ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

به‌کارگیری روش فضای حالت جهت پیش‌بینی خیز نانوتیرها

بابک صفائی[1]، اصغر محمدپور فتاحی[2*]

1- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

* تبریز، صندوق پستی 51579-44533، a.fattahi@iaut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 بهمن 1396

پذیرش: 18 اسفند 1396

ارائه در سایت: 19 فروردین 1397

کلید واژگان:

نانوتیر

تحلیل خمش

تئوری تیر

مدل‌سازی فضای حالت

چکیده

مدل‌های پیوسته اصلاح شده به علت توانایی محاسبات پارامترهای مختلف و دقت بالا، قابل مقایسه با مدل‌های اتمی هستند، بنابراین، در نانومکانیک بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. با میل کردن ابعاد ساختار به نانو، تئوری پیوستگی کلاسیک قابلیت پیش بینی رفتار نانوساختارها را به دلیل وابستگی خواص به اندازه ندارد که آنرا اثر اندازه می‌نامند. در این تحقیق، ابتدا معادلات ارینگن از الاستیسیته غیرمحلی در تئوریهای کلاسیک تیر اولر-برنولی و تیموشنکو اعمال شدند. سپس با کمک جبر خطی و روش فضای حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل منتجه حل و بررسی شدند. دو نوع بار نقطه ای و گسترده به همراه چهار شرط تکیه گاهی رایج در این مطالعه در نظر گرفته شد و حداکثر خیز نانو تیرها برای تمام شرایط مرزی با استفاده از متغیرهای حالت و جبر ماتریس بدست آمد. نتایج به دست آمده برای پارامترهای هندسی مختلف، شرایط مرزی و مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی برای نشان دادن اثرات هر یک ارائه شده است. نتایج نشان داد که حداکثر خیز بدون بعد برای تمام شرایط مرزی و هر دو نوع بارگذاری نقطه‌ای و گسترده با افزایش پارامتر غیرمحلی افزایش می‌یابد که نشانگر این امر هست که با افزایش پارامتر غیرمحلی، سفتی نانو تیر کاهش می‌یابد.

Using of state-space approach to predict deflection of nanobeams

Babak Safaei, Asghar Mohammadpour Fattahi*

Department of Mechanical Engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran

* P.O.B. 51579-44533, Tabriz, Iran, a.fattahi@iaut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 February 2018
Accepted 09 March 2018
Available Online 08 April 2018

Keywords:
Nano-beams
Bending Analysis
Beam theory
State-space modeling

ABSTRACT

Modified continuum models have been the essence of much attention in nano-mechanics through their computational efficiency and the capability to produce accurate results which are comparable to the atomistic models ones. As the dimensions of a structure approach to the nano-scale, the classical continuum theory has not the capability to predict the behavior of nanostructures due to the size-dependent of their properties which is known as size-effects. In this work, the bending behavior of nano-beams with common sets of boundary conditions is investigated using state-space modeling on the basis of nonlocal beam theories. Both uniform load and point load are considered in this study. To this end, Eringen's equations of nonlocal elasticity are incorporated into the classical beam theories namely as Euler-Bernoulli beam theory (EBT) and Timoshenko beam theory (TBT). The maximum deflection of nano-beams corresponding to each set of boundary conditions is obtained using state variables and matrix algebra. The results are presented for different geometric parameters, boundary conditions, and the values of nonlocal parameter to show the effects of each distinctly. It is found that the non-dimensional maximum deflection corresponding to all boundary conditions and both loading cases will be increased for higher values of nonlocal parameter which show this fact that with increasing the nonlocal parameter, the stiffness of nano-beam decreases.

1- مقدمه

مدل‌های پیوسته اصلاح شده به‌علت توانایی محاسبات پارامترهای مختلف و دقت بالا، قابل مقایسه با مدل‌های اتمی هستند، بنابراین، در نانومکانیک بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [1]. یک رویکرد لحاظ کردن اثرات اندازه نانویی به مکانیک کلاسیک پیوسته است [2]. کاربرد روش‌های مبتنی بر محیط پیوسته- غیرمحلی به‌علت پیچیدگی کمتر آن‌ها به‌طور قابل ملاحظه‌ای در حال افزایش است [4,3].

عزیزی و همکارانش ویژگی‌های الاستیسک نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانوذرات صفحه‌ای مانند گرافن را با تعمیم رابط تحلیل تنش سه‌بعدی متقارن کامپوزیت‌ها استخراج کردند [5]. فتاحی و سهمانی رفتار کمانش و پسا کمانش تیرهای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند [7,6]. آن‌ها همچنین مدل‌های کلاسیک صفحه را برای نانوصفحات اصلاح کرده و توسعه دادند و اثرات حرارت را نیز روی نانوصفحات بررسی کردند [9,8]. ارتعاشات نانوتیرها در محیط الاستیک توسط عزیزی و همکاران بررسی شد. آن‌ها از مدل‌های غیرمحلی برای نانوتیرها استفاده کردند [10].

