



فرمول بندی اجزا محدود تیر پلیمری حافظه دار با در نظر گرفتن آثار غیر خطی هندسی

پویا فهیمی¹، مصطفی باغانی^{2*}، قادر فرجی²

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 4563-11155، baghani@ut.ac.ir

چکیده

در این مقاله با استفاده از یک مدل ساختاری ترمومکانیکی برای پلیمرهای حافظه دار یک تحلیل اجزا محدود برای تیر از جنس پلیمر حافظه دار با فرضیات هندسی تئوری فون-کارمن ارائه شده است. اهمیت ارائه تئوری فون-کارمن برای پلیمرهای حافظه دار از این جهت است که تیر می تواند چرخش های به نسبت بالا را هنگام بارگذاری تجربه کند. با توجه به این که در فرایندهای بهینه سازی و طراحی نیازمند تعداد دفعات حل متعدد هستیم، استفاده از مدل سه بعدی با توجه به زمان بالای حل آن ها گزینه مناسبی نیست. نتایج گزارش شده برای اعتبارسنجی روابط ارائه شده با حل سه بعدی اجزا محدود مقایسه شده که بیشتر توسط همین نویسندگان گزارش گردیده است. بر این اساس اثر کسر حجمی بخش سخت بر پاسخ یک تیر نازک مورد بررسی قرار گرفته و همچنین نتایج تیر اولر-برنولی گزارش شده و با حل سه بعدی و فون-کارمن مقایسه شده است. برای نمونه حدود خطای پاسخ تیر در یکی از مثال های حل شده برای تیر اولر-برنولی 27% و برای تیر فون-کارمن 1% نسبت به حل سه بعدی است. به طور کلی هر چه ضخامت تیر کمتر و یا تیر بلندتر باشد، خطای تیر اولر-برنولی بیشتر خواهد بود. مدل اجزا محدود ارائه شده می تواند جایگزین مطمئنی برای مدل سازی های سه بعدی باشد که نیازمند زمان پردازش به نسبت زیادی هستند، و همچنین برای تحلیل پارامتری مادی و هندسی این مدل قابل استفاده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 بهمن 1396

پذیرش: 15 اسفند 1396

ارائه در سایت: 24 فروردین 1397

کلید واژگان:

پلیمر حافظه دار

تئوری فون-کارمن

اجزا محدود غیرخطی

A finite element analysis for shape memory polymer beams considering geometric non-linearity

Pouya Fahimi¹, Mostafa Baghani^{1*}, Ghader Faraji^{1*}

1- School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 4563-11155, Tehran, Iran, baghani@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 07 February 2018

Accepted 06 March 2018

Available Online 13 April 2018

Keywords:

Shape memory polymer

von Kármán theory

nonlinear finite element method

ABSTRACT

In this research, using a thermomechanical constitutive model for shape memory polymers and employing the von Kármán theory, a finite element analysis of a shape memory polymer beam is presented. The importance of introducing the von Kármán theory for shape memory polymers is that the beam can have relatively high slopes during loading. Also, for optimization and designing processes we need to solve multiple problems and due to the high processing time the use of 3D model is not suitable. To validate the presented formulations, the reported results are compared with the 3D solution which was previously reported by the same authors. Accordingly, the effect of the hard segment volume on response of a thin beam has been investigated, and the results of the von Kármán beam have been reported and compared with the 3D and Euler-Bernoulli solutions. As an example, the error of the beam response in one of the solved examples is 27% for Euler-Bernoulli beam and 1% for the von Kármán solution compared to the three-dimensional solution. In general, the lower the beam thickness or the beam is longer, the Euler-Bernoulli beam error will be higher. The proposed finite element model can provide a reliable alternative response comparing to 3D modeling that requires a lot of processing time, and can be used for geometry and material parametric study.

1- مقدمه

مواد با خاصیت حافظه شکلی دسته ای از مواد هوشمند چند فازی هستند که می توانند شکل اصلی را خود پس از تغییر شکل طی یک چرخه ترمومکانیکی بازبایی نمایند. بازبایی شکل اولیه معمولاً با یک تحریک خارجی به ماده القا می شود که این تحریک می تواند به طور مثال به صورت تغییر درجه حرارت، الکتریسیته و یا مغناطیس باشد. این رفتار در فلزات، سرامیک ها و پلیمرها [1] مشاهده شده است. مواد با خاصیت حافظه شکلی کاربردهای زیادی در تکنولوژی های پیشرفته مانند صنایع هوافضا و نفت دارند [2].

تمرکز اصلی این کار بر پلیمرهای حافظه دار است که این مواد مزیت هایی

مانند قیمت کم، مصرف انرژی پایین برای برنامه ریزی شکلی، تحمل تغییر شکل های به نسبت بزرگ الاستیک، خاصیت زیست تخریب پذیری [3] و چگالی کم را دارند. پلیمرهای حافظه دار به دلیل این مشخصه ها توجه محققان زیادی را به دلیل کاربردهای بالقوه جذب کرده اند. پلیمرهای حافظه دار کاربردهای زیادی به عنوان عملگر [4,5]، سازه های هوشمند [6] و کاربرد در پزشکی [7] (به مانند رهاسازی دارو [8]) را دارا هستند. به دلیل سفتی به نسبت پایین پلیمرهای حافظه دار در دماهای بالاتر از دمای انتقال

درجه آزادی ارائه نمودند تا بتوان به مدل‌سازی عددی تیرهای به نسبت ضخیم پلیمری حافظه‌دار پرداخت.

محدودیت اساسی در فرمول‌بندی‌های مبتنی بر تئوری تیر اولر-برنولی و نیز تیموشنکو فرضیه شیب کوچک در تیر است. این فرض منجر به ایجاد معادلات دیفرانسیل خطی در هر گام بارگذاری در چرخه حافظه‌داری می‌شود. با این حال این فرض اساسی کارکرد فرمول‌بندی ارائه شده را در بسیاری از کاربردهای پلیمرهای حافظه‌دار محدود می‌کند. جهت رفع این محدودیت، در این تحقیق یک فرمول‌بندی اجزا محدود برای تیرهای از جنس پلیمر حافظه‌دار براساس تئوری فون-کارمن برای یک تیر در یک بارگذاری عام ارائه شده است. فرمول‌بندی مبتنی بر فرضیات هندسی تیر فون-کارمن اجازه می‌دهد که تیر قابلیت تجربه چرخش‌های به نسبت بالا را در هنگام بارگذاری داشته باشد. مدل ارائه شده در این تحقیق برای شبیه‌سازی، بهینه‌سازی و تحلیل پارامتری سازه‌های ساخته شده و یا تقویت شده با پلیمر حافظه‌دار کاربرد دارد که در مقایسه با حل سه‌بعدی به هزینه محاسباتی و زمان پردازش بسیار کمتری نیازمند است. عامل هندسی یکی از عوامل غیرخطی‌کننده سیستم معادلات حاکمه است که این مشخصه برای سیستم‌های با جابه‌جایی‌های به نسبت بزرگ بسیار با اهمیت است. اعمال تئوری فون-کارمن [26] در واقع در نظر گرفتن همین عامل غیرخطی هندسی است. هنگامی که یک تیر نازک تحت خیز کوچک قرار می‌گیرد، فرض چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی هندسی قابل قبول است. در حالی که برای خیزها و چرخش‌های به نسبت بزرگ، سطح میانی تیر شروع به کش آمدن می‌کند و حرکت درون صفحه‌ای لبه‌های تیر اهمیت پیدا می‌کند که در نتیجه آن باید از تئوری دیگری مانند فون-کارمن استفاده کرد. برای نمونه در صورت خم کردن نسبتاً زیاد یک تیر پلیمری حافظه‌دار تئوری اولر-برنولی به هیچ وجه پاسخ مناسبی گزارش نمی‌نماید و نیاز به یک حل با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مادی و هندسی به صورت هم‌زمان داریم. به همین منظور در این مقاله با استفاده از مدل ساختاری ارائه شده توسط باغانی و همکاران [17] برای پلیمرهای حافظه‌دار و همچنین در نظر گرفتن تئوری فون-کارمن برای رفتار غیرخطی هندسی، فرمول‌بندی اجزا محدود المان تیری بر این اساس ارائه شده است.

ساختار این مقاله به این صورت است که در ابتدا به معرفی مختصر فرم نرخی مدل ساختاری ترمومکانیکی سه‌بعدی برای پیش‌بینی رفتار پلیمرهای حافظه‌دار پرداخته شده است. سپس مدل ساختاری سه‌بعدی به حالت تک محوره کاهش داده شده است. در ادامه فرضیات هندسی مورد نیاز برای فرمول‌بندی تیر فون-کارمن ارائه شده است. در بخش بعدی جزییات فرمول‌بندی المان معرفی شده بر مبنای روش اجزا محدود آورده می‌شود. در بخش بعد نتایج حل اجزا محدود برای یک تیر نازک از جنس پلیمر حافظه‌دار به کمک فرمول‌بندی این مقاله ارائه شده و نتایج با حل سه‌بعدی اجزا محدود و حل تیر اولر-برنولی [24] مقایسه و صحت سنجی شده است. همچنین در این بخش اثر پارامترهای مختلف مادی و نیز میزان بارگذاری بر نتایج بحث و بررسی می‌شود. در انتها نیز خلاصه‌ای از کارهای انجام شده و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

2- مروری بر مدل ساختاری پلیمر حافظه‌دار

باغانی و همکاران [18,17] یک مدل ساختاری برای رفتار ترمومکانیکی پلیمر حافظه‌دار در ناحیه کرنش‌های کوچک و شرایط بارگذاری وابسته به زمان ارائه دادند که در این پژوهش نیز از این مدل ساختاری برای به دست آوردن پاسخ

شیشه‌ای، سازه‌های ساخته شده از این مواد معمولاً با روش‌هایی مانند استفاده در کامپوزیت‌ها و یا طراحی پارامترهای هندسی سازه‌ای تقویت می‌شوند و به عنوان نمونه در بال‌های تغییر شکل‌پذیر [9] استفاده می‌شوند.

