



تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری یک نانوتیرچرخان ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن اثرات سطحی

سید علی قصابی¹، مجید شاه قلی^{2*}، غلامحسن پایگانه³، محمدعلی احمدی⁴

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

4- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

*تهران، صندوق پستی 16785-136، majid.shahgholi@srttu.edu

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری یک نانوتیر دوار ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن اثرات سطحی مطالعه و بررسی شده است. به کمک اصل هامیلتون و تئوری گورتین مورداک معادلات حرکت استخراج شده و با روش گلرکین گسسته شده‌اند. سپس با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، معادلات حرکت حل شده‌اند. در تحلیل ارتعاشات آزاد، عباراتی تحلیلی برای دامنه، فاز و فرکانس طبیعی استخراج شده است. در تحلیل ارتعاشات اجباری، عباراتی تحلیلی برای پاسخ حالت ماندگار سیستم به دست آورده شده است. تاثیر عواملی مانند اثرات سطح، ضرایب میرایی، ابعاد سطح مقطع، دامنه‌ی تحریک خارجی و ... بر پاسخ فرکانسی سیستم مطالعه شده است. مشاهده می‌شود که در ارتعاشات آزاد در یک زمان خاص با افزایش تنش سطح، دامنه کاهش می‌یابد و با افزایش چگالی سطح و الاستیسیته‌ی سطح، دامنه افزایش خواهد یافت. همچنین افزایش ضرایب میرایی داخلی و خارجی، باعث کاهش دامنه‌ی آزاد سیستم می‌شوند. در ارتعاشات اجباری مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن اثرات سطح، دامنه‌ی اجباری سیستم کاهش می‌یابد و محل نقطه‌ی انشعاب اول نیز تغییر خواهد کرد. افزایش ضرایب میرایی داخلی و خارجی باعث کاهش دامنه شده و انشعاب اول در فرکانس‌هایی نزدیک‌تر به فرکانس طبیعی اتفاق خواهد افتاد. همچنین مشاهده می‌شود که برای دو ابعاد مختلف از سطح ولی با مساحت سطح یکسان، محل نقاط انشعاب و دامنه تغییر خواهند کرد. افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی باعث افزایش دامنه می‌شود و نقاط انشعابی اول و دوم در فرکانس‌هایی دورتر از فرکانس طبیعی اتفاق خواهند افتاد. بنابراین در نظر گرفتن اثرات سطح در تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری نانوتیرهای دوار اهمیت دارد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 بهمن 1396

پذیرش: 01 فروردین 1397

ارائه در سایت: 24 فروردین 1397

کلید واژگان:

ارتعاشات غیرخطی

ارتعاشات آزاد و اجباری

نانوتیر دوار

ویسکوالاستیک

اثرات سطح

Free and forced nonlinear vibrations analysis of a viscoelastic nano rotating beam by considering surface effects

Seyed Ali Ghasabi, Majid Shahgholi*, Gholamhassan Payganeh, Mohammad Ali Ahmadi

Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 16785-136 Tehran, Iran, majid.shahgholi@srttu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 21 January 2018

Accepted 21 March 2018

Available Online 13 April 2018

Keywords:

Nonlinear vibrations

Free and forced vibrations

Nano rotating beam

Viscoelastic

Surface effects

ABSTRACT

In this paper free and forced vibrations analysis of a viscoelastic nonlinear nano rotating beam by considering surface effects is investigated. Using Hamilton principle and Gurtin Murdoch theory, the equations of motion are obtained and discretized by Galerkin method. Using the multiple time scales method the equations of motion are solved. In free vibrations analysis, the analytical expressions for amplitude and phase are obtained. In forced vibrations analysis the steady state solution are obtained. The effect of surface effect, damping coefficients, dimensions of cross section area, external excitation amplitude etc. on frequency response curves are investigated. It is seen that in free vibrations, by increasing surface stress the amplitude of the system decreased, and by increasing surface density or elasticity it is increased. Also, by increasing internal and external damping coefficients free vibration amplitude is decreased. In forced vibrations, it is seen that considering surface effect the amplitude of the system is decreased and the first bifurcation point is obviously changed. By increasing internal and external damping coefficients the amplitude is decreased and the first bifurcation point occur in frequencies near the natural frequency. It is seen that for two different dimensions of cross section with same area, amplitude and the loci of the bifurcation points are changed. By increasing the amplitude of external excitation the amplitude of response is increased the bifurcation points occur in frequencies far away from natural frequency. So, considering the surface effects for free and forced vibrations analysis of the nano rotating beams is mandatory.

1- مقدمه

تیرها مهم‌ترین و پرکاربردترین المان در مهندسی مکانیک، هوافضا و ... می‌باشند. تیرهای دوار نیز در توربوماشین‌ها¹، ژيروسکوپ‌ها²، پره³ هلیکوپتر و ... کاربرد دارند. نانوتکنولوژی⁴ یک شاخه‌ی جدید از علم است که با توجه به حیطه‌ی کاربردی فراوان آن به‌شدت مورد توجه محققین قرار گرفته است. نانوتیرها و نانوتیرهای دوار در نانوماشین‌ها، نانوموتورها، نانوتوربین‌ها⁵، نانوپره‌ها، در سیستم‌های نانوالکترومکانیکی به‌عنوان نانوسنسورها⁶ و نانوعملگرها⁷، در پزشکی، در بیوتکنولوژی، در کامپیوترها و ارتباطات و ... کاربرد دارند. در این‌جا المان مورد بررسی یک نانوتیر دوار یک سر گیردار می‌باشد. از آن‌جایی‌که انجام آزمایش‌های تجربی در ابعاد نانومتر کار سخت و پرهزینه‌ای می‌باشد معمولاً مدل‌های تئوری بدین منظور مورد استفاده قرار خواهد گرفت. یکی از این مدل‌های تئوری که قادر است یکی از مهم‌ترین اثرات مربوط به کوچکی مقیاس (یعنی اثرات سطحی)⁸ را در نظر بگیرد تئوری غیرکلاسیک گورتین مورداک⁹ است. درنظرگرفتن اثرات سطحی به‌عنوان یکی از عوامل مهم و تأثیرگذار در سازه‌های در ابعاد نانومتر مورد توجه محققین قرار گرفته است و در طراحی و ساخت این سازه‌ها می‌تواند به طراحان کمک کند. از آن‌جایی‌که سیستم‌های دوار دائماً در معرض ارتعاشات قرار دارند و همچنین عوامل غیرخطی، جزء جدایی ناپذیر سیستم‌های واقعی است، تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری و پایداری¹⁰ آن‌ها مهم و ضروری است. در زمینه‌ی تیرها محمودی و همکاران¹¹ به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ویسکوالاستیک¹¹ برای شرایط مرزی مختلف پرداختند. عباراتی تحلیلی برای دامنه و فرکانس آزاد سیستم به‌دست آوردند. محمودی و همکاران¹² مطالعه‌ای تجربی بر ارتعاشات غیرخطی تیرهای ویسکوالاستیک یک‌سرگیردار انجام دادند. مشاهده کردند که افزایش دامنه‌ی تحریک و کاهش میرایی، باعث کاهش اندکی در فرکانس رزونانسی¹³ و افزایش محسوس در دامنه‌ی سیستم خواهد شد. حسینی و همکاران¹⁴ به تحلیل ارتعاشات اجباری یک تیر یک‌سرگیردار پیزوالکتریک¹⁵ که در یک بستر الاستیک غیرخطی قرار داشت پرداختند. اثرات ویسکوالاستیک را به‌کمک مدل کلون ویت¹⁶ درنظر گرفتند. یونسین و اسماعیل زاده¹⁷ ارتعاشات غیرخطی یک تیر دوار ویسکوالاستیک با سرعت متغیر با غیرخطی از نوع کوتاه‌شدگی¹⁸ را مورد مطالعه و پژوهش قرار دادند. آن‌ها معادلات حرکت را به‌کمک اصل هامیلتون استخراج کردند. با روش گلرکین معادلات با مشتقات جزئی¹⁹ را به معادلات با مشتقات معمولی²⁰ تبدیل کردند و با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه²¹ به حل معادلات پرداختند. در زمینه‌ی نانوسازه‌های غیر دوار محب شاه‌دین و فرخ آبادی²² به بررسی تأثیر انرژی سطحی بر رفتار سازه‌های نانوالکترومکانیکی در حضور نیروهای بین مولکولی پرداختند. آن‌ها مشاهده کردند که انرژی سطحی، ولتاژ پولین²³ را افزایش

