ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

پیاده‌سازی روش میدان فاز برای شکست ترد و کاربرد در ساختارهای متخلخل

محمد موسویون[1]، محمد مشایخی[2]، مصطفی جمشیدیان[3*]، حجت‌الله بادنوا[4]

1- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

4- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء، بهبهان

* اصفهان، صندوق پستی 8415683111، jamshidian@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 بهمن 1396

پذیرش: 12 فروردین 1397

ارائه در سایت: 14 اردیبهشت 1397

کلید واژگان:

روش میدان فاز

شکست ترد

ساختار متخلخل

روش اجزای محدود

چکیده

اخیراً روش میدان فاز به عنوان یک ابزار کارآ برای شبیه‌سازی رشد ترک در مواد مختلف به‌کار گرفته شده است. هدف از این پژوهش به‌کارگیری توانایی‌های روش میدان فاز در مدل‌سازی رشد ترک در محیط‌های پیچیده هندسی مانند ساختار متخلخل است. در روش میدان فاز نیازی به تعریف ترک‌های پیش‌فرض نیست و این روش می‌تواند مسیر پیچیده و منحنی‌شکل ترک را پیش‌بینی کند. این هدف با رهیافت جایگزینی ناپیوستگی‌های تیز با متغیر آسیب میدان فاز که به‌صورت یک ترک پخش‌شونده نشان داده شده انجام می‌شود. به منظور شبیه‌سازی شکست ترد در این پژوهش، ابتدا معادلات میدان جابجایی الاستیک و میدان فاز ترک بیان می‌گردد. سپس با استفاده از فرم ضعیف معادلات، حل معادلات به‌صورت غیروابسته صورت می‌گیرد. برای پیاده‌سازی معادلات به روش اجزای محدود، نرم‌افزار اباکوس با زیربرنامه UEL به‌کار گرفته می‌شود. با توجه به آنکه ساختار استخوان یک ساختار متخلخل است، یک حجمک نماینده از استخوان برای شبیه‌سازی میدان فاز انتخاب می‌شود. به منظور راستی‌آزمایی مدل توسعه داده شده، آزمون کشش نمونه دارای ترک لبه‌ای شبیه‌سازی می‌شود. در ادامه، رشد ترک در یک محیط متخلخل با درصدهای تخلخل متفاوت تحت بارگذاری کششی، شبیه‌سازی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد روش میدان فاز می‌تواند رشد ترک در ساختارهای پیچیده از نظر هندسی را به‌درستی پیش‌بینی کند. شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان می‌دهد ظرفیت تحمل بار یا استحکام ساختار متخلخل با افزایش تخلخل به صورت پیوسته کاهش می‌یابد و این استحکام در مقدار بحرانی تخلخل کاهش ناگهانی دارد.

Implementation of the phase-field method for brittle fracture and application to porous structures

Mohammad Mousavion[1], Mohammad Mashayekhi[1], Mostafa Jamshidian[1*], Hojjat Badnava[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.[1]

2- Department of Mechanical Engineering, Behbahan Khatam Alanbia University of Technology, Khuzestan, Iran.[2]

* P.O.B. 8415683111 Isfahan, Iran, jamshidian@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 February 2018
Accepted 01 April 2018
Available Online 04 May 2018

Keywords:
Phase field method
Brittle fracture
Porous structures
Finite element method

ABSTRACT

Recently, the phase field approach has gained popularity as a versatile tool for simulating crack propagation. The purpose of this study is to employ the capabilities of the phase field method for crack growth modeling in complex structures such as porous media. The phase field method does not need predefined cracks and it can simulate curvilinear crack path. This goal is accomplished by replacing the sharp discontinuities with a scalar damage phase field parameter representing the diffuse crack topology. To simulate brittle fracture in this study, the equations of elastic displacement field and fracture phase field are first introduced. Afterwards, using the weak form of the equations, the staggered solution of the equations is performed. To implement the equations in the finite element method, the Abaqus software with User Element Subroutine (UEL) is used. Given that the bone structure is somehow a porous structure, a representative volume element of the bone is selected for phase field simulation. In order to verify the developed model, the tensile test of the single edge notched specimen has been simulated. Subsequently, crack propagation in a porous media with different porosities under tensile loading was simulated. The simulation results illustrate the capability of the phase field method in predicting crack growth in geometrically complex structures. In addition, the load-carrying capacity or the strength of the porous structure continuously decreases with increasing porosity and noteworthy is that such a strength is suddenly decreased around a critical porosity value.

1- مقدمه

شناسایی مکانیزم‌های شکست در تحلیل سازه‌ها با رویکرد مدل‌سازی عددی ترک‌های اولیه و رشد ترک، در کاربردهای مهندسی از اهمیت زیادی برخوردار است. اولین نظریه در مورد ترک‌های اولیه و رشد ترک در مواد ترد با استفاده از قوانین ترمودینامیکی توسط گریفیث معرفی شد و در ادامه توسط اروین توسعه داده شد [1]. بر اساس نظریه اروین برای ایجاد سطح جدید بایستی یا کار خارجی انجام شود و یا انرژی درونی کاهش یابد. این نظریه بر اساس حداقل انرژی لازم برای شکست ماده بنا شده است. براساس

این نظریه نرخ تغییرات انرژی پتانسیل سطح ترک با G نمایش داده می‌شود. برای سنجش شروع رشد ترک باید نرخ آزادسازی انرژی با نرخ بحرانی آزادسازی انرژی،G_c مقایسه گردد. درصورتی‌که G از مقدار بحرانی بیشتر باشد رشد ترک ادامه می‌یابد [2].

روش میدان فاز اولین بار توسط گینزبرگ بیان شد [3]. در روش میدان فاز، مدل‌سازی ترک براساس تابع چگالی انرژی - که اولین‌بار توسط بوردین و همکاران پیشنهاد شد- انجام می‌شود [4]. در روش میدان فاز تغییرات فیزیکی و شیمیایی در طول فرایند شکست باندهای بین اتمی و نیز تأثیر میکروترک‌ها، خلل و فرج و آخال‌ها بحث نخواهد شد. در عوض، مواد به‌صورت پیوسته فرض می‌شوند و می‌توان فرآیند شکست را بر اساس تجزیه و تحلیل ماکروسکوپی مقادیر تنش و کرنش و نیز انرژی پیش‌بینی کرد. ترک مانند یک برش در ساختار جسم است. از دیدگاه ریاضی، ترک به عنوان یک ناپیوستگی هندسی بوده و به طور کلی با یک بعد کم‌تر از ابعاد هندسی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در یک محیط دو بعدی، ترک یک خط در نظر گرفته می‌شود.

هدف اصلی روش میدان فاز شبیه‌سازی رشد ترک مستقل از گسسته‌سازی هندسه است. به عبارتی دیگر، در این روش رشد ترک بر خلاف روش اجزا محدود توسعه‌یافته به شبکه اجزای محدود مسئله مورد نظر بستگی ندارد [5-6]. در روش‌های مبتنی بر جداسازی گره‌ای، برای مدل‌سازی ترک باید آن را به‌صورت واقعی ایجاد کرد. به عبارتی دیگر، برای تحلیل رشد ترک در این روش باید گره‌ها را از هم جدا کرد [7]. در مقابل، عدم نیاز به این کار را می‌توان از مزایای روش میدان فاز برشمرد. با این حال، در روش میدان فاز ترک به‌صورت تقریبی مدل‌سازی می‌شود. بنابراین، روش میدان فاز به‌طور قابل ملاحظه‌ای باعث کاهش پیچیدگی‌های پیاده‌سازی حل عددی برای مسائل مربوط به شکست خواهد شد. چراکه در این روش نیازی به حل عددی ناپیوستگی‌ها در میدان جابجایی نخواهد بود. در واقع، در روش میدان فاز دو میدان پیوسته جابجایی و متغیر میدان فاز به صورت هم‌زمان حل می‌شوند. بنابراین، با استفاده از روش میدان فاز می‌توان رشد ترک در ساختارهای پیچیده از لحاظ هندسی را بررسی کرد.