پلیمرهای حافظه‌دار توسط تعداد زیادی از محققان مورد بررسی قرار گرفته‌اند [11,10]. نخستین بار توبوشی و همکاران [12] به بررسی تک محوره رفتار ترمومکانیکی پلیمرهای حافظه‌دار در دامنه کرنش‌های کوچک به صورت آزمایشگاهی پرداختند و براساس این مطالعات یک مدل ساختاری ارائه کردند که این مدل با اضافه کردن اثرات دمایی دوباره توسط توبوشی و همکاران [13] بهبود داده شد، همچنین آن‌ها آزمایش خمش سه نقطه‌ای را بر پلیمرهای حافظه‌دار انجام دادند که در این کار اثر زمان نگه داشتن پلیمر حافظه‌دار در شکل موقت مورد بررسی قرار گرفت [14].

لیو و همکاران [15] یک مدل ساختاری در تغییر شکل‌های کوچک برای پلیمرهای حافظه‌دار معرفی کردند که براساس آن ماده از دو فاز شیشه‌ای و لاستیکی تشکیل شده است و با توجه به تغییر دما، کسر حجمی این دو فاز تغییر می‌نماید. آن‌ها کرنش را شامل سه قسمت دمایی، الاستیک و کرنش ذخیره شده تعریف کردند. چن و لاگوداس [10] این مدل را برای تغییر شکل‌های بزرگ و در رژیم تک‌محوره توسعه دادند.

باغانی و همکاران [16-18] با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک به فرم نامساوی کلازیوس-دوهم، یک مدل ساختاری سه‌بعدی برای پیش‌بینی رفتار پلیمرهای حافظه‌دار در تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ ارائه کردند. آن‌ها رفتار چند سازه مختلف از جنس پلیمرهای حافظه‌دار از جمله استنت و سازه‌های سه‌بعدی را با استفاده از روش اجزا محدود تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی نمودند. پارک و همکاران [19] نیز براساس مدل دوفازی (شیشه‌ای و لاستیکی) و معرفی مفهومی به نام کرنش حافظه‌شکلی برای پلیمرهای حافظه‌دار یک مدل سه‌بعدی ارائه کردند. آن‌ها پیش‌بینی‌های مدل خود را با آزمایش تجربی پانچ کردن یک صفحه پلیمری با یک توپ صلب مقایسه کردند.

بررسی رفتار خمشی پلیمر حافظه‌دار در چندین تحقیق مختلف صورت گرفته است. باغانی و همکاران [20] با استفاده از مدل سه‌بعدی ارائه شده در [17] یک حل تحلیلی برای تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار براساس تئوری تیر اولر-برنولی ارائه کردند. آن‌ها مدل خود را برای دو مسأله تیر یک‌سرگیردار و خمش سه‌نقطه‌ای تیر بررسی کردند. گوش و همکاران [21] یک حل اجزا محدود برای تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار براساس تئوری تیر اولر-برنولی ارائه کردند. آن‌ها از یک پیش‌بینی‌کننده الاستیک و اصلاح‌کننده غیرالاستیک برای پیش‌بینی رفتار پلیمر حافظه‌دار در شرایط بارگذاری مختلف استفاده کردند. این نکته قابل ذکر است که اهمیت کار آن‌ها ارائه فرمول‌بندی المان تیر چهار درجه آزادی برای حل اجزا محدود، برای تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار بود. تاکدا و همکاران [22] تیر کامپوزیتی شامل پلیمرهای حافظه‌دار را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای یک تیر کامپوزیتی حل عددی ارائه کردند و پاسخ‌های خود را با آزمایش‌های تجربی مقایسه کردند، همچنین باغانی و طاهری [23] مدلی تحلیلی را برای تیرهای کامپوزیتی پلیمری حافظه‌دار توسعه دادند. باغانی و همکاران [24] براساس مدل ساختاری ارائه شده در [17] با استفاده از تئوری تیر اولر-برنولی یک المان تیر چهار درجه آزادی برای حل اجزا محدود ارائه دادند. اسکندری و همکاران [25] با در نظر گرفتن آثار برش در تیر به توسعه مدل [24] با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو پرداختند و یک فرمول‌بندی اجزا محدود با 6

ε^{ir} , ε^{ig} , ε^{ih} و ε^{is} متغیرهای داخلی هستند؛ بنابراین قوانین رشد در قالب ترمودینامیک محیط‌های پیوسته برای متغیرهای داخلی باید معرفی شوند. با ارضای قانون دوم ترمودینامیک در شکل نابرابری کلازیوس-دوهم به صورت رابطه (8) داریم.

$$\sigma = \frac{\partial \psi_r^{eq}}{\partial \varepsilon^r} + \frac{\partial \psi_r^{neq}}{\partial \varepsilon^r} = \frac{\partial \psi_g^{eq}}{\partial \varepsilon^g} + \frac{\partial \psi_g^{neq}}{\partial \varepsilon^g} = \frac{\partial \psi_h^{eq}}{\partial \varepsilon^h} + \frac{\partial \psi_h^{neq}}{\partial \varepsilon^h} \quad (8)$$

علاوه بر این مطابق با رفتار ویسکوالاستیک پلیمرها، روابط رشد ارائه شده در رابطه (9)، شرایط کافی برای ارضای نابرابری کلازیوس-دوهم است [27].

$$\varepsilon^{ir} = \frac{1}{\eta_r} \frac{\partial \psi_r^{neq}}{\partial \varepsilon^r}, \quad \varepsilon^{ig} = \frac{1}{\eta_g} \frac{\partial \psi_g^{neq}}{\partial \varepsilon^g}, \quad \varepsilon^{ih} = \frac{1}{\eta_h} \frac{\partial \psi_h^{neq}}{\partial \varepsilon^h}, \quad \varepsilon^{is} = \frac{1}{\eta_i} \sigma \quad (9)$$

که در آن η_r , η_g , η_h و η_i به ترتیب ضرایب ویسکوزیته بخش‌های لاستیکی، شیشه‌ای، بخش سخت و بخش برگشتناپذیر هستند.

3- استخراج معادلات المان تیر فون-کارمن پلیمری حافظه‌دار برای در نظر گرفتن رفتار غیرخطی هندسی

در این بخش انرژی‌های کرنشی الاستیک تعادلی و غیرتعادلی به صورت $\psi_\beta^{neq}(\varepsilon^\beta) = 1/2 \varepsilon^\beta : \mathbb{K}_\beta^{neq} : \varepsilon^\beta$ و $\psi_\beta^{eq}(\varepsilon^\beta) = 1/2 \varepsilon^\beta : \mathbb{K}_\beta^{eq} : \varepsilon^\beta$ در نظر گرفته شده است که در آن $(\beta = r, g, h)$. همچنین $\mathbb{K}_\beta^{neq}$ و $\mathbb{K}_\beta^{eq}$ تانسورهای الاستیک مرتبه چهار برای هر فاز است. با استفاده از روند کلی گفته شده توسط ردی [28] فرضیات پایه‌ای تئوری تیر فون-کارمن براساس فرض اساسی تئوری اولر-برنولی مبتنی بر متعامد ماندن سطح مقطع پس از تغییر شکل به کار گرفته می‌شود که در آن خمش تیرهای با کرنش‌های کوچک، ولی دوران‌های به نسبت بزرگ از میدان جابه‌جایی رابطه (10) به دست می‌آید.

$$u_1 = u_0(x) - z \frac{dw_0}{dx}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w_0(x) \quad (10)$$

که (u_1, u_2, u_3) جابه‌جایی‌های نقطه‌ای مادی در مکان (x, y, z) هستند، u_0 و w_0 به ترتیب جابه‌جایی‌های محوری (روی محور x) و عرضی (روی محور z) مرکز هندسی سطح مقطع هستند، همچنین یک فرض اضافی لحاظ می‌شود: بارگذاری عرضی تنها باعث به وجود آمدن جابه‌جایی عرضی خواهد شد و کرنش برشی ایجاد نخواهد شد. درجات آزادی این تئوری بر شکل 1 نشان داده شده است. برای استخراج کرنش‌ها از رابطه کرنش-تغییر مکان غیرخطی گرین استفاده می‌شود. این رابطه به صورت کلی در رابطه (11) نشان داده شده است.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (11)$$

در این رابطه i و j اندیس‌های آزاد و m اندیس جمع است. با استفاده از رابطه (10) و ساده‌سازی‌های ریاضی، رابطه کرنش محوری غیرخطی مطابق رابطه (12) به دست می‌آید.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (12)$$

به دلیل وجود این کرنش غیرخطی در روابط، معادلات حاکم بر رفتار سازه ناشی از این تئوری و به دنبال آن ماتریس‌های به دست آمده در توسعه فرمول‌بندی المان مورد نظر در اجزا محدود نیز غیرخطی خواهند بود. از آنجایی که هدف استخراج المان تیر فون-کارمن برای پلیمر حافظه‌دار است، مدل ساختاری ارائه شده در بخش پیشین باید برای حالتی که کرنش محوری

ترموکانیکی پلیمر حافظه‌دار استفاده شده است. این مدل ساختاری در ادامه به اختصار معرفی شده است. جزئیات این مدل ساختاری در [16-18] گزارش شده است. همان‌گونه که در [17, 18] گزارش شده فرض شده است که فازهای شیشه‌ای و لاستیکی این قابلیت را دارند که تحت یک تحریک دمایی خارجی به یکدیگر تبدیل شوند. طبق این مدل کرنش کل طبق رابطه (1) به چهار بخش تجزیه می‌شود.

$$\varepsilon = \phi_p \varepsilon^p + \phi_h \varepsilon^h + \varepsilon^i + \varepsilon^T \quad (1)$$