داده و باعث ایجاد رفتار سفت‌شوندگی در سیستم خواهد شد. ناظم نژاد و همکاران²⁴ ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوتیرهای دو سر ساده‌ی غیرمحلی²⁵ را با درنظر گرفتن اثرات سطح مطالعه و بررسی کردند. به‌کمک انتگرال‌های بیضوی²⁶ به حل دقیق معادلات حرکت مبادرت ورزیدند. حسینی هاشمی و ناظم نژاد²⁷ ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد تابعی هدفمند²⁸ را با درنظر گرفتن اثرات سطحی تحلیل کردند. به‌کمک روش مقیاس‌های چندگانه، عبارتی تحلیلی برای فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم به‌دست آوردند. حسینی هاشمی و همکاران²⁹ مقایسه‌ای بین تیرهای اولبر برنولی و تیموشنکو در ارتعاشات آزاد خطی یک نانوتیر دو سر ساده و با درنظر گرفتن اثرات سطح و غیرمحلی انجام دادند. مشاهده کردند که اثرات اینرسی و تغییر شکل برشی بر اثرات سطح تأثیر بیش‌تری دارد. پورکیایی و همکاران³⁰ به تحلیل پایداری یک نانوتیر پیزوالکتریک تحت تحریک میدان الکتریکی با درنظر گرفتن اثرات سطح و اثرات بین مولکولی پرداختند. غیرخطی مساله با توجه به شرایط مرزی از نوع غیرخطی کشیدگی³¹ در نظر گرفته شد. تأثیر اثرات سطحی و ... بر رزونانس اصلی سیستم مطالعه و بررسی شد. انصاری و همکاران³² ارتعاشات غیرخطی نانوتیرهای تیموشنکو را بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی تنش سطح، برای شرایط مرزی گوناگون مطالعه و بررسی کردند و با روشی عددی معادلات حرکت حل شد. در زمینه‌ی نانوتیرهای دوار صفراآبادی و همکاران³³ ارتعاشات آزاد خطی نانوتیرهای دوار را با درنظر گرفتن اثرات سطحی مطالعه و بررسی کردند. به‌کمک روش مربعات دیفرانسیلی³⁴ به حل معادلات حرکت پرداختند. قدیری و شفییعی³⁵ [12] ارتعاشات آزاد یک نانوتیر دوار را به‌کمک تئوری غیرمحلی ارینگن و بدون در نظر گرفتن هیچ‌یک از اثرات سطح، به‌کمک روش مربعات دیفرانسیلی تحلیل کردند. قدیری و همکاران³⁶ [13] ارتعاشات آزاد خطی یک نانوتیر دوار ساخته شده از مواد تابعی هدفمند را با وجود اثرات سطحی بررسی کردند. آن‌ها فرض کردند سطح بالای تیر از سیلیکون و سطح پایین آن از آلومینیوم ساخته شده است و خواص ماده در طول ضخامت با یک تابع نمایی تغییر خواهد کرد. قدیری و شفییعی³⁷ [14] همچنین، ارتعاشات خطی یک نانوپره دوار را بر اساس تئوری غیرمحلی ارینگن بدون منظور کردن اثرات سطحی با روش مربعات دیفرانسیلی مطالعه و بررسی کردند. رویز و همکاران³⁸ [15] ارتعاشات خمشی نانوتیرهای دوار با سطح مقطع غیریکنواخت را بر اساس تئوری ارینگن تحلیل و بررسی کردند و فرکانس‌های طبیعی سیستم را به دست آوردند. آن‌ها عوامل غیرخطی، اثرات ویسکوالاستیک و اثرات سطح را در نظر نگرفتند. با مطالعه‌ی کارهای بالا می‌توان نتیجه گرفت که ارتعاشات آزاد و اجباری یک نانوتیر دوار با درنظر گرفتن همه‌ی اثرات سطحی و اثر ویسکوالاستیک و همچنین عوامل غیرخطی سیستم که عمدتاً ناشی از کرنش‌ها است، انجام نشده است. در این‌جا ارتعاشات آزاد (پاسخ حالت گذرا) و اجباری (پاسخ حالت ماندگار) یک نانوتیر دوار که شامل تنش سطح، الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح و نیز اثرات ویسکوالاستیک است به‌کمک تئوری گورتین مورداک مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت.

2- استخراج معادلات حرکت

در شکل 1 یک نانوتیر دوار که یک سر آن آزاد و سر دیگر گیردار است و با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور Z دوران می‌کند نشان داده شده است. زاویه‌ی اولبر مربوط به خمش تیر α از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [16]:

²⁰ Nonlocal²¹ Elliptic integrals²² Functionally Graded Materials²³ Stretching²⁴ Differential Quadrature Method¹ Turbomachinery² Gyroscopes³ Blade⁴ Nanotechnology⁵ Nano turbines⁶ Nano sensors⁷ Nano actuators⁸ Surface effects⁹ Gurtin Murdoch¹⁰ Stability¹¹ Viscoelastic¹² Resonance frequency¹³ Piezoelectric¹⁴ Kelvin Voight¹⁵ Shortening¹⁶ Partial Differential Equations¹⁷ Ordinary Differential Equations¹⁸ Multiple Time Scales Method¹⁹ Pull in

همچنین k_y شعاع انحنای نانوتیر در راستای محور y است و پس از ساده سازی از رابطه ی زیر به دست خواهد آمد:

$$k_y = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = w'' + \frac{1}{2}w''w'^2 + \dots \quad (10)$$

