



مدل سازی جریان سیال درون کانال با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی

رامین امینی^{1*}، محمد اکبری ماکویی²، سید مجتبی موسوی نژاد³

1- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، (web2_ramin.amini@shahroodut.ac.ir)

چکیده

در این مطالعه در ابتدا به بیان و معرفی کامل روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می شود. در این راستا با استخراج معادلات جریان سیال در کانال شیب دار با جریان یکنواخت سعی شده است با استفاده از مبانی ریاضی روش بدون شبکه، معادله ی لاپلاس جریان رابطه سازی شود. عدم نیاز به هیچ گونه شبکه ی پیش ضمیمه، تطابق مناسب با شرایط مرزی و دقت بالا از ویژگی های این روش می باشد. در ادامه به منظور صحت سنجی، یک مثال عددی که دارای پاسخ تحلیلی می باشد، به کمک این روش حل و با پاسخ های دقیق مقایسه گردیده است. نتایج نشان می دهد روش باقی مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد و دقیق برای دست یابی به پاسخ های تقریبی معادله های دیفرانسیل در روش های بدون شبکه بندی مورد توجه قرار می گیرد. در نهایت در مسأله ی جریان در کانال، با استفاده از تابع شکل شعاعی که در محیط متلب پیاده شده است، مقدار سرعت بین گره ها در کانال شیب دار با جریان یکنواخت تقریب زده می شود. مثالی عددی با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفته، با نتایج حاصل از روش ایزوژئومتریک و روش تحلیلی مقایسه شده و به تعیین کانتورهای سرعت پرداخته شده است. نتایج در سطح مطلوب با نتایج ناشی از حل تحلیل منطبق است. نتایج حاصل نشان دهنده ی دقت بالای روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی در مدل سازی مسأله جریان آب داخل کانال شیب دار است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 بهمن 1396

پذیرش: 01 اردیبهشت 1397

ارائه در سایت: 27 اردیبهشت 1397

کلید واژگان:

کانال شیب دار

روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین

مدل سازی جریان سیال

تابع پایه شعاعی

Fluid flow modeling in channel using meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial Basis Function

Ramin Amini^{1*}, Mohammad Akbarimakoui¹, Seyed Mojtaba Mosavi Nezhad²

1- Department of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

2- Technical Faculty of Ferdows, University of Birjand, Birjand, Iran.

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, web2_ramin.amini@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 27 January 2018

Accepted 21 April 2018

Available Online 17 May 2018

Keywords:

Sloped Channel

Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

Methods

Fluid Flow Modeling

Radial Basis Function

ABSTRACT

In this study first the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial Basis Function (RBF) has been explained entirely. In this way the governing channel flow expression that is based on the Laplace equation is expanded. In MLPG method, the problem domain is represented by a set of arbitrarily distributed nodes and Quadrature radial basis function is used for field function approximation and local integration is used to calculate the integrals. In the following, MLPG method is verified by exact solution in a numerical example. The Results show that MLPG method presented high accuracy and capability for solving the governing equation of the problem. Finally the velocity field is approximated in middle of nodes by RBF (MatLab code was adopted) in the uniform flow in a sloped channel problem. The MLPG results are compared with the isogeometric analysis (IA) method in the tutorial numerical example of Fluid flow modeling in channel, the velocity contours is detected, and their accuracy is demonstrated by means of several examples. The results showed good conformity compared to available analytical solution. The obtain results explain that Application of meshless method in Fluid flow modeling in channel show the applicability and efficiency of the meshless local Petrov-Galerkin method by Radial Basis Function method.

1- مقدمه

تحلیل و طراحی کانال های انتقال آب یکی از پرکاربردترین دامنه ها در علوم مهندسی می باشد. کانال ها با محدودیت هایی نظیر پمپاژ، تطابق با محیط زیست مواجه نیستند. این سازه ها با ویژگی های خاص خود توانسته است یکی

از پر استفاده ترین سازه های هیدرولیکی باشند. برای تحلیل مسائل هیدرولیکی از روش های عددی مختلفی استفاده می شود. یکی از بهترین روش های عددی که با توجه به ماهیت سیالات برای تحلیل این گونه مسائل، روش بدون شبکه می باشد.

افزایش انتقال حرارت در نانوسیال غیر نیوتنی در میکرو کانال مستطیل [27] از مهم ترین مطالعات صورت پذیرفته شده در این حوزه می باشد. از دیگر روش های معمول مطالعه جریان می توان به روش ایزوژئومتریک اشاره نمود که امینی و همکاران از آن در مسائل مختلفی مانند مدل سازی از دیدگاه لانگراژی [28]، وضعیت جریان در کانال [29] و نیز شکست سد [30] در سال های گذشته بهره جسته اند.

در این تحقیق ابتدا به بیان و معرفی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین پرداخته شده و سپس با استخراج معادلات جریان سیال در کانال سعی شده است با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی معادله لاپلاس استخراج شده رابطه سازی شود. روش باقی مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد برای دستیابی به پاسخ های تقریبی معادله های دیفرانسیل معمولی¹⁰ و جزئی¹¹ در روش های بدون شبکه بندی مورد توجه قرار می گیرد. با استفاده از تابع شکل شعاعی تقریب مقدار سرعت بین گره ها در کانال شیب دار با جریان یکنواخت تقریب زده می شود. یک مثال عددی با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفت و با نتایج حاصل از روش ایزوژئومتریک مقایسه شده است.

در بخش دیگری از نوآوری های این تحقیق می توان به استفاده از تابع پایه شعاعی از نوع چندضلعی برای تقریب تابع میدان و نیز روش انتگرال گیری محلی که برای محاسبه تابع های اولیه به کار رفته شده است، اشاره نمود.

2- روش کار

به طور کلی، معادله های دیفرانسیل حاکم بر رفتار سازه ها و شاره ها در داخل دامنه (Ω) و بر روی مرزهای آن (Γ) ، به صورت رابطه ی (1) بیان می گردد:

$$\begin{aligned} D(u) - f &= 0 \\ B(u) - g &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

در این رابطه ها u تابع میدان (پاسخ)، D و B عملگر دیفرانسیلی و f و g تابع نیرویی می باشند.