از جمله تحقیقاتی که پیرامون مدل‌سازی شکست ترد به روش میدان فاز انجام گرفته، می‌توان به پژوهش میه [8] اشاره کرد. در این پژوهش، اساس روش میدان فاز بر تعریف اثر تاریخچه انرژی بر رشد ترک است. همچنین الگوریتم حل بر اساس حل غیروابسته‌ی معادلات است. در پژوهش شیخ و همکاران [10,9] پیاده‌سازی روش میدان فاز برای رشد ترک با فرض شکست ترد انجام شده است. الگوریتم حل معادلات در این پژوهش براساس حل هم‌زمان معادلات است.

در پژوهش بوردین و همکاران[11]، مدل میدان فاز برای شکست ترد به حالت دینامیکی با در نظر گرفتن اثرات اینرسی گسترش داده شده است. حل عددی معادلات به دو روش حل هم‌زمان و حل غیروابسته‌ی معادلات انجام شده است. با توجه به نتایج این پژوهش، حل غیروابسته کارایی بهتری در شبیه‌سازی شکست ترد در حالت دینامیکی دارد. بوردین و همکاران، با بررسی‌های موردی رشد ترک در حالت دینامیکی نشان دادند که مدل میدان فاز به‌خوبی توانسته است رشد ترک در حالت دینامیکی در نمونه‌های دوبعدی و سه‌بعدی را مدل‌سازی کند.

در پژوهش دیگری از میه [12]، مدل میدان فاز با فرض تغییر شکل‌های بزرگ برای شکست پلیمر لاستیکی توسعه داده شد. در فرمول‌بندی مبتنی بر کرنش بزرگ، تابع چگالی انرژی علاوه بر متغیر میدان فاز و گرادیان آن به گرادیان تغییر شکل نیز وابسته است. در نهایت، با مدل‌سازی نمونه دارای ترک سکه‌ای‌شکل تحت کرنش بزرگ، رشد ترک و شکست کامل جسم بررسی شده است. مای و همکاران [13]، تأثیر نیروی خارجی بر رشد ترک به روش میدان فاز را بررسی کردند. در این پژوهش، شبیه‌سازی مسئله شکست ترد با فرض بارگذاری نیروکنترل[1] انجام شده است. با فرض نیروکنترل، حل مسئله شامل بازشدگی ترک[2] خواهد بود. بنابراین، ماتریس سختی غیرقطری بوده و برخلاف قبل نمی‌توان به دلیل تأثیر ناچیز درایه‌های غیرقطری در حل عددی [8]، از آن صرف نظر کرد. به همین دلیل، از روش ریکس[3] جهت حل معادلات استفاده شده است. در نهایت، با مقایسه نتایج نیرو جابجایی با مرجع میه [8] وجود ناپایداری[4] در نتایج دیده شد.

ازجمله کاربردهای روش میدان فاز در شبیه‌سازی رشد ترک می‌توان به پژوهش‌های اخیر شیخ و همکاران [14,10] و بادنوا و همکاران [16,15] اشاره کرد. شیخ و همکاران [14] به شبیه‌سازی شکست نانوکامپوزیت‌های پلیمری و پیش‌بینی مقاومت کششی و چقرمگی شکست پرداختند. ازجمله فرضیات این پژوهش [14]، در نظرگرفتن نانوکامپوزیت‌های پلیمری به عنوان یک ماده همسانگرد و همچنین فرض کرنش بزرگ است. در نهایت، با حل عددی شکست در حجمک نماینده[5] نانوکامپوزیت پلیمری با درصدوزنی مختلف و نسبت لاغری مختلف نانوذرات، رشد ترک به روش میدان فاز بررسی شده است. در پژوهش بادنوا و همکاران [15]، مدل‌سازی شکست ترد تحت بارگذاری ترمومکانیکی جهت شبیه‌سازی رشد ترک به روش میدان فاز در محیط‌های دوبعدی و سه‌بعدی ناهمگن انجام شده است. با توجه به حساسیت به شبکه اجزای محدود در مدل میدان فاز توسعه داده شده، از یک الگوریتم پالایش شبکه اجزای محدود[6] بر اساس مسیر رشد ترک استفاده شده است. جهت اعمال اثر دما در شکست می‌بایست کرنش حرارتی غیرالاستیک در نظر گرفته شود. با فرض کرنش کوچک، کرنش کل به دو بخش کرنش الاستیک و کرنش حرارتی تقسیم می‌شود. الگوریتم حل معادلات نیز به‌صورت حل غیروابسته‌ی معادلات است. در ادامه، رشد ترک ناشی از کرنش حرارتی در دو حالت با در نظر گرفتن پالایش شبکه اجزای محدود و بدون در نظر گرفتن آن در نمونه‌های کامپوزیتی بررسی شده است. در نهایت، با مقایسه زمان حل برای این دو حالت مشخص شد که شبیه‌سازی رشد ترک با رویکرد ترمومکانیکی با در نظرگرفتن الگوریتم پالایش مش زمان حل عددی را تا حد زیادی کاهش خواهد داد. همچنین در پژوهش بادنوا [16] با ترکیب مدل رفتار پلاستیک و روش میدان فاز، مدلی جهت شبیه‌سازی شکست مواد شکل‌پذیر پیشنهاد شده است.

روش میدان فاز برای شکست، رویکردی جدید برای مدل‌سازی عددی و تحلیل رشد ترک در ساختارهای پیچیده ارائه می‌دهد. در پژوهش حاضر، برای پیاده‌سازی عددی روش میدان فاز از روش حل غیروابسته معادلات حاکم سود برده می‌شود. از مزایای روش غیروابسته در مقایسه با روش حل هم‌زمان معادلات میدان جابجایی و میدان فاز می‌توان به همگرایی بهتر حل عددی در روش غیروابسته اشاره کرد. در حل غیروابسته، معادلات میدان جابجایی و میدان فازی به صورت مجزا در دو زیربرنامه حل می‌شوند و نتایج استخراج شده در این دو زیربرنامه در هر گام حل به اشتراک گذاشته

[1] Load control
[2] Crack opening
[3] Arc length
[4] Snap back behavior
[5] Representative Volume Element (RVE)
[6] Mesh refinement algorithm

می‌شوند. در پژوهش حاضر به منظور استفاده از این مزیت روش میدان فاز، رشد ترک در ساختارهای متخلخل بررسی شده است. از آنجا که ساختار میکروسکوپی استخوان یک ساختار متخلخل پیچیده از لحاظ هندسی برشمرده می‌شود، یک حجمک نماینده از بافت اسفنجی استخوان که دارای شرایط و فرضیات حاکم بر مدل میدان فاز است، انتخاب شده است. پژوهش حاضر به بررسی میکرومکانیکی شکست ترد ناحیه‌ی استئون بخش متراکم[1] استخوان با استفاده از شبیه‌سازی رشد ترک به روش میدان فاز می‌پردازد. این ناحیه دارای محیطی متخلخل و ترد بوده که با فرضیات حاکم بر مسئله مطابقت دارد. در این پژوهش، به منظور بررسی تغییرات ظرفیت تحمل بار ساختار متخلخل استخوان با افزایش پوکی استخوان، شکست ناشی از رشد ترک در این ساختارهای متخلخل با درصد تخلخل‌های مختلف بررسی شده است.