حال اگر روابط (10) و (3) در رابطه ی (2) قرار داده شود بخش اول انرژی پتانسیل سیستم که پتانسیل حجمی است بر حسب جابه جایی عرضی w به دست خواهد آمد. به منظور لحاظ کردن اثرات سطح، تئوری الاستیسیته ی گورتین مورد استفاده می شود. در این تئوری فرض می شود که سطح دارای ضخامت ریاضیاتی صفر است و به صورت کامل بر حجم ماده قرار گرفته است و هیچ لغزشی بین حجم و سطح وجود ندارد. بخش دیگری از انرژی پتانسیل سیستم مربوط به انرژی سطح است که از رابطه ی زیر به دست خواهد آمد [19]:

$$U_2 = \int \gamma d\bar{A}, \gamma = \tau^s + \frac{1}{2}E^s \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}\tau_{zx}\varepsilon_{zx} \quad (11)$$

درجایی که E^s الاستیسیته ی سطح γ ، چگالی انرژی کرنشی سطح و τ_{zx} تنش سطح در صفحه ی $x-z$ است و طبق تئوری گورتین مورد استفاده از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد [20]:

$$\tau_{zx} = \tau^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (12)$$

همچنین $\bar{A}$ مساحت سطح نانوتیر است که برای یک المان از نانوتیر از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد:

$$d\bar{A} = dA_s ds \quad (13)$$

درجایی که A_s محیط پیرامون نانوتیر است و ds یک طول کوچک از المان تغییر شکل داده است و از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد:

$$ds = (u' + 1 + \frac{1}{2}w'^2) dx \quad (14)$$

پس از ساده سازی رابطه ی (11) انرژی پتانسیل سطحی نیز محاسبه خواهد شد. قسمت دیگری از انرژی سیستم مربوط به کار حاصل از نیروی گریز از مرکز h است که از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد [13]:

$$U_{nc} = \frac{1}{2} \int_0^\ell N w'^2 dx \quad (15)$$

درجایی که N نیروی گریز از مرکز است و از رابطه ی زیر می تواند محاسبه شود:

$$N = \int_x^\ell \rho A \Omega^2 (\xi + d) d\xi \quad (16)$$

انرژی جنبشی سیستم از رابطه ی زیر به دست خواهد آمد:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_{eff} \dot{r} \cdot \dot{r} dV \quad (17)$$

درجایی که ρ_{eff} چگالی جرمی موثر و r بردار جابه جایی یک المان کوچک بر روی نانوتیر تغییر شکل داده می باشد و به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$r = (d + x + u(x, t))i + w(x, t)k \quad (18)$$

با جایگذاری رابطه ی (18) در رابطه ی (17) انرژی جنبشی سیستم از رابطه ی زیر به دست خواهد آمد:

$$T = \int_0^\ell \frac{m_{eff}}{2} [\dot{u}^2 + (d + x + u(x, t))^2 \Omega^2 + \dot{w}^2] dx \quad (19)$$

درجایی که m_{eff} از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد:

$$m_{eff} = \rho A + \rho_s A_s \quad (20)$$

به کمک اصل هامیلتون توسعه یافته 9 ، معادله حرکت به صورت زیر استخراج خواهد شد:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U_1 - \delta U_2 + \delta U_{nc}) dt = 0 \quad (21)$$

⁷ Surface elasticity

⁸ Centrifugal force

⁹ Extended Hamilton principle

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w'}{1 + u'} \quad (1)$$

درجایی که u و w ترتیب جابه جایی ها در راستای طولی و جابه جایی در راستای عرضی z می باشند. علامت $(\cdot)$ مشتق نسبت به x است. انرژی پتانسیل حجمی سیستم از رابطه ی زیر به دست می آید [17]:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^\ell M_y \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \quad (2)$$

درجایی که M_y گشتاور خمشی حول محور y است و از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$M_y = \int \sigma_x z dA \quad (3)$$

که σ_x تنش عمودی ماده است که برای یک ماده ی ویسکوالاستیک با میرایی داخلی 1 μ_t ، مدول یانگ E و نسبت پواسون ν از رابطه ی زیر به دست خواهد آمد [18] و [9]:

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x + \mu_t \varepsilon_x) + \nu \sigma_z \quad (4)$$

که σ_z تنش حجمی 4 مربوط به اثرات سطحی می باشد و با فرض تغییرات خطی در طول ضخامت نانوتیر، از رابطه ی زیر به دست خواهد آمد [6]:

$$\sigma_z = \frac{z}{h} (\tau_s w'' - \rho_s \ddot{w}) \quad (5)$$

که τ_s تنش باقیمانده سطح 5 ، ρ_s چگالی سطح 6 و h نصف ضخامت است. ε_x کرنش عمودی هر ذره از جسم پس از تغییر شکل است و از رابطه ی زیر به دست می آید [16]:

$$\varepsilon_{xx} = e + z k_y \quad (6)$$

که در این رابطه e کرنش محوری تار خنثی است و از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$e = \sqrt{w'^2 + (1 + u')^2} - 1 \quad (7)$$

با بسط کرنش محوری تار خنثی می توان نوشت:

$$e = u' + \frac{1}{2}w'^2 + \dots \quad (8)$$

با فرض عدم کشیدگی، کرنش محوری تار خنثی صفر است و می توان نوشت:

$$e = 0 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}w'^2 - \dots \quad (9)$$

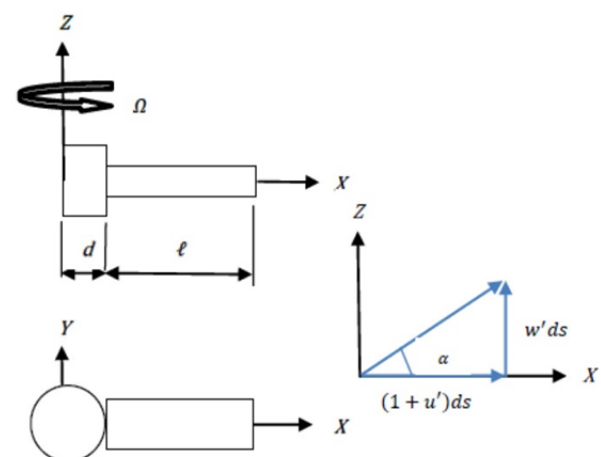


Fig.1 Schematic view of nano rotating beam

شکل 1 شماتیکی از نانوتیر دوار

¹ Internal damping

² Young modulus

³ Poisson ratio

⁴ Bulk Stress

⁵ Residual surface stress

⁶ Surface density

با تعریف پارامترهای زیر:

$$\begin{aligned} F_s &= \tau_s(4b_0 + 2h), \\ (EI)_{\text{eff}} &= EI + E_s I_s - \frac{2\nu I \tau_s}{h}, \\ (\rho I)_{\text{eff}} &= \frac{2\nu I \rho_s}{h} \end{aligned} \quad (22)$$

و پارامترهای بدون بعد زیر:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\mu_i}{\ell^2} \sqrt{\frac{(EI)_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}}, \quad \theta_2 = \frac{(\rho I)_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}} \ell^2}, \\ \theta_3 &= \frac{F_s \ell^2}{(EI)_{\text{eff}}}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \ell^2 \sqrt{\frac{m_{\text{eff}}}{(EI)_{\text{eff}}}}, \\ \tilde{\mu}_e &= \frac{\mu_e \ell^2}{\sqrt{m_{\text{eff}}(EI)_{\text{eff}}}}, \\ \tilde{t} &= \frac{t}{\ell^2} \sqrt{\frac{(EI)_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{\ell}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{\ell}, \\ \tilde{F}(x, t) &= \frac{F(x, t) \ell^3}{(EI)_{\text{eff}}} \end{aligned} \quad (23)$$