در آن اندیس‌های p و h به ترتیب مربوط به بخش حافظه‌داری و فاز سخت است، همچنین ε^p و ε^T به ترتیب نشان‌دهنده کرنش‌های برگشتناپذیر، کرنش در بخش پلیمری حافظه‌دار و کرنش حرارتی است. ϕ_p و ϕ_h به ترتیب کسر حجمی بخش‌های حافظه‌داری و سخت را نشان می‌دهند ($\phi_h + \phi_p = 1$). این نکته قابل بیان است که ϕ_p و ϕ_h پارامترهای ثابت هستند، همچنین کرنش در بخش حافظه‌داری مطابق رابطه (2) به سه بخش تقسیم می‌شود.

$$\varepsilon^p = \varphi_r \varepsilon^r + \varphi_g \varepsilon^g + \varepsilon^{is} \quad (2)$$

در این معادله اندیس‌های r و g به ترتیب نشان‌دهنده فازهای لاستیکی و شیشه‌ای است، همچنین φ_r و φ_g که توابی وابسته به دماست به ترتیب کسر حجمی برای فازهای لاستیکی و شیشه‌ای هستند ($\varphi_r + \varphi_g = 1$) ε^{is} نشان‌دهنده کرنش ذخیره شده در ماده است و تغییرات آن به شکل رابطه (3) نشان داده می‌شود.

$$\varepsilon^{is} = \dot{\varphi}_g \left(k_1 \varepsilon^r + k_2 \frac{\varepsilon^{is}}{\varphi_g} \right); \quad \begin{cases} k_1 = 1, k_2 = 0; & \dot{T} < 0 \\ k_1 = 0, k_2 = 1; & \dot{T} > 0 \\ k_1 = 0, k_2 = 0; & \dot{T} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

علامت دات نشان‌دهنده مشتق زمانی و T نشان‌دهنده دماست. تجزیه‌های دیگری نیز به منظور ارزیابی رفتار ویسکوالاستیک پلیمر حافظه‌دار فرض می‌شود. کرنش فازهای شیشه‌ای، لاستیکی و فاز سخت در محدوده کرنش‌های کوچک مطابق رابطه (4) تجزیه می‌شوند.

$$\varepsilon^\beta = \varepsilon^{e\beta} + \varepsilon^{i\beta} \quad (4)$$

در آن بالانویس‌های $e\beta$ و $i\beta$ ($\beta = r, g, h$) به ترتیب مربوط به بخش‌های الاستیک و ویسکوالاستیک کرنش در همه فازهاست. با استفاده از قانون مخلوط‌ها، تابع چگالی انرژی آزاد Ψ برای یک آمورف تقویت شده پلیمری حافظه‌دار مطابق رابطه (5) معرفی می‌شود.

$$\Psi(\varepsilon, T, \phi_p, \phi_h, \varphi_g, \varepsilon^{er}, \varepsilon^{eg}, \varepsilon^{eh}, \varepsilon^r, \varepsilon^g, \varepsilon^h, \varepsilon^i) = \phi_h \Psi_h(\varepsilon^h, \varepsilon^{eh}) + \Psi_T(T) + \phi_p [\varphi_r \Psi_r(\varepsilon^r, \varepsilon^{er}) + \varphi_g \Psi_g(\varepsilon^g, \varepsilon^{eg})] + \Psi_\lambda(\varepsilon, T, \phi_p, \phi_h, \varphi_g, \varepsilon^{er}, \varepsilon^{eg}, \varepsilon^{eh}, \varepsilon^r, \varepsilon^g, \varepsilon^h, \varepsilon^i) \quad (5)$$

در این رابطه Ψ_r ، Ψ_g و Ψ_h به ترتیب نشان‌دهنده توابع چگالی انرژی آزاد هلمهولتز برای فازهای لاستیکی، شیشه‌ای و فاز سخت است، همچنین جمله Ψ_λ به صورت رابطه (6) به انرژی آزاد اضافه می‌شود.

$$\Psi_\lambda(\varepsilon, T, \phi_p, \phi_h, \varphi_g, \varepsilon^{er}, \varepsilon^{eg}, \varepsilon^{eh}, \varepsilon^r, \varepsilon^g, \varepsilon^h, \varepsilon^i) = \lambda: [\varepsilon - \phi_p(\varphi_r \varepsilon^r + \varphi_g \varepsilon^g + \varepsilon^{is}) - \phi_h \varepsilon^h - \varepsilon^i - \varepsilon^T] \quad (6)$$

که در آن λ تانسور ضریب لاگرانژ است و همچنین عبارت‌های رابطه (7) نیز تعریف شده‌اند.

$$\Psi_\beta(\varepsilon^\beta, \varepsilon^{e\beta}) = \psi_\beta^{eq}(\varepsilon^\beta) + \psi_\beta^{neq}(\varepsilon^\beta) \quad (7)$$

که در آن بالانویس‌های eq و neq به ترتیب نشان‌دهنده بخش‌های تعادلی و غیرتعادلی (وابسته به زمان) $\Psi_\beta(\varepsilon^\beta, \varepsilon^{e\beta})$ است. در این مدل سازی φ_g

$$\begin{aligned}
A &= [\varepsilon_n^{is} + k_3(b_h \varepsilon_n^{ih} - b_g \varepsilon_n^{ig} \varphi) + b_r \varepsilon_n^{ir}(k_3(\varphi - 1) - k_4)] \\
B &= (\varepsilon_n^i - b_h \varepsilon_n^{ih} - \varepsilon^m) k_3 \\
C &= c_h(b_g + 1) b_g \varepsilon_n^{ig} E_g \phi_p \varphi \\
D &= (1 - \phi_p)(b_h + 1) b_h \varepsilon_n^{ih} E_h c_g \\
E &= (k_3 + k_4 - k_3 \varphi)(b_r + 1) b_r \phi_p \varepsilon_n^{ir} E_r c_g c_h \\
F &= ((1 + b_g) \phi_p \varphi + b_i c_g) c_h + (b_h + 1)(1 - \phi_p) c_g \\
G &= (k_3(1 - \varphi) + k_4)(b_r + 1) \phi_p c_g c_h
\end{aligned} \quad (17)$$

با بازنویسی رابطه (16) برحسب جابه‌جایی عرضی، رابطه (18) را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \chi_1 \varepsilon^m + \chi_2 = \chi_1 \left(u'_0 + \frac{1}{2} w_0'^2 - z w''_0 \right) + \chi_{2z} z \\
&= z(-\chi_1 w''_0 + \chi_{2z}) + \chi_1 \left(u'_0 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)
\end{aligned} \quad (18)$$

علامت پریم نشان‌دهنده مشتق نسبت به متغیر x است. با محاسبه گشتاور حول محور y و نیروی محوری روابط (20,19) را داریم.

$$\begin{aligned}
N &= \int_A \sigma dA \\
&= \int_A \left(z(-\chi_1 w''_0 + \chi_{2z}) + \chi_1 \left(u'_0 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right) \right) dA \\
&= \chi_1 \left(u'_0 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right) A
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
M &= \int_A \sigma z dA = \\
&= \int_A \left(z^2(-\chi_1 w''_0 + \chi_{2z}) + z \chi_1 \left(u'_0 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right) \right) dA \\
&= (\chi_1 w''_0 - \chi_{2z}) I
\end{aligned} \quad (20)$$

در آن M و N به ترتیب نشان‌دهنده ممان اینرسی مقطع، گشتاور حول محور y و نیروی محوری است. همچنین A نشان‌دهنده مساحت سطح مقطع تیر است. روابط (19,18) به صورت روابط (22,21) بازنویسی می‌شوند.

$$N = \psi_1 u'_0 + \frac{\psi_2}{2} w_0'^2, \quad \psi_1 = \chi_1 A \quad (21)$$

$$M = \psi_2 w_0'' + \psi_3, \quad \psi_2 = -\chi_1 I, \quad \psi_3 = +\chi_{2z} I \quad (22)$$

در این حالت نیز با استفاده از اصل کار مجازی که در رابطه (23) نمایش داده شده است، معادلات حاکم استخراج می‌شوند. شماتیک المان تیر با درجات آزادی تعریف شده مربوطه در شکل 2 به صورت رابطه (23) نمایش داده شده است.

$$\delta W^e = \delta W^E + \delta W^I = 0 \quad (23)$$

اصل کار مجازی برای تئوری تیر فون-کارمن به صورت رابطه (24) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
\delta W^e &= \int_A \int_0^{l^e} \sigma \varepsilon dx dA - \int_0^{l^e} q(x) \delta w_0 dx \\
&\quad - \int_0^{l^e} f(x) \delta u_0 dx - \sum_{i=1}^6 Q_i \delta \Omega_i
\end{aligned} \quad (24)$$

l^e نشان‌دهنده طول المان، $q(x)$ نشان‌دهنده بارگذاری گسترده عرضی بر واحد طول تیر، $f(x)$ نشان‌دهنده بارگذاری گسترده محوری بر واحد طول تیر، Q_i ها نشان‌دهنده نیروها و گشتاورها متمرکز در گره‌ها و $\delta \Omega_i$ نشان‌دهنده جابه‌جایی‌های مجازی گره‌ای المان است؛ بنابراین با توجه به

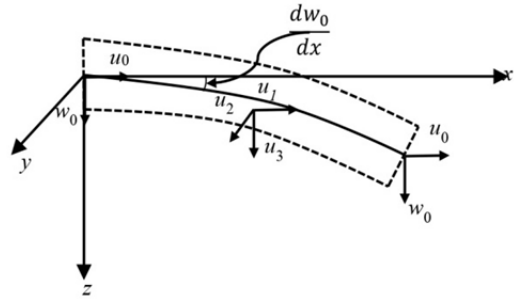


Fig. 1 Schematics of degree of freedom for von Kármán beam theory.