براساس مقدمه فوق، به نظر می‌رسد که بررسی اثرات اندازه در تحلیل نانوتیرها ضروری باشد. در این تحقیق، دو تئوری تیر غیرمحلی مبتنی بر تئوری‌های کلاسیک [11] با لحاظ کردن معادلات ارینگن [12] از الاستیسیته

غیرمحلی ارائه شده است. برای مطالعه رفتار خمشی نانوتیرها چهار شرایط مرزی معمول استفاده شد. روش فضای حالت برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم برای هر تئوری غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف استفاده شد. نتایج عددی مختلف برای دو نوع بارگذاری نقطه‌ای و گسترده برای نشان دادن تأثیر شرایط مرزی، نسبت ابعادی و اثر پارامتر غیرمحلی بر پاسخ خمشی نانوتیرها به صورت جداگانه نشان داده شد.

2- مروری بر تئوری‌های تیر

2-1-کلیات

تئوری‌های تیر مختلف جهت نشان دادن رفتار تیرها وجود دارد. یک تیر مستقیم با طول L و سطح مقطع مستطیل شکل با ابعاد $b{\times}h$ مطابق "شکل 1" را در نظر بگیرید.

دستگاه مختصات (x,y,x) که مبدا آن در مرکز تیر قرار دارد در نظر گرفته می‌شود که محور x در راستای طول تیر، محور y در راستای عرض تیر و محور z در راستای ارتفاع تیر است. تغییر شکل تیر در صفحه x-z اتفاق می‌افتد و جابجایی های (u_1,u_2,u_3) در راستای x و y و z فقط وابسته به موقعیت‌های x، z و زمان t هستند که به فرم زیر می‌توانند نوشته شوند:

$$u_1(x,z,t) = -z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \psi(z)\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \varphi(x,t)\right)$$
$$u_1(x,z,t) = 0$$
$$u_3\,(x,z,t) = w(x,t) \quad (1)$$

که w جابجایی عرضی و φ جابجایی زاویه‌ای تیر است و $\psi(z)$ تابع شکل است که برای تئوری تیر اولر-برنولی، $\psi(z)=0$ و برای تئوری تیر تیموشنکو، $\psi(z)=z$ می‌باشد.

2-2- تئوری تیر اولر-برنولی[1]

ساده‌ترین و معروف‌ترین تئوری تیر، تئوری تیر اولر-برنولی می‌باشد که به تئوری کلاسیک تیر نیز معروف است. بر پایه این تئوری خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانه تیر پس از تغیر شکل تیر نیز به‌صورت مستقیم و عمود به صفحه میانی باقی خواهند ماند. بنابراین اثر تغییر شکل برشی و چرخش در این نظریه در نظر گرفته نمی‌شود. براساس معادله (1)، روابط

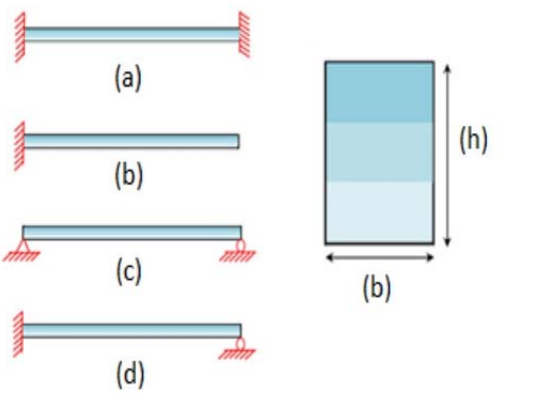

Fig. 1 (a) clamped-clamped, (b) clamped-free, (c) simply supported-simply supported, (d) simply supported-clamped straight uniform nanobeams with rectangular cross-section

شکل 1 تیرها با مقطع مستطیلی با تکیه‌گاه‌های الف) گیردار-گیردار ب) گیردار-آزاد ج) ساده-ساده د) ساده-گیردار

[1] Euler Bernoulli Beam Theory (EBT)

کرنش-جابجایی مناسب تئوری تیر اولر-برنولی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2\text{-a})$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (2\text{-b})$$

همین‌طور معادله تعمیم یافته اولر-لاگرانژ برای رفتار خمشی EBT خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = 0 \quad (3)$$

که q بار اعمال شده عرضی و M گشتاور خمشی ($M=\int z\sigma_{xx}dA$) است.

