسأله می‌گردد و سپس اقدام به شبیه‌سازی می‌شود. در این پژوهش ابتدا با استفاده از یک تغییر متغیر معادله ناویر استوکس به معادله ناویر در الاستوستاتیک تبدیل می‌گردد. سپس از روش‌های پیشنهادی برای مسأله الاستوستاتیک، برای حل جریان سیال لزج استفاده می‌شود. در واقع تفاوت اصلی میان این شیوه و سایر شیوه‌های پیشنهادی در روش المان مرزی در پاسخ بنیادینی است که در این شیوه از آن استفاده شده است. در این پژوهش از پاسخ بنیادین معادله ناویر استفاده شده است. در پایان با در نظر گرفتن ریاضیات حاکم بر مسأله، برنامه‌ای کامپیوتری برای حل جریان سیال لزج نوشته شد. این برنامه برای دو هندسه متفاوت داخل حفره و پشت پله اعمال گردید، که به ترتیب تا اعداد رینولدز 600 و 100 پاسخ‌های همگرا حاصل گردید.

Extending Reynolds Number range in numerical simulation of fluid flow using Boundary Element Method

Ghassem Heidarinejad*, Amir Yousefi

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115-143 Tehran, gheidari@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 11 January 2018
Accepted 02 March 2018
Available Online 17 March 2018

Keywords:

Boundary Element Method
viscous fluid flow
Navier equation
Cavity
Elastostatics

ABSTRACT

With the development of computers, the application of numerical methods in solving engineering problems has increased considerably. Methods such as Finite Element Method, Finite Volume Method and Finite Difference Method can be mentioned as some. In this research a Boundary Element Method is applied for numerical simulation. The main difference among the Boundary Element method and other numerical methods is the governing mathematics. At first In this method the governing equation is integrated. This leads to a decrease in the dimensions of the problem and then the simulation is performed. In this research, by a change of variable, the Navier Stokes equation is transformed to Navier equation in Elastostatics at first. Subsequently the methods proposed for solving the problems in Elastostatics is utilized to solve the viscous fluid flow. In fact, the applied fundamental solution is the main difference among the proposed method and other Boundary Element Methods. In the proposed method the fundamental solution of the Navier equation is utilized for simulation. At last, by considering the governing mathematics a computer code is developed for viscous flow simulation. The code is applied to two different geometries, a lid-driven-cavity and a backward facing step. Convergent solutions is achieved up to Reynolds numbers equal with 600 and 100 respectively.

1- مقدمه

اختصاص یافت [1]. در این میان، تحلیل جریان لزج را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای از مسائل غیرخطی متداول به‌شمار آورد. با بررسی پژوهش‌های صورت گرفته، مشاهده می‌شود که روش تفاضل محدود برای مدت‌ها به‌طور گسترده برای حل جریان سیال لزج مورد استفاده قرار گرفته است [2]. از طرفی از روش المان محدود نیز به‌طور موفقیت‌آمیز در طی سال‌های گذشته برای حل این مسائل استفاده شده است [3]. با این وجود و برخلاف آنچه در مکانیک ساختاری روی می‌دهد، هنوز توسعه یک برنامه کامپیوتری جامع برای حل مسائل جریان لزج کاری دشوار است.

در سال‌های گذشته روش المان مرزی به‌عنوان ابزاری قدرتمند در تحلیل عددی مسائل مهندسی توسعه یافته است. این روش در ابتدا تنها برای مسائل خطی و پتانسیل مورد استفاده قرار گرفت. بزرگ‌ترین مزیت این روش نسبت به روش تفاضل محدود و المان محدود می‌باشد در این است که در مسائل پتانسیل تنها مرز دامنه نیاز به گسسته‌سازی دارد؛ بنابراین محاسبات مربوط به دامنه مسأله یک مرتبه کاهش می‌یابد. در ادامه بسیاری از پژوهش‌ها به استفاده از این روش برای حل مسائل وابسته به زمان و نیز مسائل غیرخطی

Please cite this article using:

Gh. Heidarinejad, A. Yousefi, Extending Reynolds Number range in numerical simulation Of fluid flow using Boundary Element Method, Modares Mechanical Engineering, Vol. 18, No. 04, pp. 171-180, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

برای صحت سنجی از جریان در داخل یک حفره^{۱۰} استفاده گردید. هرچند در پژوهش انجام شده توضیحی درباره شیوه عددی اعمال شده ارائه نشد. اخیراً در تحقیقی دیگر، تئوری دیورژانس^{۱۱} به ترم انتگرال حجمی ناشی از جملات غیرخطی معادلات ناویراستوکس اعمال گردید [14]. در این تحقیق از ایده‌ی سرعت جریان آزاد^{۱۲} برای تمرکز بر اثرات غیر خطی در همسایگی مرزها استفاده شد. اگرچه با اعمال تئوری دیورژانس بر ترم جابه‌جایی نیاز برای محاسبه مشتقات داخلی را مرتفع می‌شود، ولی دامنه مسأله مورد بررسی همچنان نیازمند گسسته‌سازی است. از دیگر معایب استفاده از فرمول‌بندی بر مبنای تئوری دیورژانس می‌توان به هزینه بالای محاسباتی در مقایسه با فرمول‌بندی المان محدود اشاره نمود. چرا که در فرمول‌بندی المان محدود، ترم‌های جابه‌جایی که با استفاده از مشتقات روش المان محدود محاسبه می‌شوند دارای ترم‌های هسته‌ای کمتری نسبت به حالت اعمال تئوری دیورژانس هستند و در نتیجه تکینگی^{۱۳} کمتری در هسته ظاهر می‌گردد [15]. درنهایت با اعمال این تغییرات پژوهشگران موفق نشدند که به اعداد رینولدزی بیشتر از 100 دست یابند.

رویکرد بعدی که مورد استفاده قرار گرفت روش تقابل دوگانه^{۱۴} نام داشت. در این رویکرد ترم انتگرال حجمی، ناشی از جملات غیرخطی، به انتگرال‌های مرزی تبدیل می‌شوند [16]. این روش برای نخستین بار برای حالت جریان پایا درون محفظه استوانه‌ای یک سیلندر بسته استفاده شد. در این تحقیق، نتایج تا عدد رینولدز 100 نمایش داده شد. پس از این پژوهش یک روش المان مرزی غیرمستقیم با استفاده از تقابل دوگانه برای یک مسأله جریان داخل یک حفره با سرپوش متحرک در حالت سه‌بعدی اعمال گردید [17]. در واقع استفاده از روش غیرمستقیم در پژوهش مذکور موجب کاهش زمان محاسبات شده و نتایج نیز برای رینولدز 100 نمایش داده شد. در سال‌های گذشته نیز تلاش‌هایی برای افزایش دامنه‌ی کاربرد این روش انجام شده‌است. معراجی و همکاران [18] موفق شدند پاسخ‌های همگرا برای جریان حفره تا عدد رینولدز 1000 دست یابند. آن‌ها در این پژوهش از شیوه‌ی ارائه شده برای شبیه‌سازی در دو هندسه پله رو به عقب و نیز حفره با درپوش متحرک دوگانه جابه‌جا شده نیز استفاده نمودند که به ترتیب موفق به دستیابی به پاسخ‌های همگرا تا اعداد رینولدز 299 و 1000 شدند. این رویکرد در سال‌های گذشته در سال‌های گذشته نسبت به سایر رویکردهای ارائه شده بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به پژوهش انجام شده توسط سنل و سزگین اشاره نمود [19]. آن‌ها در پژوهش خود به بررسی جریان سیال لزج تحت میدان مغناطیسی خارجی پرداختند و تأثیر این میدان را در یک حفره دوبعدی، برای جریان استوکس، و نیز یک حفره سه‌بعدی، برای جریان ناویراستوکس، تحت بررسی قرار دادند. گومگوم و همکاران نیز در پژوهشی دیگر به بررسی اثر شرط مرزی لغزش پرداختند و این اثر را در جریان استوکس به نمایش درآوردند [20].