شکل 1 شماتیک درجات آزادی بر مبنای تئوری تیر فون-کارمن

(در راستای محور تیر) وجود دارد، بازنویسی شود. بدین منظور نیاز به گسسته‌سازی نسبت به زمان مدل ساختاری پلیمر حافظه‌دار وجود دارد؛ بنابراین بازه زمانی مورد نظر $[0, t]$ به گام‌های زمانی کوچک تقسیم می‌شود و مسأله غیرخطی با فرض $t_n > t_{n+1}$ بر بازه در نظر گرفته شده $[t_n, t_{n+1}]$ حل می‌شود. برای سادگی، کمیت‌های محاسبه شده در زمان t_n با اندیس n و کمیت‌های محاسبه شده در زمان t_{n+1} بدون اندیس نشان داده می‌شوند. گام زمانی با Δt نشان داده می‌شود. با دانستن پاسخ کرنش ε_n در زمان t_n و همچنین کرنش ε در زمان t_{n+1} ، تنش و متغیرهای داخلی باید با استفاده از جابه‌جایی‌های گام زمان قبلی بروزرسانی شوند؛ بنابراین شکل ضمنی گسسته شده زمانی برای مدل ساختاری پلیمر حافظه‌دار به ویژه رابطه (13) چنین به دست می‌آید.

$$\varepsilon^{is} = (1 - k_2 \varphi^{-1} \Delta \varphi)^{-1} \varepsilon_n^{is} k_1 \Delta \varphi \varepsilon^r \quad (13)$$

علاوه بر این با گسسته‌سازی رابطه (9) و بازنویسی معادله (13)، روابط (15,14) به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{i\beta} &= c_\beta^{-1} (\sigma + E_\beta b_\beta \varepsilon_n^{i\beta}); \quad \beta = r, g, h \\
\varepsilon^i &= \varepsilon_n^i + b_i \\
\varepsilon^{is} &= k_3^{-1} \left(\varepsilon_n^{is} + k_4 ((b_r + 1) \varepsilon^{ir} - b_r \varepsilon_n^{ir}) \right) \\
&\quad \begin{cases} k_3 = 1 - k_2 \varphi^{-1} \Delta \varphi \\ k_4 = k_1 \Delta \varphi \end{cases}
\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
b_\beta &= \frac{\eta_\beta}{\Delta t E_\beta^{\text{neq}}}, \quad b_i = \frac{\Delta t}{\eta_\beta}, \\
c_\beta &= E_\beta b_\beta + E_\beta^{\text{eq}}, \quad E_\beta = E_\beta^{\text{eq}} + E_\beta^{\text{neq}}, \\
\beta &= r, g, h
\end{aligned} \quad (15)$$

معادلات (15-13) نحوه به‌روزرسانی متغیرهای داخلی در هر Δt را نشان می‌دهند؛ بنابراین بعد از ساده‌سازی و مرتب‌سازی‌های ریاضی، رابطه تنش محوری به‌روزرسانی شده، به صورت رابطه (16) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \chi_1 \varepsilon^m + \chi_2 \\
\varepsilon^m &= \varepsilon - \varepsilon^T
\end{aligned} \quad (16)$$

که در آن ε^m نشان‌دهنده بخش مکانیکی کرنش کل $\varepsilon - \varepsilon^T$ است و پارامترهای χ_1 و χ_2 به صورت رابطه (17) تعریف می‌شوند [24].

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{c_r c_g c_h k_3}{\chi_3} \\ \chi_2 = \frac{-1}{\chi_3} [(A \phi_p + B) c_r c_g c_h + (C + D) c_r k_3 + E] = \chi_{2z} z \\ \chi_3 = F k_3 c_r + G \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^6 (a + b + c + d + e) \delta \Omega_i = 0 \quad (31)$$

در آن ضرایب a, b, c, d و e به صورت رابطه (32) گزارش شده است.

$$\begin{aligned} a &= - \int_0^{l^e} \frac{d^2 N_i}{dx^2} [\psi_2 w_0'' + \psi_3] dx \\ b &= \int_0^{l^e} \left(w_0' \frac{dN_i}{dx} \right) \left[\psi_1 u_0' + \frac{\psi_1}{2} w_0'^2 \right] dx \\ c &= \int_0^{l^e} \left(\frac{d\bar{N}_i}{dx} \right) \left[\psi_1 u_0' + \frac{\psi_1}{2} w_0'^2 \right] dx \\ d &= - \int_0^{l^e} q(x) N_i dx \\ e &= - \int_0^{l^e} f(x) \bar{N}_i dx - Q_i \end{aligned} \quad (32)$$

با فرض روابط (29,28) برای w_0 و u_0 رابطه (31) به صورت رابطه (33) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} & - \int_0^{l^e} \left[\frac{d^2 N_i}{dx^2} \left(\psi_1 \sum_{j=1}^4 \frac{d^2 N_j}{dx^2} \Omega_j + \psi_2 \right) \right] dx \\ & + \int_0^{l^e} \left(\frac{dN_i}{dx} \sum_{j=1}^6 \frac{dN_j}{dx} \Omega_j \right) \left[\psi_1 u_0' + \frac{\psi_1}{2} w_0'^2 \right] dx \\ & + \int_0^{l^e} \left(\frac{d\bar{N}_i}{dx} \right) \left[\psi_1 \sum_{j=1}^6 \frac{d\bar{N}_j}{dx} \Omega_j + \frac{\psi_1}{2} w_0'^2 \right] dx \\ & - \int_0^{l^e} q(x) N_i dx - \int_0^{l^e} f(x) \bar{N}_i dx - Q_i = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

جهت ارائه شکل ماتریسی برای سفتی (غیرخطی) المان و بردارهای نیرو، رابطه (33) در نهایت به صورت رابطه (34) بازنویسی می‌شود.

$$[K_{ij}] \{\Omega_j\} = \{F_i\} \quad (34)$$

که روابط (36,35) را داریم.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\psi_2 \int_0^{l^e} \left(\frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} \right) dx \\ & + \psi_1 \int_0^{l^e} \left(\frac{d\bar{N}_i}{dx} \frac{d\bar{N}_j}{dx} \right) dx \\ & + \int_0^{l^e} \left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right) \left[\psi_1 u_0' + \frac{\psi_1}{2} w_0'^2 \right] dx \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} F_i &= \psi_3 \int_0^{l^e} \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx - \frac{\psi_1}{2} \int_0^{l^e} \frac{d\bar{N}_i}{dx} w_0'^2 dx \\ & + \int_0^{l^e} q(x) N_i dx + \int_0^{l^e} f(x) \bar{N}_i dx + Q_i \end{aligned} \quad (36)$$

و در انتها نیز توابع شکل N_i و $\bar{N}_i$ به صورت روابط (38,37) بیان می‌شوند.

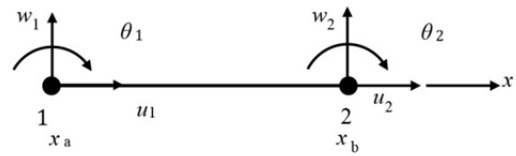


Fig. 2 Schematics of von Kármán beam element and its degrees of freedom.

شکل 2 شماتیک المان تیر فون-کارمن با درجات آزادی مربوطه

تعریف ارائه شده در رابطه (12)، رابطه کار مجازی به صورت رابطه (25) خواهد شد.

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= \frac{d(\delta u_0)}{dx} + w_0' \frac{d(\delta w_0)}{dx} - z \frac{d^2(\delta w_0)}{dx^2} \Rightarrow \\ \int_A \int_0^{l^e} \sigma \delta \varepsilon dx dA &= - \int_0^{l^e} \frac{d^2(\delta w_0)}{dx^2} \int_A \sigma z dA dx \\ &+ \int_0^{l^e} \left(\frac{d(\delta u_0)}{dx} + w_0' \frac{d(\delta w_0)}{dx} \right) \int_A \sigma dA dx \end{aligned} \quad (25)$$

رابطه (26) با جای‌گذاری رابطه (25) در رابطه (24) داریم:

$$\begin{aligned} \delta W^e &= - \int_0^{l^e} \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} M(x) dx \\ &+ \int_0^{l^e} \left(\frac{d(\delta u_0)}{dx} + w_0' \frac{d(\delta w_0)}{dx} \right) N dx \\ &- \int_0^{l^e} q(x) \delta w_0 dx - \int_0^{l^e} f(x) \delta u_0 dx - \sum_{i=1}^6 Q_i \delta \Omega_i = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

با توجه به روابط (26,22,21) می‌توان رابطه (27) را نوشت.

$$\begin{aligned} & - \int_0^{l^e} \frac{d^2(\delta w_0)}{dx^2} [\psi_2 w_0'' + \psi_3] dx \\ & + \int_0^{l^e} \left(\frac{d(\delta u_0)}{dx} + w_0' \frac{d(\delta w_0)}{dx} \right) \left[\psi_1 u_0' + \frac{\psi_1}{2} w_0'^2 \right] dx \\ & - \int_0^{l^e} q(x) \delta w_0 dx - \int_0^{l^e} f(x) \delta u_0 dx - \sum_{i=1}^6 Q_i \delta \Omega_i = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

با استفاده از توابع درون‌یابی هرمیتی درجه سوم (N_i) و توابع شکل خطی ($\bar{N}_i$) (در ادامه بیان خواهند شد)، جابه‌جایی عرضی و محوری تیر برحسب شش درجه آزادی Ω_i به صورت روابط (29,28) تقریب زده می‌شود.

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i \Omega_i ; \quad \delta w = \sum_{i=1}^4 N_i \delta \Omega_i \quad (28)$$

$$u_0 = \sum_{i=1}^6 \bar{N}_i \Omega_i ; \quad \delta u_0 = \sum_{i=1}^6 \bar{N}_i \delta \Omega_i \quad (29)$$

این درجات آزادی عبارت از رابطه (30) است.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= u_0(0), \quad \Omega_2 = w_0(0), \\ \Omega_3 &= -\frac{dw_0}{dx} \Big|_{x=0}, \quad \Omega_4 = u_0(l^e), \\ \Omega_5 &= w_0(l^e), \quad \Omega_6 = -\frac{dw_0}{dx} \Big|_{x=l^e} \end{aligned} \quad (30)$$

با جای‌گذاری روابط (29,28) در معادله (27) و ساده و مرتب سازی‌های ریاضیاتی به صورت رابطه (31) خواهیم داشت.

