



بررسی پدیده‌های لغو، تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات گذرا در تیرهای خمیده لایه‌ای تیموشنکو تحت بارهای متحرک

هدی سرپرست¹، سیامک اسماعیل‌زاده خادم^{2*}، علی ابراهیمی ممقانی³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران

*تهران، صندوق پستی ۱۷۷-۱۴۱۱۵، khadem@modares.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله رفتار ارتعاشی تیر خمیده لایه‌ای عمیق تیموشنکو تحت بار متحرک تکی و چندتایی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در حضور پدیده های لغو، تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد مطالعه شده است. با ثابت در نظر گرفتن دامنه و سرعت بارهای متحرک، معادلات حرکت حاکم بر سیستم با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی حل شده‌اند. فرکانس پایه‌ای تیر، سرعت بحرانی بار متحرک و پاسخ دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای به دست آمده‌اند. همچنین تاثیر پارامترهایی نظیر سرعت‌های مختلف لغو، حداکثر، فاصله بارهای متحرک از یکدیگر، ترتیب لایه‌چینی و تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تیر بر پاسخ زمانی سیستم ارائه شده است. نتایج، نشان دادند جابجایی دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای برای لایه‌چینی عمود برهم حتی در شرایطی که پدیده لغو، تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد رخ داده‌اند کمتر از لایه‌چینی غیر عمود می‌باشد. همچنین مشاهده شد که نوع لایه‌چینی و تعداد لایه‌ها در سرعت‌های لغو و حداکثر تیر تحت بار متحرک تکی اثری ندارند ولی سرعت‌های لغو و تشدید را در تیرهای تحت بارهای متحرک چندتایی تغییر می‌دهند. در ضمن نشان داده شد که سرعت‌های لغو و تشدید در لایه‌چینی‌های عمود بر هم متقارن و نامتقارن یکسان هستند و بیشتر از انواع دیگر لایه‌چینی می‌باشند.	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 10 آذر 1396 پذیرش: 05 اردیبهشت 1397 ارائه در سایت: 10 خرداد 1397 کلیدواژه‌ها: بار متحرک تکی و چندتایی تیر خمیده لایه‌ای سرعت بحرانی پدیده‌های لغو و تشدید ارایش لایه‌چینی

Investigation of the cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena in laminated curved Timoshenko beams under moving loads

Hoda Sarparast¹, Siamak Esmaeilzade Khadem^{1*}, Ali Ebrahimi Mamaghani²

1-Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- South Tehran Branch Islamic Azad University, Tehran, Iran

*P.O.B. 14115-177 Tehran, Iran, khadem@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 01 December 2017
Accepted 25 April 2018
Available Online 31 May 2018

Keywords:
Single and Multiple Moving Loads
Laminated Curved Beam
Critical Speed
Resonance and Cancellation Phenomena
Layup Configuration

ABSTRACT

In this paper, the vibration behavior of a laminated deep curved Timoshenko beam under single and multiple moving loads with simply supported boundary conditions in the presence of cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena is studied. By considering a constant value for the amplitude and speed of moving loads, the governing equations are solved by analytical and numerical methods. The fundamental frequency, critical speed of moving load and the dynamic response are obtained. Also, the effect of parameters such as different maximum and cancellation speeds, distance of moving loads from each other, number of layers and the layup configuration are studied on the dynamic response. The results show that the dynamic deflection for cross-ply layups is less than angle-ply layups even in the condition of cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration. The type of layups and the number of layers do not affect cancellation and maximum speeds in the system under a single moving load, but affect them under multiple moving loads. Moreover, the cancellation and resonance speeds are the same in both symmetric and non-symmetric layups, and are higher than other types of layups.

تبدیل به یکی از موضوعات مهم و چالش‌برانگیز شده است. به منظور تحلیل دینامیکی این سازه‌ها معمولاً آن‌ها را با تیر، صفحه یا پوسته تحت بار متحرک تکی یا چندتایی مدل‌سازی می‌کنند. سرعت وسایل نقلیه در تحلیل ارتعاشی

1- مقدمه

تحلیل ارتعاشات القا شده توسط وسایل نقلیه عبوری از سازه‌هایی نظیر ریل ها، پل‌ها و جاده‌ها، به دلیل پیشرفت وسایل نقلیه و بالا رفتن سرعت آنها،

فرکانس‌های طبیعی تیر را با استفاده از روش حل مسئله مقدار ویژه محاسبه نموده‌اند. کایا [13] تجزیه و تحلیل دینامیکی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای تحت بارهای متحرک را با استفاده از روش اجزای محدود چندلایه‌ای انجام داده است. او نتیجه گرفت که برای کامپوزیت‌های لایه‌ای تحت بار متحرک لایه‌چینی عمود بر هم مناسب‌تر از لایه‌چینی با زوایای دیگر است. ملک‌زاده و همکاران [14] پاسخ دینامیکی یک صفحه کامپوزیتی لایه‌ای ضخیم تحت بار متحرک را بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی ارائه کرده‌اند. آن‌ها اثرات نسبت ضخامت به طول، سرعت بار، خروج از مرکزیت بار و ترتیب لایه‌چینی را بر پاسخ زمانی مطالعه کرده‌اند. کارگرنوین و همکاران [15] رفتار دینامیکی تیر کامپوزیتی لایه‌ای دارای لایه لایه‌شدگی تکی^۴ تحت بار متحرک ثابت را بررسی نموده‌اند. آن‌ها اثر پارامترهایی نظیر سرعت بار متحرک، ترتیب لایه‌چینی، اندازه و عمق لایه لایه‌شدگی را بر پاسخ دینامیکی تیر معرفی کرده‌اند و نتیجه گرفته‌اند که ماکزیمم دامنه دینامیکی تیر برای لایه‌چینی عمود بر هم متقارن بیشتر از لایه‌چینی عمود برهم نامتقارن است. کدیور و محب‌پور [16] به مطالعه رفتار دینامیکی تیر کامپوزیتی لایه‌ای نامتقارن تحت بار متحرک به کمک روش اجزای محدود پرداخته‌اند و اثر لایه‌چینی را بر سرعت بحرانی تیر بررسی کرده‌اند. کیرال و همکاران [17] با بررسی پاسخ اجباری تیر کامپوزیتی لایه‌ای تحت بار متحرک متمرکز در سرعت‌های متفاوت به این نتیجه رسیدند که حداکثر دامنه ارتعاشات اجباری تیر برای لایه‌چینی‌های مختلف یکسان است.

بر طبق اطلاعات نویسندگان، تحلیل ارتعاشاتی تیرهای خمیده لایه‌ای تحت بارهای متحرک تا به حال مورد مطالعه قرار نگرفته است و شرایط وقوع پدیده‌های لغو، تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد در آن‌ها گزارش نشده است. بنابراین در مقاله حاضر، به عنوان پیشرفتی بر مراجع [11, 6, 5] برای اولین بار به تحلیل رفتار دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای عمیق تیموشنکو با انحنا ثابت و تکیه‌گاه ساده تحت بار متحرک تکی و چندتایی شعاعی با سرعت ثابت پرداخته شده است. با این هدف، ابتدا روش‌های تحلیلی و عددی برای حل معادلات حرکت سیستم استفاده شده است. سپس پاسخ‌های زمانی سیستم به ازای پارامترهایی نظیر سرعت‌های مختلف لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد، فاصله بارها از یکدیگر، ترتیب لایه‌چینی و تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت نمایش داده شده‌اند. مدل‌سازی و نتایج ارائه شده در این پژوهش، می‌تواند به مهندسان در طراحی و بهینه‌سازی سازه‌های مکانیکی و عمرانی نظیر پل‌های خمیده تحت عبور وسایل نقلیه کمک نماید.

2- مدل ریاضی

مدل تیر خمیده کامپوزیتی لایه‌ای با ضخامت و عرض یکنواخت h و b در شکل 1 نشان داده شده است. تیر با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت N بار متحرک شعاعی p_w با سرعت ثابت v قرار گرفته است. با فرض اینکه اولین بار در لحظه $t = 0$ وارد تیر می‌شود، بار j -ام در زمان $t_j = (j - 1)d/v$ وارد تیر می‌شود که d فاصله بارها از یکدیگر می‌باشد. انحنا تیر، ثابت فرض شده است و شعاع انحنا و زاویه تیر R و θ_l می‌باشد. مختصات انتخاب شده برای تیر s ، z و y که به ترتیب در امتداد طول، عرض و ضخامت می‌باشند. u و w جابجایی‌های مربوط به جهت‌های s و z می‌باشند. ψ هم چرخش حول محور y است. جابجایی‌ها از صفحه میانی اندازه‌گیری می‌شوند. لایه‌های تیر کاملاً به یکدیگر چسبیده‌اند و از نوع الیاف پارچه‌ای با تار و پود یکسان می‌باشند. در مدل حاضر، میرایی سیستم اصلی ناچیز فرض شده است و به

این سازه‌ها از آن جهت حائز اهمیت است که منجر به وقوع پدیده‌هایی همچون لغو^۱، تشدید^۲ و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد^۳ می‌شود. از آنجایی که پدیده‌های تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد اثرات نامطلوبی بر عملکرد و ایمنی سیستم‌ها دارند، لذا باید حتی‌الامکان از برابر شدن سرعت بار متحرک با سرعت‌های تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد جلوگیری کرد. از سوی دیگر عبور بارهای متحرک با سرعت لغو به دلیل حداقل شدن دامنه ارتعاشات آزاد سیستم، منجر به عملکرد بهینه سیستم می‌شوند. بنابراین شرایط رخداد این پدیده‌ها حتماً باید در طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌هایی که تحت بار متحرک قرار دارند مورد بررسی قرار گیرند و با توجه به سرعت عبور بارهای متحرک، مشخصات ارتعاشی سازه‌ها را به گونه‌ای تعیین کرد که بهینه‌ترین عملکرد را دارا باشند. از این‌رو مطالعات متعددی بر بررسی جنبه‌های گوناگون این پدیده‌ها در سیستم‌های مختلف پرداخته‌اند [1-4]. کومار و همکاران [5] به مطالعه ارتعاشات یک تیر مستقیم تحت بار متحرک تکی پرداختند و اثر میرایی را بر پاسخ دینامیکی در سرعت‌های لغو و حداکثر بررسی کردند و نشان دادند که در حالت بدون میرایی در تمام سرعت‌هایی که برای مود اول پدیده لغو اتفاق می‌افتد، با در نظر گرفتن مودهای فرد بالاتر نیز در همان سرعت‌ها پدیده لغو رخ خواهد داد. زای و همکاران [6] در تحلیل دینامیکی یک پل تحت حرکت قطار، شرایط وقوع پدیده‌های لغو، تشدید و ناپدید شدن تشدید که در آن سرعت‌های لغو و تشدید به یکدیگر نزدیک می‌شوند را مورد بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند که در شرایط ناپدید شدن تشدید، پدیده لغو، غالب است. یانگ و همکاران [7] پدیده لغو و تشدید را در ریل راه‌آهن که بر روی یاتاقان‌های الاستیکی قرار دارد بررسی کردند و نشان دادند که سرعت‌های لغو با تغییر سختی تکیه‌گاه‌های الاستیک تغییر نمی‌کنند.