دستیابی به مقدار دقیق تابع میدان (u) مشکل است. از رابطه (2) می توان برای تقریب زدن تابع میدان استفاده کرد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \alpha_i = P^T \alpha \quad (2)$$

در این رابطه، $u^h(x)$ تابع میدان تقریبی، P بردار عضوهای چندجمله ای و α بردار ضرایب چندجمله ای می باشد. به طور معمول برای برقراری رابطه (2) تعداد عضوهای چندجمله ای (n) به کار رفته دارای شمار محدودی است، از این رو، تابع میدان به صورت تقریبی به دست می آید. بنابراین حل معادله ی حاکم بر مسأله دارای باقی مانده ی R_Ω در داخل دامنه و R_Γ بر روی مرزها خواهد بود. مقدار باقی مانده ی حاصل از قرار دادن تابع u^h در رابطه (1) به صورت رابطه های (3) بیان می شود.

$$\begin{aligned} R_\Omega &= D(u^h) - f \neq 0 \\ R_\Gamma &= B(u^h) - g \neq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

در روش باقی مانده وزنی با توجه به نحوه ی انتخاب تابع تقریبی، مقدار باقی مانده ی R_Ω و R_Γ در مسأله تغییر می کند. از این رو، باید مقدار باقی مانده حاصل از تقریب تابع میدان را به حداقل ممکن رسانید. این کار با برابر صفر شدن مجموع مقدار انتگرال باقی مانده های وزن دار در دامنه و بر روی مرزهای مسأله امکان پذیر خواهد بود (رابطه (4)).

روش بدون شبکه به روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)¹ در مدل کردن پدیده های نجومی توسط گینگولد و موناکان [1] برمی گردد. از این روش برای تحلیل و مدل سازی هیدرولیکی، جریان سطح آزاد [2] استفاده شد. در این روش، از دو فن گسسته سازی جدید و سازگار برای مشتقات مکانی مرتبه اول و دوم استفاده می شود. روش هیدرودینامیک ذرات هموار برای مسائل جریان سطح آزاد حاوی رسوب [3] با استفاده از روش صریح اصلاح شده و روش شبه ضمنی توسعه داده شد. تحقیق در روش بدون شبکه در سال 1992 بعد از انتشار روش اجزا پراکنده² توسط نایرولز و همکاران [4] توسعه یافت. چندین روش بعد از آن با نام های، روش مستقل از جز گلرکین³ (EFG) [5]، روش باز تولید ذرات (RKPM) [6]، روش جداگر اجزا محدود⁴ (PUFEM) [7]، روش جزهای طبیعی⁵ (NEM) [8]، روش بدون شبکه گلرکین با استفاده از تابع شعاعی⁶ (RBF) [9]، معرفی شدند. عمده تفاوت این روش ها نحوه تولید و استفاده مؤثر از تابع شکل مورد استفاده در روش حل بود. هر چه در ظاهر این روش ها برای تولید تابع شکل و تابع وزن نیاز به شبکه بندی ندارند ولی برای انتگرال گیری نیاز به یک شبکه بندی در سایه دارند. پس این روش ها روش بدون شبکه حقیقی نیستند.

روش بدون شبکه معادلات انتگرالی مرزی⁷ (LBIE) و روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین⁸ (MLPG) [10] که از روش های کاملاً بدون شبکه محسوب می شوند، برای حل مسائل خطی و غیرخطی توسط آتلوری معرفی شدند. موسوی نژاد و همکاران با استفاده از همین روش رفتار دینامیکی سازه های استوانه ای ساخته شده با مواد هدفمند را رابطه سازی کردند و کاربرد آن را برای بارهای دینامیکی و شتاب پایه نشان دادند [11 و 12]. مدل سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین توسط محتشمی و همکاران صورت گرفت [13]. جریان سیال تراکم ناپذیر لزج [14] و نیز ارائه مدل یک بعدی جهت توزیع سرعت در کانال رو باز کم عرض [15] و شبیه سازی عددی جریان سیال غیر نیوتنی در کانال دارای حفره [16] از کارهای انجام گرفته در مدل سازی هیدرولیکی جریان می باشد.

از دیگر مطالعات انجام شده می توان به مدل سازی و مطالعه ی جریان نانوسیال و نانوذرات در کانال ها و لوله ها اشاره نمود. می توان به بررسی انتقال ترکیب نانوسیال مس و آب با استفاده از روش بولتزمن [17]، تحلیل تأثیر نانوسیال با خواص متغیر بر انتقال حرارت [18] و مطالعه ی پارامترهای انتقال حرارت برای نانوسیال نقره و آب را نام برد [19]. شبیه سازی عددی انتقال نانوسیال آب و اکسید مس داخل یک کانال مثلی برای جریان آرام [20] و نیز همین شبیه سازی در کانال سینوسی در محیط متخلخل [21] توسط محققان صورت پذیرفت. بررسی اثر سرعت و ابعاد نانو ذرات جامد بر انتقال حرارت در نانوسیال غیر نیوتنی [22] و مطالعه عددی بر روی گرمایش طبیعی در حضور میدان مغناطیسی [23] از موضوعات مورد علاقه ی پژوهشگران بوده است. همچنین مطالعه ی تأثیر نسبت ابعاد در ترم انتقال حرارت برای جریان آرام در یک میکرو کانال مستطیلی دو بعدی [24] و تحلیل انتقال آرام ترکیبی نانوسیال با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی [25] انجام شده است. نیز مطالعه ی شکست حجمی نانوذرات [26] و بررسی

¹ Smooth Particle Hydrodynamics

² Diffuse Elements Method

³ Element Free Galerkin

⁴ Reproducing Kernel Particle Method

⁵ Partition of Unity Finite Element Method

⁶ Natural Element Method

⁷ Meshless Galerkin method using Radial Basis function

⁸ Meshless Local Boundary Integral Equation

⁹ Meshless Local Petrov-Galerkin method

¹⁰ Ordinary differential equation

¹¹ Partial differential equation

نشان داده شده است.

همان طوری که در شکل 1 دیده می شود، دامنه ی تحت پوشش می تواند به صورت دایره، بیضی و مستطیل انتخاب شود. اندازه دامنه ی تحت پوشش، برای دستیابی به پاسخ دقیق از اهمیت به سزایی برخوردار است. اندازه دامنه ی تحت پوشش (d_s) برای نقطه x به صورت رابطه (9) تعریف می گردد:

$$d_s = \alpha_s \times d_c \quad (9)$$

در رابطه (9)، α_s ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه ی تحت پوشش و d_s فاصله بین گره ها می باشد. در صورتی که گره ها در دامنه ی مسئله به صورت نامنظم توزیع گردند، این مقدار به صورت میانگین فاصله بین گره ها در نظر گرفته خواهد شد.