2- روش میدان فاز

مطابق شکل 1، روش میدان فاز بر اساس تقریب ناپیوستگی ترک تیز Γ به ترک پخش‌شونده Γ_l استوار است. با در نظر گرفتن $x = 0$ به عنوان مکانی که شکست کامل ماده را نشان می‌دهد، ترک تیز را می‌توان با متغیر میدان فاز ترک $d(x) \in [0,1]$ توصیف کرد.

در اینجا، $d(x)$ پارامتری حدی است که برای $d = 0$ ماده سالم و برای $d = 1$ ماده کاملاً شکسته شده در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل 2 مشاهده می‌شود، پایه و اساس مدل میدان فاز در زمینه مدل‌سازی رشد ترک برتقریب زدن ناپیوستگی Γ به Γ_l است.

با در نظر گرفتن تقریب ترک تیز با ترک پخش‌شونده درحالت یک بعدی مطابق شکل 2، میه و همکاران [8] این تقریب را با معادله (1) بیان کرده‌اند:

$$d(x) = e^{-\frac{|x|}{\ell}} \tag{1}$$

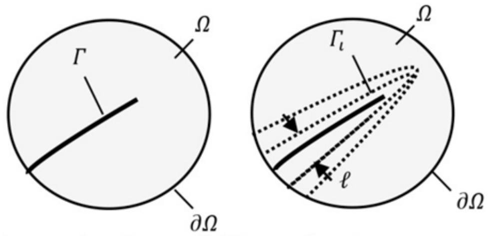


Fig. 1 Sharp crack surface Γ and diffuse crack surface Γ_l

شکل 1 ترک تیز Γ و ترک پخش‌شونده Γ_l

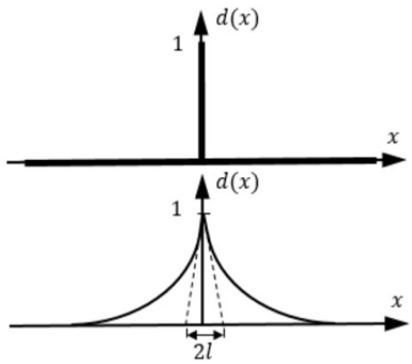


Fig. 2 Sharp crack and diffuse crack approximation

شکل2 ترک تیز و تقریب ترک پخش‌شونده

که در آن $d(x)$ تابعی نمایی و جواب معادله دیفرانسیل همگن (2) است:

$$-\nabla d + \frac{1}{\ell^2} d = 0 \tag{2}$$

پارامتر ℓ، پارامتری است که میزان پخش‌شوندگی ترک را کنترل می‌کند. میزان پخش‌شوندگی بیانگر ضخامت ناحیه انتقالی بین شکست و بدون آسیب بوده و دارای بعد طول است. متغیر میدان فاز دارای شرایط مرزی بیان شده در معادله (3) است:

$$d(0) = 1 \text{ و } d(\pm\infty) = 0 \tag{3}$$

ایده اصلی این فرمول‌بندی مبتنی بر قانون تقریبی وردشی است که انرژی کل محیط الاستیک خطی دارای ترک را به دو بخش انرژی الاستیک داخلی و انرژی ترک تقسیم می‌کند. انرژی ترک حاصل اتلاف انرژی ناشی از تشکیل سطح جدید است. بنابراین انرژی پتانسیل کل به‌صورت معادله (4) تعریف می‌شود:

$$\psi(d, \mathrm{u}) = \int_\Omega \psi^{\mathrm{el}}\, d\Omega + \int_\Gamma \mathrm{G_c} dA \tag{4}$$

بخش انرژی اتلافی مربوط به ترک برابر است با مقدار انرژی آزاد شده ناشی از رشد ترک که جهت تشکیل سطح جدید مورد نیاز است:

$$\psi(d) = G_c\left(\int_\Omega \gamma(d)\, d\Omega\right) \tag{5}$$

در این رابطه $\gamma(d)$، تابع چگالی انرژی سطحی ترک، مطابق معادله (6) تعریف می‌شود:

$$\gamma(d) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ell} d^2 + \ell\, \nabla d \nabla d\right] \tag{6}$$

همچنین چگالی انرژی الاستیک با معادله (7) تعریف می‌شود:

$$\psi^{\mathrm{el}} = \psi^{\mathrm{el}}(\varepsilon, d) = g(d)\psi(\varepsilon) = \frac{1}{2} g(d) \cdot (\sigma\varepsilon) \tag{7}$$

از آنجا که تابع چگالی انرژی ترک وابسته به متغیر میدان فاز و گرادیان آن است در نتیجه تابع چگالی انرژی کل وابسته به کرنش و متغیر میدان فاز و گرادیان میدان فاز خواهد بود [8]. در این معادله $g(d)$ تابع آسیب یا تابع کاهش‌دهنده استحکام است که ارتباط بین چگالی انرژی الاستیک ψ^{el} و متغیر میدان فاز d را بیان می‌کند. میه تابع آسیب را به‌صورت معادله (8) تعریف کرده است [8]:

$$g(d) = (1-d)^2 \tag{8}$$

لازم به ذکر است که استفاده از تابعیت درجه دوم در معادله آسیب به دلیل پایداری حل است. زیرا درصورت خطی بودن معادله آسیب، با رسیدن متغیر میدان فاز به مقدار 1 شیب نمودار صفر نبوده که موجب عدم پایداری حل خواهد داد. همچنین، بوردن [11] نشان داد که در نظر گرفتن تابع آسیب درجه 3 منجر به تخمین کمتر نیروی شکست می‌شود. در نهایت انرژی پتانسیل کل به‌صورت معادله (9) بیان می‌شود:

$$\psi(d, \mathrm{u}) = \int_\Omega [(1-d)^2 + \eta]\psi^{\mathrm{el}}(u)\, d\Omega + \int_\Omega G_c \gamma(d) d\Omega \tag{9}$$

در معادله (9) پارامتر η به منظور پایداری محاسبات عددی پیشنهاد شده که مقدار آن مثبت و بسیار کوچک است.

3- فرم ضعیف و گسسته‌سازی معادلات حاکم

تحت شرایط شبه استاتیکی، معادله تعادل انرژی به‌صورت معادله (10) تعریف می‌شود [9]:

$$\delta W_{\mathrm{int}} + \delta W_{\mathrm{ext}} = 0 \tag{10}$$

انرژی داخلی به‌صورت معادله (11) بیان می‌شود:

[1] Osteon of Compact Bone

$$\delta W_{\text{int}} = \int_\Omega [(1-d)^2+\eta]\sigma\delta\varepsilon\, d\Omega + \int_\Omega -2(1-d)\delta d\psi(\varepsilon)d\Omega + \int_\Omega G_c\left[\frac{1}{\ell}d\delta d + \ell\,\nabla d\delta(\nabla d)\right]d\Omega \tag{11}$$