از میان سازه‌های مورد مطالعه در این زمینه، سازه‌های خمیده به دلیل قابلیت تحمل بار بیشتر نسبت به سازه‌های مستقیم، جایگاه ویژه‌ای دارند. لین و لی [8] یک روش نیمه‌تحلیلی را برای تعیین پایداری ارتعاشی یک جرم متمرکز در حال حرکت بر روی یک تیر خمیده با شرایط مرزی مختلف ارائه کرده‌اند. آن‌ها نتیجه گرفتند فقط زمانی که سرعت حرکت، پایین است مسئله جرم متحرک را می‌توان با دقت خوبی توسط مدل بار متحرک تخمین زد. هوانگ و همکارانش [9] یک حل دقیق را برای تیر خمیده دایره‌ای تحت بار متحرک با استفاده از روش تبدیل لاپلاس پیشنهاد کرده‌اند. آن‌ها اثر مشخصات بار متحرک (نظیر سرعت بار متحرک و فرکانس تحریک) و اثر مشخصات هندسی (نظیر شعاع انحنا، تعداد دهانه و زاویه بازشدگی) را بر روی پاسخ دینامیکی بررسی کرده‌اند. دای و انگ [10] برای پاسخ حالت ماندگار یک تیر خمیده روی بستر الاستیک میرای ویسکوز تحت بارهای متحرک متوالی یک حل تحلیلی ارائه کردند. یانگ و وو [11] یک حل تحلیلی برای تیر خمیده افقی تحت بارهای متحرک افقی و عمودی با فاصله برابر از یکدیگر استخراج کرده‌اند.

در سال‌های اخیر مواد کامپوزیتی، به دلیل سبک‌وزن بودن، مقاومت و سختی بالا و مقرون‌به‌صرفه بودن مورد علاقه طراحان سازه واقع شده‌اند. محققین در پژوهش‌های متعددی به بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌های کامپوزیتی تحت بار متحرک با استفاده از روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی پرداخته‌اند و اثر پارامترهای مادی، هندسی و بار متحرک را بر پاسخ دینامیکی مورد مطالعه قرار داده‌اند. یی و همکاران [12] ارتعاشات آزاد تیر خمیده کامپوزیتی لایه‌ای با شرایط مرزی کلی را بررسی کرده‌اند. آن‌ها

¹ Cancellation

² Resonance

³ Maximum Amplitude of Free Vibration

⁴ Single Delamination

همین علت در مدل‌سازی در نظر گرفته نشده است.

2-1- معادلات دیفرانسیلی حاکم

معادلات دیفرانسیلی حرکت سیستم در راستاهای محوری، شعاعی و خمشی با استفاده از روابط تنش- کرنش [18] و اصل همیلتون به دست می‌آیند [12] (روابط (1) تا (3)).

$$\bar{I}_0 R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{I}_1 R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - A_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u + R\psi \right) = 0 \quad (1)$$

$$\bar{I}_0 R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) + B_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - A_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = p_w R^2 \sum_{j=1}^{N-1} \delta(R\theta - v(t - t_j)) \quad (2)$$

$$\bar{I}_1 R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{I}_2 R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - B_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + A_{55} R \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u + R\psi \right) = 0 \quad (3)$$

که δ تابع دلتای دیراک می‌باشد و عبارت‌های اینرسی با رابطه (4) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{I}_0 &= I_0 + \frac{I_1}{R}, \quad \bar{I}_1 = I_1 + \frac{I_2}{R}, \quad \bar{I}_2 = I_2 + \frac{I_3}{R} \\ [I_0, I_1, I_2, I_3] &= b \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^k [1, z, z^2, z^3] dz \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه (4) چگالی k امین لایه می‌باشد. A_{11} , A_{55} , B_{11} و D_{11} ضرایب سختی هستند و طبق رابطه (5) تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} A_{11} &= Rb \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^k \ln \left(\frac{R + z_{k+1}}{R + z_k} \right) \\ B_{11} &= Rb \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^k \left[(z_{k+1} - z_k) - R \ln \left(\frac{R + z_{k+1}}{R + z_k} \right) \right] \\ D_{11} &= Rb \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^k \left[\frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) - 2R(z_{k+1} - z_k) + R^2 \ln \left(\frac{R + z_{k+1}}{R + z_k} \right) \right] \\ A_{55} &= k_s Rb \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{55}^k \ln \left(\frac{R + z_{k+1}}{R + z_k} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

که n تعداد لایه‌ها و z_k و z_{k+1} مختصات پایین‌ترین و بالاترین نقطه لایه k ام را نشان می‌دهد. k_s ضریب تصحیح برشی است و برای تیر کامپوزیتی لایه‌ای به پارامترهای مختلف تیر نظیر نوع لایه‌چینی، زاویه

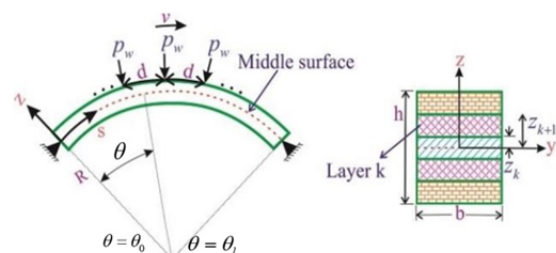


Fig 1. Schematic diagram of loading, geometry and boundary conditions of the laminated curved beam.

شکل 1 نمای کلی از شرایط بارگذاری، شرایط مرزی و هندسه تیر خمیده لایه‌ای

ارتوتروپیک، خواص مواد، شرایط مرزی و بارگذاری بستگی دارد. تعیین مقدار دقیق برای ضریب تصحیح برشی یک مسئله حل نشده است و تحقیقات در این زمینه همچنان ادامه دارد، در تحقیق حاضر، مانند مراجع [19,13] مقدار $\frac{5}{6}$ برای آن در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (5) $\bar{Q}_{11}^k$ و $\bar{Q}_{55}^k$ ثابت‌های سختی الاستیک می‌باشند که طبق رابطه (6) تعریف می‌شوند [18].

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^k &= Q_{11}^k \cos^4 \alpha^k, \quad \bar{Q}_{55}^k = Q_{55}^k \cos^2 \alpha^k, \\ Q_{11}^k &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{55}^k = G_{13} \end{aligned} \quad (6)$$

که α^k زاویه جهت اصلی لایه k ام را با محور S مشخص می‌کند. E_{11} مدول الاستیسیته کامپوزیت در جهت اصلی و G_{13} مدول برشی است. ν_{12} و ν_{21} ضرایب پواسون می‌باشند.

2-2- حل تحلیلی

2-2-1- توابع مقایسه‌ای

برای حل معادلات (1) تا (3) بخش زمانی و مکانی این معادلات با استفاده از روش گلرکین [21,20] جدا شده است و جابجایی در راستای شعاعی، محوری و خمشی توسط توابعی که شرایط مرزی، هندسی یا هر دو را ارضا نمایند، در نظر گرفته می‌شوند. جابجایی شعاعی توسط توابع مقایسه‌ای سینوسی که شرایط مرزی دو سر مفصل را ارضا می‌کنند، معرفی می‌شود.

$$w(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i}(t) \sin \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) \quad (7)$$

که q_{w_i} پاسخ زمانی شعاعی مربوط به i -امین مختصات عمومی است. با جایگذاری رابطه (7) در روابط (1) تا (3)، حذف عبارت‌های وابسته به زمان و بار متحرک، معادلات با مشتقات جزئی تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی (روابط (8) تا (10)) می‌شوند.

$$\begin{aligned} A_{11} \left(u'' + \sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i} \frac{i\pi}{\theta_l} \cos \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) \right) + B_{11} \psi'' \\ + A_{55} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i} \frac{i\pi}{\theta_l} \cos \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) - u + R\psi \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -A_{11} \left(u' + \sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i} \sin \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) \right) - B_{11} \psi' \\ + A_{55} \left(- \sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i} \left(\frac{i\pi}{\theta_l} \right)^2 \sin \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) - u' + R\psi' \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \left(u'' + \sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i} \frac{i\pi}{\theta_l} \cos \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) \right) + D_{11} \psi'' \\ - A_{55} R \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_{w_i} \frac{i\pi}{\theta_l} \cos \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) - u + R\psi \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

با انجام عملیات ریاضی و ساده‌سازی معادلات (8) تا (10)، دو معادله مستقل در جهت u و ψ به دست می‌آیند (روابط (11) و (12)) که از حل این معادلات و اعمال شرایط مرزی تیر، جابجایی محوری و خمشی تیر محاسبه می‌شوند (روابط (13) و (14)).