2-3-تئوری تیر تیموشنکو[2]

تئوری تیر بعدی تیموشنکو است که در آن اثرات تغییر شکل برشی و چرخش در نظر گرفته شده است، به این ترتیب که خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل تیر دیگر عمود بر صفحه میانی نخواهند ماند. با این وجود، فرض بر این است که تنش برشی عرضی دارای یک توزیع خطی در طول ضخامت تیر است. با استفاده از معادلات (1)، روابط کرنش-جابجایی زیر را می توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = z\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4\text{-a})$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \quad (4\text{-b})$$

همین‌طور معادله تعمیم یافته اولر-لاگرانژ برای رفتار خمشی TBT خواهد بود:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0 \quad (5\text{-a})$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0 \quad (5\text{-b})$$

که $Q=\int \sigma_{xz}dA$.

3- تئوری‌های غیرمحلی تیر برای خمش نانوتیرها

3-1- مروری بر الاستیسیته غیرمحلی ارگین

تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی که برای اولین بار توسط ارینگن [12] در سال 1972 معرفی شده است، یکی از تئوری‌های محیط پیوسته غیرکلاسیک است که تاثیرات مقیاس‌های کوچک و فلسفه‌ی عدم پیوستگی محیط مادی و در نتیجه ناپیوستگی میدان مکانیکی (تانسورهای تنش وکرنش) در معادلات مشخصه این تئوری لحاظ شده است. در تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک، فرض بر این است که تنش در یک نقطه فقط تابع کرنش در آن نقطه هست، در صورتی که در تئوری غیرمحلی، فرض می‌شود که تنش در یک نقطه، تابع کرنش در تمام نقاط آن جسم پیوسته است. در حقیقت این تئوری نیروهای بین اتم‌ها در یک جسم پیوسته را به‌صورت پارامتری موثر در حل مسائل وارد می‌کند.

نظریه الاستیسیته غیرمحلی غیرخطی برای ماده پیوسته همگن و ایزوتروپیک می‌تواند به‌صورت مجموعه معادلات زیر بیان شود [13]:

$$\sigma_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0 \quad (6\text{-a})$$
$$\sigma_{kl}(x) = \int_V \alpha(|x-x'|,\tau)\sigma_{kl}^c(x')dV \quad (6\text{-b})$$
$$\sigma_{kl}^c(x') = L_1 e_{rr}(x')\delta_{kl} + 2L_2 e_{kl}(x') \quad (6\text{-c})$$
$$e_{kl}(x') = \frac{1}{2}\left(\frac{du_k(x')}{dx_l'} + \frac{du_l(x')}{dx_k'}\right) \quad (6\text{-d})$$

[2] Timoshenko Beam Theory (TBT)

که معادله (6-a) معادله تعادل است و u_l و $\sigma_{kl,l}$ ، ρ ، f_l تانسور تنش غیرمحلی، چگالی جرمی، چگالی نیروی حجمی و بردار جابجایی در نقطه x هستند. معادله (6-b) رابطه بین تانسور تنش محلی (σ^c_{kl}) و غیرمحلی ($\sigma_{kl,l}$) با استفاده از مدول غیرمحلی ($\alpha(|x-x'|,\tau)$) است و درنهایت معادلات (6-c) و (6-d) روابط بنیادی کرنش-جابجایی و تنش-کرنش هستند که L_1 و L_2 ثوابت لامه هستند.

ارینگن با ساده‌سازی معادله (6-b) را به فرم معادله دیفرانسیل جزئی زیر در آورد [12]:

$$(1-\tau^2\ell^2\nabla^2)t_{kl}(x)=\sigma_{kl}(x)\ ,\ \tau=e_0\frac{a}{\ell} \tag{7}$$

که $t_{kl}=\sigma_{kl,l}$ ، a/ℓ نسبت طول ویژه و e_0 ثابت غیرمحلی می‌باشند.

3-2- به‌کارگیری تئوری غیرمحلی در تئوری‌های تیر

3-2-1- تئوری تیر اولر-برنولی

با استفاده از معادله (7) روابط بین گشتاور خمشی و جابجایی به شکل زیر خواهد بود:

$$M-\mu\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{8}$$

$\mu=(e_0a)^2$ پارامتر غیرمحلی نامیده می‌شود و e_0 مقدار ثابتی است که به جنس ماده بستگی دارد و a طول شبکه مولکولی است.