روش درون یابی نقاط یکی از فن های تقریب تابع میدان در روش بدون شبکه محسوب می گردد. این روش توسط لئو و ژئو [31] برای ساخت تابع های شکل با بهره جویی از توزیع اختیاری گره ها در داخل دامنه ی مسئله پیشنهاد شد. یکی از روش های ساده و پر کاربرد در ایجاد تابع شکل، بهره جویی از چند جمله ای خیام-پاسکال به عنوان تابع های چند جمله ای می باشد. در این روش، تقریب تابع شکل با بهره جویی از مقدار تابع در گره های داخل دامنه ی تحت پوشش صورت می پذیرد. در روش درون یابی نقاط، تابع $u(x)$ را با استفاده از مقدارهای گرهی در دامنه و نقطه ی مورد نظر x_Q درون یابی می کنند (رابطه 10).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) a_i(x_Q) \quad (10)$$

در این رابطه $B_i(x)$ تابع پایه ای تعریف شده در مسئله پیرامون فضای دکارتی $x^T = [x, y, x]$ تعداد گره های قرار گرفته در دامنه ی تحت پوشش x_Q و $a_i(x_Q)$ ضریب تابع پایه ای $B_i(x)$ است. در روش درون یابی نقاط بر اساس نحوه ی انتخاب تابع پایه ای دو روش ابداع گردیده است. روش درون یابی نقاط از تابع های چند جمله ای² [31] و تابع های شعاعی³ [32] برای تقریب تابع میدان استفاده می کند.

در ادامه ی این روش از تابع های چند جمله ای به عنوان تابع های پایه ای استفاده می شود. با جای گذاری تابع چند جمله ای در رابطه (10)، رابطه حاکم بر این روش حاصل می گردد (رابطه 11).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n P_i(x) a_i(x_Q) \quad (11)$$

در این حالت تعداد ضرایب مجهول a_i با تعداد گره های داخل دامنه برابر می باشد. با قرار دادن مقدارهای گرهی، می توان ضرایب مجهول را با استفاده از رابطه های (12) تا (15) بدست آورد.

$$U_s = P_Q \times a \quad (12)$$

$$U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad (13)$$

$$P_Q = [p^T(x_1) \ p^T(x_2) \ \dots \ p^T(x_n)] \quad (14)$$

$$a = P_Q^{-1} \times U_s \quad (15)$$

با قرار دادن رابطه (15) در رابطه (11)، تابع شکل به صورت رابطه (16) به دست می آید.

$$\Phi = P^T(x) P_Q^{-1} \quad (16)$$

از امتیازهای استفاده از تابع شکل بر پایه چند جمله ای ها، می توان به سادگی و دقت مناسب روش اشاره نمود. از سوی دیگر با افزایش تعداد گره ها، می توان هر مرتبه ای از تابع شکل مورد نیاز را ایجاد کرد؛ اما علی رغم مزیت های فوق، در برخی حالت ها ماتریس P_Q در رابطه (16) ویژه می گردد. برای رفع این مشکل، روش درون یابی نقاط بر پایه تابع های شعاعی بهره

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

در این رابطه $\hat{W}_i$ و $\hat{V}_i$ به ترتیب به عنوان تابع های وزن برای باقی مانده وزنی R_{Ω} و R_{Γ} محسوب می گردد.

با بهره جویی از رابطه های (2) و (3) و همچنین قرار دادن آن ها در رابطه (4)، رابطه های (6,5) حاصل می گردد.

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i (D(u^h) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i (B(u^h) - g) d\Gamma = 0 \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \quad (6)$$

رابطه (6) یک دستگاه n معادله ای با n مجهول (ضرایب ثابت در بردار α) را نشان می دهد (رابطه 7).

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \hat{W}_1 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_1 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \hat{W}_2 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_2 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \hat{W}_n (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_n (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (7)$$

در این معادله ها باید ابتدا تابع شکل تعیین و سپس انتگرال گیری انجام شود. انتخاب تابع شکل مناسب بر پایه توزیع گره های اختیاری در داخل دامنه ی سازه یکی از مهم ترین مسائلی است که در پیش روی روش بدون شبکه است. به همین سبب بدون داشتن یک تابع شکل مناسب، روش بدون شبکه دارای کارآمدی لازم نخواهد بود. تابع میدان در روش بدون شبکه با بهره جویی از مقدار تابع میدان در گره های واقع شده در دامنه ی تحت پوشش¹ تعریف می گردد. با استفاده از رابطه (8) می توان تابع میدان را تقریب زد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) u_i = \Phi^T(x) \times U_s \quad (8)$$

در این رابطه k تعداد گره هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده اند، u_i و $\varphi_i(x)$ به ترتیب تابع میدان و تابع شکل در i امین نقطه در داخل دامنه تحت پوشش می باشد. همچنین U_s و $\Phi^T(x)$ به ترتیب بردار تغییر مکان و بردار تابع شکل می باشند. در شکل 1 نمونه ای از دامنه های تحت پوشش مورد استفاده در روش بدون شبکه برای ساخت تابع های شکل

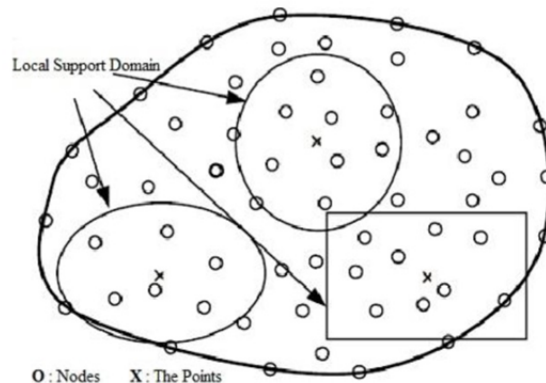


Fig. 1 Support domain in MLPG

شکل 1 دامنه های تحت پوشش در روش بدون شبکه

² Polynomial point interpolation methods

³ Radial point interpolation method

¹ Support domain

جسته می شود (رابطه (17)).

$$\int W \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g \sin \alpha}{v} \right) d\Omega = 0 \quad (26)$$

اینجا W تابع وزن است. در ادامه با انتگرال گیری جز به جز رابطه (27) بدست می آید.

$$\int W n_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma + \int W n_y \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma - \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega - \int \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + \int W \frac{g \sin \alpha}{v} d\Omega = 0 \quad (27)$$

دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری قسمت می شود. Ω_Q دامنه انتگرال گیری برای گره I است. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (27) بدین صورت درمی آید (رابطه (28)).