همچنین رابطه (45) را به صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned} T_{ij}^{\alpha\beta} &= \left(\frac{\partial R_i^\alpha}{\partial \Delta_j^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \Delta_j^\beta} \left(\sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^4 K_{ip}^{\alpha\gamma} \Delta_p^\gamma - F_i^\alpha \right) \\ &= \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^4 \left(K_{ip}^{\alpha\gamma} \frac{\partial \Delta_p^\gamma}{\partial \Delta_j^\beta} + \frac{\partial K_{ip}^{\alpha\gamma}}{\partial \Delta_j^\beta} \Delta_p^\gamma \right) \\ &= K_{ij}^{\alpha\beta} + \sum_{p=1}^2 \frac{\partial}{\partial \Delta_j^\beta} (K_{ip}^{\alpha 1}) u_p + \sum_{p=1}^4 \frac{\partial}{\partial \Delta_j^\beta} (K_{ip}^{\alpha 2}) \bar{\Delta}_p \end{aligned} \quad (45)$$

فلوچارت حل برای مدل ارائه شده برای تیر فون-کارمن از جنس پلیمر حافظه‌دار در شکل 3 ارائه شده است.

5- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی با استفاده از فرمول‌بندی توسعه داده شده در این مقاله برای المان تئوری فون-کارمن برای تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار ارائه می‌شوند. این نتایج به کمک حل عددی اجزا محدود بر معادلات مربوط به این تئوری که در بخش پیشین استخراج شدند، به دست می‌آیند. از آنجایی که در بیشتر آزمون‌ها و کاربردهای تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار، تیر را به صورت یک سرگیردار در نظر می‌گیرند، در این پژوهش نیز شرایط مرزی تیر به صورت یک سرگیردار در نظر گرفته می‌شود و نیروی متمرکز به نقطه وسط تیر وارد می‌شود این حالت به دلیل ایجاد دوران به نسبت زیاد در نظر گرفته می‌شود. شماتیک تیر در شکل 4 نشان داده شده است و همچنین ابعاد سطح مقطع در این شکل نمایش داده شده است و طول 15 سانتی‌متر نیز برای تیر در نظر گرفته می‌شود. مشخصات ماده نیز به طور کامل در جدول 1 نشان داده شده است و $\phi_h = 0.2$ به عنوان پایه نتایج در نظر گرفته می‌شود مگر در جایی که خلاف آن بیان شود. مشخصات این نیرو و تغییرات زمانی آن در شکل 5 نشان داده شده، همچنین تغییرات زمانی اعمالی در همین شکل نشان داده شده است. در این بخش نیز کل تاریخچه زمانی مسئله به این ترتیب خلاصه می‌شود که از زمان صفر تا 10 دقیقه بارگذاری مکانیکی در دمای T_h (بارگذاری) انجام می‌گیرد، سپس از دقیقه 10 تا 300 بار مکانیکی و دما ثابت نگه داشته می‌شود (استراحت) در ادامه از دقیقه 300 تا 1200 خنک کردن تا دمای T_l در بار مکانیکی ثابت انجام می‌گیرد (سرد کردن) و در انتها از دقیقه 1200 تا 1500 گرم کردن و رسیدن مجدد به دمای T_h با حذف بار مکانیکی انجام می‌پذیرد (باربرداری و گرمادهی).

جدول 1 خواص پلیمر حافظه‌دار گزارش شده توسط باغانی و همکاران [17]
Table 1 Material parameters reported by Baghani et al. [17]

واحد	مقدار	پارامترهای ماده
[MPa]	1.3, 15, 70000, 0.2, 247, 1000	$E_r^{eq}, E_g^{eq}, E_h^{eq}, E_r^{neq}, E_g^{neq}, E_h^{neq}$
[MPaMin]	$5 \cdot 30 \times 10^6, 30 \times 10^9$	η_r, η_g, η_h
[-]	0.49, 0.3, 0.3	ν_r, ν_g, ν_h
[K]	296, 344, 353	T_l, T_g, T_h
[-]	$(0.5542 \times 10^{-3} T - 0.01083456 - 7 \times 10^{-7} T^2) I$	ε^T
[-]	$1 - \frac{1}{1 + \exp(-0.66(T - T_g))}$	ϕ_g
[-]	0.4	ϕ_h

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, \quad N_2 = \frac{2x^3 - 3x^2 l^e + l^{e3}}{l^{e3}}, \\ N_3 &= \frac{x^3 l^e - 2x^2 l^{e2} + x l^{e3}}{l^{e3}}, \quad N_4 = 0, \\ N_5 &= \frac{-2x^3 + 3x^2 l^e}{l^{e3}}, \quad N_6 = \frac{x^3 l^e - x^2 l^{e2}}{l^{e3}} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\bar{N}_1 = 1 - \frac{x}{l^e}, \quad \bar{N}_2 = 0, \quad \bar{N}_3 = 0, \quad \bar{N}_4 = \frac{x}{l^e}, \quad \bar{N}_5 = 0, \quad \bar{N}_6 = 0 \quad (38)$$

با توجه به روابط (36,35)، ماتریس‌های $[K]$ و $[F]$ در ترم‌های خود پاسخی از حل معادله نیاز دارند و بنابراین این ماتریس‌ها غیرخطی است. این ماتریس‌ها با استفاده از روش‌های حل بازگشتی¹ باید به روزرسانی شوند. به این صورت که پاسخ‌های موجود در ماتریس‌ها به کمک پاسخ گام پیشین جای‌گذاری می‌شوند و ماتریس‌ها در گام جدید به دست می‌آیند و سپس با حل معادله ماتریسی پاسخ گام جدید نیز به دست خواهد آمد. بدیهی است که با توجه پارامترهای حل غیرخطی، خطایی در روند حل به وجود می‌آید که برای رسیدن به پاسخ‌های مطلوب، کمینه کردن این خطا، از هدف‌های مهم حل بازگشتی است. برای حل بازگشتی از روش نیوتن رافسون استفاده شده که جزئیات بیشتر این روند در بخش بعدی بررسی و گزارش شده است.

4- روش حل بازگشتی نیوتن-رافسون

در فرآیند حل این روش، دستگاه روابط (13)، خطی‌سازی شده و به شکل رابطه (39) تشکیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} [T(\{\Delta\}^{r-1})]\{\Delta\}^r &= -\{R(\{\Delta\}^{r-1})\} \\ &= \{F\} - ([K^e]\{\Delta^e\})^{r-1} \end{aligned} \quad (39)$$

در این رابطه $R(\{\Delta\}^r) = 0$ شکل کلی دستگاه معادلات غیرخطی در هر گام بارگذاری بوده، $\{\Delta\}^r$ نیز بردار مجهولات متناظر با درجات آزادی را دربر دارد. r نیز نشان‌دهنده مرتبه تصحیح است. ماتریس سختی مماسی $[T^e]$ نیز مطابق رابطه (40) محاسبه می‌شود.

$$[T] = \left(\frac{\partial \{R\}}{\partial \{\Delta\}} \right)^{r-1}, \quad \text{یا} \quad T_{ij}^e = \left(\frac{\partial R_i^e}{\partial \Delta_j^e} \right)^{r-1} \quad (40)$$

پاسخ تصحیح شده در تصحیح بازگشتی r -ام نیز به صورت رابطه (41) به دست می‌آید.

$$\{\Delta\}^r = \{\Delta\}^{r-1} + \{\delta\Delta\} \quad (41)$$

ضرائب ماتریس سختی مماسی $[T^e]$ با استفاده از رابطه (40) محاسبه می‌شوند. در صورتی که رابطه ماتریسی به شکل رابطه (42) بازنویسی شود.

$$\sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^4 K_{ip}^{\alpha\gamma} \Delta_p^\gamma = F_i^\alpha \quad \text{یا} \quad \sum_{p=1}^2 K_{ip}^{\alpha 1} u_p + \sum_{p=1}^4 K_{ip}^{\alpha 2} \bar{\Delta}_p = F_i^\alpha \quad (42)$$

می‌توان ترم‌های ماتریسی سختی مماسی را به صورت رابطه (43) به دست آورد.

$$T_{ij}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial R_i^\alpha}{\partial \Delta_j^\beta} \right)^{r-1}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (43)$$

مؤلفه‌های بردار باقی‌مانده نیز به صورت رابطه (44) به دست می‌آیند.

$$R_i^\alpha = \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^4 K_{ip}^{\alpha\gamma} \Delta_p^\gamma - F_i^\alpha \quad (44)$$

محدوده تغییرات p با استفاده از اندازه ماتریس $[K^{\alpha\beta}]$ مشخص می‌شود.