می‌توان از شیوه‌ی انتگرال‌گیری شعاعی^{۱۵} نیز به عنوان رویکردی دیگر برای حل مسائل غیرخطی نام برد. در این شیوه نیز همچون شیوه‌ی تقابل دوگانه ابتدا انتگرال‌های دامنه‌ای به انتگرال‌های مرزی تبدیل شده و سپس به حل مسأله مبادرت می‌گردد. از نخستین پژوهش‌هایی که با استفاده از این رویکرد به حل مسأله پرداخت می‌توان به پژوهش صورت گرفته توسط گائو

معادلات انتگرالی و پاسخ‌های بنیادین برای جریان استوکس، که توسط اوسین ارائه گردید، را می‌توان به‌عنوان نخستین گام در تحلیل جریان سیال با استفاده از روش المان مرزی به‌شمار آورد [4]. در ادامه پاسخ‌های بنیادینی که استوکس^۱ نامیده می‌شدند برای حل جریان لزج با استفاده از روش المان مرزی ارائه گردید [5]. وو و همکاران برای نخستین بار پاسخ معادلات ناویرا-استوکس را برحسب ورتیسیت^۲ و سرعت ارائه کردند [6]. در این روش معادلات بقای تکانه^۳ و جرم به اجزای حرکتی^۴ و جنبشی^۵ خود تقسیم می‌شدند. در این روش بخش جنبشی توسط معادله انتقال گردابه^۶ غیرخطی تعریف می‌شود، درحالی‌که بخش حرکتی، که معادله پواسون بر آن حاکم است، میدان سرعت را با استفاده از میدان گردابه‌ی معلوم را تعیین می‌نماید. پس از پژوهش صورت گرفته توسط وو و همکاران، اونیشی و همکارا روشی انتگرالی براساس تابع جریان-گردابه ارائه کردند [7]. از مزیت‌های این فرمول‌بندی می‌توان به این نکته اشاره نمود که فشار از روند محاسبه‌ی پاسخ حذف شده و معادله پیوستگی به‌طور خودکار ارضا می‌گردد. از دیگر مزایای این روش می‌توان به حل جریان‌های دوبعدی اشاره کرد؛ چرا که در این مسائل تعداد مجهولات کمتری در مسأله ایجاد می‌گردد. گسترش این روش برای مسائل سه‌بعدی جذابیت کمتری برای پژوهش‌گران دارد، چرا که در این مسائل گردابه دیگر کمیتی اسکالر نبوده و در نتیجه برای هر گره شش درجه آزادی ایجاد می‌گردد [8]. فرمول‌بندی‌های ارائه شده به‌صورت گردابه به‌صورت کلی قابل استفاده نیستند چرا که شرایط مرزی برای گردابه، تابع جریان و مشتق‌های عمودی^۷ آن‌ها معمولاً به‌صورت صریح بیان نمی‌گردند؛ علاوه بر این، این روش‌ها نیازمند یک روند تکراری حل، حتی درمورد جریان استوکس، هستند [9].

یانگرن و آکریووس برای نخستین بار از متغیرهای اصلی^۸ (فشار و سرعت) استفاده کردند. آن‌ها از این روش برای حل جریان استوکسی در حالت پایا و حول اجسام دلخواه استفاده نمودند [10]. پس از این پژوهش، تحلیل‌ها با استفاده از روش المان مرزی برای حل معادلات جریان پایا توسعه داده شد [11]. معادلات حاکم بر این مسائل ناویرا-استوکس کامل بوده و شامل ترم‌های غیرخطی نیز می‌باشد [11]. در این پژوهش که توسط بوش و تانر صورت گرفت، از یک تقریب المان محدود برای محاسبه‌ی گرادیان‌های سرعت در درون جریان استفاده شد. آن‌ها بر روی مرز نیز از المان‌های سطحی ثابت و برای سلول‌های داخلی نیز از سلول‌های سه نقطه‌ای خطی استفاده نمودند. البته پاسخ‌های ارائه شده تنها به اعداد رینولدزهای پایین محدود بود. در ادامه بوش این روش را برای معادلات خطی شده‌ی اوسین گسترش داد. وی نتایج مربوط به روش ارائه شده را برای جریان صفحه‌ای حول سیلندر با سطح مقطع دلخواه ارائه نمود [12]. هرچند در این پژوهش پاسخ‌ها به اعداد رینولدز کمتر از یک محدود می‌شد.

در سال 1985 یک فرمول‌بندی انتگرالی جدید با استفاده از متغیرهای اصلی، که عمدتاً بر کار بوش و تانر استوار بود، با به کارگیری المان‌های خطی ارائه گردید [13]. این پژوهش جدید از روش هورماندر^۹ در تئوری معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، برای حصول پاسخ بنیادین اقتباس نمود. در این تحقیق

1 Stokeslet

2 vorticity

3 momentum

4 kinematic

5 kinetic

6 vorticity

7 normal derivative

8 Primitive Variable

9 Hormander's method

10 cavity flow

11 divergence theorem

12 free stream velocity

13 singularity

14 Dual Reciprocity Method

15 Radial Integration Method

$$v_{i,i} = 0 \quad (1)$$

$$v_j v_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + v(v_{i,j} + v_{j,i}),_j \quad (2)$$

در این معادلات اجزای بردار سرعت با استفاده از نماد v_i نمایش داده شده‌اند. از طرفی پارامترهای ρ ، p و v به ترتیب نمایانگر فشار، چگالی و لزجت حرکتی^۶ هستند. نماد ویرگول نمایش داده شده در زیرنویس پارامترها نیز بیانگر مشتق جزئی مکانی است، به‌طوری‌که داریم:

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

در صورتی که از یک حرف دوبار به عنوان زیرنویس در ترمی استفاده شود، در آن صورت می‌بایست قانون جمع در آن ترم اعمال گردد. برای مثال برای حالت سه‌بعدی داریم:

$$v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (4)$$

در ادامه ابتدا با استفاده از پارامتر پنالتی ترم فشار تقریب زده می‌شود و سپس با استفاده از این تقریب ترم فشار موجود در معادله ناویر استوکس از این معادلات حذف می‌شود:

$$p = \lambda v_{i,i} \quad (5)$$

در این معادله λ پارامتر پنالتی نامیده می‌شود. این پارامتر در مسأله الاستواستاتیک دارای مقدار عددی بسیار بزرگی است. از همین رو مقدار متناظر آن در مسأله جریان سیال لزج نیز بسیار بزرگ فرض می‌شود. با در نظر گرفتن این موضوع و نیز محدود بودن اندازه ترم فشار در جریان سیال لزج می‌توان گفت که ترم $v_{i,i}$ در رابطه (5) به صفر می‌گراید، و در نتیجه معادله پیوستگی به‌طور خودکار در این حالت حدی ارضا می‌شود. با جایگذاری معادله (5) در معادله (2) به معادله (6) که بر جریان لزج حاکم است دست می‌یابیم:

$$\left(\frac{\lambda}{\rho} + v\right) v_{j,ji} + v v_{i,jj} = v_j v_{i,j} \quad (6)$$

در محاسبات عددی واقعی پارامتر λ می‌بایست دارای مقداری بزرگ ولی محدود باشد و این بدان معنی است که در محاسبات اندکی تراکم‌پذیری نیز برای جریان در نظر گرفته می‌شود.