$$\begin{aligned} \left(-A_{11} - A_{55} + \frac{B_{11} - RA_{55}}{B_{11} + \frac{D_{11}}{R}} \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \right) u'' \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_{11} \frac{i\pi}{\theta_l} A_{55} \left(\frac{i\pi}{\theta_l} \right)^3 \frac{RA_{55} - B_{11}}{B_{11} + \frac{D_{11}}{R}} \left(A_{11} \frac{B_{11}}{R} \right) \right) q_{w_i} \cos \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\psi'' = \frac{-(A_{11} + \frac{B_{11}}{R})}{B_{11} + \frac{D_{11}}{R}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{i\pi}{\theta_l} q_{u_i} + q_{w_i} \right) \frac{i\pi}{\theta_l} \cos \left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l} \right) \right) \quad (12)$$

می‌باشد. جواب معادلات (22) تا (24) در دو حالت بررسی می‌شود: 1- تیر خمیده لایه‌ای تحت بار متحرک تکی 2- تیر خمیده لایه‌ای تحت بارهای متحرک چندتایی

2-2-2- تیر خمیده لایه‌ای تحت بار متحرک تکی

در حالتی که فقط یک بار بر روی سیستم در حال حرکت است، پاسخ ارتعاشات سیستم از دو بخش ارتعاشات اجباری و آزاد تشکیل شده است. ارتعاشات اجباری مربوط به بازه زمانی $0 \leq t \leq \frac{L}{v}$ است که بار بر روی تیر حضور دارد. به محض اینکه بار تیر را ترک می‌کند یعنی در بازه زمانی $t > \frac{L}{v}$ ارتعاشات آزاد سیستم شروع می‌شود. پاسخ ارتعاشات اجباری سیستم در بازه زمانی $0 \leq t \leq \frac{L}{v}$ از روابط (25) تا (27) تعیین می‌شود.

$$q_{u_1}(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) + P_1 \sin\left(\frac{\pi v t}{L}\right) \quad (25)$$

$$q_{w_1}(t) = C_3 \sin(\omega_n t) + C_4 \cos(\omega_n t) + P_2 \sin\left(\frac{\pi v t}{L}\right) \quad (26)$$

$$q_{\psi_1}(t) = C_5 \sin(\omega_n t) + C_6 \cos(\omega_n t) + P_3 \sin\left(\frac{\pi v t}{L}\right) \quad (27)$$

که ω_n فرکانس پایه‌ای تیر خمیده لایه‌ای است و از حل معادله مشخصه (28) به دست می‌آید. فرکانس پایه‌ای سیستم از آن جهت حائز اهمیت است که به مهندسان در طراحی بهینه سازه‌ها کمک می‌کند.

$$A_1 \omega_n^6 + A_2 \omega_n^4 + A_3 \omega_n^2 + A_4 = 0 \quad (28)$$

ضرایب معادله (28) در ضمیمه ب تعریف شده‌اند. P_1 ، P_2 و P_3 نیز از حل معادله (29) به دست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 \left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 & e_1 & g_1 - c_1 \left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 \\ d_2 q_{u_1} = q_{w_1} = q_{\psi_1} = \dot{q}_{u_1} = \dot{q}_{w_1} = \dot{q}_{\psi_1} = 0 & e_2 - b_2 \left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 & g_2 \\ d_3 - a_3 \left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 & e_3 & g_3 - c_3 \left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -p_w R^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

با فرض اینکه تیر خمیده لایه‌ای قبل از قرار گرفتن تحت بار متحرک، در حالت تعادل پایدار باشد، جابجایی و سرعت اولیه صفر است. بنابراین ضرایب C_1 تا C_6 با توجه به شرایط اولیه تعیین خواهند شد (رابطه (30)).

$$\begin{aligned} C_1 &= -\eta P_1, \quad C_2 = 0 \\ C_3 &= -\eta P_2, \quad C_4 = 0 \\ C_5 &= -\eta P_3, \quad C_6 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

که $\eta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$ و $\bar{\omega} = \frac{\pi v}{L}$ است. برای سرعت، یک مقدار بحرانی وجود دارد. ریشه‌های مثبت معادله (31) که از صفر قرار دادن دترمینان رابطه (29) به دست می‌آیند، سرعت بحرانی را مشخص می‌کنند [10]. ضرایب معادله (31) در ضمیمه پ مشخص شده‌اند. اهمیت سرعت بحرانی به دلیل آن است که رفتار جابجایی دینامیکی تیر در سرعت بحرانی دچار تغییر می‌شود.

$$B_1 v^6 + B_2 v^4 + B_3 v^2 + B_4 = 0 \quad (31)$$

ارتعاشات آزاد سیستم ($t > \frac{L}{v}$) از روابط (32) تا (34) تعیین می‌شود.

$$q_{u_1}(t) = C_7 \sin(\omega_n t) + C_8 \cos(\omega_n t) \quad (32)$$

$$q_{w_1}(t) = C_9 \sin(\omega_n t) + C_{10} \cos(\omega_n t) \quad (33)$$

$$q_{\psi_1}(t) = C_{11} \sin(\omega_n t) + C_{12} \cos(\omega_n t) \quad (34)$$

با محاسبه جابجایی و سرعت در سه راستای محوری، شعاعی و خمشی در زمان $t = \frac{L}{v}$ جابجایی و سرعت اولیه ارتعاشات آزاد سیستم در سه راستا مشخص می‌شوند (روابط (35) و (36)). بنابراین ضرایب C_7 تا C_{12} از شرایط اولیه ارتعاشات آزاد سیستم محاسبه می‌شوند (رابطه (37)).

$$q_{u_1}\left(t = \frac{L}{v}\right) = C_1 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)$$

$$u(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{u_i}(t) \left(1 - \cos\left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l}\right) - (1 - (-1)^i) \frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (13)$$

$$\psi(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{\psi_i}(t) \left(\cos\left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l}\right) - 1 + (1 - (-1)^i) \frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (14)$$

که q_{u_i} و q_{ψ_i} با روابط (15) و (16) تعیین می‌شوند.

$$q_{u_i}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta_l}{i\pi}\right)^2 q_{w_i}(t) \quad (15)$$

$$q_{\psi_i}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{11} + \frac{B_{11}}{R}}{B_{11} + \frac{D_{11}}{R}} \left(q_{w_i}(t) \frac{\theta_l}{i\pi} + q_{u_i}(t)\right) \quad (16)$$

β و γ هم طبق روابط (17) و (18) تعریف می‌شوند.

$$\beta = -A_{11} - A_{55} + \frac{B_{11} - RA_{55}}{B_{11} + \frac{D_{11}}{R}} \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R}\right) \quad (17)$$

$$\gamma = A_{11} \frac{i\pi}{\theta_l} + A_{55} \left(\frac{i\pi}{\theta_l}\right)^3 + \frac{RA_{55} - B_{11}}{B_{11} + \frac{D_{11}}{R}} \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R}\right) \quad (18)$$

که q_{u_i} و q_{ψ_i} پاسخ زمانی محوری و خمشی مربوط به i امین مختصات عمومی می‌باشند. در مقاله حاضر، برای تیر خمیده کامپوزیتی لایه‌ای فرکانس‌های طبیعی چند مود اول محاسبه شده است و مشخص شده که فرکانس‌های طبیعی سیستم به اندازه کافی از یکدیگر دور هستند و از مود اول نیز کاملاً جدا هستند. بنابراین مود اول سیستم، بیشترین سهم را در ارتعاشات سازه دارد و مسلماً بیشترین انرژی وارده به سیستم صرف تحریک مود اول می‌شود. به عبارت دیگر، مود اول، مود غالب سیستم است. به این ترتیب می‌توان گفت که با در نظر گرفتن تنها مود اول برای سازه تخمین بسیار خوبی از پاسخ دینامیکی سیستم به دست می‌آید. البته لازم به ذکر است که اثر موده‌های بالاتر نیز بر پاسخ دینامیکی سیستم بررسی شده است ولی به دلیل اینکه موده‌های بالاتر نقش بسیار ضعیفی در پاسخ دینامیکی سیستم دارند می‌توان از آن‌ها صرفه نظر کرد که این موضوع در ادبیات فنی قبلاً به اثبات رسیده است [10,5]. از طرفی در مقاله حاضر، به دلیل آنکه سیستم تحت بارهای متحرک قرار دارد و این بارها در زمان کوتاهی از روی تیر عبور می‌کنند، بنابراین انرژی انتقال یافته به سیستم محدود است که بیشترین مقدار این انرژی صرف تحریک مود اول سیستم می‌شود. ضمناً با افزایش سرعت بار متحرک به دلیل محدودتر شدن انرژی وارده به سیستم، نقش مود اول در پاسخ دینامیکی سیستم نیز پررنگ‌تر می‌شود [11]. به همین دلیل فقط شکل مود اول تیر در جهت‌های محوری، شعاعی و خمشی در نظر گرفته شده است (روابط (19) تا (21)).

$$u(\theta, t) = q_{u_1}(t) \left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2\frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (19)$$

$$w(\theta, t) = q_{w_1}(t) \sin\frac{\pi\theta}{\theta_l} \quad (20)$$

$$\psi(\theta, t) = q_{\psi_1}(t) \left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l} - 1 + 2\frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (21)$$

که q_{u_1} ، q_{w_1} ، q_{ψ_1} اولین مختصات عمومی برای جابجایی‌های محوری، شعاعی و خمشی هستند. با به کارگیری روش گلرکین معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیلی معمولی تبدیل می‌شوند.

$$a_1 \ddot{q}_{u_1} + c_1 \dot{q}_{\psi_1} + d_1 q_{u_1} + e_1 q_{w_1} + g_1 q_{\psi_1} = 0 \quad (22)$$

$$b_2 \ddot{q}_{w_1} + d_2 q_{u_1} + e_2 q_{w_1} + g_2 q_{\psi_1} = p_w R^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi v(t - t_j)}{L}\right) \quad (23)$$

$$a_3 \ddot{q}_{\psi_1} + c_3 \dot{q}_{\psi_1} + d_3 q_{u_1} + e_3 q_{w_1} + g_3 q_{\psi_1} = 0 \quad (24)$$