در نهایت با استفاده از معادله (11) و قضیه‌ی دیورژانس، شکل قوی معادلات به‌صورت زیر بدست می‌آید [9]:

$$[(1-d)^2+\eta]\frac{\partial\sigma_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} + \mathrm{b_j} = 0 \tag{12}$$

$$[(1-d)^2+\eta]\mathrm{n_i}\sigma_{\mathrm{ij}} = 0 \tag{13}$$

$$\mathrm{u}_j = \bar{\mathrm{u}}_J \tag{14}$$

$$G_c\ell\frac{\partial^2 d}{\partial x_{\mathrm{i}}\partial x_{\mathrm{i}}} + \left[\frac{G_c}{\ell} + 2\psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right]d = 2\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{15}$$

$$\frac{\partial d}{\partial x_{\mathrm{i}}}\mathrm{n_i} = 0 \tag{16}$$

به منظور گسسته‌سازی میدان جابجایی $\mathbf{u}$ و میدان فاز d و همچنین مقادیر مجازی آن‌ها یعنی $\delta\mathbf{u}$ و δd به روش اجزای محدود، توابع شکل N_I^u و N_I^d و همچنین بردار مقادیر گره‌ای $\mathbf{u}_\mathrm{I}$ و d_I تعریف می‌شوند که I تعداد کل گره‌های المان است. در این پژوهش، از المان مربعی چهارگره‌ای استفاده شده است. در نهایت، توابع شکل به‌صورت معادله (17) تعریف می‌شوند:

$$N_I^u = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix}, N_I^d = N_I \tag{17}$$

ماتریس مشتق توابع شکل با معادله (18) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$B_I^u = \begin{bmatrix} N_{I,x}^u & 0 \\ 0 & N_{I,y}^u \\ N_{I,y}^u & N_{I,x}^u \end{bmatrix}, B_I^d = \begin{bmatrix} N_{I,x}^d \\ N_{I,y}^d \end{bmatrix} \tag{18}$$

در این روابط، $N_{I,x}$ و $N_{I,y}$ مشتقات جزئی توابع شکل به ترتیب نسبت به x و y است. در نتیجه، گسسته‌سازی مقادیر میدانی با معادلات (19) و (20) بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \sum_{I=1}^{N} B_I^u\,\mathrm{u_i} \tag{19}$$

$$\nabla d = \sum_{I=1}^{N} B_I^d\, d_i \quad , d = N^d d_{\mathrm{i}} \tag{20}$$

معادله گسسته‌سازی شده مربوط به تعادل تنش را می‌توان با معادله (21) بیان کرد:

$$R_{I,e}^u = P_{I,e}^u = \int_\Omega [(1-d)^2+\eta]B_I^{uT}\sigma d\Omega \tag{21}$$

معادله گسسته‌سازی شده مربوط به ترک نیز با معادله (22) بیان می‌شود:

$$R_{I,e}^d = P_{I,e}^d = \sum_{I=1}^{N}\int_\Omega G_c\ell B_I^{dT}\nabla d + \left[\frac{G_c}{\ell} + 2\psi(\varepsilon)\right](N_I d)d\Omega - \int_\Omega 2N_I\,\psi(\varepsilon)d\Omega \tag{22}$$

با توجه به ماهیت غیرخطی باقیمانده، بایستی میدان جابجایی و میدان فاز با استفاده از روش تکراری نیوتن-رافسون در زمان t_{n+1} محاسبه شوند:

$$\begin{Bmatrix} u \\ d \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} u \\ d \end{Bmatrix}_t - \begin{bmatrix} K^{uu} & K^{ud} \\ K^{du} & K^{dd} \end{bmatrix}_t^{-1} \begin{Bmatrix} r^u \\ r^d \end{Bmatrix}_t \tag{23}$$

درایه‌های مربوط به ماتریس سختی با معادلات (24) تا (27) بیان می‌شوند:

$$K_{IJ,e}^{uu} = \frac{\partial P_{IJ,e}^u}{\partial u_\mathrm{J}} = \int_\Omega [(1-d)^2+\eta]\,B_I^{uT}CB_J^u d\Omega \tag{24}$$

$$K_{IJ,e}^{ud} = \frac{\partial P_{IJ,e}^u}{\partial d_\mathrm{J}} = \int_\Omega -2(1-d)\,B_I^{uT}\sigma N_I^d d\Omega \tag{25}$$

$$K_{IJ,e}^{du} = \frac{\partial P_{IJ,e}^d}{\partial u_\mathrm{J}} = \int_\Omega -2(1-d)\,N_I^d\sigma^T B_I^u d\Omega \tag{26}$$

$$K_{IJ,e}^{dd} = \int_\Omega G_c\ell B_I^{dT}\,B_I^d + \left[\frac{G_c}{\ell} + 2\psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right]N_I^d N_J^d d\Omega \tag{27}$$

در ادامه فرآیند حل عددی معادلات گسسته‌سازی‌شده بیان می‌شود.

4- فرآیند حل عددی

با توجه به غیرخطی بودن معادلات اجزای محدود، حل عددی این معادلات به روش تکراری انجام شده است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، معادلات اصلی حاکم بر مسئله شامل معادله میدان جابجایی و معادله میدان فاز است. در پژوهش حاضر از روش حل غیروابسته‌ی معادلات جهت پیاده‌سازی حل عددی معادلات استفاده شده است. به بیان دقیق‌تر، معادلات تعادل و میدان فاز ترک به صورت جداگانه و تناوبی حل شده و خروجی هر بخش جهت محاسبه‌ی بخش دیگر به اشتراک گذاشته می‌شود. از جمله ویژگی‌های حل غیروابسته‌ی معادلات می‌توان به پایداری بهتر حل عددی اشاره کرد. با این وجود، در حل غیروابسته نسبت به حل همزمان معادلات، پیش‌بینی رشد ترک کاهش پیدا می‌کند که برای جلوگیری از آن می‌توان گام حل را کوچک‌تر در نظر گرفت.

به منظور پیاده‌سازی معادلات اجزای محدود، از زیربرنامه UEL در نرم‌افزار اباکوس استفاده شده است. همچنین، از زیربرنامه UMAT جهت نمایش نتایج در این نرم‌افزار استفاده شده است. بنابراین، در پیاده‌سازی الگوریتم حل عددی در نرم افزار اباکوس از روش لایه‌ای در نوشتن زیربرنامه استفاده شده است. در روش لایه‌ای، هر لایه دارای خصوصیات گره‌ای شامل جابجایی و مختصات گره‌ای یکسان اما درجات آزادی مختلف در هر لایه است. لایه اول مربوط به میدان فاز ترک و دارای یک درجه آزادی است. لایه دوم مربوط به میدان جابجایی است که بسته به ابعاد مسئله یعنی دو یا سه بعدی، دارای دو یا سه درجه آزادی است. در نهایت، لایه سوم جهت نمایش مقادیر و نتایج محاسبه شده در دو لایه قبل با فرض ماده الاستیک با مدول یانگ بسیار کوچک در نظر گرفته شده است. به همین علت، لایه سوم تاثیری در نتایج حل ندارد. الگوریتم حل عددی معادلات اجزای محدود شامل معادلات میدان جابجایی و میدان فاز ترک در حالت دوبعدی در شکل 3 و شکل 4 نشان داده شده است.

حل غیروابسته‌ی معادلات نیازمند ارتباط میان دو لایه اول زیربرنامه است که این ارتباط از طریق ساختار بلوک مشترک در زیربرنامه انجام شده است. ساختار بلوک مشترک برای ذخیره کردن و اشتراک‌گذاری اطلاعات هر المان استفاده می‌شود. با استفاده از روش نیوتن-رافسون، حل تکراری معادلات با استفاده از معادله (28) انجام می‌شود:

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & 0 \\ 0 & K^{dd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{n+1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r^d \\ r^u \end{bmatrix} \tag{28}$$

این معادله به‌صورت دو معادله خطی قابل حل است که در آن متغیر فازی جدید d_{n+1} مجهول بوده، اما ماتریس سختی K_n و بردار باقیمانده r_n در زمان t_n مقادیری معلوم هستند. همچنین، به منظور محاسبه‌ی متغیر جابجایی در زمان t_{n+1} می‌توان از مقادیر میدان فاز در زمان t_n و شرایط مرزی در زمان t_{n+1} استفاده کرد.

5- شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

5-1- راستی‌آزمایی حل عددی با مسئله محک

در این بخش با حل مسئله محک مطابق مرجع میه [8]، صحت نتایج به‌دست آمده از حل عددی انجام شده بررسی می‌شود. مسئله محک مطابق شکل 5، یک نمونه با ترک لبه‌ای تحت کشش در مود اول شکست است. ثوابت ماده

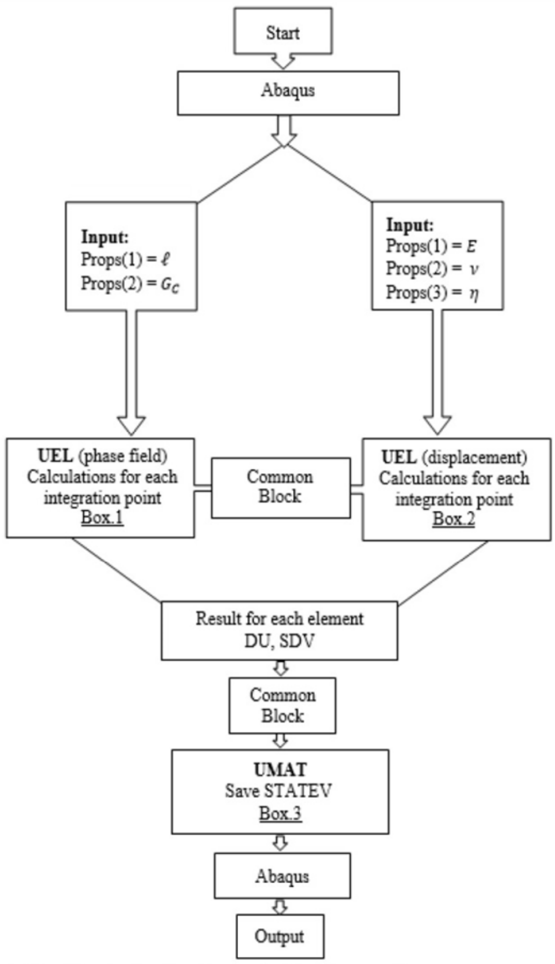


Fig. 3 Algorithmic details of numerical implementation

شکل3 الگوریتم حل عددی

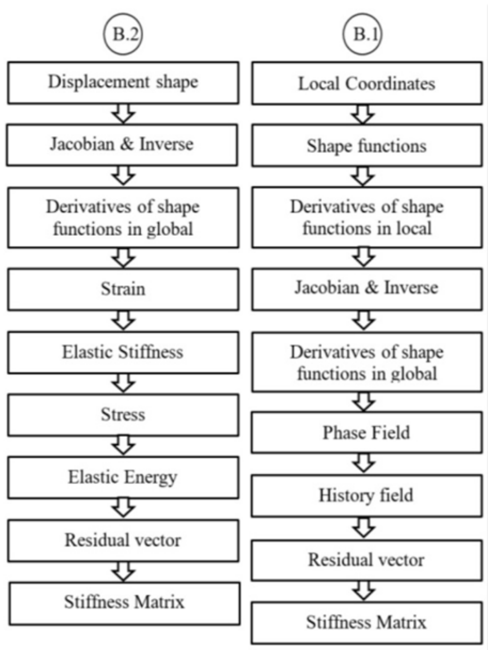


Fig. 4 Algorithmic details of Box.1 and Box.2 in the numerical implementation

شکل4 جزئیات الگوریتم Box.1 و Box.2 در الگوریتم حل عددی

استفاده شده در شبیه‌سازی مسئله محک از مرجع میه [8] در جدول 1 آمده است. همچنین، پارامترهای محاسباتی شامل اندازه المان در اطراف ترک لبه‌ای و پارامتر تقریب ترک در جدول 1 ذکر شده‌اند. شبکه اجزای محدود استفاده شده در مسئله محک با تعداد 15600 المان در شکل 6 نشان داده شده است.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان فاز ترک برای مسئله محک به‌صورت توزیع متغیر میدان فاز نمایش‌دهنده رشد ترک در شکل 7 نشان داده شده است. با رسیدن متغیر میدان فاز به 1 در یک المان، ترک شروع به رشد می‌کند و در ادامه المان‌های مجاور نیز دچار شکست شده تا جسم به‌طور کامل شکسته شود. شکل 8 منحنی نیرو بر حسب جابجایی بار را برای مسئله محک نشان می‌دهد. در این شکل، منحنی نیرو جابجایی پژوهش حاضر با مرجع میه [8] مقایسه شده است که تطابق نزدیک نتایج حاکی از صحت حل عددی در این پژوهش است.

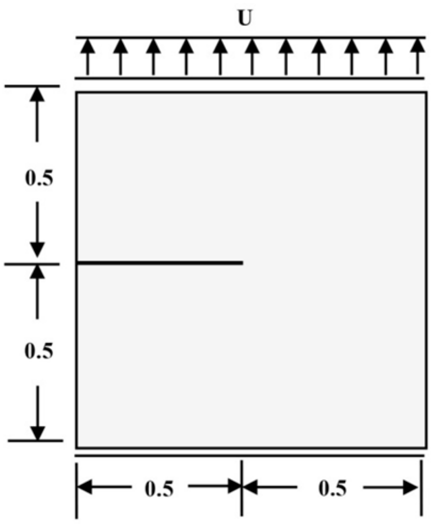


Fig. 5 Single edge notched specimen as the benchmark example for the verification of numerical implementation

شکل5 نمونه با ترک لبه‌ای به عنوان مسئله محک برای راستی‌آزمایی حل عددی

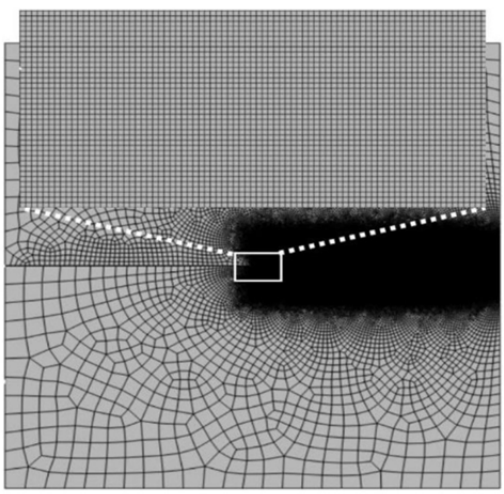


Fig. 6 Finite element mesh of the benchmark example with 15600 elements

شکل 6 شبکه اجزا محدود مسئله محک با تعداد 15600 المان

جدول1 ثوابت ماده و پارامترهای محاسباتی در شبیه‌سازی مسئله محک

Table 1 Material constants and computational parameters in the benchmark example [8]

اندازه المان	0.005 mm
اندازه پارامتر تقریب ترک	0.015 mm
ضریب پواسون	0.3
انرژی بحرانی ترک	2.7 N/mm
مدول الاستیسیته	210 GPa