از طرف دیگر، در شرایط یکنواختی^۷ و همسانی^۸ معادلات اساسی برای الاستواستاتیک به شکل زیر هستند:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda' e \delta_{ij} + 2\mu' \epsilon_{ij} \quad (8)$$

که در این معادلات داریم:

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (9)$$

$$e = \epsilon_{i,i} \quad (10)$$

در این‌جا اجزای تانسور تنش^۹ با استفاده از σ_{ij} نمایش داده شده‌اند و نیز پارامترهای b_i ، ϵ_{ij} و u_i به‌ترتیب نمایانگر نیروهای بدنه‌ای، تانسور کرنش و بردار جابه‌جایی هستند. پارامترهای λ' و μ' نیز ثابت‌های لامه بوده و δ_{ij} نیز نماد دلتای کرانیکر^{۱۰} است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

[21] اشاره نمود. او در ادامه با توسعه این روش به حل مسأله برای حالت سه‌بعدی اقدام نمود [22]. پس از این پژوهش نیز تلاش‌هایی توسط پنگ و همکاران برای استفاده از این رویکرد در حل مسائل لزج صورت گرفت [23]. از پژوهش‌هایی که اخیراً به توسعه این روش پرداخته است، می‌توان پژوهش تین و همکاران را نام برد [24]. این پژوهش با استفاده از روش انتگرال‌گیری شعاعی و با استفاده از متغیرهای اولیه (سرعت و فشار) جریان سیال را در هندسه‌های عادی^۱ و هندسه‌های غیرعادی^۲ شبیه‌سازی می‌کند.

پاور و مینگو فرمول‌بندی روش تقابل دوگانه را با استفاده از شیوه تجزیه دامنه^۳ به منظور بررسی جریان‌هایی با اعداد رینولدز بالاتر گسترش دادند [25]. آن‌ها فرمول‌بندی ارائه شده را برای جریان داخل یک حفره و نیز جریان در یک پله ارزیابی نمودند. آن‌ها همچنین موفق شدند تا رینولدز 1000 را با استفاده از 20 زیردامنه غیریکنواخت برای جریان داخل یک حفره پاسخ‌های همگرا شده را به دست آورند.

در سال 1385 نیز اسماعیلیان با استفاده از تابع پنالتی، که در این پژوهش نیز از آن استفاده شده‌است، ابتدا معادله‌ی ناویر استوکس را به معادله ناویر در الاستواستاتیک تبدیل نمودند و سپس با استفاده از روش‌های مورد استفاده در الاستواستاتیک پاسخ معادله ناویر استوکس را محاسبه نمودند. ایشان با استفاده از این روش موفق به محاسبه جریان در داخل حفره درپوش متحرک^۴ تا عدد رینولدز 400 و جریان پشت پله رو به عقب^۵ تا عدد رینولدز 75 شدند [26].

اسماعیلیان برای شبیه‌سازی جریان سیال لزج از یک پارامتر پنالتی استفاده نمود. او از این طریق معادله ناویر استوکس را به معادله ناویر در الاستواستاتیک تبدیل نمود و سپس با استفاده از روش‌های ارائه شده برای حل مسأله الاستواستاتیک برای حل جریان لزج استفاده نمود.

می‌توان گفت که محاسبه‌ی ترم جابه‌جایی در حل جریان لزج برای اعداد رینولدز بالا مهمترین قسمت می‌باشد. تحقیقات بسیاری برای ارزیابی مشتق سرعت موجود در ترم جابه‌جایی در مسائل دوبعدی صورت گرفته است. در این پژوهش از طرح تفاضل محدود برای مدل‌سازی این مشتقات استفاده گردید. در پایان نیز برخی نتایج عددی برای نمایش اعتبار فرمولاسیون ارائه شده است و از طرفی دقت این نتایج در محاسبه ترم جابه‌جایی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

در پژوهش حاضر نیز از روش استفاده شده توسط آقای اسماعیلیان برای شبیه‌سازی استفاده گردید. در واقع همان‌طور که پیش‌تر نیز در پژوهش‌های صورت گرفته عنوان گردید برخی تحقیقات به افزایش دامنه‌ی کاربرد این روش در رویکردهای مختلف می‌پردازند. در این پژوهش نیز با استفاده از روش صورت گرفته توسط آقای اسماعیلیان به افزایش دامنه عدد رینولدز مبادرت گردید که برای جریان حفره تا عدد رینولدز 600 و برای جریان پله رو به عقب تا رینولدز 100 پاسخ‌های همگرا حاصل گردید.

2- تئوری

2-1- معادلات حاکم بر جریان لزج

در این مقاله جریان سیال لزج به صورت پایا، تراکم‌ناپذیر و هم‌دما فرض شده است. با در نظر گرفتن این فرضیات و با استفاده از شیوه‌ی نوشتاری تانسوری می‌توان معادلات حاکم بر جریان لزج را به شکل زیر نمایش داد:

⁶ kinematic viscosity

⁷ homogeneity

⁸ Isotropy

⁹ stress tensor

¹⁰ kronecker delta

¹ Regular Domains

² Irregular Domains

³ Domain Decomposition

⁴ Lid Driven Cavity

⁵ Backward Facing Step

این پاسخ برای حالت سه‌بعدی نیز به شکل معادله‌ی (16) نوشته می‌شود:

$$u_{kl}^* = \frac{1}{16\pi(1-v')\mu'r} \{ (3-4v')\delta_{kl} + r_{,k}r_{,l} \} \quad (16)$$

در معادلات (15) و (16) پارامتر $r = r(y, x)$ بیان‌گر فاصله‌ی میان نقطه‌ی اعمال بار (y) و نقطه‌ی میدان (x) است؛ پارامتر v' نیز نشان‌دهنده‌ی ضریب پواسون بوده که می‌تواند ثابت‌های لامه را به شکل زیر به یکدیگر ارتباط دهد:

$$v' = \frac{\lambda'}{2(\lambda' + \mu')} \quad (17)$$

کشش t_{kl}^* متناظر با u_{kl}^* نیز به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$t_{kl}^* = \frac{-1}{4\pi\alpha(1-v')r^\alpha} \left[\{ (1-2v')\delta_{kl} + \beta r_{,k}r_{,l} \} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2v')(r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \right] \quad (18)$$

در رابطه‌ی (18) برای حالت دوبعدی $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ بوده و برای حالت سه بعدی نیز $\alpha = 2$ و $\beta = 3$ می‌باشد. در این رابطه n_k نیز بیان‌گر کسینوس راستای عمود بر المان با محورهای مختصات است.

با انتگرال‌گیری از معادله (13) بر روی دامنه حل (Ω) معادله انتگرالی (19) حاصل می‌گردد:

$$\int_{\Omega} ((\lambda' + \mu')u_{j,ji} + \mu'u_{i,jj} + b_i = 0) u_{kl}^* d\Omega = 0 \quad (19)$$

اکنون با دوبرابر اعمال قضیه‌ی گاوس دیورژانس به معادله‌ی (19) به معادله‌ی (20) دست می‌یابیم:

$$C_{kl}(y)u_l(y) + \int_{\Gamma} t_{kl}^*(y, y')u_l(y')d\Gamma(y') - \int_{\Gamma} u_{kl}^*(y, y')t_l(y')d\Gamma(y') = \int_{\Omega} u_{kl}^*(y, x)b_l(x)d\Omega(x) \quad (20)$$

ضرایب C_{kl} در معادله (20) را می‌توان با استفاده از مکان نقطه‌ی منبع (y) تعیین نمود. برای مثال در صورتی که نقطه y در داخل دامنه قرار داشته باشد، داریم $C_{kl}(y) = \delta_{kl}$ و در صورتی که نقطه y بر روی مرز واقع شده باشد و مرز نیز هموار باشد، داریم $C_{kl}(y) = \frac{1}{2}\delta_{kl}$. شرایط مرزی مسأله نیز به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \Gamma_u & \text{روی} \\ t_i &= \bar{t}_i & \Gamma - \Gamma_u & \text{روی} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

در معادله (21) داریم $t_i = \sigma_{ij}n_j$

از طرفی علامت بار بر روی متغیرها نشان‌دهنده‌ی این است که مقدار آن متغیر بر روی مرز مشخص است.

در تحلیل‌های الاستواستاتیک معادلات انتگرالی (20) به ازای شرایط مرزی 21 و مقادیر معلوم نیروهای داخلی به صورت عددی حل می‌شوند. نکته‌ای که در حل مسائل جریان لزج وجود دارد، این است که انتگرال‌های دامنه‌ای در این مسائل شامل نیروهای بدنه‌ای مجازی می‌شوند، غیرخطی می‌باشند.

$$D_k = \int_{\Omega} u_{kl}^* \{-v_j v_{i,j}\} d\Omega \quad (22)$$

محاسبه‌ی این ترم جابه‌جایی در بخش بعدی توضیح داده می‌شود.