که برای راحتی علامت $\sim$ حذف خواهد شد و معادله حرکت بدون بعد به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \frac{1}{2} \left[w' \int_1^x \int_0^x (\dot{w}'^2 + w' \ddot{w}') dx dx \right]' + w^{(4)} \\ + [w'(w'w'')] + \mu_e \dot{w} \\ + \theta_1 \left[\dot{w}^{(4)} + \left(\frac{1}{2} \dot{w}'' w'^2 + w'' w' \dot{w}' \right)'' \right] \\ + \theta_2 \ddot{w}'' - \theta_3 w'' \\ = \Omega^2 \left\{ \left[d(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] w'' - (d+x)w' \right\} \\ + F(x, t) \end{aligned} \quad (24)$$

در رابطه (24) μ_e ضریب میرایی خارجی و $F(x, t)$ نیروی تحریک خارجی سیستم است. با استفاده از روش گلرکین^۱ برای مود اول، ترم‌های زمانی و مکانی معادلات حرکت از هم تفکیک خواهند شد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$w(x, t) = W(t)\phi(x) \quad (25)$$

و داریم:

$$\begin{aligned} K_1 \ddot{W}(t) + \frac{1}{2} K_5 W(t) (\dot{W}(t)^2 + W(t) \ddot{W}(t)) \\ + K_2 W(t) + K_6 W(t)^3 + K_1 \mu_e \dot{W}(t) + K_2 \theta_1 \dot{W}(t) \\ + \frac{3}{2} K_7 \theta_1 W(t)^2 \dot{W}(t) + K_4 \theta_2 \ddot{W}(t) - K_4 \theta_3 W(t) \\ = \Omega^2 K_3 W(t) + \frac{1}{2} F e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (26)$$

درجایی که $K_1, K_2, \dots, K_7$ در پیوست آورده شده است. شکل مود^۲ نانوتیر است و برای شرایط مرزی یک سر آزاد و سر دیگر گیردار از رابطه زیر محاسبه خواهد شد [17]:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{\sin(Rx) - \sinh(Rx)}{\cos(R) + \cosh(R)} \\ &+ \frac{\sin(R) - \sinh(R)}{\cos(Rx) - \cosh(Rx)} \end{aligned} \quad (27)$$

که برای مود اول $R = 1.875$ ، برای مود دوم $R = 4.694$ و برای مود سوم $R = 7.855$ است. با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه [21] پاسخ معادله (26) به صورت بسط مجانبی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W(T_0, T_2) = \varepsilon W_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 W_3(T_0, T_2) \quad (28)$$

و همچنین مشتق اول و دوم نسبت به زمان به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{\partial}{\partial t^2} = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 \quad (29)$$

درجایی که:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (30)$$

همچنین $T_2 = \varepsilon^2 t$ و $T_0 = t$ مقیاس‌های زمانی مستقل می‌باشند و ε نیز پارامتر کوچک بدون بعدی است که مرتبه‌ی سایر پارامترها را مشخص می‌کند.

با جایگذاری روابط (28) تا (30) در رابطه‌ی (26) و جداسازی مراتب مشابه ε می‌توان نوشت:

$$o(\varepsilon): K_1 D_0^2 W_1 + K_2 W_1 - \Omega^2 K_3 W_1 + K_4 \theta_2 D_0^2 W_1 - K_4 \theta_3 W_1 = 0 \quad (31)$$

و

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^3): K_1 D_0^2 W_3 + K_2 W_3 - \Omega^2 K_3 W_3 + K_4 \theta_2 D_0^2 W_3 \\ - K_4 \theta_3 W_3 = -2K_1 D_2 D_0 W_1 - K_2 \theta_1 D_0 W_1 \\ - 2K_4 \theta_2 D_2 D_0 W_1 \\ - \frac{1}{2} K_5 (W_1 (D_0 W_1)^2 + W_1^2 D_0^2 W_1) \\ - K_6 W_1^3 - K_1 \mu_e D_0 W_1 + \frac{1}{2} F e^{i\omega T_0} \end{aligned} \quad (32)$$

پاسخ معادله‌ی (31) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$W_1(T_0, T_2) = A(T_2) e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_2) e^{-i\omega_n T_0} \quad (33)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (33) در معادلات (31) و (32) و حذف ترم‌های روزنانشی^۳، فرکانس طبیعی ω_n از رابطه‌ی زیر:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_2 - \Omega^2 K_3 - K_4 \theta_3}{K_1 + K_4 \theta_2}} \quad (34)$$

در رابطه‌ی (34) تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود سرعت دورانی تیر، الاستیسیته‌ی سطح، تنش سطح و چگالی سطح بر فرکانس طبیعی سیستم تاثیر می‌گذارند. با جایگذاری، معادله‌ی زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} -2K_1 A'(T_2) i\omega_n - K_2 \theta_1 A(T_2) i\omega_n \\ - 2K_4 \theta_2 A'(T_2) i\omega_n + K_5 \omega_n^2 A^2(T_2) \bar{A}(T_2) \\ - 3K_6 A^2(T_2) \bar{A}(T_2) - K_1 \mu_e A(T_2) i\omega_n + \frac{1}{2} F e^{i\sigma T_2} \\ = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

در رابطه‌ی (35) پارامتر σ پارامتر بدون بعدی است که انحراف فرکانس تحریک از فرکانس طبیعی سیستم را نشان می‌دهد و برای فرکانس تحریک در نزدیکی فرکانس طبیعی می‌توان نوشت:

$$\omega = \omega_n + \varepsilon^2 \sigma \quad (36)$$

3- تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم

در تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم، نیروی تحریک خارجی را برابر با صفر قرار می‌دهیم. $A(T_2)$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\varphi(T_2)} \quad (37)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (37) در رابطه‌ی (35) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی معادلات از یکدیگر، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a(T_2) \varphi'(T_2) \omega_n (2K_1 + 2K_4 \theta_2) \\ + \frac{1}{4} a(T_2)^3 (K_5 \omega_n^2 - 3K_6) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

و

$$\begin{aligned} a'(T_2) \omega_n (2K_1 + 2K_4 \theta_2) \\ + a(T_2) \omega_n (K_2 \theta_1 + K_1 \mu_e) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

رابطه‌ی (39) یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خطی است و از آن $a(T_2)$ معلوم خواهد شد. با جایگذاری $a(T_2)$ در معادله‌ی (38) و انتگرال‌گیری مستقیم $\varphi(T_2)$ معلوم خواهد شد. حال با معلوم بودن $a(T_2)$ و