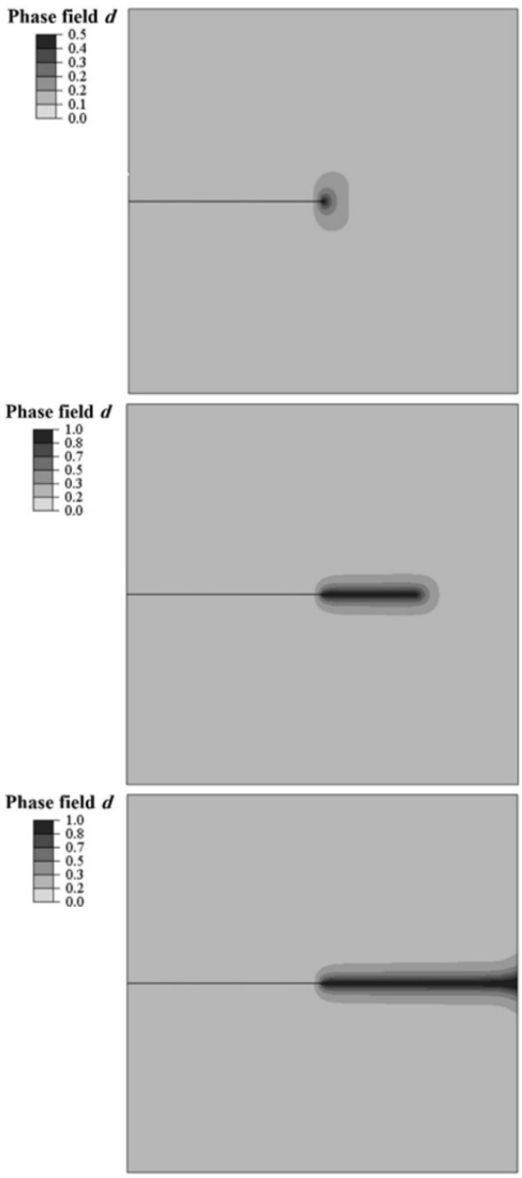


Fig. 7 Contours of the phase field variable in the single edge notched specimen at different loading stages

شکل7 توزیع متغیر میدان فاز در نمونه با ترک لبه‌ای تحت کشش در مراحل مختلف رشد ترک

5-2- شبیه‌سازی رشد ترک در محیط متخلخل

در این بخش به عنوان کاربردی از مدل توسعه داده شده، رشد ترک در یک حجمک نماینده از یک محیط متخلخل شبیه‌سازی شده است. با شبیه‌سازی میکرومکانیکی نمونه‌هایی با درصد تخلخل‌های مختلف، اثر تخلخل بر

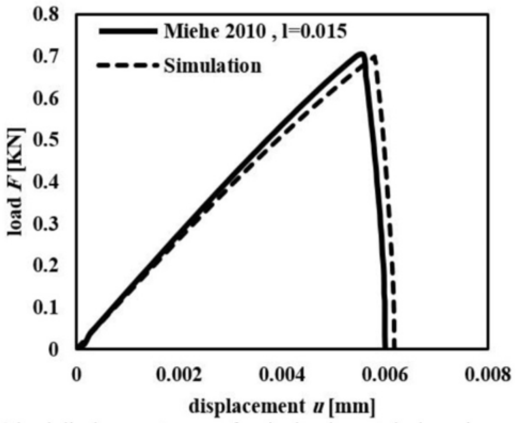


Fig. 8 load-displacement curves for single edge notched specimen

شکل8 نمودار نیرو جابجایی نمونه با ترک لبه‌ای

استحکام محیط متخلخل بررسی شده است. به عنوان محیطی متخلخل، ناحیه‌ی استئون بخش متراکم استخوان در نظر گرفته شده که در آن، تخلخل به معنی پوکی استخوان است. با توجه به خصوصیات ترد این ناحیه از استخوان که در جدول 2 آمده، فرضیات حاکم بر مدل توسعه داده شده از جمله خواص الاستیک و شکست ترد ارضا می‌شوند. همچنین، خصوصیات ساختار متخلخل استخوان شامل قطر حفره‌ها، میانگین قطر حفره‌ها و واریانس قطر حفره‌ها در جدول 2 آمده است و یک حجمک نماینده استخوان با این مشخصات ایجاد شد. با شبیه‌سازی تخلخل‌های مختلف، بار بحرانی برای شروع رشد ترک و همچنین نحوه رشد ترک در اثر پوکی استخوان یعنی افزایش درصد تخلخل در استخوان بررسی می‌شود.

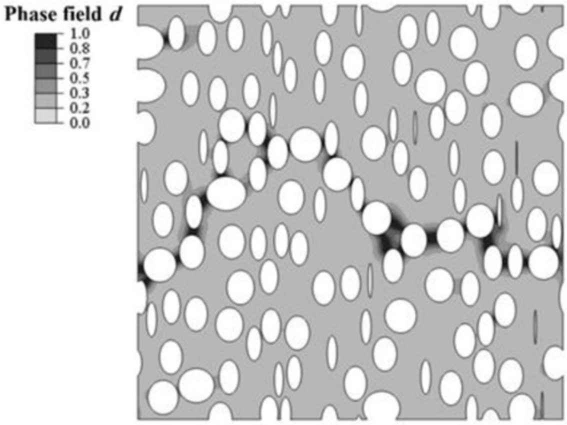
برای انجام شبیه‌سازی‌ها، یک حجمک نماینده دوبعدی با ابعاد 5 mm با خصوصیات ذکر شده استخوان در جدول 2 ایجاد شد. در مرجع [17]، تخلخل این بخش از استخوان در محدوده‌ی 5% الی 38% گزارش شده است. بنابراین، در شبیه‌سازی‌ها نمونه‌های حجمک نماینده با درصد تخلخل‌های مختلف 10%، 15%، 20%، 25%، 30% و 35% بررسی شده‌اند. حجمک‌های نماینده مذکور تحت بارگذاری کششی تک‌محوره با کنترل جابجایی قرار گرفته و در هر مورد منحنی نیرو جابجایی و حداکثر نیروی لازم جهت شروع رشد ترک استخراج شده است.

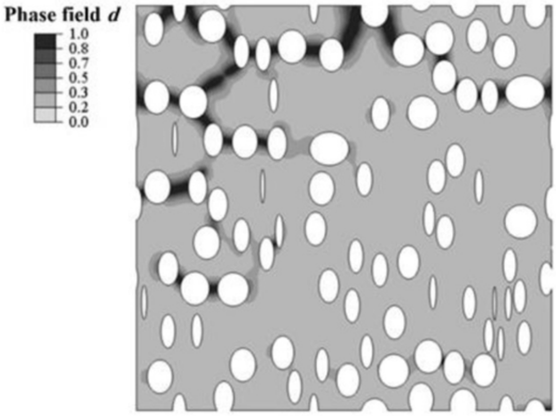
در شکل 9 توزیع متغیر میدان فاز نمایش‌دهنده رشد ترک در نمونه‌های با درصد تخلخل مختلف رسم شده است. مطابق شکل 9، رشد ترک معمولاً از ناحیه‌ای که دارای حفره‌ی بزرگ‌تر و در نتیجه تمرکز تنش بیشتر است شروع شده است. رشد ترک با توجه به موقعیت حفره‌ها ادامه پیدا کرده تا سرانجام منجر به شکست کامل جسم شود. به بیان دیگر، مسیر رشد ترک تابع موقعیت حفره‌ها است. همچنین در بعضی موارد ممکن است ترک از نواحی مختلف شروع شود. در نهایت، در همه نمونه‌ها رشد ترک در عرض نمونه منجر به شکست کامل ساختار شده است.