4- محاسبه‌ی ترم جابه‌جایی

در این پژوهش برای محاسبه‌ی انتگرال دامنه‌ای که شامل ترم جابه‌جایی می‌شود، از تکنیک تفاضل محدود استفاده شده است. در میان طرح‌های مختلف همچون طرح قاسم حیدری‌نژاد و امیر یوسفی بالادست و طرح تفاضل مرکزی در این پژوهش از طرح بالادست استفاده شده است. تقریب تفاضل محدود استفاده شده در طرح بالادست را می‌توان به شکل رابطه‌ی (23) نمایش داد:

با استفاده از این معادلات می‌توان معادله (11) را به‌دست آورد که به آن معادله ناویر گفته می‌شود:

$$(\lambda' + \mu')u_{j,ji} + \mu'u_{i,jj} + b_i = 0 \quad (12)$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی (6) با معادله‌ی (12) می‌توان به این نکته پی‌برد که این دو معادله مشابه یکدیگر هستند. تطابق میان متغیرهای موجود در این دو معادله در جدول 1 نمایش داده شده‌است. با توجه به این تطابق می‌توان گفت که معادله ناویراستوکس رفتاری مشابه با الاستواستاتیک خواهد داشت.

3- فرمول‌بندی انتگرال مرزی

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد، با در نظر گرفتن یک تابع پنالیتی می‌توان معادلات حرکت سیال را به فرم معادلات ناویر در الاستواستاتیک تبدیل نمود. در این قسمت ابتدا معادله ناویر در الاستواستاتیک بررسی شده و سپس این معادله برای حل جریان سیال تعمیم داده می‌شود.

شیوه‌های مختلفی برای به‌دست آوردن معادله‌ی انتگرالی معادل با معادله دیفرانسیلی حاکم وجود دارد. در این پژوهش از روش باقیمانده‌های وزنی¹ برای این منظور استفاده شده است. در واقع مزیت استفاده از روش باقیمانده‌های وزنی کلی بودن آن است. از طرفی این روش، این امکان را فراهم می‌کند تا پاسخ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیشتری مورد بررسی قرار گیرد و نیز امکان ارتباط میان روش المان‌های مرزی با سایر روش‌های عددی را ممکن می‌کند.

در این روش در ابتدا معادله دیفرانسیلی حاکم در یک تابع وزنی (u_{kl}^*) ضرب می‌شود:

$$[(\lambda' + \mu')u_{j,ji} + \mu'u_{i,jj} + b_i]u_{kl}^* = 0 \quad (13)$$

بهترین تابع وزنی جهت جایگذاری در معادله انتگرالی (13) ثابتی است که از حل معادله (12) با در نظر گرفتن تابع دلتای دیراک به جای صفر در سمت راست معادله به‌دست می‌آید که به آن حل اساسی می‌گویند؛ در واقع حل اساسی از حل معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$(\lambda' + \mu')u_{j,ji} + \mu'u_{i,jj} + \Delta^i = 0 \quad (14)$$

در معادله (14) ترم Δ^i تابع دلتای دیراک² است. این تابع در نقطه $x = x^i$ به سمت بی‌نهایت می‌رود و در سایر نقاط نیز دارای مقدار صفر است.

حل اساسی که برای معادله (14) توسط ریاضی‌دانان ارائه گردیده، و به پاسخ کلونین مشهور است، را می‌توان برای حالت دوبعدی به شکل زیر نمایش داد [27]:

$$u_{kl}^* = \frac{-1}{8\pi(1-v')\mu'} \{ (3-4v')\ln(r)\delta_{kl} - r_{,k}r_{,l} \} \quad (15)$$

جدول 1 مقایسه‌ی پارامترهای متناظر در دو معادله برای جریان سیالات و الاستواستاتیک

Table 1 comparison between fluid flow and elastostatics	
مسائل الاستیسیته	مسائل جریان لزج
جابه‌جایی	u_i سرعت
ثابت لامه	λ' پارامتر پنالیتی
	$\frac{\lambda}{\rho}$ چگالی
ثابت لامه	μ' ویسکوزیته
	سینماتیکی
نیروی بدنه‌ای	b_i ترم جابه‌جایی
	$v_j v_{i,j}$

¹ weighted residual method

² dirac delta

سطرهای موجود در دو طرف تساوی و انتقال مجهولات به یک سمت تساوی، معادله ی (24) به شکل معادله (25) درمی آید:

$$[A]\{x\} = [C]\{y\} + \{f\} \quad (27)$$

در معادله (27) بردار $\{x\}$ نشان دهنده ی مقادیر مجهول بر روی المان های مرزی می باشد، که برخی از آرایه های آن متغیر $\{u\}$ و برخی دیگر نیز متغیر $\{t\}$ هستند. از طرفی بردار $\{y\}$ نیز نشان دهنده مقادیر معلوم مرزی بوده و ترکیبی از پارامترهای $\{u\}$ و $\{t\}$ می باشد. $[A]$ و $[C]$ نیز ماتریس ها ضرایب بوده و تنها تابع هندسه مسأله هستند. بردار $\{f\}$ نیز برای نمایش بردار نیروهای بدنه ای معلوم به کار رفته است.

حال از روابطی که در بالا برای مسأله الاستواستاتیک ارائه گردید برای حل جریان لزج استفاده می شود. در همین راستا و برای حل معادله (27)، مقدار بردار $\{f\}$ (که در این حالت برابر با $-v_j v_{i,j}$ است) می بایست مشخص باشد. البته بردار $\{f\}$ به بردار $\{x\}$ وابسته بوده و مسأله دارای طبیعتی غیرخطی است و می بایست از یک تکنیک تکرار برای مقابله با آن استفاده می شود. در حقیقت مقادیر سرعت در سلول های داخلی در هر تکرار حدس زده می شوند. سپس با توجه به این مقادیر، مجهولات روی مرز محاسبه می گردند. در پایان هر تکرار، با توجه به مقادیر محاسبه شده بر روی مرز و نیز سرعت های سلول های داخلی حدس زده شده، سرعت های جدید برای سلول های داخلی از رابطه ی (27) محاسبه می شوند:

$$\{v\}^n = [A_F]\{x\}^n + [C_F]\{y_f\}^n + \{f\}^{n-1} \quad (28)$$

در معادله (28) بردارهای $\{x\}^n$ و $\{y_f\}^n$ ترکیبی از مقادیر سرعت و مشتقات سرعت بر روی مرز هستند. $[A_F]$ و $[C_F]$ نیز ماتریس های معلوم و تنها وابسته به هندسه مسأله هستند. بردار $\{f\}^{n-1}$ نیز از مقادیر حدس زده شده در تکرار قبلی به دست آمده است. این فرآیند تکرار را می توان در مراحل زیر خلاصه نمود:

مرحله 1:

فرض مقادیر سرعت و مشتق های سرعت در نقاط داخلی و محاسبه ی بردار $\{f\}$ با توجه به این مقادیر.

مرحله 2:

حل معادله (27) برای محاسبه بردار مجهولات $\{x\}$

مرحله 3:

محاسبه ی مجدد بردار سرعت $\{v\}$ برای گره های داخلی با استفاده از مقادیر محاسبه شده برای بردارهای $\{x\}$ و $\{f\}$ که در مراحل قبل به دست آمده اند.

مرحله 4:

بررسی همگرایی بردار سرعت $\{v\}$ با مقایسه ی مقادیر سرعت در مراحل اول و سوم.

مرحله 5:

در صورتی که مقادیر سرعت همگرا نشوند، مقادیر تصحیح شده ی سرعت و مشتقات آن در نقاط داخلی را به عنوان فرض اولیه برای مرحله بعد در نظر گرفته و این روند را تا دستیابی به پاسخ همگرا شده ادامه دهید.