ضرایب معادلات (22) تا (24) در ضمیمه الف تعریف شده‌اند و

تیر می‌باشد و بخش دوم پاسخ آزاد که مربوط به $N - 1$ باری است که تیر را ترک کرده‌اند (رابطه (43)).

$$q_{w_1}(t) = p_2((\sin(\bar{\omega}(t - t_N)) - \eta \sin(\omega_n(t - t_N))) - \eta \sum_{j=1}^{N-1} (\sin \omega_n(t - t_j) + \sin \omega_n(t - t_j - \frac{L}{v}))) \quad (43)$$

2-2-3-1- شرایط لغو و تشدید

در این بخش، شرایط لغو و تشدید برای بحرانی‌ترین حالت بررسی می‌شود. به این منظور ابتدا رابطه (43) بر اساس روابط مثلثاتی به صورت رابطه (44) نوشته می‌شود، سپس با توجه به مرجع [6] به رابطه (45) تبدیل می‌شود. دامنه ارتعاشات آزاد سیستم به ازای $\cos \frac{\omega_n L}{2v} = 0$ برابر صفر می‌شود. بنابراین سرعت لغو (v_{can}) طبق رابطه (46) به دست می‌آید.

$$q_{w_1}(t) = p_2((\sin(\bar{\omega}(t - t_N)) - \eta \sin(\omega_n(t - t_N))) - 2\eta \sum_{j=1}^{N-1} (\cos \frac{\omega_n L}{2v} \sin \omega_n(t - t_j - \frac{L}{2v}))) \quad (44)$$

$$q_{w_1}(t) = p_2((\sin(\bar{\omega}(t - t_N)) - \eta \sin(\omega_n(t - t_N))) - 2\eta \cos \frac{\omega_n L}{2v} (\sin \omega_n(t - \frac{L}{2v}) - \frac{t_{N-1}}{2}) \frac{\sin(N-1) \frac{\omega_n d}{2v}}{\sin \frac{\omega_n d}{2v}})) \quad (45)$$

$$v_{can} = \frac{\omega_n L}{\pi(2k-1)} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

پدیده تشدید زمانی رخ می‌دهد که دامنه ارتعاشات آزاد سیستم به سمت بی نهایت میل کند. با توجه به رابطه (45) دامنه ارتعاشات آزاد سیستم زمانی بی نهایت می‌شود که عبارت $\sin \frac{\omega_n d}{2v}$ که در مخرج می‌باشد صفر شود. بنابراین سرعت‌های تشدید (v_{res}) از رابطه (47) به دست می‌آیند.

$$v_{res} = \frac{\omega_n d}{2k\pi} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

پاسخ زمانی سیستم در سرعت‌های تشدید با استفاده از قاعده هویساید طبق رابطه (48) نوشته می‌شود.

$$q_{w_1}(t) = p_2((\sin(\bar{\omega}(t - t_N)) - \eta \sin(\omega_n(t - t_N))) - 2(N-1)\eta \cos \frac{\omega_n L}{2v} (\sin \omega_n(t - \frac{L}{2v}))) \quad (48)$$

3- نتایج و بحث

به منظور صحت سنجی روش تحلیلی ارائه شده، معادلات کوپل شده (1) تا (3) تبدیل به شش معادله مرتبه اول در فضای حالت شده‌اند. این معادلات با کمک روش رانگ کوتای مرتبه چهارم حل شده‌اند. برای مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی، پاسخ دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای طبق مشخصات هندسی، مادی و بار متحرک ارائه شده در جدول 1 محاسبه شده است. از آنجایی که بارگذاری سیستم در راستای شعاعی است و تیر در راستای شعاعی بیشترین جابجایی را دارد، بنابراین تمام بررسی‌های صورت گرفته در این مقاله بر روی دامنه دینامیکی تیر در راستای شعاعی انجام می‌شود. لازم به ذکر است که طبق معادله (41)، جابجایی دینامیکی تیر در دو راستای محوری و پیچشی، با راستای شعاعی متناسب است و با آن رابطه مستقیم دارد. شکل 2 نشان می‌دهد که نتایج حل تحلیلی و عددی تطابق مناسبی با یکدیگر دارند. همان‌طور که در شکل 2 مشاهده می‌شود پاسخ دینامیکی سیستم ترکیبی از یک منحنی نیم‌سینوسی با دامنه P_2 و فرکانس $\frac{\pi v}{L}$ (مربوط به زمان حضور بار متحرک بر روی تیر) و نوسانات سینوسی با دامنه C_3 و فرکانس ω_n (مربوط به جواب پایدار سیستم) می‌باشد. زمانی که بار متحرک به نقطه وسط تیر

$$\begin{aligned} q_{w_1}\left(t = \frac{L}{v}\right) &= C_3 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right) \\ q_{\psi_1}\left(t = \frac{L}{v}\right) &= C_5 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{u_1}\left(t = \frac{L}{v}\right) &= \left(-\frac{\pi L}{v} P_1\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right) \\ \dot{q}_{w_1}\left(t = \frac{L}{v}\right) &= \left(-\frac{\pi L}{v} P_2\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right) \\ \dot{q}_{\psi_1}\left(t = \frac{L}{v}\right) &= \left(-\frac{\pi L}{v} P_3\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} C_7 &= -\eta P_1 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right), C_8 = -\eta P_1 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right) \\ C_9 &= -\eta P_2 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right), C_{10} = -\eta P_2 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right) \\ C_{11} &= -\eta P_3 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right), C_{12} = -\eta P_3 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

2-2-2-1- شرایط لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد

برای تیری که توسط بار متحرک مرتعش شده، زمانی که بار متحرک تیر را ترک می‌کند دامنه ارتعاشات آزاد تیر به ازای برخی سرعت‌ها ممکن است صفر یا حداکثر شود. سرعتی که در آن پدیده صفر یا حداکثر شدن دامنه دینامیکی اتفاق می‌افتد به ترتیب سرعت لغو و حداکثر نام دارد. اگر پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم (روابط (32) تا (34)) به صورت روابط (38) تا (40) نوشته شوند، می‌توان با صفر قرار دادن Q_{u_1} ، Q_{w_1} و Q_{ψ_1} و مشتقات آن‌ها به ترتیب سرعت‌های لغو و حداکثر را در سه راستا به دست آورد.

$$q_{u_1}(t) = Q_{u_1} \sin(\omega_n t - \alpha) \quad (38)$$

$$q_{w_1}(t) = Q_{w_1} \sin(\omega_n t - \alpha) \quad (39)$$

$$q_{\psi_1}(t) = Q_{\psi_1} \sin(\omega_n t - \alpha) \quad (40)$$

که Q_{u_1} ، Q_{w_1} ، Q_{ψ_1} و α با رابطه (41) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} Q_{u_1} &= \sqrt{2} P_1 \eta \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ Q_{w_1} &= \sqrt{2} P_2 \eta \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ Q_{\psi_1} &= \sqrt{2} P_3 \eta \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\omega_n L}{v}\right)} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

2-2-3- تیر خمیده لایه‌ای تحت بارهای متحرک چندتایی

زمانی که تیر توسط چندین بار متحرک مرتعش می‌شود، پاسخ زمانی تیر از جمع پاسخ زمانی تیر در اثر هر یک از این بارها قابل محاسبه است. مدت زمانی که هر بار بر روی تیر حضور دارد و فاصله زمانی بارها از یکدیگر در به دست آوردن پاسخ زمانی تیر مهم است. جابجایی شعاعی نقطه وسط تیر در اثر بار N ام از رابطه (42) به دست می‌آید [11].

$$\begin{aligned} w_j\left(\frac{L}{2}, t\right) &= [C_3 \sin(\omega_n(t - t_j)) + P_2 \sin\left(\frac{\pi v(t - t_j)}{L}\right)] H(t - t_j) \\ &\quad + [C_9 \sin(\omega_n(t - t_j - \frac{L}{v})) + C_{10} \cos(\omega_n(t - t_j - \frac{L}{v}))] H\left(t - t_j - \frac{L}{v}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

که H تابع هویساید می‌باشد. در حالت بار چندتایی بحرانی‌ترین شرایط زمانی اتفاق می‌افتد که $N - 1$ بار تیر را ترک کرده‌اند و فقط بار N ام بر روی تیر در حال حرکت است. در این شرایط پاسخ زمانی تیر از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول پاسخ اجباری است که مربوط به حضور بار N ام بر روی

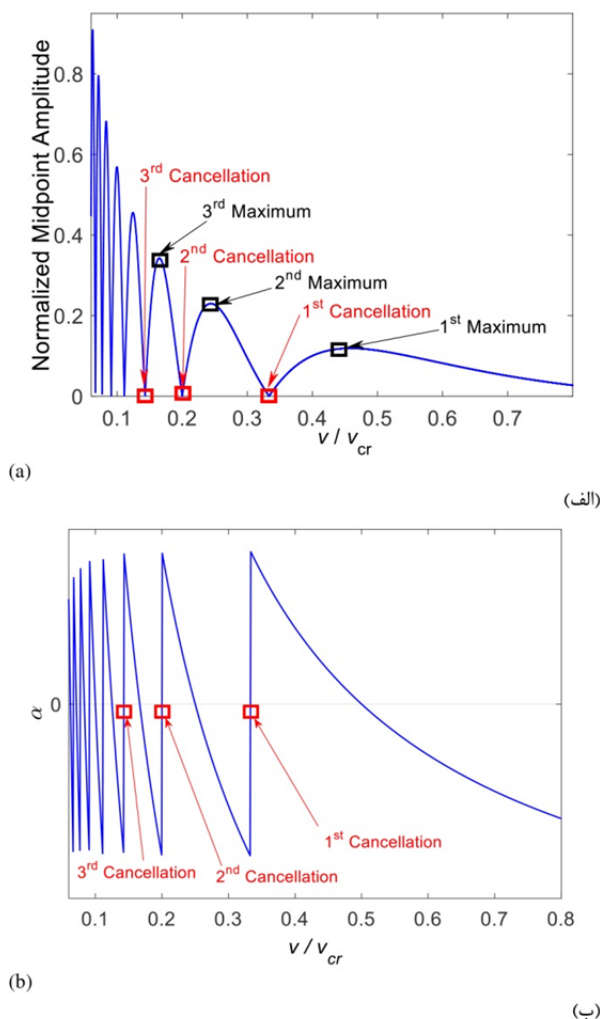


Fig. 3 Free vibration response of a laminated curved beam under a single moving load: (a) amplitude normalised with respect to maximum amplitude (b) phase angle

شکل 3 پاسخ ارتعاشات آزاد تیر لایه‌ای خمیده تحت بار متحرک تکی (الف) دامنه نرمال شده نسبت به حداکثر دامنه (ب) زاویه فاز

جابجایی یعنی سرعت نیز در لحظه ترک بار از تیر برابر صفر باشد. با توجه به شکل 4 (a) و (b) در برخی نسبت‌های سرعت، جابجایی اولیه صفر می‌شود ولی سرعت اولیه صفر نیست این نسبت‌های سرعت نمی‌تواند معرف سرعت‌های لغو سیستم باشند.