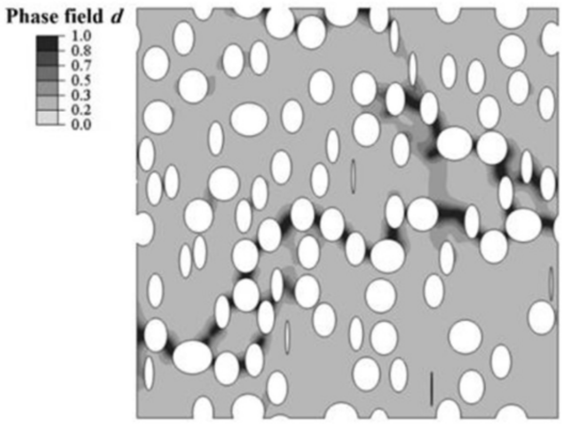
جدول2 مشخصات ناحیه‌ی استئون بخش متراکم استخوان [17-19]

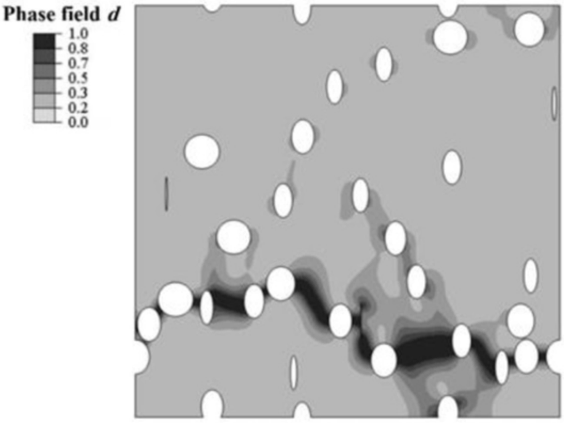
Table 2 Specifications for the osteon region of Compact Bone [17-19]

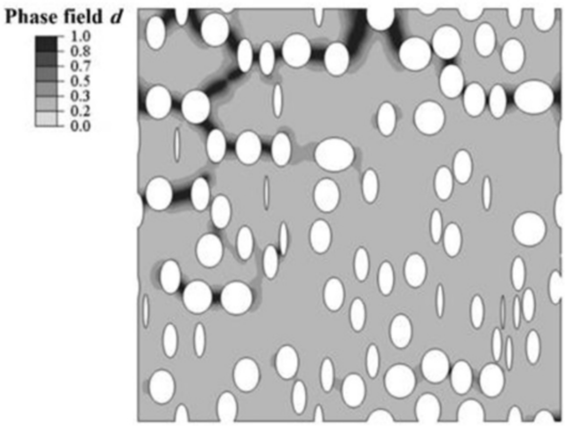
قطر حفره‌ها	110.01 - 414.04 μm
میانگین قطر حفره‌ها	232.05 μm
واریانس قطر حفره‌ها	9433.041 $(\mu m)^2$
انرژی بحرانی ترک	500 N/m
مدول الاستیسیته	15.8 GPa











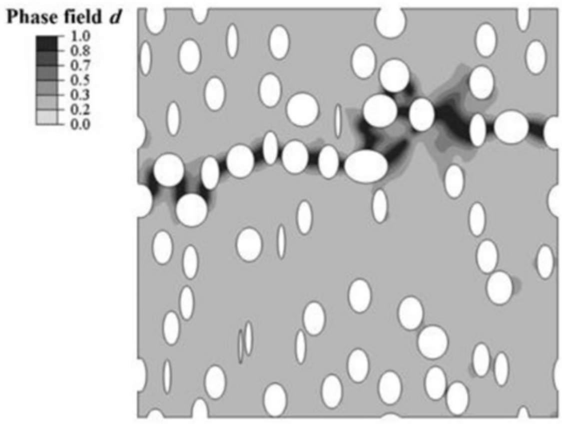


Fig. 9 Contours of the phase field variable in specimens with different porosity percentage values including 10%, 15%, 20%, 25%, 30%, 35% (from top to bottom)

شکل9 توزیع متغیر میدان فاز در نمونه‌های با درصد تخلخل مختلف 10%، 15%، 20%، 25%، 30% و 35% (از بالا به پایین)

در شکل 10 منحنی نیرو جابجایی برای نمونه‌های با درصد تخلخل مختلف رسم شده است. در همه موارد، با اعمال جابجایی، نیرو افزایش یافته و پس از رسیدن به یک مقدار حداکثر با شروع رشد ترک کاهش می‌یابد تا در لحظه شکست کامل نمونه به صفر برسد. این مقدار حداکثر نیروی قابل تحمل نمونه در آستانه شروع رشد ترک را می‌توان به عنوان ظرفیت تحمل بار یا استحکام ساختار متخلخل در نظر گرفت. شکل 10 نشان می‌دهد که با افزایش درصد تخلخل، استحکام ساختار متخلخل کاهش می‌یابد. به منظور بررسی دقیق‌تر این رفتار، تغییرات استحکام ساختار متخلخل بر حسب درصد تخلخل در شکل 11 رسم شده است.

نکته قابل توجه در شکل 11، غیرخطی بودن کاهش استحکام ساختار متخلخل بر حسب افزایش تخلخل است. از تخلخل 10% تا 15% استحکام ساختار متخلخل با شیب نسبتاً کمی کاهش می‌یابد. ولی در محدوده تخلخل میان 15% تا 20% کاهش چشم‌گیری در استحکام ساختار متخلخل مشاهده می‌شود و با افزایش بیشتر تخلخل از 20% تا 35% روند نزولی استحکام با شیب کمتری ادامه می‌یابد. بنابراین، می‌توان چنین نتیجه گرفت که یک مقدار بحرانی درصد تخلخل وجود دارد که در آن کاهش استحکام ساختار متخلخل ناگهانی است.

همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، ایده اصلی فرمول‌بندی مدل میدان فاز شکست ترد مبتنی بر تقسیم انرژی کل محیط الاستیک خطی دارای ترک به

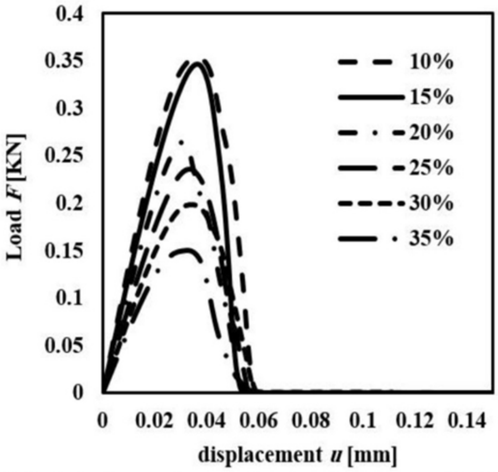


Fig. 10 load-displacement curve for porous structure with different porosity values

شکل10 نمودار نیرو جابجایی ساختار متخلخل با درصد تخلخل‌های مختلف

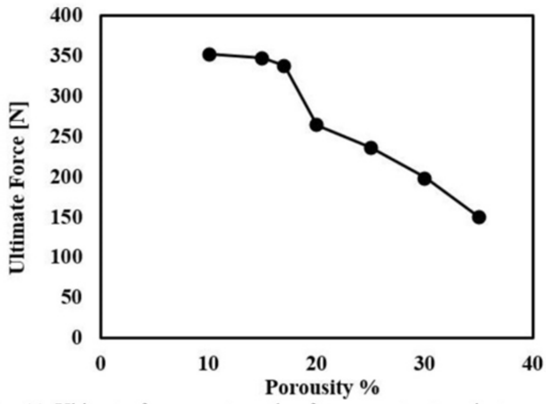


Fig. 11 Ultimate force or strength of porous structure in terms of porosity percentage

شکل11 حداکثر نیرو یا استحکام ساختار متخلخل بر حسب درصد تخلخل

دو بخش انرژی الاستیک داخلی و انرژی سطح ترک است. به منظور بررسی روند تغییرات انرژی طی رشد ترک، در شکل 12 منحنی تغییرات انرژی الاستیک و انرژی سطحی ترک در بافت متخلخل با تخلخل 15% رسم شده‌اند. این شکل نشان می‌دهد که در ابتدا با افزایش جابجایی، انرژی الاستیک افزایش پیدا می‌کند. همچنین، با شروع رشد ترک انرژی سطحی ترک نیز افزایش می‌یابد. تا قبل از رسیدن نیرو به حداکثر مقدار خود، انرژی الاستیک و انرژی سطحی ترک هر دو افزایش می‌یابند. در این محدوده، انرژی لازم برای ایجاد ترک توسط بارگذاری خارجی تأمین می‌شود. پس از رسیدن نیرو به حداکثر مقدار خود، انرژی الاستیک کاهش و انرژی سطحی ترک افزایش می‌یابد. در این محدوده، انرژی لازم برای رشد ترک با کاهش انرژی الاستیک ذخیره شده در ماده تأمین می‌شود.