³ Resonance terms

¹ Galerkin method

² Mode shape

در شکل (2) همانطور که مشاهده می‌شود با گذشت زمان دامنه‌ی سیستم کاهش یافته و نانوتیر ساخته شده از آلومینیوم با دامنه‌ی کوچک‌تری نسبت به سیلیکون به حالت کاملاً میرا خواهد رسید. در شکل (3) تاثیر تنش سطحی بر پاسخ آزاد نانوتیر ساخته شده از آلومینیوم نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در یک زمان مشخص با افزایش تنش باقیمانده‌ی سطحی دامنه کاهش می‌یابد. بنابراین تنش سطحی بر پاسخ آزاد سیستم تاثیر خواهد گذاشت. AI مخفف آلومینیوم و Si سیلیکون می‌باشند. در شکل (4) تاثیر الاستیسیته‌ی سطح بر پاسخ آزاد نانوتیر ساخته شده

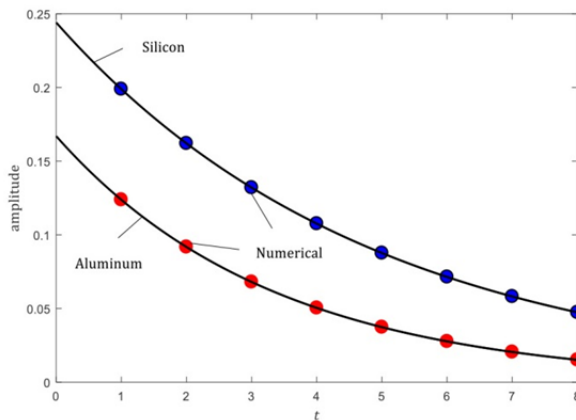


Fig.2 the free vibrations response for Al, Si nano beams in the first mode

شکل 2 پاسخ ارتعاشات آزاد برای نانوتیرهای آلومینیوم و سیلیکون در مود اول

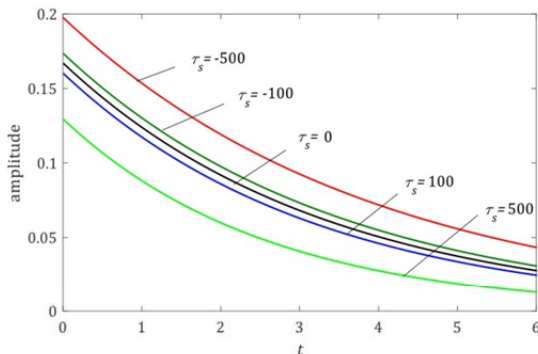


Fig.3 The free vibrations response for difference surface stresses for Al
شکل 3 پاسخ ارتعاشات آزاد برای تنش‌های سطح مختلف برای آلومینیوم

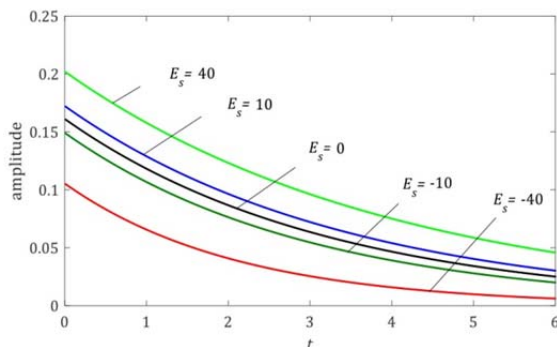


Fig.4 The free vibrations response for difference surface elasticities for Al
شکل 4 پاسخ ارتعاشات آزاد برای الاستیسیته‌های سطح مختلف برای آلومینیوم

$\varphi(T_2)$ پاسخ آزاد معادله یعنی $A(T_2)$ معلوم خواهد شد. پس از حل معادله‌ی (39) می‌توان نوشت:

$$a^2 = \frac{8\alpha_1}{8\kappa\alpha_1 e^{2\varepsilon\alpha_1 t}} \quad (40)$$

درجایی که α_1 به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$\alpha_1 = \frac{K_2\theta_1 + K_1\mu_e}{2K_1 + 2K_4\theta_2} \quad (41)$$

و κ از معادله‌ی زیر به دست خواهد آمد:

$$\omega_{n0}^2\kappa^3 - \kappa^2\alpha_1^2 = 0 \quad (42)$$

همچنین $\varphi(T_2)$ از رابطه‌ی انتگرالی زیر به دست خواهد آمد:

$$\varphi(T_2) = \int (\alpha_4 + \omega_n^2\alpha_2) \frac{a^2}{8\omega_n} dT_2 \quad (43)$$

درجایی که α_4 و α_2 به صورت زیر نوشته خواهند شد:

$$\alpha_2 = \frac{-K_5}{K_1 + K_4\theta_2}, \quad \alpha_4 = \frac{3K_6}{K_1 + K_4\theta_2} \quad (44)$$

4- تحلیل ارتعاشات اجباری و پایداری سیستم

در ارتعاشات اجباری، نیروی تحریک خارجی به صورت $\frac{1}{2}F e^{i\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود. در رابطه‌ی (35)، $A(T_2)$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A(T_2) = \frac{1}{2}b(T_2)e^{i\psi(T_2)}e^{i\sigma T_2} \quad (45)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (45) در رابطه‌ی (35) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی می‌توان نوشت:

$$2K_1(b(T_2)\psi'(T_2) + b(T_2)\sigma)\omega_n + 2K_4\theta_2(b(T_2)\psi'(T_2) + b(T_2)\sigma)\omega_n + \frac{1}{4}K_5\omega_n^2b(T_2)^3 - \frac{3}{4}K_6b(T_2)^3 + F \cos \psi(T_2) = 0 \quad (46)$$

و

$$-2K_1b'(T_2)\omega_n - K_2\theta_1b(T_2)\omega_n - 2K_4\theta_2b'(T_2)\omega_n - K_1\mu_e b(T_2)\omega_n - F \sin \psi(T_2) = 0 \quad (47)$$

با صفر قرار دادن $\psi'(T_2)$ و $b'(T_2)$ ، پاسخ حالت ماندگار سیستم¹ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$2K_1b(T_2)\sigma\omega_n + 2K_4\theta_2b(T_2)\sigma\omega_n + \frac{1}{4}K_5\omega_n^2b(T_2)^3 - \frac{3}{4}K_6b(T_2)^3 + F \cos \psi(T_2) = 0 \quad (48)$$

و

$$-K_2\theta_1b(T_2)\omega_n - K_1\mu_e b(T_2)\omega_n - F \sin \psi(T_2) = 0 \quad (49)$$

5- نتایج عددی

در شکل (2) نمودار پاسخ آزاد سیستم برای دو نانوتیر آلومینیوم و سیلیکون با ضریب میرایی خارجی 0.00008، ضریب میرایی داخلی 0.000000001، سرعت دورانی 100000، $d = 0.001$ ، ابعاد $b_0 = 5 \text{ nm}$ ، $h = 5 \text{ nm}$ و $\ell = 500 \text{ nm}$ در مود اول ترسیم شده است. خواص آلومینیوم و سیلیکون به صورت زیر است [7]:

سیلیکون	آلومینیوم
$E = 210 \text{ GPa}$	$E = 70 \text{ GPa}$
$\nu = 0.24$	$\nu = 0.3$
$\rho = 2370 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
$E_s = -10.6543 \text{ N/m}$	$E_s = 5.1882 \text{ N/m}$
$\tau_s = 0.6048 \text{ N/m}$	$\tau_s = 0.9108 \text{ N/m}$
$\rho_s = 3.17 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2$	$\rho_s = 5.46 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2$