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_i} W \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Gamma + \int_{\Gamma_u} W \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Omega \\ & = - \int W \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Gamma - \int W \frac{g \sin \alpha}{v} d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

در اینجا φ عبارت است از تابع شکل. همچنین مرزهای انتگرال گیری کلی (Γ_Q) به سه بخش ($\Gamma_Q = \Gamma_{Q_i} \cup \Gamma_{Q_u} \cup \Gamma_{Q_e}$) تقسیم می گردند که در اینجا Γ_{Q_i} مرزهای داخلی در دامنه ای انتگرال گیری که فصل مشترکی با مرزهای کلی ندارند، Γ_{Q_u} قسمتی از مرزهای طبیعی مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند و در نهایت Γ_{Q_e} قسمتی از مرزهای ضروری مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند.

4- نتایج و مشاهدات

به منظور صحت سنجی روش MLPG در این تحقیق، ابتدا با استفاده از این روش یک حالت خاص معادله پواسن (رابطه (29)) مورد حل قرار می گیرد. از آنجایی که این معادله دارای حل تحلیلی می باشد لذا جواب های حاصل از مدل سازی با جواب های تحلیلی مقایسه می گردد. در حالت خاص می توان روابط (29) را نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad 0 \leq x, y \leq 1 \\ & B.C.: \quad \varphi = 0 \text{ اگر } x = 0, \quad \varphi = 0 \text{ اگر } x = 1, \\ & \quad \varphi = 0 \text{ اگر } y = 0, \quad \varphi = 0 \text{ اگر } y = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

از آنجایی که این معادله دارای جواب تحلیلی می باشد، به منظور مقایسه جواب ها، از حل تحلیلی این معادله بهره جسته می شود. جواب تحلیلی عبارت است از (رابطه (30)):

$$\varphi^{\text{exact}} = -\frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (30)$$

این نوع معادله از انواع معادلات پواسن شناخته می شود. جواب حل این مسأله، با استفاده از روش بدون شبکه محلی و تحلیلی در دو حالت به صورت شکل های 2 و 3 ارائه شده است.

در اینجا با هدف حل معادله، از تابع پایه شعاعی چند ضلعی برای حل عددی در روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین کمک گرفته شد. علت استفاده از این نوع تابع، دقت بسیار بالا در حل مسائل این چنینی بوده است. از مقایسه جواب ها در دو روش تحلیلی و بدون شبکه با یکدیگر می توان به دقت بسیار بالای روش بدون شبکه پی برد.

در جدول 2 مقادیر تحلیلی، عددی و خطا به دست آمده از این روش نشان داده شده است.

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i(x_Q) = R^T a(x_Q) \quad (17)$$

$$R^T(x) = [R_1(x) \ R_2(x) \ \dots \ R_n(x)] \quad (18)$$

$R_i(x)$ در رابطه (18) تابع پایه شعاعی است. تابع های مختلف پایه شعاعی توسط محققان پیشنهاد گردیده است که هر کدام ویژگی های خاص خود را دارد. به منظور بهره گیری از این تابع ها، در جدول 1 چهار تابع پایه شعاعی پر کاربرد ارائه گردیده است [33-35].

برای تقریب تابع $u(x)$ با توجه به رابطه (17)، نیاز به محاسبه مقدار ضرایب مجهول $u(x_Q)$ می باشد. با استفاده از رابطه های (19) تا (21) می توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود.

$$R_Q = \begin{Bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$r_k = [(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2]^{0.5} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

$$a = R_Q^{-1} U_s \quad (21)$$

با قرار دادن رابطه (21) در رابطه (16)، تابع شکل به صورت زیر به دست می آید.

$$\Phi = R^T(x) R_Q^{-1} \quad (22)$$

3- رابطه سازی معادله ی حاکم

معادله ممنوم حاکم بر جریان آب در کانال شیب دار در راستای جریان به صورت رابطه (23) بیان می گردد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (uw) \\ & = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g \sin \alpha \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مؤلفه های سرعت در راستای X ، Y و Z و P فشار، g شتاب جاذبه، ρ چگالی، α شیب کانال، v لزجت سینماتیکی می باشد. در اثر جریان یکنواخت و پایدار روابط (24) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (uv) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial y} (uw) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

پس رابطه (25) به دست می آید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g \sin \alpha}{v} \quad (25)$$

با استفاده از روش باقیمانده وزنی می توان رابطه (25) را به صورت زیر نوشت (رابطه (26)).

جدول 1 تابع های پایه شعاعی

Table 1 Radial point interpolation method functions

نام تابع شکل	رابطه	متغیرهای مؤثر
چند ضلعی ¹	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^{\alpha_c}$	$\alpha_c \geq 0, q$
گوسی ²	$R_i(x, y) = \exp(-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c}))^q$	α_c
نواری ³	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	η
لگاریتمی ⁴	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	η

¹ Multiquadric

² Gaussian

³ Thin plate spline

⁴ Logarithmic

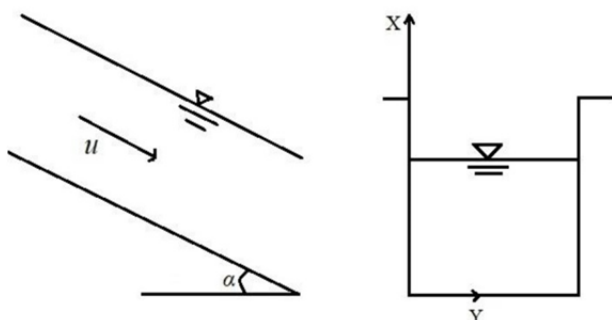


Fig. 4 Fluid flow in the channel

شکل 4 جریان سیال داخل کانال

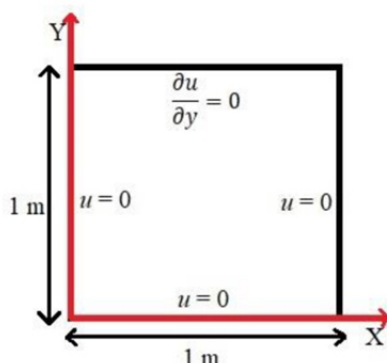


Fig. 5 Diameter and boundary conditions

شکل 5 ابعاد مسئله و شرایط مرزی

همان طور که در شکل مشخص است، سطح آب دارای شرط نیومن و بقیه مرزها دارای شرط مرزی دریشله می باشد.

به منظور صحت سنجی از نتایج روش بدون شبکه برای شیب 1 درجه و لزجت $0.1 \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$ در مسئله با ابعاد شکل 5 با گره های منظم در مقایسه با روش دقیق، اجزای محدود و ایزوژئومتریک [18]، در جدول 3 آمده است.