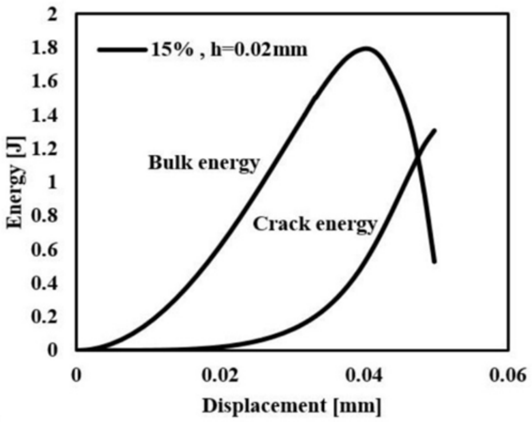


Fig. 12 The variation of bulk energy and crack energy in porous structure with 15% porosity

شکل12 تغییرات انرژی الاستیک و انرژی ترک در بافت متخلخل با تخلخل 15%

6- جمع‌بندی

در پژوهش حاضر، مدل میدان فاز شکست ترد میه [8] در نرم‌افزار اجزای محدود اباکوس پیاده‌سازی و پس از راستی‌آزمایی، برای شبیه‌سازی رشد ترک در ساختار متخلخل استخوان استفاده شد. بدین منظور، ابتدا معادلات حاکم بر مسئله شکست ترد شامل معادله میدان جابجایی و معادله میدان فاز با استفاده از روش اجزای محدود گسسته‌سازی شد. با استفاده از روش حل غیروابسته‌ی معادلات، پیاده‌سازی حل عددی معادلات با نوشتن یک زیربرنامه UEL در نرم‌افزار اباکوس انجام شد. به منظور راستی‌آزمایی مدل، از یک نمونه با ترک لبه‌ای تحت کشش در مود اول شکست به عنوان مسئله محک استفاده شد. تطابق نزدیک نتایج پژوهش حاضر با مرجع میه [8] حاکی از صحت حل عددی در این پژوهش بود. به عنوان کاربردی از مدل توسعه داده شده، رشد ترک در یک حجمک نماینده از ساختار متخلخل استخوان شبیه‌سازی و اثر تخلخل بر استحکام استخوان بررسی شد. نتایج شبیه‌سازی حاکی از توانایی روش میدان فاز برای شبیه‌سازی رشد ترک در ساختارهای پیچیده از لحاظ هندسی مانند استخوان است. تحلیل نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که به طور کلی با افزایش درصد تخلخل، ظرفیت تحمل بار یا استحکام ساختار متخلخل کاهش می‌یابد. نکته قابل توجه آن است که این استحکام در یک مقدار بحرانی تخلخل کاهش ناگهانی دارد.

7- فهرست علائم

b	نیروی بدنی خارجی
C	تانسور سختی الاستیک
d	متغیر آسیب
$g(d)$	تابع کاهش دهنده استحکام
G_c	نرخ بحرانی آزادسازی انرژی
h	اندازه المان
H	پارامتر تاریخچه انرژی
l	پارامتر تقریب ترک
n_i	بردار یکه عمودی
P_I	نیروهای داخلی

علائم یونانی

$\gamma(d)$	تابع چگالی انرژی سطحی ترک
Γ	معرف سطح مشخص
η	پارامتر پایداری
ψ^{el}	انرژی الاستیک
$\psi(d)$	انرژی ترک
Ω	معرف حجم مشخص

زیرنویس‌ها

I	تعداد المان

8- مراجع

[1] A. A Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A,* Vol. 221, No. 582, pp. 163-198, 1921.

[2] G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364, 1957.

[3] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, On the theory of superconductivity, *Journal of Experimental and Theoretical Physics,* Vol. 20, pp. 1064-1082, 1950.

[4] B. Bourdin, G. A. Francfort, J. J. Marigo, Numerical experiments in revisited brittle fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 48, No. 4, pp. 797-826, 2000.

[5] J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 46, No. 1, pp. 131-150, 1999.

[6] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko, Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 53, No. 11, pp. 2549-2568, 2002.

[7] G. L. Peng, Y. H. Wang, A Node Split Method for Crack Growth Problem, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 182, pp. 1524-1528, 2012.

[8] C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 199, No. 45, pp. 2765-2778, 2010.

[9] M. A. Msekh, J. M. Sargado, M. Jamshidian, P. M. Areias, T. Rabczuk, Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture, *Computational Materials Science,* Vol. 96, pp. 472-484, 2015.

[10] M. A. Msekh, *Phase Field Modeling for Fracture with Applications to Homogeneous and Heterogeneous Materials*, PhD Thesis, Bauhaus University Weimar, Weimar, 2017.

[11] M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. Hughes, C. M. Landis, A phase field description of dynamic brittle fracture, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 217, pp. 77-95, 2012.

[12] C. Miehe, L. M. Schänzel, Phase field modeling of fracture in rubbery polymers. Part I: Finite elasticity coupled with brittle failure, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 65, pp. 93-113, 2014.

[13] S. May, J. Vignollet, R. De Borst, A numerical assessment of phase-field models for brittle and cohesive fracture: Γ-convergence and stress oscillations, *European Journal of Mechanics-A/Solids,* Vol. 52, pp. 72-84, 2015.

[14] M. A. Msekh, M. Silani, M. Jamshidian, P. Areias, X. Zhuang, G. Zi, P. He, T. Rabczuk, Predictions of J integral and tensile strength of clay/epoxy nanocomposites material using phase field model, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 93, pp. 97-114, 2016.

[15] H. Badnava, M. A. Msekh, E. Etemadi, and T. Rabczuk, An h-adaptive thermo-mechanical phase field model for fracture, *Finite Elements in Analysis and Design,* Vol. 138, pp. 31-47, 2018.

[16] H. Badnava, Ductile fracture modelling based on the Drucker-Prager plasticity and phase field approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 3, pp. 351-360, 2018. (in Persian فارسی)

[17] V. Bousson, F. Peyrin, C. Bergot, M. Hausard, A. Sautet, J. D. Laredo, Cortical Bone in the Human Femoral Neck: Three-Dimensional Appearance and Porosity Using Synchrotron Radiation, *Journal of Bone and Mineral Research,* Vol. 19, No. 5, pp. 794-801, 2004.

[18] T. L. Norman, D. Vashishth, D. Burr, Fracture toughness of human bone under tension, *Journal of Biomechanics,* Vol. 28, No. 3, pp. 309313-311320, 1995.

[19] P. K. Zysset, X. E. Guo, C. E. Hoffler, K. E. Moore, S. A. Goldstein, Elastic modulus and hardness of cortical and trabecular bone lamellae measured by nanoindentation in the human femur, *Journal of Biomechanics,* Vol. 32, No. 10, pp. 1005-1012, 1999.