با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (3) مدل غیرمحلی تئوری تیر اولر-برنولی خواهد بود:

$$-EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+q-\mu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0 \tag{9}$$

3-2-2- تئوری تیر تیموشنکو

با استفاده از معادله (5) روابط بین M و Q برحسب ترم‌های جابجایی به شکل زیر خواهد بود:

$$Q-\mu\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=\kappa GA\left(\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{10-a}$$

$$M-\mu\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=EI\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{10-b}$$

با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (7) مدل غیرمحلی TBT خواهد بود:

$$\kappa GA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\kappa GA\frac{\partial \varphi}{\partial x}+q-\mu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0 \tag{11-a}$$

$$-\kappa GA\frac{\partial w}{\partial x}+EI\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\kappa GA\varphi=0 \tag{11-b}$$

4- روش فضای حالت[1]

4-1- مقدمه

روش فضای حالت اولین‌بار توسط کالمن [14] به‌کار گرفته شد. در این پژوهش جبر ماتریسی و متغیرهای حالت برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل تعادل برای تئوری‌های مختلف غیرمحلی تیر استفاده شده و سپس چهار شرط مرزی رایج برای تعیین جابجایی‌های عرضی و زاویه‌ای اعمال می‌شود.

4-2- به‌کارگیری مدل فضای حالت در تئوری‌های غیرمحلی

4-2-1- تئوری تیر اولر- برنولی

متغیرهای حالت را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$w=Z_1\ ,\ \frac{\partial w}{\partial x}=Z_2 \tag{12-a}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=Z_3\ ,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=Z_4 \tag{12-b}$$

توجه شود که چون مرتبه معادلات تعادل تئوری تیر اولر-برنولی چهار است، چهار متغیر حالت برای مدل فضای حالت در نظر گرفته شد .با جایگذاری متغیرها در معادله تعادل (1) خواهیم داشت:

$$-EI\frac{dZ_4}{dx^4}+q-\mu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0 \tag{13}$$

و همین‌طور سه معادله زیر را داریم:

$$Z_2=\frac{dZ_1}{dx} \tag{14-a}$$

$$Z_3=\frac{dZ_2}{dx} \tag{14-b}$$

$$Z_4=\frac{dZ_3}{dx} \tag{14-c}$$

که منجر به چهار معادله دیفرانسیلی کوپل شده خواهد شد.

به منظور حل این مجموعه معادلات، جبر ماتریس استفاده می‌شود. معادلات (13) و (14) را می توان در فرم ماتریس به‌صورت زیر مرتب‌سازی و بازنویسی کرد.

$$[A]_{4\times4}\{Z'\}_{4\times1}+[B]_{4\times4}\{Z\}_{4\times1}=\{C\}_{4\times1} \tag{15}$$

که

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-EI\end{bmatrix} \tag{16-a}$$

$$B=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{16-b}$$

$$C=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\-q+\mu\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}\end{Bmatrix} \tag{16-c}$$

مشاهده می‌شود که مقادیر ویژه‌ی ماتریس B تکراری و برابر صفر خواهند شد که حل معادله‌ی تعادل (15) را بسیار پیچیده‌تر می‌نماید. مقدار بسیار کوچک ϵ به معادله اضافه میکنیم تا مقادیر ویژه جواب‌های غیرصفر غیرتکراری داشته باشند و علامت− جهت رسیدن به جواب‌های غیرموهومی است. بنابراین:

$$B=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-\epsilon&0&0&0\end{bmatrix} \tag{16-d}$$

حال عملیات جبر ماتریسی را در معادله (15) انجام می‌دهیم تا آن را به صورت مورب درآوریم، در نتیجه چهار معادله دیفرانسیل غیرکوپل خواهند شد. با ضرب معادله (17) در $[A]^{-1}$ داریم:

$$\{Z'\}+[A]^{-1}[B]\{Z\}=[A]^{-1}\{C\} \tag{17}$$

با فرض $[D]=[A]^{-1}[B]$و $\{H\}=[A]^{-1}\{C\}$ خواهیم داشت:

$$\{Z'\}+[D]\{Z\}=\{H\} \tag{18}$$

با تعریف λ مقدار ویژه و u بردار ویژه ماتریس $[D]$ خواهیم داشت:

$$[D][u]=[u][\lambda] \tag{19}$$

با ضرب طرفین معادله (19) در $[u]^{-1}$ داریم:

$$[u]^{-1}[D][u]=[\lambda] \tag{20}$$

بنابرین داریم:

$$[u]^{-1}[D]=[\lambda][u]^{-1} \tag{21}$$

با ضرب معادله (17) در $[u]^{-1}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$[u]^{-1}\{Z'\}+[u]^{-1}[D]\{Z\}=[u]^{-1}\{H\} \tag{22}$$