در جدول 3 می توان کارایی روش بدون شبکه پترو-گلرکین در برابر روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک را به وضوح مشاهده کرد. در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر

جدول 3 مقایسه سرعت های به دست آمده از روش MLPG و خطای آن [18]

Table 3 Comparing between obtain velocities from MLPG method and its error

خطا %	خطا %	خطا %	بدون شبکه	دقیق	Y	X
اجزاء	ایزوژئومتریک	بدون شبکه	(m/sec)	(m/sec)	(m)	(m)
محدود						
8.350	1.810	1.629	0.0651	0.0662	0.2	0.2
14.410	0.350	0.319	0.0939	0.0936	0.2	0.4
22.020	0.300	0.267	0.0966	0.0969	0.2	0.5
13.560	0.180	0.162	0.0989	0.0991	0.4	0.2
20.940	0.010	0.009	0.1445	0.1445	0.4	0.4
27.310	0.130	0.120	0.1498	0.1500	0.4	0.5
17.150	0.110	0.098	0.1156	0.1157	0.6	0.2
24.790	0.030	0.029	0.1711	0.1711	0.6	0.4
30.560	0.030	0.027	0.1779	0.1779	0.6	0.5
19.860	0.100	0.092	0.1236	0.1235	0.8	0.2
27.160	0.020	0.017	0.1836	0.1836	0.8	0.4
32.270	0.010	0.009	0.1911	0.1911	0.8	0.5
20.590	0.030	0.027	0.1258	0.1258	1.0	0.2
31.620	0.020	0.019	0.1873	0.1873	1.0	0.4
34.070	0.020	0.021	0.1950	0.1950	1.0	0.5

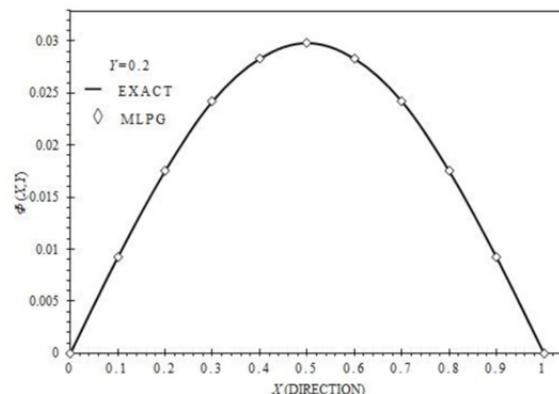


Fig. 2 MLPG solution and exactly solution in Y=0.2

شکل 2 مقایسه نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG در Y=0.2

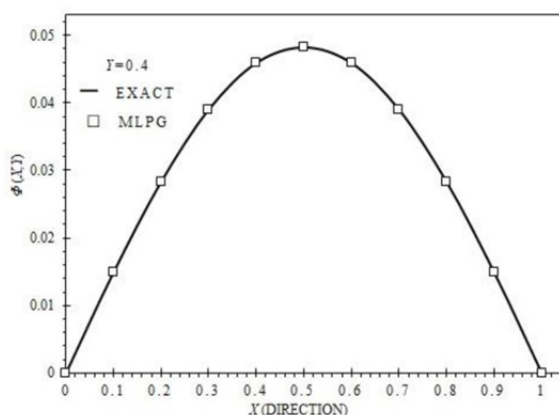


Fig. 3 MLPG solution and exactly solution in Y=0.4

شکل 3 مقایسه نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG در Y=0.4

جدول 2 مقایسه نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن

Table 2 Comparing between obtain result from MLPG method and exact solutions

ϕ			ϕ			X
$y=0.4$			$y=0.2$			
خطا %	بدون شبکه	دقیق	خطا %	بدون شبکه	دقیق	
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0
0.456	0.0148	0.0149	0.370	0.0092	0.0092	0.1
0.120	0.0283	0.0283	0.389	0.0174	0.0175	0.2
0.349	0.0389	0.039	0.140	0.0242	0.0242	0.3
0.074	0.0459	0.0459	0.121	0.0283	0.0283	0.4
0.071	0.0482	0.0482	0.114	0.0299	0.0298	0.5
0.074	0.0459	0.0459	0.124	0.0282	0.0283	0.6
0.436	0.0388	0.039	0.143	0.0242	0.0242	0.7
0.240	0.0282	0.0283	0.389	0.0174	0.0175	0.8
0.456	0.0148	0.0149	0.370	0.0092	0.0092	0.9
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	1.0

با دقت در جدول 2 و مقایسه پاسخها و خطاهای ناشی از آن، عملکرد مطلوب روش بدون شبکه و دقت کافی جوابها نمایان می گردد.

پس از انجام صحت سنجی، مسئله توزیع سرعت جریان داخل کانال شیب دار شکل 4 در حالت یکنواخت مورد بررسی قرار می گیرد. در اینجا X و Y به ترتیب محورهای عمودی و افقی کانال، u سرعت در مقطع کانال بر حسب متر بر ثانیه و α شیب کانال بر حسب درجه می باشد.

همچنین ابعاد مسئله و شرایط مرزی حاکم بر جریان یکنواخت در کانال در شکل 5 مشخص شده است.

شده است.

در جدول 4 می‌توان کارایی روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل شعاعی در برابر انواع دیگر تابع شکل را مشاهده کرد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر 0.19 می‌باشد که خطای مناسبی می‌باشد. درحالی‌که در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق برابر 0.25 و در تابع پایه شعاعی نواری متوسط خطای مطلق برابر 0.32 شده که افزایش خطا را نشان می‌دهد.

شکل 7 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی گوسی در کانال جریان می‌باشد.

همان‌طور که توضیح داده شد، در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق به 0.25 می‌رسد که البته خطای قابل قبولی می‌باشد. شکل 8 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی نواری در کانال جریان می‌باشد.

از سوی دیگر متوسط خطای مطلق در تابع پایه شعاعی گوسی به 0.32 درصد می‌رسد که همچنان قابل قبول است. در مجموع به نظر می‌رسد در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی، کمترین میزان درصد متوسط خطای مطلق رخ می‌دهد.

به منظور مطالعه‌ی شبکه‌ی فرضی گره‌ها و تأثیر تعداد گره‌ها بر کیفیت این روش عددی، نتایج حاصله از حل مسائل با 9، 16 و 36 گره با روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصله در جدول 5 نشان داده شده است.

می‌توان افزایش دقت مسأله را در روش بدون شبکه در جدول 5 مشاهده کرد. در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه تابع شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برای مسأله با 9، 16 و 36 گره به ترتیب برابر 6.54، 1.38 و 0.19 می‌باشد که نشان می‌دهد با افزایش تعداد گره‌ها افزایش دقت و البته کاهش سرعت رخ می‌دهد.