¹ Iterative

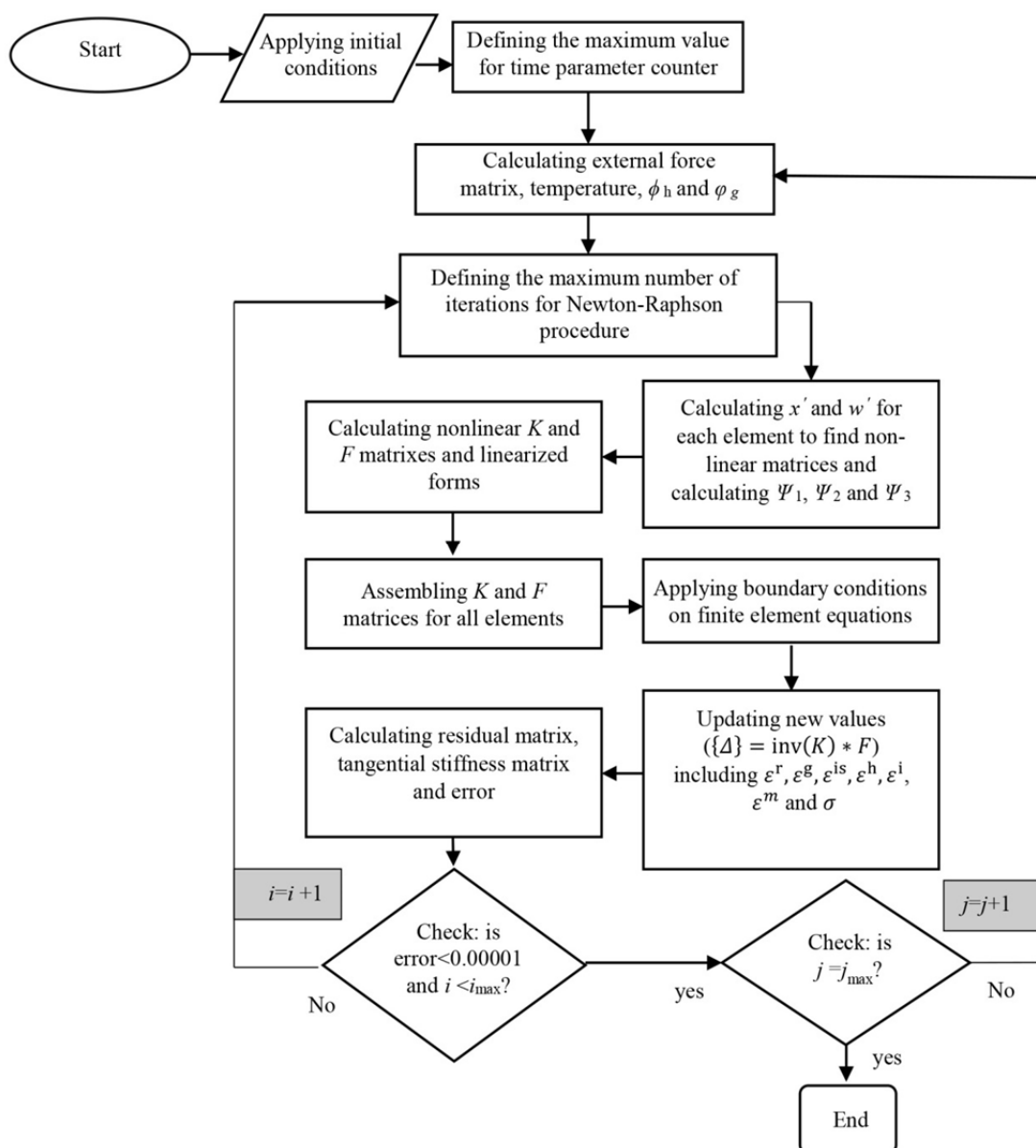


Fig. 3 Solution algorithm for the proposed model for a shape memory polymer von Kármán beam

شکل 3 الگوریتم حل برای مدل ارائه شده برای تیر فون-کارمن از جنس پلیمر حافظه‌دار

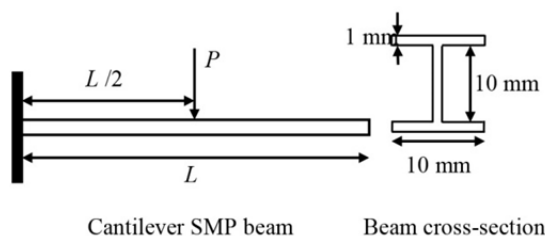


Fig. 4 Schematics of loading on a Shape memory polymer beam

شکل 4 نحوه بارگذاری تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار

غیرخطی بودن ماتریس $[K]$ برای تیر فون-کارمن، در هر زمان نیاز به یک حل بازگشتی تصحیحی برای به‌روزرسانی پاسخ‌ها و در نهایت رسیدن به تلورانس دقت مورد نظر است. این حل به این صورت است که تصحیح هر مرحله در ماتریس $[K]$ مرحله بعد قرار می‌گیرد و این ماتریس به‌روز می‌شوند. سپس پاسخ مرحله جدید به دست می‌آید و به کمک الگوریتم نیوتن-

مشخصات گفته شده در این‌جا مبنای اولیه نتایج این بخش می‌باشند، مگر در جایی که خلاف آن بیان شود. فرضیات اساسی این تئوری کرنش کوچک و دوران به نسبت بزرگ است که نتایج نیز بر این اساس به دست می‌آیند. با استفاده از یک برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده در این تحقیق و به کمک روش اجزا محدود [28] رفتار سازه شی‌سازی شده است. با توجه به

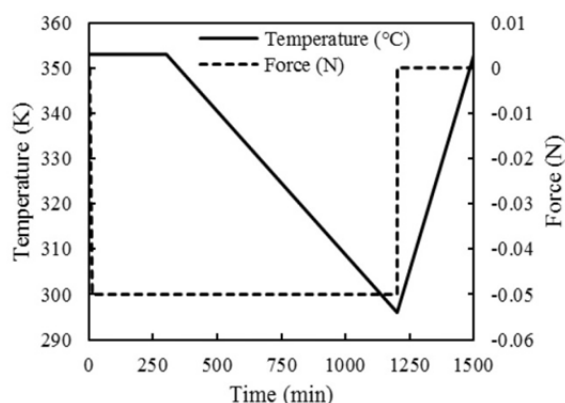


Fig. 5 Temperature and force applied to the beam versus time

شکل 5 دما و نیروی اعمالی به تیر بر حسب زمان

جدول 1 مقادیر پارامترهای حل تکراری در تئوری فون-کارمن برای نتایج
Table 2 Iterative parameters for the results of von Kármán beam

پارامتر	بیشینه مراحل	زمان وقوع بیشینه مراحل حل	میانگین مراحل حل	میانگین خطا
$\phi_h = 0.0$	58	846	2	$1.76e^{-6}$
$\phi_h = 0.2$	75	1193	3	$1.95e^{-6}$
$\phi_h = 0.4$	59	1472	2	$1.58e^{-6}$

شکلی را در بطن خود دارد و در واقع وقتی این کرنش حداکثر است، شکل موقت سازه به حافظه سپرده می‌شود. به طور کلی می‌توان گفت که کرنش ϵ^{is} در زمان‌های بیشتری نسبت به کرنش ϵ^{ir} به مقدار بیشینه خود در کل تاریخچه می‌رسد و همچنین در زمان‌های بیشتری دچار افت خواهد شد. مقدار بیشینه این دو کرنش برابر با 5.02% است که این دو کرنش نسبت به بقیه کرنش‌های موجود در مسأله نقش مهم‌تری در تعیین رفتار سازه دارند. در شکل 8-b کرنش‌های ϵ^{ig} , ϵ^{ih} , ϵ^{is} بر حسب زمان رسم شده‌اند. کرنش‌های ϵ^{ig} , ϵ^{ih} , ϵ^{is} تا زمان‌های پس از سرد کردن به صورت خطی افزایش می‌یابند و در نهایت کمی دچار افت می‌شوند. مقدار بیشینه کرنش‌های ϵ^{ig} , ϵ^{ih} , ϵ^{is} بسیار ناچیز است. این سه کرنش نسبت به دو کرنش پیشین نقش کمتری در تعیین رفتار سازه دارند. این کرنش‌ها نیز مانند کرنش مکانیکی در طول تیر کاهش می‌یابند به طوری که بیشینه آن‌ها در محل تکیه‌گاه رخ می‌دهد. در شکل 9-a تغییرات زمانی تنش به وجود آمده در تیر رسم شده است که با توجه به آن مقدار بیشینه تنش در کل تاریخچه زمانی برابر با 144 kPa است. تنش در مرحله بارگذاری به صورت خطی افزایش می‌یابد. در مرحله خنک‌سازی در مقدار بیشینه خود ثابت می‌ماند و در مرحله گرمایش در صورت حذف کامل نیروی مکانیکی به تدریج کاهش یافته و سرانجام برابر با صفر می‌شود.

بیشینه تنش نیز در محل تکیه‌گاه رخ می‌دهد. در نهایت در شکل 9-b تغییرات نیرو-جابجایی-دما برای مسأله مورد نظر نشان داده شده است که با استفاده از این نمودار به خوبی می‌توان رفتار یک سازه حافظه‌دار از جنس پلیمر را بیان کرد.

6- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این کار با استفاده از یک مدل سه‌بعدی که برای پلیمرهای حافظه‌دار ارائه شده است یک حل اجزا محدود برای پیش‌بینی رفتار تیرهای پلیمری حافظه‌دار با وجود آثار چرخش به نسبت بزرگ ارائه شده است. برای توسعه

رافسون خطای هر مرحله محاسبه شده و با خطای معیار (که 10^{-6} در نظر گرفته) مقایسه می‌شود. تا زمانی که خطا از خطای معیار بیشتر باشد، فرآیند حل پیش خواهد رفت تا خطا به حد قابل قبول برسد.

در روش نیوتن-رافسون با استفاده از ماتریس مماسی، معادلات غیرخطی ماتریسی خطی‌سازی می‌شوند. همان‌طور که در بخش پیشین اشاره شد، روال حل مسأله در یک الگوریتم در شکل 3 آورده شده است.

در این بخش در قدم نخست نتایج تئوری فون-کارمن به کمک نتایج شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم‌افزار ABAQUS اعتبارسنجی می‌شوند. به منظور صحت‌سنجی نتایج کار حاضر، مدل ساختاری سه‌بعدی یادشده در یک زیربرنامه یومت در نرم‌افزار اجزا محدود پیاده‌سازی شده است [17]. به کمک این مدل سه‌بعدی تمامی مسیر حافظه شکلی شبیه‌سازی شده است. تعداد المان‌های در نظر گرفته شده برای مش‌بندی تیر 1020 المان 8 گرهی است که این مقدار حداقل تعداد المان لازم برای عدم وابستگی پاسخ به اندازه مش است. با افزایش تعداد المان‌ها پاسخ تغییر چندانی ندارد. برای تیری با مشخصات در نظر گرفته شده، نتایج تئوری اولر-برنولی (گزارش شده در [24]) نیز برای مقایسه ارائه خواهد شد و با کنار هم گذاشتن این سه نتیجه برای هر حالت، مقایسه‌ای جامع انجام می‌شود. این مقایسه برای رفتار حافظه‌داری تیر یادشده در شکل 6 به ازای $\phi_h = 0, 0.2, 0.4$ نشان داده شده است. با توجه به شکل می‌توان دریافت که نتایج مبتنی بر المان تئوری فون-کارمن با دقت مناسبی بر نتایج شبیه‌سازی سه‌بعدی منطبق است. این صحت با کاهش ϕ_h (منجر به خیز بیشتر می‌شود) بیشتر مشاهده خواهد شد. با توجه به نتایج تیر اولر-برنولی می‌توان گفت که با افزایش خیز و دوران تیر، نتایج اولر-برنولی چندان معتبر نخواهند ماند و مدل‌سازی رفتار تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار به کمک تئوری فون-کارمن پاسخ‌های واقعی‌تری فراهم می‌آورد. به ازای $\phi_h = 0.2$ خطای پاسخ اولر-برنولی حدود 27% است. در مرحله استراحت خطای پاسخ فون-کارمن کمی بیشتر می‌شود، ولی این خطا نیز با شروع مرحله سرد کردن به کمترین مقدار خود می‌رسد.