---

[1] State Space Method

که با کمک رابطه (21) داریم:

$$[u]^{-1}\{Z'\}+[\lambda][u]^{-1}\{Z\}=[u]^{-1}\{H\} \tag{23}$$

با تعیین $\{N\}=[u]^{-1}\{H\}$ و $\{F\}=[u]^{-1}\{Z\}$ معادله () بصورت زیر دوباره نویسی می‌شود:

$$\{F'\}+[\lambda]\{F\}=\{N\} \tag{24}$$

از آن‌جایی که $[\lambda]$ یک ماتریس قطری است، ما چهار معادله دیفرانسیلی غیرکوپل خواهیم داشت که به راحتی قابل حل هستند. هر معادله به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

بار عرضی وارد شده بر نانوتیر می‌تواند به کمک تبدیل فوریه به‌صورت زیر نوشته شود:

$$q(x)=\sum_{i=1}^{\infty}Q_i\sin\frac{i\pi x}{L} \tag{25}$$

که برای بار گسترده یکنواخت $Q_i=4q_0/i\pi$ و برای بار نقطه‌ای $Q_i=2q_0/L\sin\pi x_0/L$ خواهد بود و q_0 چگالی بار اعمالی و x_0 موقعیت بار نقطه‌ای را نشان می‌دهد.

با حل معادله دیفرانسیلی مرتبه اول (24)، داریم:

$$F_i(x)=c_ie^{-\lambda_ix}-e^{-\lambda_ix}\int e^{\lambda_ix}\left(\sum_{i=1}^{\infty}Q_i\sin\frac{i\pi x}{L}+\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2\pi^2Q_i}{L^2}\sin\frac{i\pi x}{L}\right)dx\ \ i=1,2,3,4 \tag{26}$$

در نتیجه، متغیرهای حالت خواهند بود:

$$Z_i=\sum_{j=1}^{4}u_{ij}F_j\ \ i=1,2,3,4 \tag{27}$$

4-2-2- تئوری تیر تیموشنکو

متغیرهای حالت را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$w=Z_1\ ,\ \frac{\partial w}{\partial x}=Z_2 \tag{28-a}$$

$$\varphi=Z_3\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=Z_4 \tag{28-b}$$

توجه شود که چون مرتبه معادلات تعادل تئوری تیر تیموشنکو چهار است، چهار متغیر حالت برای مدل فضای حالت در نظر گرفته شد.

با جایگذاری متغیرها در معادله تعادل (11) خواهیم داشت:

$$\kappa GA\frac{dZ_2}{dx}+\kappa GAZ_4+q-\mu\frac{\partial^2q}{\partial x^2}=0 \tag{29-a}$$

$$-\kappa GAZ_2+EI\frac{dZ_4}{dx}-\kappa GAZ_3=0 \tag{29-b}$$

همچنین دو معادله دیگر زیر را داریم:

$$Z_2=\frac{dZ_1}{dx} \tag{30-a}$$

$$Z_4=\frac{dZ_3}{dx} \tag{30-b}$$

که منجر به چهار معادله دیفرانسیلی کوپل شده خواهد شد. به منظور حل این مجموعه معادلات، جبر ماتریس استفاده می‌شود. معادلات (29) و (30) را می‌توان در فرم ماتریس به صورت زیر مرتب‌سازی و بازنویسی کرد.

$$[A]_{4\times4}\{Z'\}_{4\times1}+[B]_{4\times4}\{Z\}_{4\times1}=\{C\}_{4\times1} \tag{31}$$

که

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\kappa GA&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&EI\end{bmatrix} \tag{32-a}$$

$$B=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-\epsilon&0&0&\kappa GA\\0&0&0&-1\\0&-\kappa GA&-\kappa GA&0\end{bmatrix} \tag{32-b}$$

$$C=\begin{Bmatrix}0\\-q+\mu\dfrac{\partial^2q}{\partial x^2}\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{32-c}$$

بعد از انجام عملیات ریاضی مشابه تئوری تیر اولر-برنولی، خواهیم داشت:

$$Z_i=\sum_{j=1}^{4}u_{ij}F_j\ \ i=1,2,3,4 \tag{33}$$

که

$$F_i(x)=c_ie^{-\lambda_ix}-e^{-\lambda_ix}\int e^{\lambda_ix}\left(\sum_{i=1}^{\infty}Q_i\sin\frac{i\pi x}{L}+\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2\pi^2Q_i}{L^2}\sin\frac{i\pi x}{L}\right)dx\ \ i=1,2,3,4 \tag{34}$$

4-3- شرایط مرزی

برای پیدا کردن ثابت‌های c_i شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم، اما در ابتدا شرایط مرزی باید به‌صورت متغیرهای حالت بیان شوند.