شکل 9 نشان دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه با 9 گره را در کانال جریان می باشد.

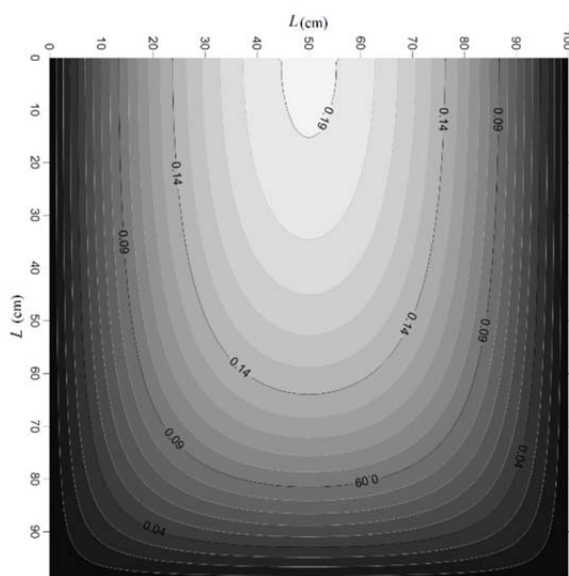


Fig. 7 Velocity contour in Gaussian

شکل 7 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی گوسی

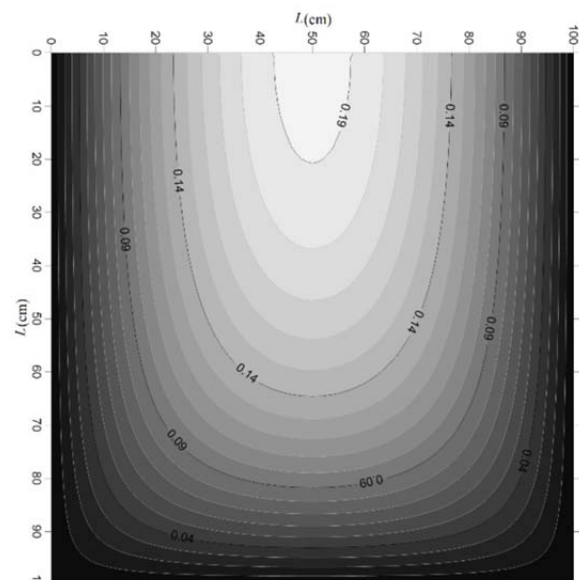


Fig. 6 Velocity contour in Multiquadric

شکل 6 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی

جدول 4 سرعت‌های به دست آمده از انواع تابع شکل شعاعی و خطای آن

Table 4 obtain velocities from Radial point interpolation method functions and its error

X' (m)	Y (m)	بدون شبکه گوسی (m/sec)	بدون شبکه نواری (m/sec)	%خطا چندضلعی	%خطا گوسی	%خطا نواری
0.2	0.2	0.0648	0.0645	1.629	2.082	2.625
0.4	0.2	0.0932	0.0931	0.319	0.399	0.504
0.5	0.2	0.0966	0.0964	0.267	0.348	0.468
0.2	0.4	0.0989	0.0989	0.162	0.207	0.243
0.4	0.4	0.1445	0.1445	0.009	0.011	0.014
0.5	0.4	0.1498	0.1497	0.120	0.155	0.195
0.2	0.6	0.1156	0.1155	0.098	0.127	0.160
0.4	0.6	0.1710	0.1710	0.029	0.034	0.040
0.5	0.6	0.1778	0.1778	0.027	0.034	0.047
0.2	0.8	0.1234	0.1233	0.092	0.117	0.145
0.4	0.8	0.1836	0.1835	0.017	0.023	0.031
0.5	0.8	0.1911	0.1911	0.009	0.012	0.014
0.2	1.0	0.1258	0.1257	0.027	0.036	0.048
0.4	1.0	0.1873	0.1872	0.019	0.022	0.030
0.5	1.0	0.1949	0.1949	0.021	0.026	0.038

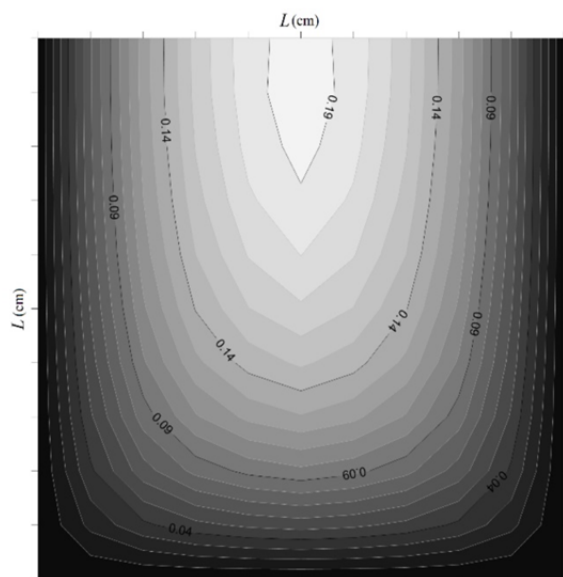


Fig. 9 Velocity contour in Multiquadric (9 nodes)

شکل 9 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی (9 گرهی)