¹ Steady state solution

در شکل (8) پاسخ فرکانسی سیستم برای یک نانوتیر دوار ساخته شده از آلومینیوم با ضریب میرایی خارجی 0.000008 ، ضریب میرایی داخلی 0.00000000005 ، دامنه‌ی تحریک خارجی 0.1 و ابعاد $b_0 = 5.5 \text{ nm}$ ، $h = 4.5 \text{ nm}$ و $\ell = 50 \text{ nm}$ در دو حالت با اثرات سطحی و بدون اثرات سطحی در مود اول ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود سیستم حداکثر دارای سه پاسخ می‌باشد که دوتای آن پایدار و یکی ناپایدار است. در سیستم دو نقطه‌ی انشعاب از نوع گره-زینی وجود دارد. همچنین هر دو انشعاب در فرکانس‌های تحریک بالاتر از فرکانس طبیعی در حال وقوع می‌باشند. در نظر گرفتن اثرات سطحی باعث شده است که نمودار به سمت راست کج شود و رفتار سفت‌شوندگی در سیستم ایجاد شود، همچنین محل نقاط انشعابی و دامنه‌ی سیستم تغییر کند.

در شکل‌های (9) و (10) تاثیر ضرایب میرایی خارجی و داخلی بر پاسخ فرکانسی سیستم مشاهده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود ضرایب میرایی همانند تاثیرشان بر پاسخ آزاد در پاسخ اجباری نیز، نقش کاهنده‌ی دامنه را برعهده دارند. افزایش ضرایب میرایی خارجی یا داخلی، محل نقطه‌ی انشعاب دوم را تغییر چندانی نمی‌دهد، ولی محل نقطه‌ی انشعاب اول را به شدت تغییر خواهد داد. افزایش ضرایب میرایی خارجی و داخلی باعث شده است که نقطه‌ی انشعاب اول در فرکانس‌هایی نزدیک‌تر به فرکانس طبیعی، به وقوع بپیوندد.

در شکل (11) پاسخ فرکانسی سیستم برای آلومینیوم و دو ابعاد از سطح

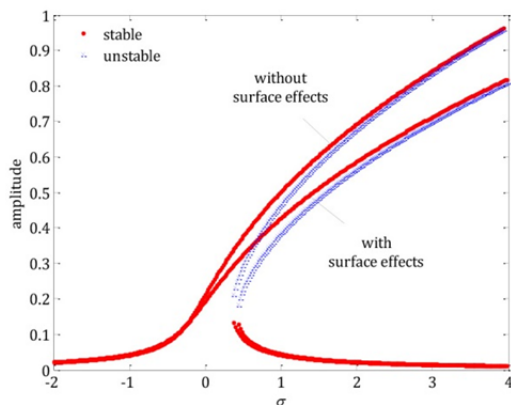


Fig.8 the frequency response curve with and without surface effects for Al

شکل 8 نمودار پاسخ فرکانسی با اثرات سطح و بدون اثرات سطح برای آلومینیوم

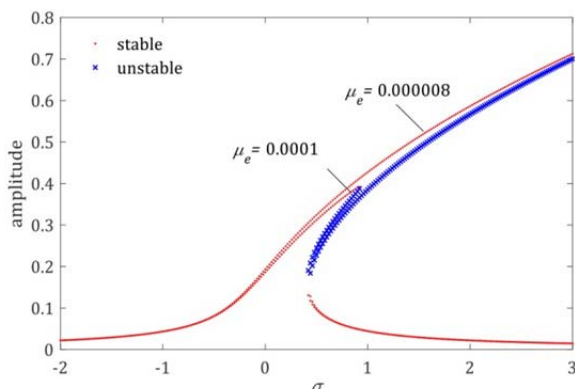


Fig.9 the frequency response curve for difference external damping coefficients for Al

شکل 9 نمودار پاسخ فرکانسی برای ضرایب میرایی خارجی گوناگون برای آلومینیوم

از آلومینیوم را نشان می‌دهد. در یک زمان مشخص با افزایش الاستیسیته‌ی سطح دامنه‌ی سیستم افزایش خواهد یافت. بنابراین الاستیسیته‌ی سطح نیز بر پاسخ سیستم تاثیر خواهد گذاشت.

شکل (5) تاثیر چگالی سطح بر پاسخ آزاد نانو تیر ساخته شده از آلومینیوم را نشان می‌دهد. با افزایش چگالی سطح دامنه افزایش یافت و با کاهش آن در یک زمان مشخص دامنه کاهش می‌یابد. بنابراین چگالی سطح و الاستیسیته‌ی سطح، بر پاسخ سیستم تاثیر مشابهی خواهند گذاشت. در شکل‌های (6) و (7) تاثیر ضرایب میرایی خارجی و داخلی بر پاسخ آزاد سیستم ترسیم شده است. به ازای یک زمان مشخص، هرچه ضریب میرایی خارجی یا داخلی بزرگ‌تر باشد دامنه‌ی سیستم کوچک‌تر است و ضرایب میرایی نقش کاهنده و میراکننده‌ی ارتعاشات را برعهده دارند.

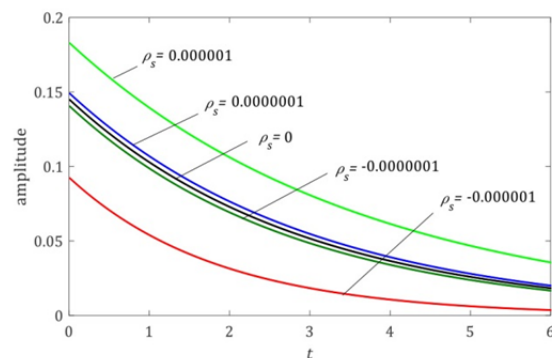


Fig.5 the free vibrations response for difference surface densities for Al
شکل 5 پاسخ ارتعاشات آزاد برای چگالی‌های سطح مختلف برای آلومینیوم

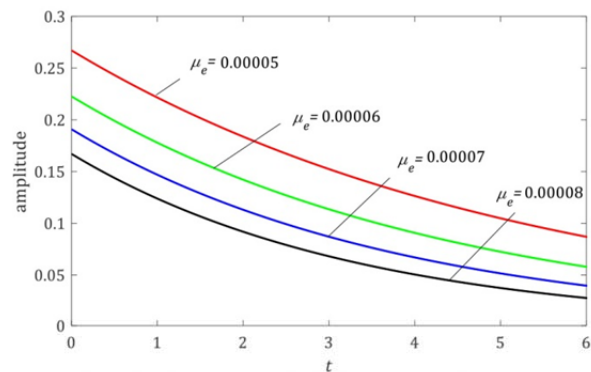


Fig.6 the free vibrations response for difference external damping coefficients for Al