برای شرایط مرزی اتصال تکیه‌گاهی مفصل- مفصل:

$$\begin{gathered}Z_1(0)=Z_1(L)=0\\M(0)=M(L)=0\end{gathered} \tag{35}$$

برای شرایط مرزی اتصال تکیه‌گاهی گیردار-گیردار :

$$\begin{gathered}Z_1(0)=Z_1(L)=0\\Z_3(0)=Z_3(L)=0\end{gathered} \tag{36}$$

برای شرایط مرزی اتصال تکیه‌گاهی گیردار-مفصل :

$$\begin{gathered}Z_1(0)=Z_1(L)=0\\Z_3(0)=M(L)=0\end{gathered} \tag{37}$$

برای شرایط مرزی اتصال تکیه‌گاهی آزاد-مفصل :

$$\begin{gathered}Z_1(0)=Z_2(0)=0\\M(L)=Q(L)=0\end{gathered} \tag{38}$$

می‌توانیم معادلات را به فرم زیر بنویسیم:

$$[K]\{c_i\}=\{M\}\ j=1\ to\ 4 \tag{39}$$

یا

$$\{c_i\}=[K]^{-1}\{M\} \tag{40}$$

با حل معادلات غیرکوپل فوق، ضرایب مجهول c_i بدست می‌آیند.

5- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از راه حل تحلیلی ارائه شده در بخش قبلی ارائه شده است.

نانوتیرها با پارامترهای $E=70\ \text{GPa},\nu=0.23,\rho=2700\ \text{kg/m}^3\ ,h=$ $b=1\ \text{nm}$ جهت تحلیل رفتار خمشی شان در نظر گرفته شده‌اند. حداکثر خیز بی‌بعد برای نانو تیرها تحت بار نقطه ای با شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده، گیردار-گیردار، گیردار-ساده و ساده-آزاد در جداول 1 تا 4 آورده شده‌اند. همین نتایج برای نانوتیرهای تحت بار گسترده یکنواخت در جداول 1 تا 8 آورده شده است. مقادیر پارامتر غیرمحلی μ برای مواد مختلف متفاوت است که در این پژوهش 0 تا 3 در نظر گرفته شده است. مقدار صفر بدون در نظر گرفتن اثرات نانویی است.

جدول 1 حداکثر خیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه گیردار-گیردار تحت بار نقطه‌ای

Table 1 Non-dimensional maximum deflection under point load for simply supported-simply supported nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	0.5208	0.5372
	0.5	0.5592	0.6273
	1	0.5985	0.7258
	1.5	0.6368	0.8147
	2	0.6761	0.9102
	2.5	0.7145	0.9980
	3	0.7538	1.0912
20	0	0.5208	0.5252
	0.5	0.5315	0.5386
	1	0.5402	0.5521
	1.5	0.5498	0.5655
	2	0.5596	0.5791
	2.5	0.5692	0.5924
	3	0.5790	0.6061
50	0	0.5208	0.5216
	0.5	0.5223	0.5232
	1	0.5239	0.5250
	1.5	0.5256	0.5265
	2	0.5270	0.5281
	2.5	0.5285	0.5298
	3	0.5301	0.5315

جدول 2 حداکثر خیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه مفصل-مفصل تحت بار نقطه‌ای

Table 2 Non-dimensional maximum deflection under point load for clamped-clamped nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	2.0832	2.1577
	0.5	2.2383	2.5195
	1	2.3939	2.9148
	1.5	2.5473	3.2721
	2	2.7045	3.6557
	2.5	2.8581	4.0086
	3	3.0152	4.3820
20	0	2.0832	2.1036
	0.5	2.1219	2.1572
	1	2.1609	2.2117
	1.5	2.1996	2.2653
	2	2.2387	2.3198
	2.5	2.2773	2.3734
	3	2.3163	2.4278
50	0	2.0832	2.0866
	0.5	2.0895	2.0931
	1	2.0958	2.0998
	1.5	2.1020	2.1062
	2	2.1081	2.1128
	2.5	2.1143	2.1196
	3	2.1206	2.1263

جدول 3 حداکثرخیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه گیردار-آزاد تحت بار نقطه‌ای

Table 3 Non-dimensional maximum deflection under point clamped-simply supported nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	33.3332	34.4898
	0.5	35.7830	40.2743
	1	38.3348	46.5124
	1.5	40.7587	52.3049
	2	43.2745	58.4356
	2.5	45.7331	64.0763
	3	48.2457	70.0451
20	0	33.3632	33.7251
	0.5	33.9530	34.2823
	1	34.5769	35.3530
	1.5	35.1966	36.2102
	2	35.8205	37.0809
	2.5	36.4386	37.9381
	3	37.0527	38.8087
50	0	33.3332	33.3539
	0.5	33.4349	33.4588
	1	33.5344	33.5652
	1.5	33.5823	33.6671
	2	33.7324	33.7735
	2.5	33.8314	33.8814
	3	33.9320	33.9893