در طی این مراحل، همه ی ماتریس ها و برخی از بردارها که در معادله ی (27) و (28) ظاهر شده اند ثابت هستند. بنابراین تنها یک بار و پیش از آغاز فرآیند تکرار محاسبه شده و در فرآیند تکرار نیازی به محاسبه ی آن ها نیست.

در ادامه الگوریتم حل این مسأله جهت روشن تر شدن روند و شیوه ی حل در "شکل 2" به نمایش درآمده است.

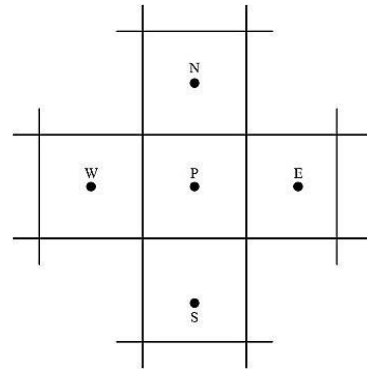


Fig. 1 calculation of convective terms

شکل 1 محاسبه ی ترم های جابه جایی

$$v_j v_{i,j} = v_1^p \begin{cases} (v_i^p - v_i^W)/PW & v_1^p \geq 0 \\ (v_i^E - v_i^p)/EP & v_1^p < 0 \end{cases} + v_2^p \begin{cases} (v_i^p - v_i^S)/PS & v_2^p \geq 0 \\ (v_i^N - v_i^p)/NP & v_2^p < 0 \end{cases} \quad (23)$$

پارامترهای به کار رفته در رابطه ی (23) نیز در "شکل 1" توضیح داده شده اند.

هرچند سلول های مستطیلی خطی در مدل سازی هندسه های پیچیده کمی با مشکل روبه رو می شوند ولی از این مزیت برخوردار هستند که با استفاده از آن ها می توان انتگرال ها را به صورت تحلیلی محاسبه نمود که منجر به کاهش زمان اجرای برنامه می شوند.

5- اجرای عددی

در ابتدا برای شروع تحلیل جریان سیال به بررسی اعمال روش المان مرزی برای مسأله الاستواستاتیک پرداخته می شود. برای حل معادله انتگرالی (20) دامنه و مرز مسأله به ترتیب به تعدادی سلول داخلی و المان مرزی تقسیم بندی می شوند. در این پژوهش برای گسسته سازی مرز، از المان های ثابت و برای گسسته سازی دامنه نیز از سلول های مربعی استفاده شده است. با توجه به این نوع گسسته سازی می توان معادله انتگرالی (20) را به شکل زیر نمایش داد:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{b\} \quad (24)$$

در معادله (24) $\{u\}$ و $\{t\}$ به ترتیب نمایان گر جابه جایی و کشش بر روی مرز هستند و $\{b\}$ نیز بیان گر بردار نیروهای بدنه ای است. ماتریس های $[H]$ و $[G]$ نیز ماتریس تأثیر نامیده می شوند، که با انتگرال گیری از پاسخ بنیادین معادله حاکم بر مسأله به دست می آیند. این ماتریس ها، همان انتگرال های موجود در رابطه ی (20) هستند که مجدداً در روابط (25) و (26) ارائه گردیده اند:

$$[H] = \int_{\Gamma} t_{kl}^* d\Gamma(y) \quad (25)$$

$$[G] = \int_{\Gamma} u_{kl}^* d\Gamma(y) \quad (26)$$

در روابط (25) و (26) پارامترهای u_{kl}^* و t_{kl}^* نیز از روابط (15) تا (18) محاسبه می شوند.

در روش المان مرزی برای محاسبه ی مجهولات مسأله در داخل دامنه ی حل $\{u\}$ می بایست مقدار متغیر $\{u\}$ و نیز مشتق آن $\{t\}$ بر روی تمام المان های مرزی مشخص باشند. از طرفی، بر روی هر المان مرزی نیز با توجه به نوع شرط مرزی (دیریکله یا نیومن) تنها یکی از این مقادیر مشخص است. با اعمال شرایط مرزی (21) در معادلات (24) و نیز جابه جایی ساده در

¹ influence matrice

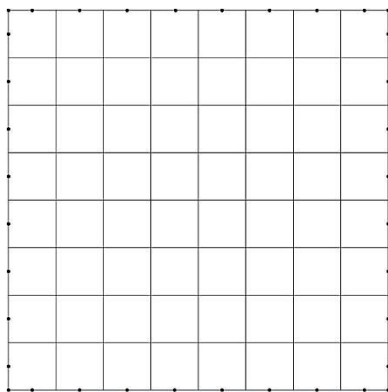


Fig. 3a representation of the relation between internal cells and boundary nodes

شکل 3 نمایش نمونه‌ای از رابطه سلول‌های داخلی و گره‌های مرزی

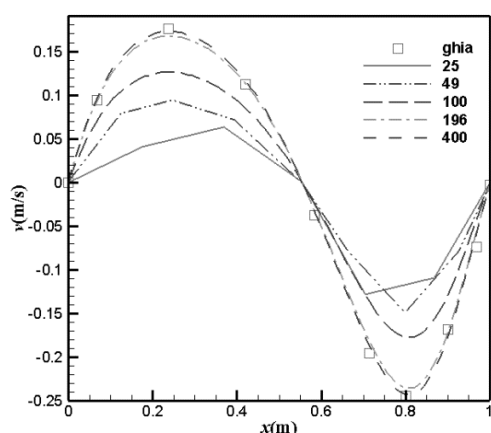


Fig. 4 checking the grid independency for Reynolds number equal to 100 [28]

شکل 4 بررسی استقلال حل از شبکه در رینولدز 100 [28]

لازم به ذکر است که در "شکل 4" تنها تعداد سلول‌های داخلی به نمایش درآمده که با توجه به "شکل 3" می‌توان تعداد گره‌های مرزی را نیز به دست آورد. همان‌طور که در "شکل 4" مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد سلول‌های داخلی از 196 به 400 تغییرات محسوسی در جواب حاصل نشده است؛ درحالی‌که هزینه محاسبات برای 400 سلول داخلی به مراتب بیشتر از هزینه محاسبات مربوط به 196 سلول داخلی است. از این‌رو از 196 سلول داخلی برای شبیه‌سازی استفاده گردید.

پس از بررسی استقلال حل از شبکه و پی بردن به تعداد سلول داخلی مناسب یعنی 196 سلول خطوط جریان برای این عدد رینولدز همانند آن‌چه در "شکل 5" ترسیم شده است، رسم گردید.

در گام بعدی این شبیه‌سازی برای عدد رینولدز 400 اعمال گردید که برای این عدد رینولدز نیز ابتدا استقلال حل از شبکه بررسی شده و در گام بعدی خطوط جریان مربوطه نیز رسم گردیده است.

بررسی استقلال حل از شبکه برای رینولدز 400 در "شکل 6" نمایش داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد سلول‌های داخلی از 400 به 784 ضمن افزایش هزینه محاسبات، تغییرات زیادی در پاسخ‌های به‌دست آمده ایجاد نمی‌شود. به همین خاطر از 400 سلول داخلی برای نمایش نتایج استفاده شده است. خطوط جریانی که در "شکل 7" نمایش داده شده است نیز به ازای 400 سلول داخلی رسم گردیده است.