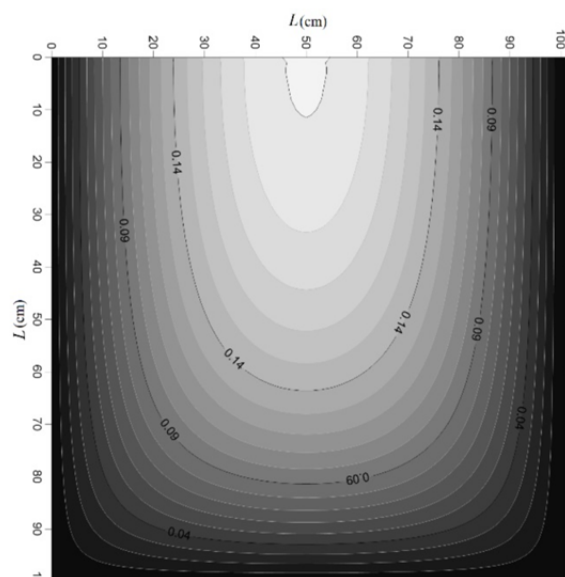


Fig. 8 Velocity contour in Thin plate spline

شکل 8 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی نواری

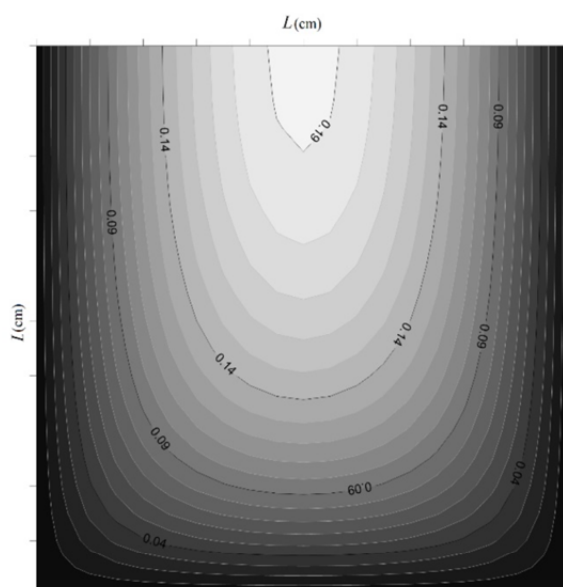


Fig. 10 Velocity contour in Multiquadric (16 nodes)

شکل 10 کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی (16 گرهی)

به یک مرحله زمان بر و پیچیده تبدیل می شود. همچنین با توجه به ماهیت تابع پایه شعاعی چندضلعی در روش بدون شبکه پترو-گلرکین به نظر می رسد، در مسأله هایی از این دست، کمترین میزان درصد متوسط خطای مطلق به وقوع می پیوندد. از طرف دیگر در مسائل با مرزهای غیرمسطح (منحنی) ایجاد المان هایی که از نظر شکل و ظاهر متناسب با فرضیات روش اجزاءمحدود باشد پیچیده بوده درحالی که در روش پیشنهادی این مشکل به آسانی قابل رفع می باشد. به طور کلی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی یک طرح هوشمند در حل مسائل شرایط هندسی متغیر است.

6- فهرست علائم

D و B عملگر دیفرانسیلی

جدول 5 تأثیر تعداد گره ها در روش MLPG و خطای آن

Table 5 Influence of number of nodes in MLPG method and its error

%خطا	%خطا	%خطا	بدون شبکه بدون گرهی 16 گرهی (m/sec)	بدون شبکه بدون گرهی 9 گرهی (m/sec)	Y (m)	X (m)
36	خطا	خطا				
گرهی	گرهی 16	گرهی 9				
1.629	5.943	27.015	0.0623	0.0483	0.2	0.2
0.319	3.778	17.990	0.0901	0.0768	0.2	0.4
0.267	2.561	13.480	0.0944	0.0838	0.2	0.5
0.162	2.321	9.670	0.0968	0.0895	0.4	0.2
0.009	1.262	6.311	0.1427	0.1354	0.4	0.4
0.120	1.078	4.147	0.1484	0.1438	0.4	0.5
0.098	0.693	3.465	0.1149	0.1117	0.6	0.2
0.029	0.588	2.939	0.1701	0.1661	0.6	0.4
0.027	0.441	2.942	0.1771	0.1727	0.6	0.5
0.092	0.371	2.470	0.1230	0.1204	0.8	0.2
0.017	0.446	2.230	0.1828	0.1795	0.8	0.4
0.009	0.397	1.985	0.1903	0.1873	0.8	0.5
0.027	0.263	1.463	0.1255	0.1240	1.0	0.2
0.019	0.221	0.920	0.1869	0.1856	1.0	0.4
0.021	0.192	0.960	0.1946	0.1931	1.0	0.5

همان طور که در شکل مشخص است، با کاهش نقاط گرهی، کاهش چشم گیری دقت و افزایش خطا رخ خواهد داد. شکستگی های خطوط هم سرعت کانتورها به این علت می تواند باشد. شکل 10 نشان دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه با 16 گره را در کانال جریان می باشد.

همان طور که از شکل های 9 و 10 مشخص است، متوسط خطای مطلق با افزایش گره ها، کاهش چشم گیری پیدا می کند.

5- نتیجه گیری

با توجه به تحلیل فوق و هدف مدل سازی جریان داخل کانال، این نتیجه حاصل می شود که روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین ابزاری است که در مدل سازی مسائل با شرایط مرزی متغیر کاملاً سازگار است؛ زیرا تنها با تولید نقاط در هر مرحله تحلیل با شرایط مرزی جدید بدون نگرانی از ارتباط بین گره ها و رعایت پیوستگی بین آن ها، مدل سازی در کمترین زمان ممکن انجام می شود. کاملاً آشکار است که مدل سازی چنین مسائلی در روش اجزاءمحدود پیچیده می باشد، زیرا با کوچک ترین تغییر در شرایط مرزی شبکه بندی مسأله