جدول 4 حداکثرخیز بی بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه گیردار-مفصل تحت بار نقطه‌ای

Table 4 Non-dimensional maximum deflection under point load for clamped-free nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	0.9316	0.9619
	0.5	0.9999	1.1232
	1	1.0705	1.2994
	1.5	1.1390	1.4587
	2	1.2092	1.6299
	2.5	1.2781	1.7925
	3	1.3483	1.9536
20	0	0.9316	0.9397
	0.5	0.9487	0.9636
	1	0.9663	0.9879
	1.5	0.9837	1.0120
	2	1.0011	1.0363
	2.5	1.0182	1.0602
	3	1.0412	1.0845
50	0	0.9316	0.9459
	0.5	0.9343	0.9360
	1	0.9372	0.9389
	1.5	0.9399	0.9417
	2	0.9428	0.9448
	2.5	0.9455	0.9478
	3	0.9482	0.9507

جدول 5 حداکثر خیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه گیردار-گیردار تحت بار گسترده

Table 5 Non-dimensional maximum deflection under uniform load for simply supported-simply supported nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	0.2604	0.2665
	0.5	0.2738	0.2809
	1	0.2872	0.2953
	1.5	0.3007	0.3097
	2	0.3141	0.3240
	2.5	0.3276	0.3384
	3	0.3411	0.3527
20	0	0.2604	0.2621
	0.5	0.2637	0.2655
	1	0.2671	0.2689
	1.5	0.2705	0.2724
	2	0.2738	0.2757
	2.5	0.2772	0.2793
	3	0.2805	0.2826
50	0	0.2604	0.2606
	0.5	0.2609	0.2612
	1	0.2614	0.2617
	1.5	0.2620	0.2623
	2	0.2625	0.2628
	2.5	0.2631	0.2634
	3	0.2636	0.2639

جدول 6 حداکثر خیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه مفصل-مفصل تحت بار گسترده

Table 6 Non-dimensional maximum deflection under uniform load for clamped-clamped nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	1.3130	1.3483
	0.5	1.3809	1.4210
	1	1.4487	1.4937
	1.5	1.5165	1.5664
	2	1.5844	1.6391
	2.5	1.6522	1.7118
	3	1.7201	1.7845
20	0	1.3130	1.3218
	0.5	1.3299	1.3391
	1	1.3469	1.3564
	1.5	1.3638	1.3737
	2	1.3808	1.3910
	2.5	1.3977	1.4083
	3	1.4148	1.4256
50	0	1.3130	1.3144
	0.5	1.3156	1.3172
	1	1.3184	1.3198
	1.5	1.3210	1.3225
	2	1.3239	1.3253
	2.5	1.3266	1.3280
	3	1.3293	1.3308

جدول 7 حداکثر خیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه گیردار-آزاد تحت بار گسترده

Table 7 Non-dimensional maximum deflection under uniform load for clamped-simply supported nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	12.4998	12.8226
	0.5	13.1457	13.5139
	1	13.7912	14.2054
	1.5	14.4367	14.7625
	2	15.0830	15.4477
	2.5	15.7285	16.2795
	3	16.3748	16.9709
20	0	12.4998	12.5831
	0.5	12.6603	12.7478
	1	12.8221	12.9126
	1.5	12.9830	13.0772
	2	13.1448	13.2419
	2.5	13.3057	13.4066
	3	13.4685	13.5713
50	0	12.4998	12.5127
	0.5	12.5241	12.5393
	1	12.5508	12.5641
	1.5	12.5755	12.5898
	2	12.6031	12.6164
	2.5	12.6288	12.6422
	3	12.6545	12.6687

جدول 8 حداکثر خیز بی‌بعد نانوتیرها برای تکیه‌گاه گیردار-مفصل تحت بار گسترده

Table 8 Non-dimensional maximum deflection under uniform load for clamped-free nanobeams

L/h	μ	EBT	TBT
10	0	0.5404	0.5539
	0.5	0.5684	0.5837
	1	0.5963	0.6136
	1.5	0.6245	0.6434
	2	0.6522	0.6733
	2.5	0.6801	0.7031
	3	0.7081	0.7330
20	0	0.5404	0.5440
	0.5	0.5475	0.5512
	1	0.5544	0.5583
	1.5	0.5614	0.5654
	2	0.5685	0.5725
	2.5	0.5756	0.5798
	3	0.5824	0.5868
50	0	0.5404	0.5410
	0.5	0.5416	0.5422
	1	0.5427	0.5432
	1.5	0.5438	0.5443
	2	0.5450	0.5455
	2.5	0.5461	0.5466
	3	0.5472	0.5478