پاسخ زمانی سیستم که به ازای سه سرعت لغو 361.01، 216.49 و 154.58 متر بر ثانیه در شکل 5 (a) نمایش داده شده از دو بخش اجباری و آزاد تشکیل شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود در هر سه نمودار پاسخ ارتعاشات آزاد تیر صفر است. در لحظه $t = \frac{L}{v}$ که بار متحرک تیر را ترک می‌کند جابجایی تیر و شیب آن هر دو صفر می‌شوند. همچنین بخش پاسخ اجباری تیر نسبت به زمان $t = \frac{L}{2v}$ دارای تقارن است. شکل 5 (b) پاسخ زمانی سیستم به ازای سرعت‌های حداکثر 263.04، 496.00 و 177.96 متر بر ثانیه را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سرعت‌های حداکثر، دامنه ارتعاشات آزاد سیستم حداکثر مقدار را دارد. در هیچ یک از سه نمودار، پاسخ اجباری سیستم نسبت به زمان $t = \frac{L}{2v}$ تقارن ندارد. بنابراین یکی از تفاوت‌های ارتعاشات سیستم با سرعت لغو و حداکثر این است که در حالت اول ارتعاشات اجباری سیستم نسبت به نصف زمان حضور بار

می‌رسد جابجایی نقطه وسط حداکثر می‌شود. به محض ترک بار از روی تیر اثر بار متحرک بر روی جابجایی تیر از بین رفته و تمامی نقاط تیر فقط حول مبدا به‌صورت هارمونیک نوسان می‌کنند.

1-3- تحلیل پاسخ دینامیکی تحت بار متحرک تکی

به‌منظور بررسی پدیده لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد سیستم تحت بار متحرک تکی، دامنه و فاز ارتعاشات آزاد سیستم در راستای شعاعی برحسب نسبت‌های سرعت مختلف با درنظر گرفتن مود اول رسم شده است (شکل 3 (a) و (b)). همان‌طور که مشخص است در نسبت‌های سرعت 0.200، 0.333 و 0.143 دامنه ارتعاشات آزاد (Q_{w1}) و زاویه فاز سیستم (α) هر دو صفر می‌شوند. با توجه به این که سرعت بحرانی 1082.49 متر بر ثانیه است، اولین، دومین و سومین سرعت لغو به ترتیب 361.01، 216.49 و 154.58 متر بر ثانیه به‌دست می‌آیند. همچنین در نسبت‌های سرعت 0.458، 0.243 و 0.164 دامنه ارتعاشات آزاد تیر خمیده لایه‌ای حداکثر می‌شود. بنابراین اولین، دومین و سومین سرعت حداکثر به ترتیب 496.00، 263.04 و 177.96 متر بر ثانیه محاسبه می‌شوند. لازم به ذکر است که بیشترین نسبت سرعت که در عمل می‌تواند اتفاق بیفتد 0.55 است [22]. بنابراین اولین نسبت سرعت لغو و حداکثر از این مقدار نمی‌توانند بیشتر باشند. لازم به ذکر است که در تمام سرعت‌هایی که با درنظر گرفتن مود اول پدیده لغو اتفاق می‌افتد، با درنظر گرفتن مودهای بالاتر نیز در آن سرعت‌ها لغو اتفاق می‌افتد. البته منظور از مودهای بیشتر، مودهای فرد بالاتر است، زیرا تمام بررسی‌ها بر روی جابجایی نقطه وسط تیر که بیشترین مقدار است انجام می‌شود و مودهای زوج در پاسخ عرضی نقطه وسط تیر سهمی ندارند [5].

شکل 4 (a) و (b) نشان می‌دهند که در نسبت‌های سرعت لغو، جابجایی و سرعت اولیه ارتعاشات آزاد سیستم هم‌زمان صفر می‌شوند. واضح است که برای به وقوع پیوستن پدیده لغو لازم است که نه تنها جابجایی، بلکه شیب

جدول 1 خصوصیات تیر خمیده لایه‌ای

$R(m)$	$h(m)$	$b(m)$	$\rho(kg/m^3)$	μ_{12}	μ_{21}
5	1	0.4	2015	0.24	0.24
$E_{11} (Pa)$	$G_{13} (Pa)$	Lay-up	$v(m/s)$	$p_w (N)$	θ_i
120×10^7	5.18×10^9	[0/90]	40	1×10^{10}	$\frac{\pi}{6}$

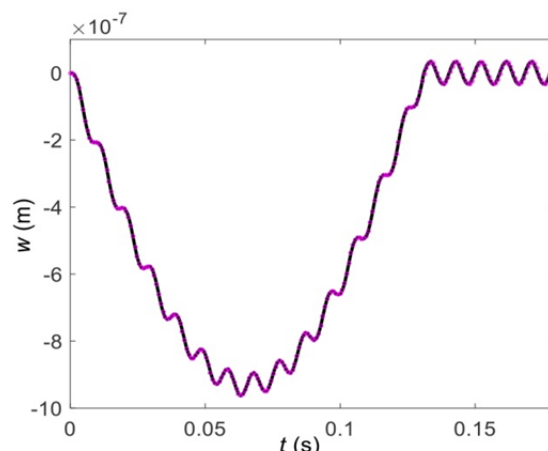


Fig. 2 Midpoint dynamic radial response for $R = 10 m$; black solid line: analytical method, pink hollow circle: numerical method

شکل 2 پاسخ دینامیکی شعاعی نقطه وسط تیر برای $R = 10 m$ ؛ خط سیاه توپر: حل عددی، دایره توخالی صورتی: حل تحلیلی

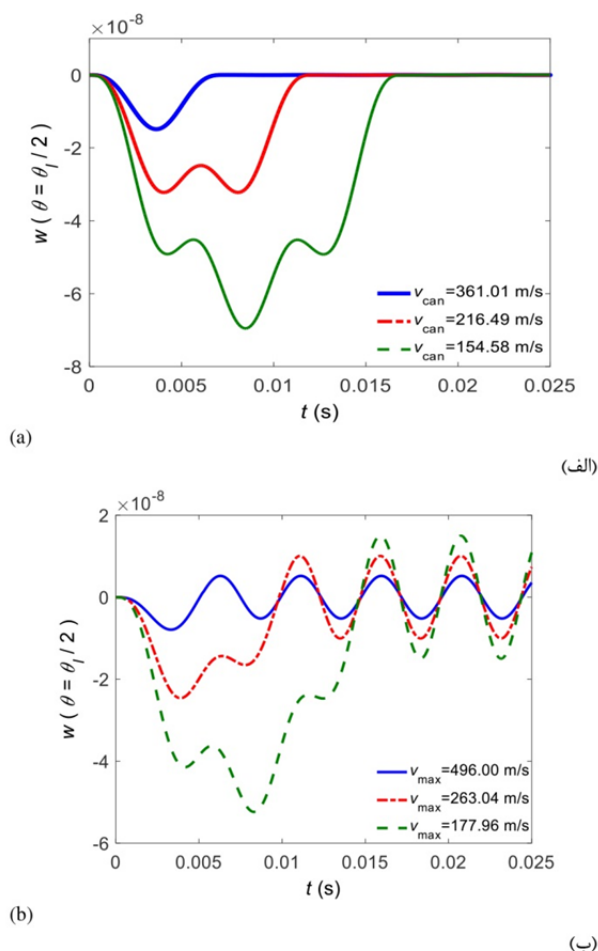


Fig. 5 Forced-free time responses of laminated curved beam at speeds corresponding to (a) cancellation and (b) maxima

شکل 5 پاسخ زمانی اجباری و آزاد تیر لایه‌ای خمیده در سرعت‌های (الف) لغو و (ب) حداکثر

حداکثر برای لایه چینی $[0/90]_2$ بیشتر از $[0/90]$ می‌باشد. زیرا وجود تقارن در لایه چینی اثر نرم‌شوندگی بر سختی سیستم دارد و درواقع سختی سیستم را کاهش می‌دهد. در مراجع متعددی بیان شده که لایه‌چینی‌های عمود بر هم به دلیل مقاومت بیشتر در برابر بار اعمال شده جابجایی کمتری نسبت به لایه‌چینی با زوایای غیر عمود دارند و مناسب‌ترین انتخاب برای سازه‌های کامپوزیتی لایه‌ای می‌باشند [15,13]. نتایج حاصل از بررسی اثر لایه‌چینی بر تیر لایه‌ای خمیده نشان می‌دهند که حتی در سرعت‌های خاص که پدیده‌های لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد رخ می‌دهند نیز این قضیه صادق است.

اثر تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تیر خمیده لایه‌ای در شکل 8 بررسی شده است. در این بررسی برای حالت‌هایی که تعداد لایه‌ها 6، 10 و 14 است ترتیب لایه‌چینی به صورت $[0/90]_n$ می‌باشد ($n=3, 5, 7$). همان‌طور که مشخص است تعداد لایه‌ها در نسبت سرعت‌های لغو و حداکثر اثری ندارند.