- equation (LBIE) methods, *Computational Mechanics*, Vol. 24, No.5, pp. 348-372, 1999.
- [11] S. M. Moussavinezhad, F. Shahabian, S. M. Hosseini, Two-dimensional elastic wave propagation analysis in finite length FG thick hollow cylinders with 2D nonlinear grading patterns using MLPG method, *CMES-computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 91, No. 1, pp. 177-204, 2013.
- [12] S. M. Moussavinezhad, F. Shahabian, S. M. Hosseini, Two-dimensional stress-wave propagation in finite-length FG cylinders with two-directional nonlinear grading patterns using the MLPG method, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 140, No. 3, pp. 575-592, 2013.
- [13] A. Mohtashami, A. Akbarpour, M. Mollazadeh, Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 393-403, 2017. (in Persian فارسی)
- [14] F. Sabetghadam, A. Shajari Ghasemkheili, Using the method of inverse problems in implementing the solid immersed boundaries on vorticity-streamfunction formulation of the incompressible viscous fluid flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 397-404, 2017. (in Persian فارسی)
- [15] N. Binesh, H. Bonakdari, Introducing one-dimensional model to estimate velocity distribution in narrow open-channels, *Modares Civil Engineering Journal*, Vol. 16, No. 5, 2016. (in Persian فارسی)
- [16] M. M. Shahmardan, M. Norouzi, A. Naghikhani, Numerical simulation of non-Newtonian fluid flows through a channel with a cavity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 35-40, 2014. (in Persian فارسی)
- [17] A. Karimipour, M. H. Esfe, M. R. Safaei, D. T. Semiromi, S. Jafari, S. N. Kazi, Mixed convection of copper-water nanofluid in a shallow inclined lid driven cavity using the lattice Boltzmann method, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 402, No. 1, pp.150-168, 2014
- [18] M. H. Esfe, M. Akbari, D. S. Toghraie, A. Karimipour, M. Afrand, Effect of nanofluid variable properties on mixed convection flow and heat transfer in an inclined two-sided lid-driven cavity with sinusoidal heating on sidewalls, *Heat Transfer Research*, Vol. 45, No. 5, 2014.
- [19] H. Alipour, A. Karimipour, M. R. Safaei, D. T. Semiromi, O. A. Akbari, Influence of T-semi attached rib on turbulent flow and heat transfer parameters of a silver-water nanofluid with different volume fractions in a three-dimensional trapezoidal microchannel, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 88, No. 1, pp.60-76, 2017.
- [20] A. Aghanajafi, D. Toghraie, B. Mehmoudoust, Numerical simulation of laminar forced convection of water-CuO nanofluid inside a triangular duct, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 85, No. 1, pp. 103-108, 2017.
- [21] S. Nazari, D. Toghraie, Numerical simulation of heat transfer and fluid flow of water-CuO nanofluid in a sinusoidal channel with a porous medium, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 87, No. 1, pp.134-140, 2017.
- [22] O. A. Akbari, D. Toghraie, A. Karimipour, A. Marzban, G. R. Ahmadi, The effect of velocity and dimension of solid nanoparticles on heat transfer in non-Newtonian nanofluid, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 86, No. 1, pp. 68-75, 2017.
- [23] M. Afrand, D. Toghraie, A. Karimipour, S. Wongwises, A numerical study of natural convection in a vertical annulus filled with gallium in the presence of magnetic field, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 430, No. 1, pp. 22-28, 2017.
- [24] Q. Gravndyan, O. A. Akbari, D. Toghraie, A. Marzban, R. Mashayekhi, R. Karimi, F. Pourfatah, The effect of aspect ratios of rib on the heat transfer and laminar water/TiO2 nanofluid flow in a two-dimensional rectangular microchannel, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 236, No. 1, pp. 254-265, 2017.
- [25] M. Faridzadeh, D. S. Toghraie, A. Niroomand, Analysis of laminar mixed convection in an inclined square lid-driven cavity with a nanofluid by using an artificial neural network, *Heat Transfer Research*, Vol. 45, No. 4, 2014.
- [26] O. A. Akbari, H. H. Afrouzi, A. Marzban, D. Toghraie, H. Malekzade, A. Arabpour, Investigation of volume fraction of nanoparticles effect and aspect ratio of the twisted tape in the tube, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* Vol. 129, No. 3, pp. 1911-1922, 2017.
- [27] M. R. Shamsi, O. A. Akbari, A. Marzban, D. Toghraie, R. Mashayekhi, Increasing heat transfer of non-Newtonian nanofluid in rectangular microchannel with triangular ribs, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 93, No. 1, pp. 167-178, 2017.
- [28] R. Amini, R. Maghsoodi, N. Z. Moghaddam, S. M. Tavakoli, Using isogeometric method for dam break modeling by Lagrangian approach, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 3, pp. 44-55, 2014. (in Persian فارسی)
- [29] R. Amini, R. Maghsoodi, N. Z. Moghaddam, S. M. Tavakoli, Channels flow modeling using isogeometric analysis, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 5, No. 4, pp. 15-26, 2015. (in Persian فارسی)
- [30] R. Amini, R. Maghsoodi, N. Z. Moghaddam, Simulating free surface problem using isogeometric analysis, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 413-421, 2016.
- [31] G. R. Liu, Y. T. Gu, A point interpolation method for two dimensional solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, No. 4, pp. 937-951, 2001.

f و g	تابع نیرویی
$u^h(x)$	تابع میدان تقریبی
P	بردار عضوهای چندجمله‌ای
n	تعداد عضوهای چندجمله‌ای
R_Ω	باقی مانده‌ی مسئله در داخل دامنه
R_Γ	باقی مانده‌ی مسئله بر روی مرزها
$\tilde{W}_i$	تابع‌های وزن برای باقی مانده وزنی برای R_Ω
$\tilde{V}_i$	تابع‌های وزن برای باقی مانده وزنی برای R_Γ
k	تعداد گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند
u_i	تابع میدان در i امین نقطه در داخل دامنه تحت پوش
$\varphi_i(x)$	تابع شکل در i امین نقطه در داخل دامنه تحت پوش
U_s	بردار تغییر مکان
$\Phi^T(x)$	بردار تابع شکل
d_s	فاصله بین گره‌ها
$B_i(x)$	تابع پایه‌ای تعریف شده در مسئله پیرامون فضای دکارتی
$X^T = [x, y, x]$	
$a_i(x_Q)$	ضریب تابع پایه‌ای
$R_i(x)$	تابع پایه شعاعی
P	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
g	شتاب جاذبه (ms^{-2})
u	مؤلفه‌های سرعت در راستای X (ms^{-1})
v	مؤلفه‌های سرعت در راستای Y (ms^{-1})
w	مؤلفه‌های سرعت در راستای Z (ms^{-1})
علائم یونانی	
α	ضرایب چندجمله‌ای
α_s	ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ν	لزجت سینماتیکی (m^2s^{-1})

7- مراجع

- [1] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, No. 3, pp. 375-389, 1977.
- [2] S. Farzin, Y. Hassanzadeh, M. T. Aalami, R. Fatehi, An implicit incompressible SPH method for free surface flow problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 99-110, 2014. (in Persian فارسی)
- [3] Farzin, Y. Hassanzadeh, M. T. Aalami, R. Fatehi, Development of Two Incompressible SPH methods to simulate sediment-laden free surface flows, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 91-103, 2014. (in Persian فارسی)
- [4] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp. 307-318, 1992.
- [5] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- [6] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 1081-1106, 1995.
- [7] J. M. Melenk, I. Babuska, Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 4, pp. 607-632, 1997.
- [8] N. Sukumar, B. Moran, T. Belytschko, The natural element method in solid mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 43, No. 5, pp. 839-887, 1998
- [9] H. Wendland, Meshless Galerkin methods using radial basis functions, *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, Vol. 68, No. 228, pp. 1521-1531, 1999.
- [10] S. N. Atluri, H. G. Kim, J. Y. Cho, A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral

- [34] E. Onate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, A finite point method in computational mechanics application to convective transport and fluid flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 22, pp. 3839-3866, 1996.
- [35] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Method and their Programming*, pp. 237-309, Netherlands: Springer Science & Business Media, 2005.
- [32] G. R. Liu, Y. T. Gu, A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246, No. 1, pp. 29-46, 2001.
- [33] R. L. Hardy, Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 19, No. 8-9, pp. 163-208, 1990.