در تمام جداول مقدار $-w_{\max} \times 100EI/q_0L^3$ به‌عنوان حداکثر خیز بی‌بعد در نظر گرفته شده است. طبق این نتایج می‌توان فهمید که با استفاده از تأثیر تنش برشی عرضی در تئوری تیر تیموشنکو، مقادیر حداکثر خیز برای هر دو بار نقطه و بار یکنواخت برای تمام شرایط مرزی کاهش می‌یابد.

همچنین می‌توان فهمید که حداکثر خیز بدون بعد برای تمام شرایط مرزی و هردو نوع بارگذاری نقطه‌ای و گسترده با افزایش پارامتر غیرمحلی افزایش می‌یابد که نشانگر این امر هست که با افزایش پارامتر غیرمحلی، سفتی نانوتیر کاهش می‌یابد. در این تحقیق، ابتدا معادلات ارینگن از الاستیسیته غیرمحلی در تئوری‌های کلاسیک تیر اولر- برنولی و تیموشنکو اعمال شدند. سپس با کمک جبر خطی و روش فضای حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل منتجه حل شدند. دو نوع بار نقطه‌ای و گسترده به همراه چهار شرط تکیه‌گاهی رایج در این مطالعه در نظر گرفته شد. حداکثر خیز نانوتیرها برای تمام شرایط مرزی با استفاده از متغیرهای حالت و جبر ماتریس به‌دست آمد. نتایج به‌دست آمده برای پارامترهای هندسی مختلف، شرایط مرزی و مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی برای نشان دادن اثرات هر یک ارائه شد. به نظر می رسد، مطالعه حاضر در تحلیل و طراحی نانوساختارها با شرایط مرزی و هندسی مختلف بسیار مفید خواهد بود.

6- مراجع

[1] K. Ahmad, W. Pan, Dramatic effect of multiwalled carbon nanotubes on the electrical properties of alumina based ceramic nanocomposites, *Composite Science and Technology,* Vol. 69, No. 7-8, pp. 1016-1021, 2009.

[2] A. R. Hall, M. R. Falvo, R. Superfine, S. Washburn, Electromechanical response of single-walled carbon nanotubes to torsional strain in a self-contained device, *Nature,* Vol. 2, No. 7 pp. 413-416, 2006.

[3] Y. J. Kang, Y. H. Kim, K. J. Chang, Electrical transport properties of nanoscale devices based on carbon nanotubes, *Current Applied Physics,* Vol. 9, No. 1, pp. S7-S11, 2009.

[4] R. Aghababaei, J. N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 326, No. 1-2, pp. 277-289, 2009.

[5] S. Azizi, A. M. Fattahi, J. T. Kahnamouei, Evaluating mechanical properties of nanoplatelet reinforced composites undermechanical and thermal loads, *Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 12, No. 11, pp. 4179-4185, 2015.

[6] A. M. Fattahi, S. Sahmani, Size dependency in the axial postbuckling behavior of nanopanels made of functionally graded material considering surface elasticity, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 42, No. 11, pp. 4617–4633, 2017.

[7] A. M. Fattahi, B. Safaei, Buckling analysis of CNT-reinforced beams with arbitrary boundary conditions, *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No. 10, pp. 5079–5091, 2017.

[8] S. Sahmani, A. M. Fattahi, Size-dependent nonlinear instability of shear deformable cylindrical nanopanels subjected to axial compression in thermal environments, *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No. 10, pp. 4717-4731, 2016.

[9] S. Sahmani, A. M. Fattahi, Development an efficient calibrated nonlocal plate model for nonlinear axial instability of zirconia nanosheets using molecular dynamics simulation, *Journal of Molecular Graphics and Modelling*, Vol. 75, pp. 20–31, 2017.

[10] S. Azizi, B. Safaei, A. M. Fattahi, M. Tekere, Nonlinear vibrational analysis of nanobeams embedded in an elastic medium including surface stress effects, *Advanced in Materils Since and Engineering*, pp. 1-7, 2015.

[11] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, second edition, pp. 102-145, New York, John Wiley and Sons, 2002.

[12] A. C. Eringen, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 5, pp. 425-435, 1972

[13] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics,* Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.

[14] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans ASME Journal of Basic Engineering,* Vol. 82, pp. 35-45, 1960.