با توجه به مطالبی که برای حل بازگشتی تصحیحی در تئوری فون-کارمن گفته شد، در جدول 2 مقدار پارامترهای این نوع حل برای پاسخ‌های تئوری فون-کارمن متناظر در شکل 6 بیان شده است. پارامترهای این جدول شامل حداکثر تعداد تصحیح کل مراحل حل در زمان‌های مختلف، میانگین مراحل حل در حداکثر تعداد مراحل حل در زمان‌های مختلف، میانگین مراحل حل در زمان‌های مختلف و میانگین خطا در زمان‌های مختلف است. مشاهده می‌شود که به ازای $\phi_h = 0.2$ حل تئوری فون-کارمن نیازمند تصحیح بازگشتی پاسخ‌های بیشتری بوده است که این ادعا در دقت مناسب این حالت خود را نشان می‌دهد که در شکل 6 نشان داده شده است.

در شکل 3 بیشینه کرنش محوری که در محل تکیه‌گاه به دست می‌آید، بر حسب زمان رسم شده است. با توجه به شکل 3 می‌توان گفت که به ازای $\phi_h = 0, 0.2, 0.4$ بیشینه کرنش محوری در کل تاریخچه به ترتیب برابر با 5.6%, 7.7% و 3.1% است. مشاهده می‌شود که کرنش محوری در $\phi_h = 0$ از کرنش محوری در $\phi_h = 0.2$ بیشتر است.

در شکل 4 بخش‌های مختلف کرنش‌های تیر ساخته شده از پلیمر حافظه‌دار مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در شکل 8-a کرنش‌های ϵ^{ir} , ϵ^{is} بر حسب زمان رسم شده‌اند. کرنش بخش لاستیکی ϵ^{ir} در شروع هر فرآیند بلافاصله دچار تغییر می‌شود و این درحالی است که کرنش ذخیره شده ϵ^{is} چنین حالتی ندارد. ϵ^{is} مهم‌ترین مؤلفه کرنش بوده که خاصیت حافظه

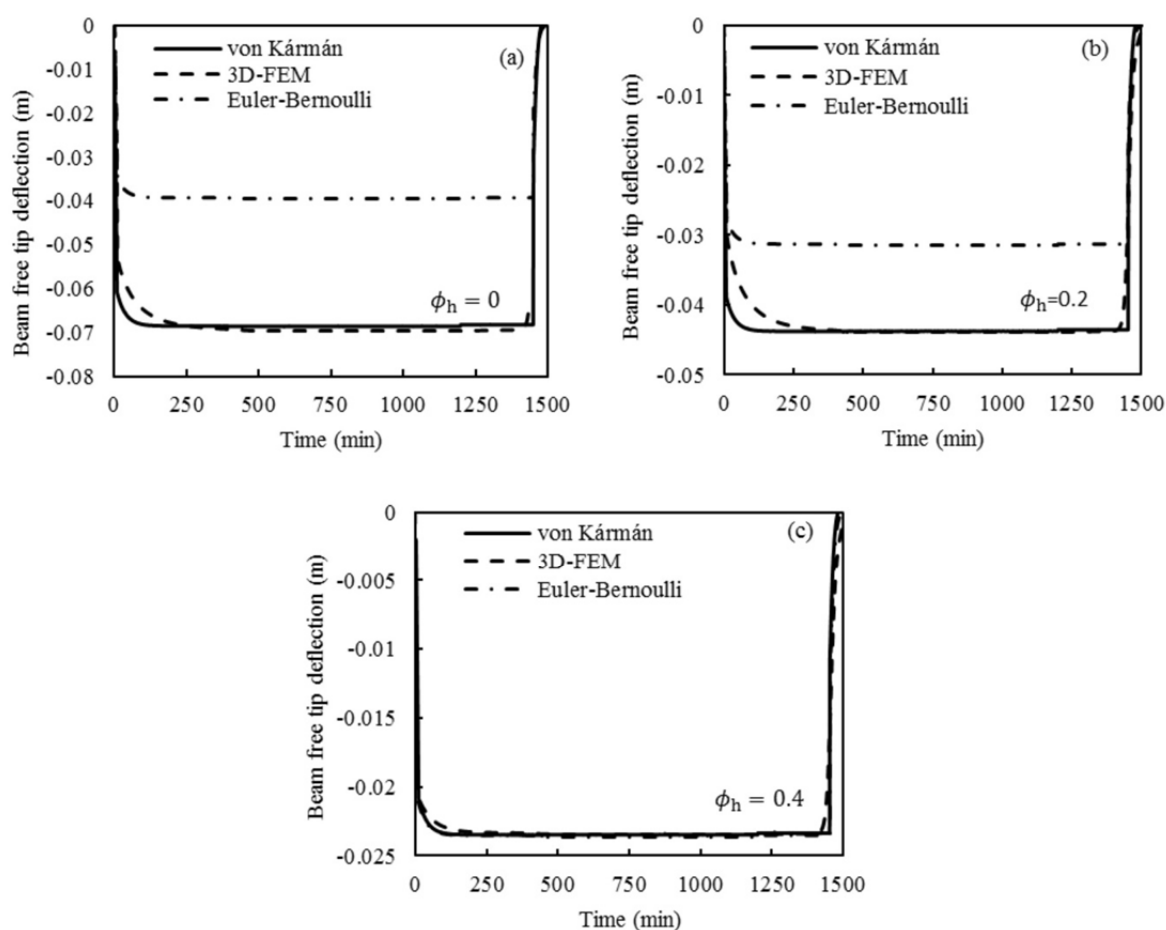


Fig. 6 Comparing the results of von Kármán beam with those of Euler-Bernoulli beam and 3D FEM results and also studying the effect of ϕ_h on beam free tip deflection

شکل 6 مقایسه نتایج تیر فون-کارمن با نتایج تیر اولر-برنولی و اجزا محدود سه بعدی و بررسی تأثیر ϕ_h روی خیز سر آزاد تیر

مشخصات هندسی مناسب برای تئوری فون-کارمن انتخاب شد و نتایج برای آن به دست آمد. پاسخ‌های مدل سه‌بعدی و همچنین پاسخ المان محدود مقایسه شد که نتایج حاکی از پیروی بسیار بهتر مدل ارائه شده نسبت به مدل اولر-برنولی در مقایسه با مدل سه‌بعدی است، همچنین اثر کسر حجمی قسمت سخت بر پاسخ‌های تیر بررسی گردید. در حل معادلات غیرخطی تئوری فون-کارمن جهت رسیدن به دقت مناسب در پاسخ‌ها، تعداد المان‌ها و مراحل حل بازگشتی تصحیحی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند، همچنین مشاهده شد که در میان روش‌های حل بازگشتی، روش نیوتن-رافسون همگرایی و دقت کافی را به دست می‌دهد. مرحله استراحت در تئوری فون-کارمن به نسبت تئوری اولر-برنولی در زمان‌های بالاتری رخ خواهد داد، به این دلیل که مقابله با تغییرات تنش در این تئوری در زمان بیشتری رخ می‌دهد و این باعث می‌شود که تغییرات خیز و کرنش در این تئوری به نرم‌تری انجام شود. مدل اجزا محدود ارائه شده می‌تواند به عنوان یک ابزار قدرتمند برای شبیه‌سازی تیرهایی که مشخصات هندسی آن‌ها در حین بارگذاری در مسأله تیر فون-کارمن صدق می‌کنند، مختلف به کار گرفته شود. این مدل در مواقعی که به تعداد زیادی شبیه‌سازی نیاز است و مدل سه‌بعدی هزینه محاسباتی زیادی دارد می‌تواند بسیار کاربردی باشد.