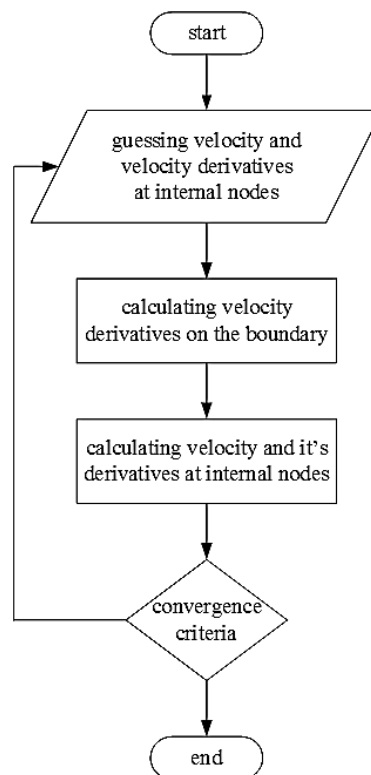


Fig. 2 the process of calculations

شکل 2 روند محاسبات

نتایج-6

پس از بررسی ریاضیات حاکم بر این روش و به‌دست‌آوردن روابط ریاضیاتی حاکم، در مرحله‌ی بعد با استفاده از این معادلات برنامه کامپیوتری با استفاده از زبان فرترن نوشته شد. سپس این برنامه برای دو هندسه متفاوت اجرا و با پژوهش‌های پیشین صحت‌سنجی گردید. در ابتدا با توجه به ساده‌تر بودن هندسه‌ی جریان داخل حفره برنامه‌ی نوشته شده برای این هندسه اعمال گردید و پس از اجرا در اعداد رینولدز مختلف، برنامه برای هندسه‌ی جریان پشت پله اعمال گردید. در ادامه نتایج مربوط به این شبیه‌سازی‌ها به نمایش درآمده است.

در واقع برای شبیه‌سازی دو گونه گسسته‌سازی اعمال شده است، یکی برای مرز دامنه، که مرز را به تعدادی سلول داخلی تقسیم شده است، و دیگری گسسته‌سازی دامنه‌ی مسأله به سلول‌های داخلی که برای شبیه‌سازی ترم جابه‌جایی استفاده شده است. شمایی از این گسسته‌سازی در "شکل 3" نمایش داده شده است.

با در نظر گرفتن این نوع گسسته‌سازی در ادامه نتایج عددی حاصل از شبیه‌سازی ارائه می‌گردد.

در نخستین گام شبیه‌سازی برای عدد رینولدز 100 صورت گرفت؛ که پیش از شبیه‌سازی و رسم خطوط جریان ابتدا استقلال حل از شبکه بررسی گردید و نتایج همانند آن‌چه در "شکل 4" نمایش داده شده است بررسی شده است. در این شکل و نیز شکل‌های بعدی که برای صحت‌سنجی جریان داخل حفره استفاده شده مقادیر سرعت عمودی (v) بر روی خط $y = 0.5$ نمایش داده شده‌اند. ضمن بررسی استقلال حل از شبکه در این شکل کار صحت‌سنجی نیز با پژوهش صورت گرفته توسط قیا انجام شد که نتیجه مربوط به پژوهش قیا [28] با نماد مربع نمایش داده شده است.

پس از بررسی جریان در رینولدز 400 برنامه برای رینولدزهای بالاتر نیز اجرا شد. برنامه نوشته شده تا رینولدز 630 منجر به همگرایی گردید. البته نتایج مربوط به رینولدز 600 در "شکل‌های 8 و 9" نمایش داده شده است. همان‌طور که در "شکل 8" مشاهده می‌شود پاسخ به ازای 784 سلول داخلی از شبکه‌بندی مستقل شده است و خطوط جریان به ازای این شبکه‌بندی نیز در "شکل 9" به نمایش درآمده است. برای این عدد رینولدز نتایج مرجعی جهت صحت‌سنجی موجود نبود و صرفاً به بررسی استقلال حل از شبکه و رسم خطوط جریان اکتفا نمودیم.

هندسه‌ی بعدی که با استفاده از روش پیشنهادی در آن به بررسی استقلال حل از شبکه پرداخته شد، جریان پشت پله بود که در این جریان نیز تا عدد رینولدز 100 همگرایی حاصل شد. نتایج مربوط به این شبیه‌سازی در "شکل 10" به نمایش درآمده است.

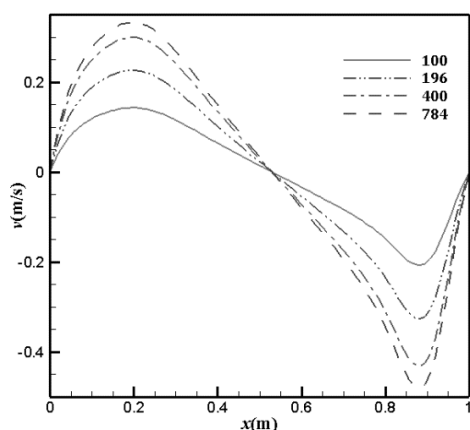


Fig. 8 checking the grid independency for Reynolds number equal to 600

شکل 8 بررسی استقلال حل از شبکه در رینولدز 600

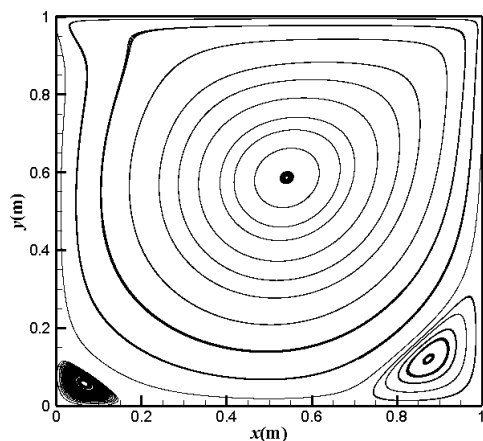


Fig. 9 streamlines in a lid driven cavity for $Re=600$

شکل 9 خطوط جریان داخل حفره با در پوش متحرک برای رینولدز 600

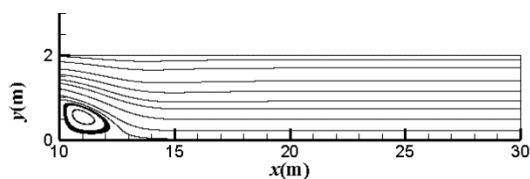


Fig. 10 streamlines in a backward facing step for $Re=100$

شکل 10 بررسی استقلال حل از شبکه برای پله رو به عقب 100

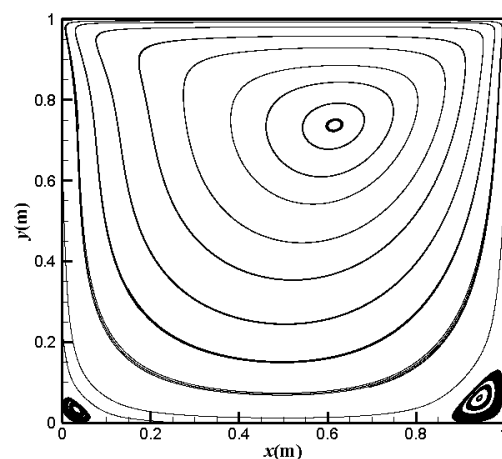


Fig. 5 streamlines in a lid driven cavity for $Re=100$

شکل 5 خطوط جریان داخل حفره با در پوش متحرک برای رینولدز 100

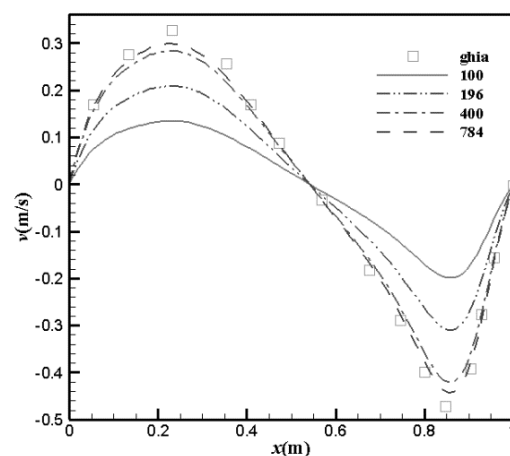


Fig. 6 checking the grid independency for Reynolds number equal to 400 [28]

شکل 6 بررسی استقلال حل از شبکه در رینولدز 400 [28]

برای عدد رینولدز 400 نیز همانند رینولدز 100 کار صحت‌سنجی با پژوهش انجام شده توسط قبا [28] صورت گرفت که نتایج پژوهش مرجع با علامت مربع به نمایش درآمده است.