شکل 9 پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری تیر خمیده لایه‌ای در سرعت لغو 361.01 و سرعت حداکثر 496.00 را نشان می‌دهد. با افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت، جابجایی دینامیکی تیر افزایش می‌یابد. البته باید توجه کرد که این نتیجه برای لایه‌چینی $[0/90]_n$ ($n=1, 3, 5, 7$) به‌دست آمده است و با تغییر زوایای لایه‌چینی این نتیجه می‌تواند تغییر کند [23,13]. ضمناً با

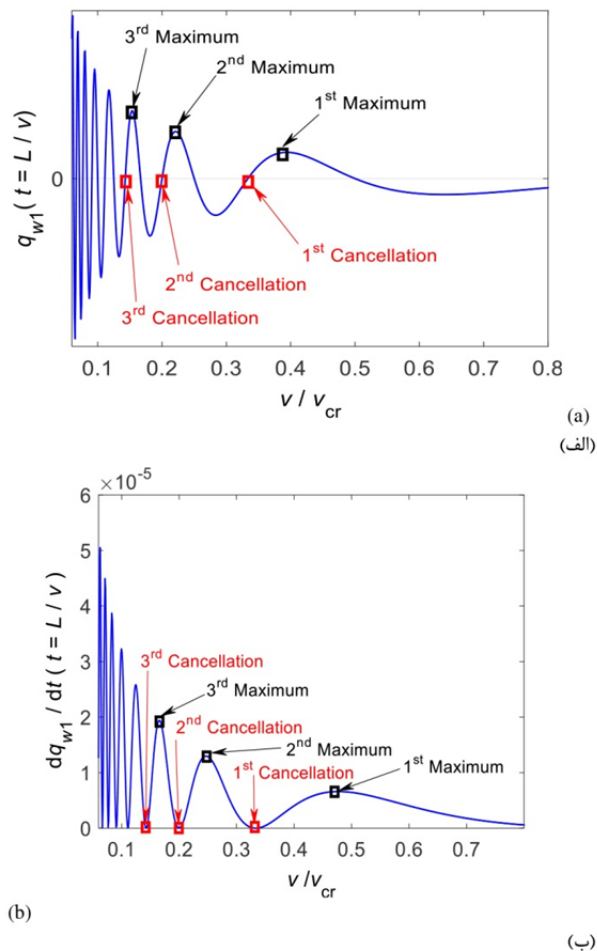


Fig. 4 (a) Initial displacement and (b) initial velocity for free vibration of midpoint

شکل 4 (الف) جابجایی اولیه (ب) سرعت اولیه ارتعاشات آزاد نقطه وسط تیر

متحرک بر روی تیر دارای تقارن است ولی در حالت دوم چنین تقارنی وجود ندارد. شکل‌های 5 (a) و (b) نشان می‌دهند که با افزایش سرعت لغو و حداکثر، دامنه ارتعاشات سیستم کاهش می‌یابد و بار متحرک در مدت زمان کمتری تیر را ترک می‌کند. همچنین تعداد قله‌های بخش اجباری پاسخ با کاهش سرعت لغو و حداکثر، افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه در سیستم‌های تشکیل شده از مواد کامپوزیتی، تعداد لایه‌ها، زوایای قرارگیری لایه‌ها بر روی یکدیگر و تقارن یا عدم تقارن لایه‌ها هر کدام به‌طور جداگانه تأثیر قابل‌توجهی در خواص مواد دارند، در این بخش به بررسی این موضوع پرداخته شده است. بررسی اثر نوع لایه‌چینی بر سرعت‌های لغو و حداکثر نشان می‌دهد که نسبت‌های سرعت لغو و حداکثر برای لایه‌چینی‌های مختلف، یکسان است (شکل 6). پاسخ زمانی تیر لایه‌ای خمیده در سرعت لغو 361.01 و سرعت حداکثر 496.00 برای انواع لایه‌چینی‌های بررسی شده در شکل 6 به‌دست آمده است.

شکل 7 (a) و (b) نشان می‌دهند که در هر دو پدیده لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد، کم‌ترین و بیشترین جابجایی دینامیکی به ترتیب برای لایه چینی‌های $[0/90]_2$ و $[45/-45]$ اتفاق می‌افتد و کوتاه‌ترین و بلندترین زمان رخداد هر دو پدیده لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد به ترتیب مربوط به لایه‌چینی‌های $[0/90]$ و $[45/-45]$ می‌باشند. علاوه بر این جابجایی دینامیکی (دامنه ارتعاشات اجباری و آزاد) تیر خمیده لایه‌ای در سرعت لغو و

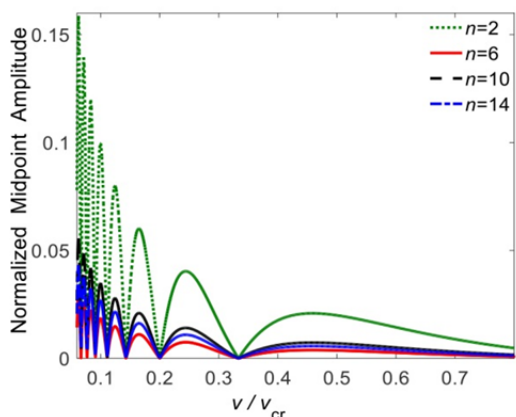
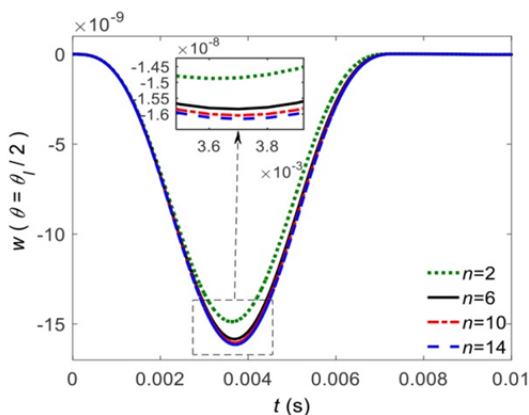


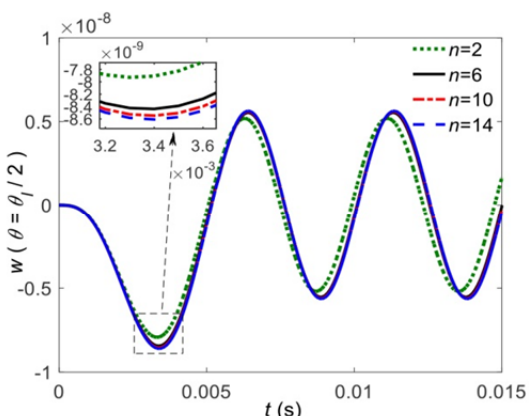
Fig. 8 The amplitude of free vibration response normalised with respect to maximum amplitude for different number of layers

شکل 8 دامنه ارتعاشات آزاد نرمال شده به حداکثر دامنه برای لایه‌های مختلف



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 9 Effect of number of layers on the forced-free time history at speeds corresponding to (a) cancellation 361.01 m/s and (b) maxima 496.00 m/s

شکل 9 تاثیر تعداد لایه‌ها روی پاسخ زمانی اجباری و آزاد در سرعت‌های (الف) لغو 361.01 m/s و (ب) حداکثر 496.00 m/s

2-3- تحلیل پاسخ دینامیکی تحت بارهای متحرک چندتایی

به‌منظور بررسی بارهای متحرک چندتایی بر روی تیر خمیده لایه‌ای، 5 بار متحرک با دامنه و سرعت یکسان و با فاصله 1.2 متر از یکدیگر از روی تیر عبور می‌کنند. بحرانی‌ترین شرایط برای تیر تحت بارهای متحرک چندتایی

افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت، زمان رخداد پدیده‌های لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد تغییر نمی‌کند.

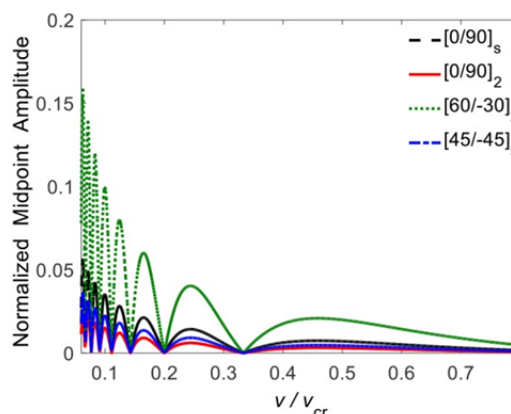
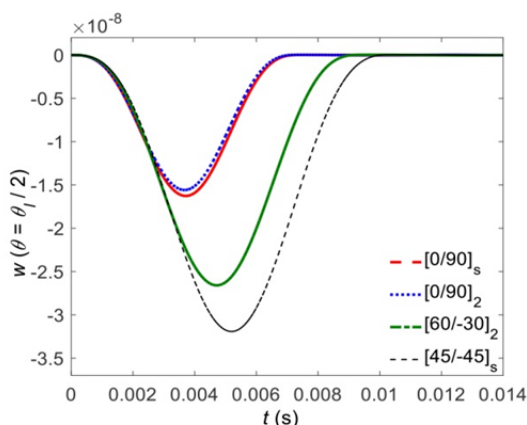


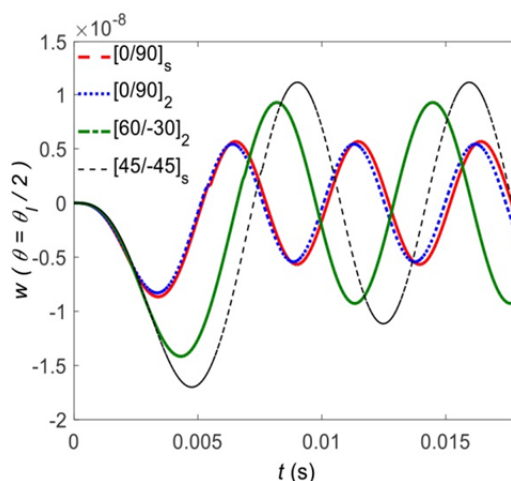
Fig. 6 The amplitude of free vibration response normalised with respect to maximum amplitude for four different layups