شکل 6 پاسخ ارتعاشات آزاد برای ضرایب میرایی خارجی مختلف برای آلومینیوم

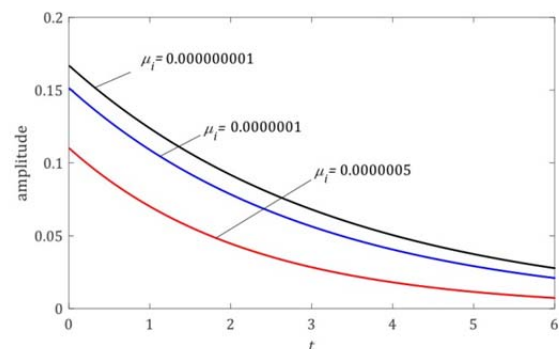


Fig.7 the free vibrations response for difference internal damping coefficients for Al

شکل 7 پاسخ ارتعاشات آزاد برای ضرایب میرایی داخلی مختلف برای آلومینیوم

در شکل (13) تاثیر تنش باقیمانده‌ی سطح بر پاسخ فرکانسی سیستم برای آلومینیوم ترسیم شده است. با افزایش تنش باقیمانده‌ی سطحی نمودار به سمت راست کج می‌شود و رفتار سیستم سفت‌شونده خواهد شد. همچنین نقاط انشعاب دوم در فرکانس‌های تحریک بزرگ‌تری به وقوع می‌پیوندد. بنابراین تنش باقیمانده‌ی سطح یکی از مهم‌ترین عوامل سطحی است که باید منظور شود.

در شکل (14) پاسخ فرکانسی سیستم برای الاستیسیته‌های سطح گوناگون برای آلومینیوم ترسیم شده است. افزایش الاستیسیته‌ی سطح باعث افزایش اندکی در دامنه‌ی سیستم خواهد شد و اندکی رفتار نرم‌شونده در سیستم مشاهده خواهد شد.

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری یک نانوتیر دوار ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن تمامی اثرات سطحی به کمک تئوری غیرکلاسیک گورتین مورد تحلیل و بررسی شد. در نظر گرفتن اثرات سطح هم بر پاسخ آزاد و هم بر پاسخ اجباری سیستم تاثیرگذار خواهد بود و نقاط انشعابی سیستم را دستخوش تغییر می‌کند. اثرات میرایی نیز نقش کاهنده‌ی دامنه‌ی ارتعاشات را برعهده دارند. در تحلیل آزاد در یک زمان مشخص، افزایش تنش باقیمانده‌ی سطح باعث کاهش دامنه و افزایش الاستیسیته‌ی سطح یا چگالی سطح باعث افزایش دامنه خواهند شد. در تحلیل اجباری مشاهده می‌شود در مود اول، در نظر گرفتن تمامی اثرات سطحی باعث بروز رفتار سفت‌شوندگی می‌شود و دامنه‌ی اجباری و محل نقاط انشعابی تغییر

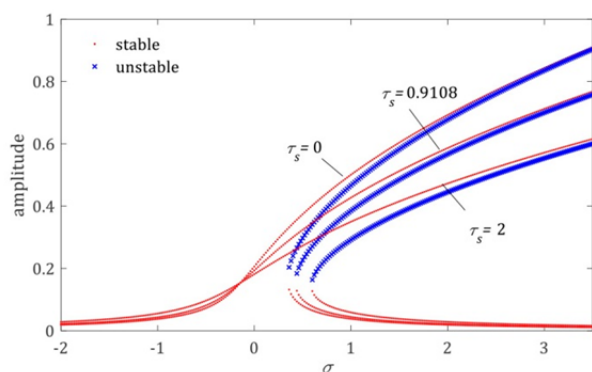


Fig.13 the frequency response curve for difference surface stresses for Al

شکل 13 نمودار پاسخ فرکانسی برای تنش‌های سطح مختلف برای آلومینیوم

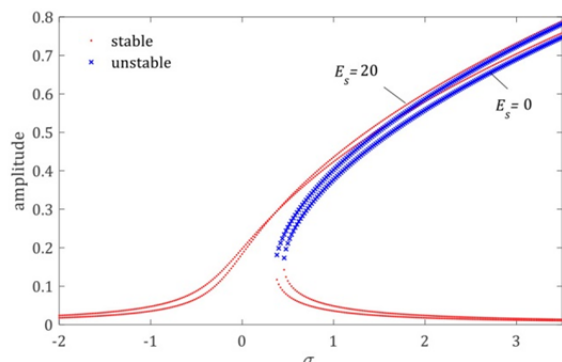


Fig.14 the frequency response curve for difference surface elasticities for Al

شکل 14 نمودار پاسخ فرکانسی برای الاستیسیته‌های سطح مختلف برای آلومینیوم

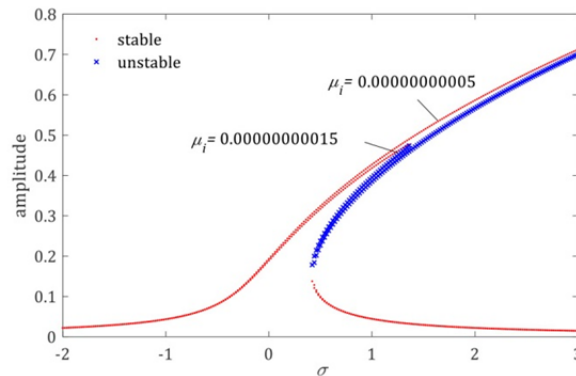


Fig.10 the frequency response curve for difference internal damping coefficients for Al

شکل 10 نمودار پاسخ فرکانسی برای ضرایب میرایی داخلی گوناگون برای آلومینیوم

مقطع گوناگون ولی با مساحت سطح یکسان ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود ابعاد گوناگون سطح باعث تغییر پاسخ سیستم و محل نقاط انشعابی خواهد شد. بنابراین ابعاد سطح مقطع، یک عامل تاثیرگذار بر پایداری سیستم و پاسخ حالت ماندگار می‌باشد.

در شکل (12) تاثیر دامنه‌ی تحریک خارجی بر پاسخ فرکانسی سیستم نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با کاهش دامنه‌ی تحریک خارجی دامنه‌ی سیستم کاهش یافته و نقاط انشعاب اول و دوم نیز در فرکانس‌هایی نزدیک‌تر به فرکانس طبیعی اتفاق خواهند افتاد.