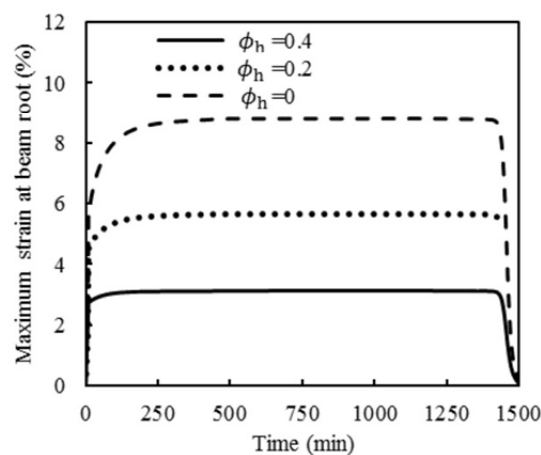


Fig. 7 Studying the effect of ϕ_h on variation of the maximum strain at beam root based on von Kármán beam theory

شکل 7 بررسی تأثیر ϕ_h بر تغییرات کرنش بیشینه مبتنی بر المان تیر فون-کارمن

روابط تیر از تئوری فون-کارمن استفاده شده است و برای نمونه تیری با

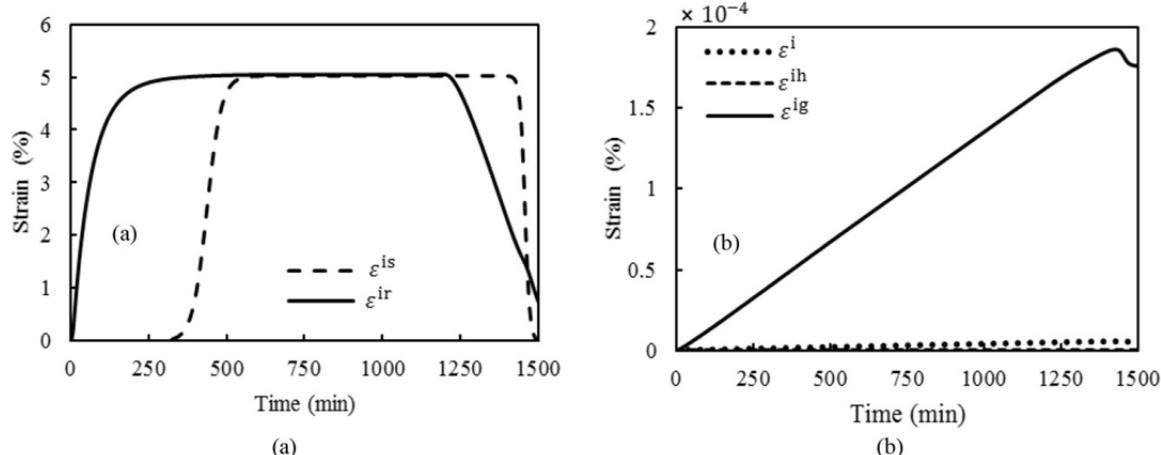


Fig. 8 Variation of different strains of the problem a- Variation of rubbery phase and stored strain with time, b- Variation of glassy phase and hard phase and irreversible strain with time

شکل 8 تغییرات کرنش‌های مختلف مسأله الف- تغییرات زمانی کرنش بخش‌های لاستیکی و ذخیره‌شده، ب- تغییرات زمانی کرنش بخش‌های شیشه‌ای، سخت و برگشت‌ناپذیر، تیر فون-کارمن

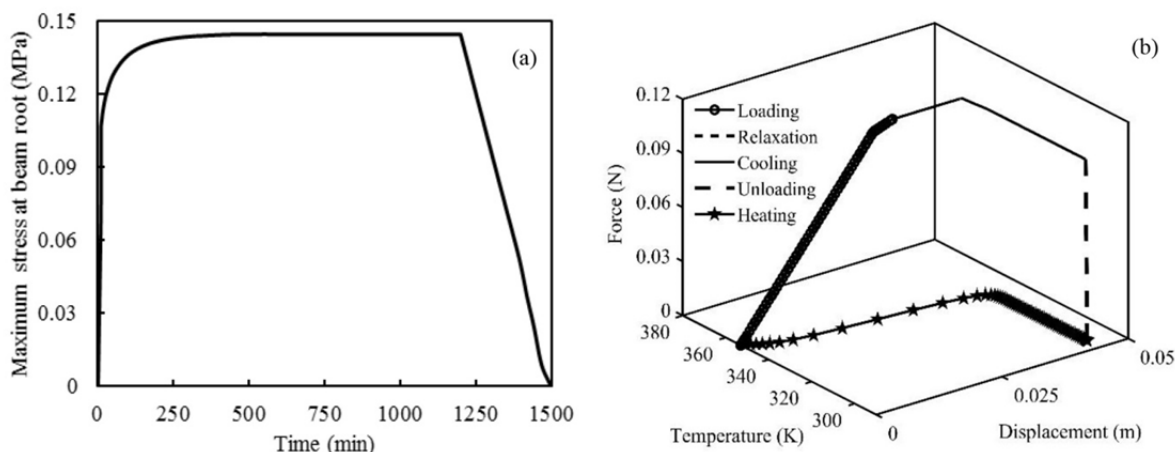


Fig. 9 a- Variation of stress of the beam for von Kármán b- Variation of force-displacement-temperature for the shape memory polymer beam modeled with von Kármán beam theory

شکل 9 الف- تغییرات زمانی تنش مسأله، تیر فون-کارمن، ب- تغییرات نیرو-جابجایی-دما مسأله تحلیل رفتار زمانی تیر ساخته شده از پلیمر حافظه‌دار مدل شده با تئوری فون کارمن

7- مراجع

- polymers. Part I: large deformations, *the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 5, pp. 1752-1765, 2008.
- [11] K. Hasanpour, S. Ziaei-Rad, M. Mahzoon, A large deformation framework for compressible viscoelastic materials: Constitutive equations and finite element implementation, *Plasticity*, Vol. 25, No. 6, pp. 1154-1176, 2009.
- [12] H. Tobushi, T. Hashimoto, S. Hayashi, E. Yamada, Thermomechanical constitutive modeling in shape memory polymer of polyurethane series, *Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 8, No. 8, pp. 711-718, 1997.
- [13] H. Tobushi, N. Ito, K. Takata, S. Hayashi, Thermomechanical constitutive modeling of polyurethane-series shape memory polymer, *Material Science*, Vol. 327, pp. 343-346, 2000.
- [14] H. Tobushi, S. Hayashi, K. Hoshio, Y. Ejiri, Shape recovery and irrecoverable strain control in polyurethane shape-memory polymer, *Science and Technology of Advanced Materials*, Vol. 9, No. 1, pp. 015009, 2008.
- [15] Y. Liu, K. Gall, M. L. Dunn, A. R. Greenberg, J. Diani, Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling, *Plasticity*, Vol. 22, No. 2, pp. 279-313, 2006.
- [16] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation, *Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 21-32, 2013.
- [17] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, S. Sohrabpour, A thermodynamically-consistent 3D constitutive model for shape memory polymers, *Plasticity*, Vol. 35, pp. 13-30, 2012.
- [18] A. Lendlein, R. Langer, Biodegradable, elastic shape-memory polymers for potential biomedical applications, *Science*, Vol. 296, No. 5573, pp. 1673-1676, 2002.
- [19] I. Ward Small, P. Singhal, T. S. Wilson, D. J. Maitland, Biomedical applications of thermally activated shape memory polymers, *Materials Chemistry*, Vol. 20, No. 17, pp. 3356-3366, 2010.
- [20] A. Lendlein, S. Kelch, Shape-memory polymers, *Angewandte Chemie International Edition*, Vol. 41, No. 12, pp. 2034-2057, 2002.
- [21] G. Monkman, Advances in shape memory polymer actuation, *Mechatronics*, Vol. 10, No. 4, pp. 489-498, 2000.
- [22] T. Xie, Recent advances in polymer shape memory, *Polymer*, Vol. 52, No. 22, pp. 4985-5000, 2011.
- [23] F. Pilate, A. Toncheva, P. Dubois, J. M. Raquez, Shape-memory polymers for multiple applications in the materials world, *European Polymer*, Vol. 80, pp. 268-294, 2016.
- [24] F. El Feninat, G. Laroche, M. Fiset, D. Mantovani, Shape memory materials for biomedical applications, *Advanced Engineering Materials*, Vol. 4, No. 3, pp. 91-104, 2002.
- [25] F. Mohamed, C. F. van der Walle, Engineering biodegradable polyester particles with specific drug targeting and drug release properties, *Pharmaceutical Sciences*, Vol. 97, No. 1, pp. 71-87, 2008.
- [26] W. Yin, L. Liu, Y. Liu, J. Leng, Structural design of morphing honeycomb cell with multi-constraints, *Structural Dynamics and Materials Conference*, Denver, Colorado, April, pp. 1980, 2011.
- [27] Y. C. Chen, D. C. Lagoudas, A constitutive theory for shape memory

- [23] M. Baghani, A. Taheri, An analytic investigation on behavior of smart devices consisting of reinforced shape memory polymer beams, *Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, No. 11, pp. 1385-1394, 2015.
- [24] M. Baghani, R. Dolatabadi, M. Baniassadi, Developing a finite element beam theory for nanocomposite shape-memory polymers with application to sustained release of drugs, *Scientia Iranica Transaction B, Mechanical Engineering*, Vol. 24, No. 1, pp. 249, 2017.
- [25] A. H. Eskandari, M. Baghani, M. Baniassadi, A finite element analysis for shape memory polymer Timoshenko beams, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 8, pp. 351-359, 2017. (in Persian فارسی)
- [26] T. Von Kármán, *Festigkeitsprobleme im maschinenbau*, pp. 348-351: Teubner, 1910.
- [27] A. Lendlein, V. P. Shastri, Stimuli-Sensitive Polymers, *Advanced materials*, Vol. 22, No. 31, pp. 3344-3347, 2010.
- [28] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with Applications to Heat Transfer, Fluid Mechanics and Solid Mechanics*, Second Edition, pp. 213-261, UK: Oxford OUP, 2014.
- [18] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, S. Sohrabpour, A constitutive model for shape memory polymers with application to torsion of prismatic bars, *Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 23, No. 2, pp. 107-116, 2012.
- [19] H. Park, P. Harrison, Z. Guo, M. G. Lee, W.-R. Yu, Three-dimensional constitutive model for shape memory polymers using multiplicative decomposition of the deformation gradient and shape memory strains, *Mechanics of Materials*, Vol. 93, pp. 43-62, 2016.
- [20] M. Baghani, H. Mohammadi, R. Naghdabadi, An analytical solution for shape-memory-polymer Euler-Bernoulli beams under bending, *Mechanical Sciences*, Vol. 84, pp. 84-90, 2014.
- [21] P. Ghosh, J. Reddy, A. Srinivasa, Development and implementation of a beam theory model for shape memory polymers, *Solids and Structures*, Vol. 50, No. 3, pp. 595-608, 2013.
- [22] T. Takeda, Y. Shindo, F. Narita, Flexural stiffness variations of woven carbon fiber composite/shape memory polymer hybrid layered beams, *Composite Materials*, Vol. 49, No. 2, pp. 209-216, 2015.