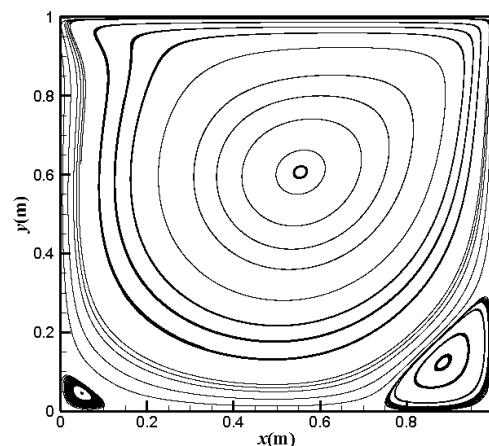


Fig. 7 streamlines in a lid driven cavity for $Re=400$

شکل 7 خطوط جریان داخل حفره با در پوش متحرک برای رینولدز 400

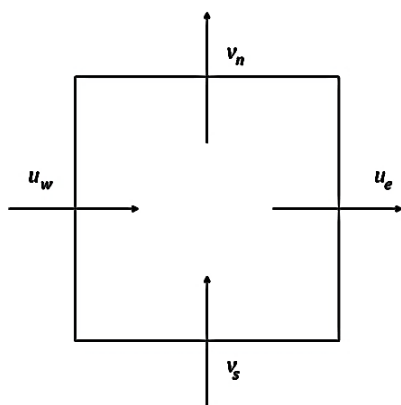


Fig. 13 calculation of continuity equation residuals

شکل 13 محاسبه‌ی باقیمانده‌ی معادله‌ی پیوستگی

رابطه‌ی مربوط به این نوع از باقیمانده نیز به شکل رابطه‌ی (27) تعریف می‌گردد:

$$\text{باقیمانده} = |u_e - u_w| + |v_n - v_s| \quad (30)$$

باقیمانده‌های محاسبه شده از رابطه‌ی (27) نیز به صورت نمایش داده شده در "شکل 14" محاسبه گردید. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود باقیمانده معادله پیوستگی به صفر نمی‌رسد و در حوالی 0.27 ثابت می‌گردد. البته این باقیمانده برای جریان استوکس نیز، که تنها با یک‌بار حل دستگاه معادلات به نتیجه می‌رسیدیم، به همین مقدار بود.

برای مقایسه با روش تفاضل محدود نیز یک کد نوشته شده با استفاده از این روش اجرا شد و باقیمانده‌های مربوطه در ادامه ارائه می‌شود. همان‌طور که در "شکل 15" دیده می‌شود پاسخ به ازای تکرارهای بیشتری نسبت به روش المان مرزی به همگرایی رسیده است. در واقع با مقایسه‌ی باقیمانده‌ها می‌توان به همگرایی سریع‌تر روش المان مرزی نسبت به روش تفاضل محدود پی برد.

7- جمع‌بندی

در این تحقیق برخلاف بیشتر پژوهش‌ها، که از پاسخ بنیادین معادله لاپلاس استفاده می‌کنند، برای حل مسأله از پاسخ اساسی معادله پواسون استفاده شده است. در این پژوهش با استفاده از تابع پناستی که در روش المان محدود

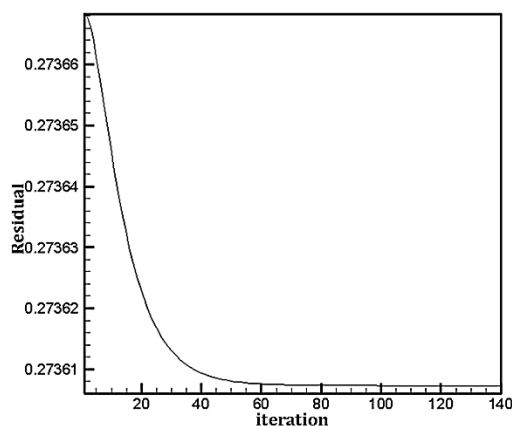


Fig. 14 residuals of continuity equation calculated using boundary element method

شکل 14 مقدار باقیمانده معادله پیوستگی در حل با استفاده از روش المان مرزی

برای صحت‌سنجی این هندسه نیز از پژوهش صورت گرفته توسط آقای ارتورک [29] استفاده گردید که نتایج حاصل از شبیه‌سازی وی برای رینولدز 100 در "شکل 11" به نمایش درآمده است.

پارامتری که در این هندسه برای صحت‌سنجی مورد استفاده قرار می‌گیرد، طول اتصال مجدد¹ است و همان‌طور که در "شکل‌های 10 و 11" مشاهده می‌شود این طول برای نتایج حاصل از شبیه‌سازی در این پژوهش و نیز پژوهش معیار برابر با 3 است.

برای مقایسه روش پیشنهادی با سایر روش‌های عددی باقیمانده‌های هر روش محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه گردید. در ادامه برای نمونه این باقیمانده‌ها برای نمونه در عدد رینولدز 100 بررسی و نمایش داده شده است. در این پژوهش دو نوع باقیمانده تعریف شده است. در گونه‌ی نخست اختلاف سرعت در دو تکرار متوالی تقسیم بر سرعت در تکرار دوم را به عنوان باقیمانده تعریف گردیده که نمایش ریاضیاتی آن به صورت معادله‌ی (26) می‌باشد.

$$\text{باقیمانده} = \frac{|u^{n+1} - u^n|}{|u^{n+1}|} + \frac{|v^{n+1} - v^n|}{|v^{n+1}|} \quad (29)$$

مقدار باقیمانده‌های محاسبه شده از رابطه‌ی (26) در "شکل 12" به نمایش درآمده است.

همان‌طور که در "شکل 12" مشاهده می‌شود باقیمانده‌ها در این روش به ازای 140 تکرار به معیار همگرایی، که در برنامه کامپیوتری 10^{-6} در نظر گرفته شده است، دست می‌یابد.

در گونه‌ی دیگری از محاسبه‌ی باقیمانده‌ها به بررسی باقیمانده معادله پیوستگی (بقای جرم) در هر سلول پرداخته شد. این شیوه به صورت شماتیک در "شکل 13" به نمایش درآمده است.

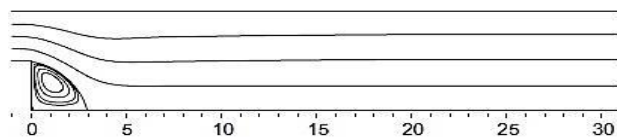


Fig. 11 streamlines in a backward facing step for Re=100 in benchmark [29]

شکل 11 بررسی استقلال حل از شبکه برای پله رو به عقب 100 در کار مرجع [29]

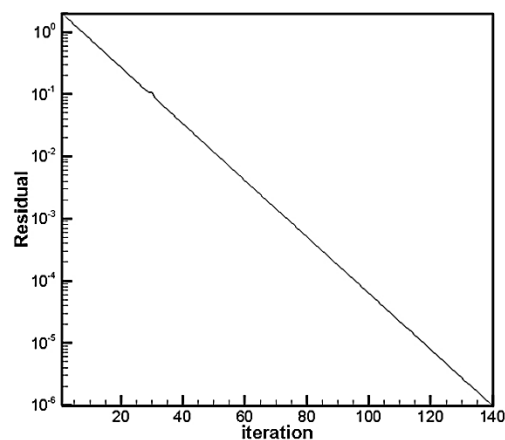


Fig. 12 a demonstration of boundary element method residuals

شکل 12 نمایش باقیمانده‌ها در روش المان مرزی

¹ Reattachment length

$$\begin{aligned} \mu' & \text{ ثابت لامه (Nm}^{-2}\text{)} \\ \nu & \text{ ویسکوزیته سینماتیکی (m}^2\text{s}^{-1}\text{)} \\ \rho & \text{ چگالی (kgm}^{-3}\text{)} \\ \sigma & \text{ تانسور تنش (Nm}^{-2}\text{)} \end{aligned}$$