شکل 6 دامنه پاسخ ارتعاشات آزاد نرمال شده نسبت به حداکثر دامنه برای لایه چینی‌های مختلف



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 7 Effect of stacking sequence on the time history at speeds (a) cancellation 361.01 m/s and (b) maxima 496.00 m/s

شکل 7 تاثیر نوع آرایش لایه‌ها بر پاسخ زمانی در سرعت‌های (الف) لغو 361.01 m/s و (ب) حداکثر 496.00 m/s

نوسانات شدیدتری دارد یعنی اختلاف بین حداکثر و حداقل دامنه ارتعاشات اجباری زیاد است. ولی حداکثر دامنه ارتعاشات اجباری تیر به فاصله بارهای متحرک از یکدیگر وابسته نیست. زیرا با توجه به رابطه (46) سرعت لغو مستقل از فاصله بارهای متحرک از یکدیگر می‌باشد بنابراین تغییرات d تأثیری بر روی حداکثر دامنه ارتعاشات تیر نخواهد داشت. در پدیده تشدید با افزایش فاصله بارهای متحرک از یکدیگر نمودار پاسخ زمانی تیر تقارن بیشتری نسبت به محور زمان می‌یابد. همچنین طبق رابطه (47) و (48) با افزایش d سرعت تشدید و دامنه ارتعاشات آزاد تیر افزایش می‌یابد که شکل 11 (b) نیز گویای این مطلب است. اثر نوع لایه‌چینی بر پاسخ زمانی نقطه وسط تیر در شرایط لغو و تشدید در شکل (12) (a) و (b) بررسی شده است. در پدیده لغو بیشترین و کمترین دامنه ارتعاشات اجباری تیر به ترتیب مربوط به لایه‌چینی‌های $s[45/-45]$ و $s[0/90]$ می‌باشند.

در پدیده تشدید بیشترین و کمترین دامنه ارتعاشات اجباری و آزاد تیر به ترتیب مربوط به لایه‌چینی‌های $s[45/-45]$ و $s[0/90]$ می‌باشند. علاوه بر این کوتاه‌ترین و بلندترین زمان به وقوع پیوستن هر دو پدیده لغو و تشدید به ترتیب مربوط به لایه‌چینی‌های $s[0/90]$ و $s[45/-45]$ می‌باشند. ضمناً برای لایه‌چینی‌های عمود بر هم متقارن چه در پدیده لغو و چه در پدیده تشدید جابجایی دینامیکی تیر بیشتر از لایه‌چینی‌های عمود بر هم نامتقارن است. برای لایه‌چینی‌های $s[0/90]$ ، $s[45/-45]$ و $s[60/-30]$ اولین سرعت‌های لغو از رابطه (46) به ترتیب 360.83، 251.89 و 360.83 و به دست می‌آیند. همچنین برای لایه‌چینی‌های $s[0/90]$ ، $s[45/-45]$ و $s[60/-30]$ اولین سرعت‌های تشدید از رابطه (47) به ترتیب 1493.84، 1042.83 و 1138.19 به دست می‌آیند. بنابراین سرعت‌های لغو و تشدید در لایه‌چینی‌های عمود بر هم متقارن و نامتقارن یکسان هستند و بیشتر از انواع دیگر لایه‌چینی می‌باشند. با مقایسه شکل‌های (6) و (12) (a) مشاهده می‌شود که با تغییر زوایای لایه‌چینی سرعت لغو برای حالتی که تیر تحت یک بار متحرک است تغییر نمی‌کند ولی برای حالتی که تیر تحت بارهای متحرک چندتایی است دستخوش تغییر می‌شود. نتایج حاصل از بررسی اثر لایه‌چینی بر تیر خمیده لایه‌ای تحت بارهای متحرک چندتایی نشان می‌دهند که حتی در سرعت‌های خاص که پدیده‌های لغو و تشدید رخ می‌دهند نیز جابجایی دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای در لایه چینی‌های عمود بر هم کمتر از لایه‌چینی‌های غیر عمود است. شکل 13 (a) و (b) اثر تعداد لایه‌ها بر پاسخ زمانی نقطه وسط تیر در هنگام وقوع پدیده‌های لغو و تشدید را نشان می‌دهد. در این بررسی، ترتیب لایه‌چینی برای حالت‌هایی که تعداد لایه‌ها 6، 10 و 14 است به صورت $s[0/90]$ ($n=3, 5, 7$) در نظر گرفته شده است. با افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت، پدیده‌های لغو و تشدید در زمان دیرتری اتفاق می‌افتند. ضمناً دامنه ارتعاشات اجباری در پدیده لغو و دامنه ارتعاشات اجباری و آزاد در پدیده تشدید با افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تیر افزایش می‌یابد. همانند شکل 9 نتیجه به دست آمده در این قسمت برای لایه‌چینی $s[0/90]$ ($n=1, 3, 5, 7$) معتبر است و با تغییر زوایای لایه‌چینی این نتیجه می‌تواند تغییر کند. برای تعداد لایه‌های 2، 6، 10، 14 اولین سرعت‌های لغو از رابطه (46) به ترتیب 360.83، 354.88، 353.72 و 353.22 و اولین سرعت‌های تشدید از رابطه (47) به ترتیب 1493.84، 1496.23، 1464.42 و 1462.37 به دست می‌آیند. در نتیجه با افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تیر، سرعت لغو کاهش می‌یابد. بنابراین انتخاب تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تیر در سرعت‌های لغو تیر خمیده لایه‌ای تحت بار تکی نقشی ندارد ولی می‌تواند

زمانی روی می‌دهد که $N-1$ بار از روی تیر عبور کرده‌اند و فقط بار N ام بر روی تیر باقی‌مانده است. در این شرایط امکان به وقوع پیوستن دو پدیده لغو و تشدید وجود دارد. پدیده‌های لغو و تشدید زمانی رخ می‌دهند که دامنه ارتعاشات آزاد تیر به ترتیب صفر و بی‌نهایت شوند. هر یک از پدیده‌های لغو و تشدید در سرعت‌هایی اتفاق می‌افتند که از روابط (46) و (47) قابل محاسبه اند. سه سرعت اول لغو به ترتیب 360.83، 216.49 و 154.64 می‌باشند. اولین، دومین و سومین سرعت تشدید نیز به ترتیب 1493.84، 746.92 و 497.94 می‌باشند. شکل 10 (a) و (b) پاسخ زمانی تیر خمیده لایه‌ای در سرعت‌های لغو و تشدید 360.83 و 1493.84 را نشان می‌دهند. پاسخ زمانی تیر (منحنی سیاه‌رنگ) از جمع پاسخ زمانی تیر در اثر عبور هریک از بارها رخ می‌دهد. منحنی‌های قهوه‌ای، فیروزه‌ای، آبی، سبز و قرمز، پاسخ زمانی تیر در اثر عبور بار اول تا پنجم را به‌طور جداگانه نشان می‌دهند.

در شکل 10 (b) دامنه ارتعاشات آزاد تیر خمیده لایه‌ای با دامنه آخرین نوسانات در ارتعاشات اجباری تیر برابر است. یکی دیگر از بررسی‌های صورت گرفته تأثیر تعداد بار متحرک بر پاسخ زمانی نقطه وسط تیر می‌باشد. شکل 11 (a) و (b) نشان می‌دهند که با افزایش فاصله بارهای متحرک از یکدیگر پدیده لغو و تشدید دیرتر اتفاق می‌افتند. در پدیده لغو، دامنه ارتعاشات اجباری تیر برای حالتی که بارهای متحرک از یکدیگر دورترند

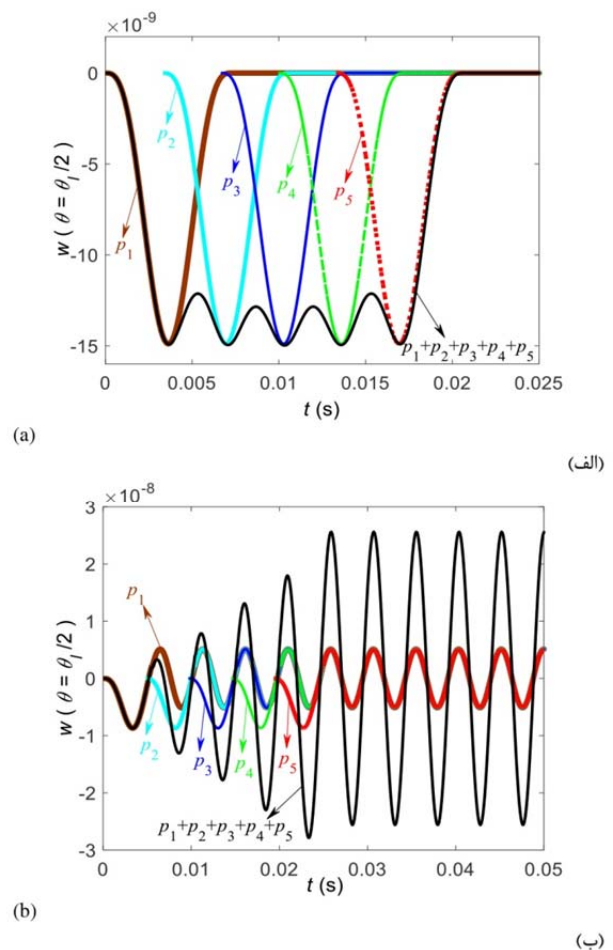


Fig. 10 Forced-free time responses of a laminated curved beam under multiple moving load at speeds corresponding to (a) cancellation 360.83 m/s and (b) resonance 1493.84 m/s

شکل 10 پاسخ زمانی اجباری و آزاد تیر خمیده لایه‌ای تحت بارهای متحرک چندتایی در سرعت‌های (الف) لغو 360.83 m/s و (ب) تشدید 1493.83 m/s