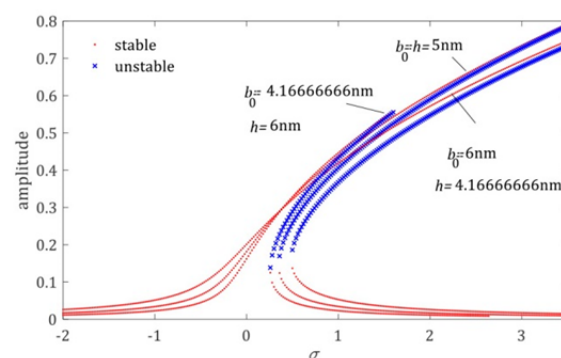


Fig.11 the frequency response curve for difference dimensions of surface section for Al

شکل 11 نمودار پاسخ فرکانسی برای ابعاد مختلف سطح مقطع برای آلومینیوم

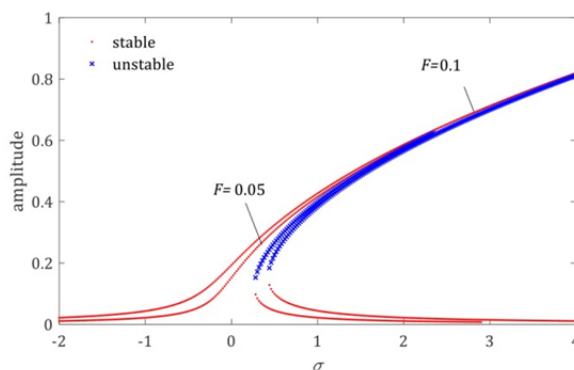


Fig.12 the frequency response curve for difference amplitude of excitation for Al

شکل 12 نمودار پاسخ فرکانسی برای دامنه‌ی تحریک خارجی مختلف برای آلومینیوم

9- مراجع

- [1] S. N. Mahmoodei, S. E. Khadem, M. Kokabi, Non-linear free vibrations of Kelvin-Voigt visco-elastic beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, No. 6, pp. 722-732, 2007.
- [2] S. N. Mahmoodei, N. Jalili, S. E. Khadem, An experimental investigation of nonlinear vibration and frequency response analysis of cantilever viscoelastic beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 311, No. 3-5, pp. 1409-1419, 2008.
- [3] S. M. Hosseini, H. Kalhori, A. Shoostari, S. N. Mahmoodei, Analytical solution for nonlinear forced response of a viscoelastic piezoelectric cantilever beam resting on a nonlinear elastic foundation to an external harmonic excitation, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 67, pp. 464-471, 2014.
- [4] D. Younesian, E. Esmailzadeh, Non-linear vibration of variable speed rotating viscoelastic beams, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 60, No. 1, pp. 193-205, 2010.
- [5] A. Mohebshehadin, A. Farrokhhabadi, The influence of the surface energy on the instability behavior of NEMS structures in presence of intermolecular attractions, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 101-102, pp. 437-448, 2015.
- [6] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemzadeh, H. Rokni, Nonlocal nonlinear free vibration of nanobeams with surface effects, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 52, pp. 44-53, 2015.
- [7] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemzadeh, An analytical study on the nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams incorporating surface effects, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 52, pp. 199-206, 2013.
- [8] S. Hosseini-Hashemi, M. Fakher, R. Nazemzadeh, Surface effects on free vibration analysis of nanobeams using nonlocal elasticity: A comparison between Euler-Bernoulli and Timoshenko, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 5, No. 3, pp. 290-304, 2013.
- [9] S. M. Pourkiae, S. E. Khadem, M. Shahgholi, Nonlinear vibration and stability analysis of an electrically actuated piezoelectric nanobeam considering surface effects and intermolecular interactions, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 23, No. 12, pp. 1873-1889, 2017.
- [10] R. Ansari, V. Mohammadi, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, H. Rouhi, Nonlinear vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on surface stress elasticity theory, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 45, pp. 143-152, 2014.
- [11] M. Safarabadi, M. Mohammadi, A. Farajpour, M. Goodarzi, Effect of Surface Energy on the Vibration Analysis of Rotating Nanobeam, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 7, No. 3, pp. 299-311, 2015.
- [12] M. Ghadiri, N. Shafiei, Nonlinear bending vibration of a rotating nanobeam based on nonlocal Eringen's theory using differential quadrature method, *Microsystem Technologies*, Vol. 22, No. 12, pp. 2853-2867, 2016.
- [13] M. Ghadiri, N. Shafiei, H. Safarpour, Influence of surface effects on vibration behavior of a rotary functionally graded nanobeam based on Eringen's nonlocal elasticity, *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No. 4, pp. 1045-1065, 2017.
- [14] M. Ghadiri, N. Shafiei, Vibration analysis of a nano-turbine blade based on Eringen nonlocal elasticity applying the differential quadrature method, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 23, No. 19, pp. 3247-3265, 2017.
- [15] J. Aranda-Ruiz, J. Loya, J. Fernández-Sáez, Bending vibrations of rotating nonuniform nanocantilevers using the Eringen nonlocal elasticity theory, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 9, pp. 2990-3001, 2012.
- [16] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Second Edition, pp. 195-202, New York: Wiley- Interscience, 2004.
- [17] L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, New York: Macmillan, 1967.
- [18] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Hopf bifurcation analysis of asymmetrical rotating shafts, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 77, No. 4, pp. 1141-1155, 2014.
- [19] C. Q. Ru, Simple geometrical explanation of Gurtin-Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, Vol. 53, No. 3, pp. 536-544, 2010.
- [20] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, Surface stress in solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 431-440, 1978.
- [21] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Methods*, Second Edition, pp. 139-142, New York: Wiley-Interscience, 1981.

می‌کنند. افزایش تنش سطحی باعث می‌شود که دامنه‌ی سیستم کاهش یافته و نقاط انشعابی در فرکانس‌های تحریک بزرگ‌تری به‌وقوع پیوندند. افزایش الاستیسیته‌ی سطح باعث افزایش اندکی در دامنه می‌شود. کاهش دامنه‌ی تحریک خارجی باعث کاهش دامنه می‌شود و پاسخ سیستم به‌سوی پاسخ کاملاً پایدار سوق پیدا خواهد کرد. همچنین مشاهده می‌شود که ضرایب میرایی خارجی و داخلی نقطه‌ی انشعاب دوم را تغییر چندانی نمی‌دهند ولی نقطه‌ی انشعاب اول به‌شدت تغییر خواهد کرد. بنابراین اثرات مربوط به سطح مخصوصاً تنش سطح و الاستیسیته‌ی سطح، ضریب میرایی خارجی، ضریب میرایی داخلی، دامنه‌ی تحریک خارجی، ابعاد سطح مقطع، جنس نانوتیر و ... پارامترهای تأثیر گذاری بر پاسخ سیستم هستند که در طراحی و ساخت نانوتیرهای دوار می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

7- فهرست علائم

d	شعاع هاب
E_s	الاستیسیته‌ی سطح
N	نیروی گریز از مرکز
u, w	جابجایی طولی و جابه‌جایی عرضی در راستای z

علائم یونانی

k_y	انحنای نانوتیر دوار در راستای y
μ_e	ضریب میرایی خارجی
μ_i	ضریب میرایی داخلی
ρ_{eff}	چگالی جرمی موثر
ρ_s	چگالی سطح
τ_s	تنش سطح

8- پیوست

$$K_1 = \int_0^1 \phi(x)^2 dx, \quad K_2 = \int_0^1 \phi(x)\phi^{(4)}(x) dx,$$

$$K_3 = \int_0^1 \left\{ \left[d(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] \phi(x)\phi''(x) - (d+x)\phi(x)\phi'(x) \right\} dx$$

$$K_4 = \int_0^1 \phi(x)\phi''(x) dx,$$

$$K_5 = \int_0^1 \phi(x) \left(\phi'(x) \int_1^x \int_0^x \phi'(x)^2 dx dx \right)' dx,$$

$$K_6 = \int_0^1 \phi(x) [\phi'(x)(\phi'(x)\phi''(x))]' dx,$$

$$K_7 = \int_0^1 \phi(x)(\phi'(x)^2\phi''(x))'' dx$$