9- مراجع

- [1] C. Brebbia, J. Telles, L. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, pp. 47-108, Berlin: Hemisphere Publication Corporation, 1984.
- [2] S. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Washington: CRC press, 1980.
- [3] F. Thomasset, *Implementation of finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*: Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] C. W. Oseen, *Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
- [5] G. Hancock, The self-propulsion of microscopic organisms through liquids, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, pp. 96-121, 1953.
- [6] J. C. Wu, J. F. Thompson, Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using an integro-differential formulation, *Computers & Fluids*, Vol. 1, No. 2, pp. 197-215, 1973.
- [7] K. Onishi, T. Kuroki, M. Tanaka, An application of boundary element method to incompressible laminar viscous flows, *Engineering Analysis*, Vol. 1, No. 3, pp. 122-127, 1984.
- [8] H. Rodriguez-Prada, F. Pironti, A. Saez, Fundamental solutions of the streamfunction-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-12, 1990.
- [9] H. F. D. F. M. Carneiro, *Fluid Flow Analysis Using the Boundary Element Method*, Thesis, Cranfield Institute of Technology, 1993.
- [10] G. Youngren, A. Acrivos, Stokes flow past a particle of arbitrary shape: A numerical method of solution, *Fluid Mechanics*, Vol. 69, No. 2, pp. 377-403, 1975.
- [11] M. Bush, R. Tanner, Numerical solution of viscous flows using integral equation methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, No. 1, pp. 71-92, 1983.
- [12] M. Bush, Modelling two-dimensional flow past arbitrary cylindrical bodies using boundary element formulations, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 7, No. 6, pp. 386-394, 1983.
- [13] N. Tosaka, K. Onishi, Boundary integral equation formulations for steady Navier-Stokes equations using the Stokes fundamental solutions, *Engineering analysis*, Vol. 2, No. 3, pp. 128-132, 1985.
- [14] G. Dargush, P. Banerjee, A boundary element method for steady incompressible thermoviscous flow, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, No. 8, pp. 1605-1626, 1991.
- [15] K. A. Honkala, *Boundary element methods for two-dimensional, coupled, thermoviscous flow*, PhD Thesis, State University of New York, Buffalo, 1992.
- [16] H. Power, P. W. Partridge, The use of Stokes' fundamental solution for the boundary only element formulation of the three-dimensional Navier-Stokes equations for moderate Reynolds numbers, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 11, pp. 1825-1840, 1994.
- [17] H. Power, V. Botte, An indirect Boundary Element Method for solving low Reynolds number Navier-Stokes equations in a three-dimensional cavity, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, No. 8, pp. 1485-1505, 1998.
- [18] S. Hamed Meraji, A. Ghaehri, P. Malekzadeh, An efficient algorithm based on the differential quadrature method for solving Navier-Stokes equations, *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 71, No. 4, pp. 422-445, 2013.
- [19] P. Senel, M. Tezer-Sezgin, DRBEM solutions of Stokes and Navier-Stokes equations in cavities under point source magnetic field, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 64, pp. 158-175, 2016.
- [20] S. Gümgüm, L. C. Wrobel, DRBEM formulation for transient Stokes flow with slip boundary condition, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 75, pp. 65-78, 2017.
- [21] X. W. Gao, A boundary-domain integral equation method in viscous fluid flow, *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 45, No. 5, pp. 463-484, 2004.
- [22] X. W. Gao, A promising boundary element formulation for three-dimensional viscous flow, *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, No. 1, pp. 19-43, 2005.
- [23] H. F. Peng, M. Cui, X. W. Gao, A boundary element method without internal cells for solving viscous flow problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, No. 2, pp. 293-300, 2013.
- [24] C. Tien, N. Thai-Quang, N. Mai-Duy, C. Tran, T. Tran-Cong, High-order fully coupled scheme based on compact integrated RBF approximation for viscous flows in regular and irregular domains, *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 105, No. 4, pp. 301-340, 2015.
- [25] H. Power, R. Mingo, The DRM subdomain decomposition approach to solve the two-dimensional Navier-Stokes system of equations, *Engineering analysis with Boundary Elements*, Vol. 24, No. 1, pp. 107-119, 2000.
- [26] G. Heidarinejad, J. Esmaeelian, Viscous Flow Analysis using Boundary Elements Method, *Modares Mechanical Engineering*, Tehran, Iran, Vol. 41, No. 2, pp. 47-54, 2010. (In Persian)

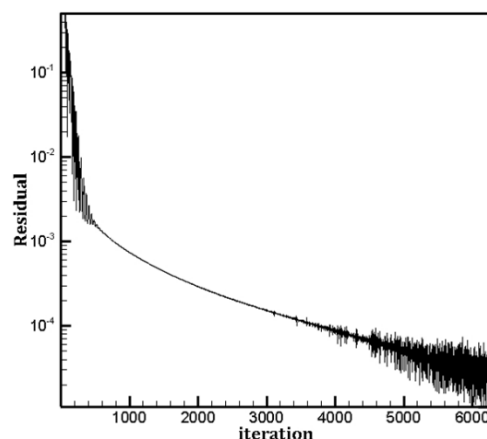


Fig. 15 residuals of continuity equation calculated using finite difference method

شکل 15 مقدار باقیمانده معادله پیوستگی در حل به روش تفاضل محدود

کاربرد دارد ابتدا معادله به معادله‌ای مشابه با معادله‌ی ناویر در الاستواستاتیک تبدیل شده و سپس با استفاده از روش‌های پیشنهاد شده برای مسأله الاستواستاتیک به حل جریان سیال لزج پرداخته شده‌است.

هرچند وجود ترم غیرخطی منجر به ایجاد تعدادی سلول داخلی می‌شود ولی دستگاه معادلات تنها برای المان‌های روی مرز حل می‌گردد. این امر منجر به کاهش حافظه موردنیاز برای حل مسأله می‌گردد و نیز حجم محاسبات در طی مراحل تکرار می‌شود.

در تحقیق حاضر ضمن ادامه‌ی پژوهش انجام شده توسط اسماعیلیان دامنه‌ی کاربرد عدد رینولدز در شبیه‌سازی با استفاده از این روش افزایش داده شد؛ به‌طوری‌که برای جریان داخل حفره تا رینولدز 600 و برای جریان پشت پله تا رینولدز 100 این افزایش صورت گرفت. ضمن این‌که مقایسه‌ای جزئی میان همگرایی این روش با سایر روش‌های عددی ارائه گردید.

مقایسه میان باقیمانده‌های این روش با روش‌های متداول شبیه‌سازی هم‌چون روش تفاضل محدود نشان‌دهنده کاهش حجم محاسبات در اعداد رینولدز متوسط در روش المان مرزی نسبت به روش تفاضل محدود است.

دستیابی به پاسخ دقیق در مسائل از ویژگی‌های مهم در حل مسائل می‌باشد. از آن‌جایی‌که روش المان مرزی برای حل از شیوه‌ی انتگرالی استفاده می‌کند، این امر با محاسبه محل دقیق گردابه‌ها و نیز تشخیص گردابه‌های موجود در گوشه‌های دامنه ضمن استفاده از سلول‌های داخلی کمتر همراه است.

8- فهرست علائم

b	نیروهای بدنه‌ای (N)
G	ماتریس ضرایب
H	ماتریس ضرایب
P	فشار (Pa)
r	بردار واصل دو نقطه (m)
t	کشش (Nm ⁻¹)
u	جابه‌جایی (m)
v	سرعت (ms ⁻¹)

علائم یونانی

λ	پارامتر پنالته (kgm ⁻¹ s ⁻¹)
λ'	ثابت لامه (Nm ⁻²)

- Physics*, Vol. 48, No. 3, pp. 387-411, 1982.
- [29] E. Erturk, Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions, *Computers & Fluids*, Vol. 37, No. 6, pp. 633-655, 2008.
- [27] F. París, J. Cañas, *Boundary element Method: Fundamentals and Applications*, pp. 64-134: Oxford University Press, USA, 1997.
- [28] U. Ghia, K. N. Ghia, C. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *Computational*