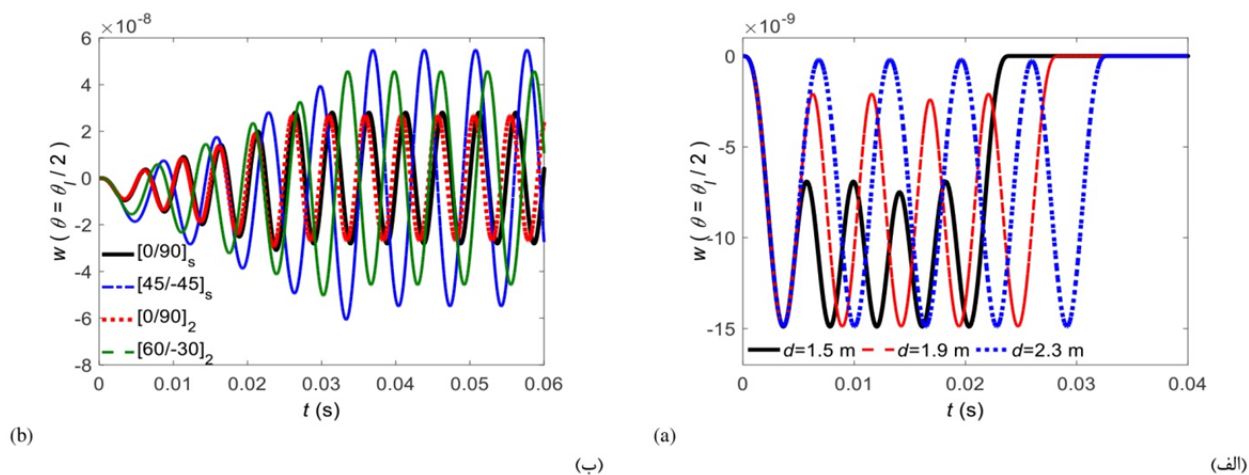


Fig. 12 Effect of stacking sequence on the forced-free time history at speeds corresponding to (a) cancellation 360.83 m/s and (b) resonance 1493.84 m/s

شکل 12 تاثیر آرایش لایه‌ها بر روی پاسخ زمانی اجباری و آزاد در سرعت‌های (الف) لغو 360.83 m/s و (ب) تشدید 1493.84 m/s

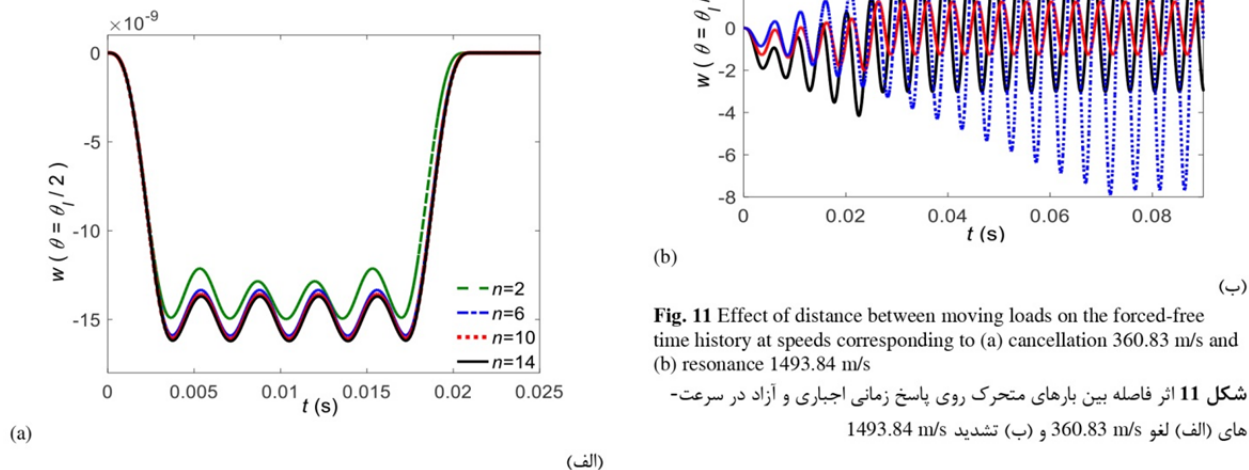


Fig. 11 Effect of distance between moving loads on the forced-free time history at speeds corresponding to (a) cancellation 360.83 m/s and (b) resonance 1493.84 m/s

شکل 11 اثر فاصله بین بارهای متحرک روی پاسخ زمانی اجباری و آزاد در سرعت‌های (الف) لغو 360.83 m/s و (ب) تشدید 1493.84 m/s

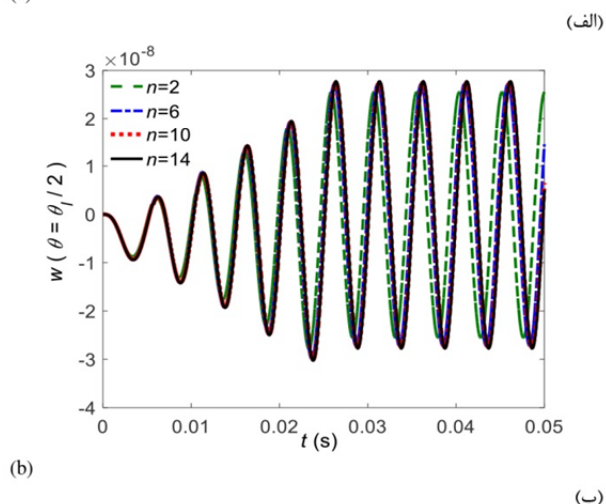


Fig. 13 Effect of number of layers on the forced-free time history at speeds (a) cancellation 360.83 m/s and (b) resonance 1493.84 m/s

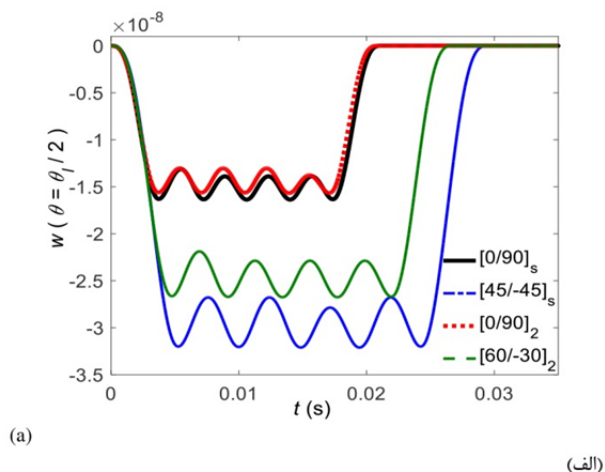
شکل 13 تاثیر تعداد لایه‌ها روی پاسخ زمانی اجباری و آزاد در سرعت‌های (الف) لغو 360.83 m/s و (ب) تشدید 1493.84 m/s

دامنه ارتعاشات آزاد در تیر خمیده لایه‌ای عمیق تیموشنکو تحت بار متحرک تکی و چندتایی مطالعه شد. برای ارزیابی صحت حل تحلیلی معادلات

سرعت‌های لغو تیر خمیده لایه‌ای تحت بارهای متحرک چندتایی را دستخوش تغییر می‌کند.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار شرایط رخداد پدیده‌های لغو، تشدید و حداکثر



(الف)

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta \\
 b_2 = & - \int_0^{\theta_l} \bar{I}_0 R^2 \left(\sin \frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta \\
 d_2 = & - \int_0^{\theta_l} \left(A_{11} + A_{55} \left(\frac{\pi}{\theta_l} \sin \frac{\pi\theta}{\theta_l} - \frac{2}{\theta_l} \right) \right) \left(\sin \frac{\pi\theta}{\theta_l} \right) d\theta \\
 e_2 = & - \int_0^{\theta_l} \left(A_{11} + A_{55} \left(\frac{\pi}{\theta_l} \right)^2 \right) \left(\sin \frac{\pi\theta}{\theta_l} \right)^2 d\theta \\
 g_2 = & - \int_0^{\theta_l} (B_{11} - RA_{55}) \left(\frac{\pi}{\theta_l} \sin \frac{\pi\theta}{\theta_l} - \frac{2}{\theta_l} \right) \left(\sin \frac{\pi\theta}{\theta_l} \right) d\theta \\
 a_3 = & \int_0^{\theta_l} \bar{I}_1 R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta \\
 c_3 = & - \int_0^{\theta_l} \bar{I}_2 R^2 \left(\cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 1 + 2 \frac{\theta}{\theta_l} \right)^2 d\theta \\
 d_3 = & \int_0^{\theta_l} \left(B_{11} \left(\frac{\pi}{\theta_l} \right)^2 \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} + RA_{55} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right) \right) \\
 & \left(\cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 1 + 2 \frac{\theta}{\theta_l} \right) d\theta \\
 e_3 = & \int_0^{\theta_l} \left((B_{11} - RA_{55}) \frac{\pi}{\theta_l} \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} \right) \left(\cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 1 + 2 \frac{\theta}{\theta_l} \right) d\theta \\
 g_3 = & - \int_0^{\theta_l} \left(D_{11} \left(\frac{\pi}{\theta_l} \right)^2 \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} + R^2 A_{55} \left(\cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 1 + 2 \frac{\theta}{\theta_l} \right) \right) \\
 & \left(\cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 1 + 2 \frac{\theta}{\theta_l} \right) d\theta
 \end{aligned}$$

2-5- پیوست (ب)

$$\begin{aligned}
 A_1 &= b_2 c_3 a_1 - b_2 a_3 c_1 \\
 A_2 &= a_1 (b_2 g_3 + e_2 c_3) + d_1 b_2 c_3 - g_1 b_2 a_3 - c_1 (b_2 d_3 + e_2 a_3) \\
 A_3 &= a_1 (e_2 g_3 - g_2 e_3) + d_1 (b_2 g_3 + e_2 c_3) - d_2 e_1 c_3 + g_2 e_1 a_3 \\
 & \quad - g_1 (b_2 d_3 + e_2 a_3) + c_1 (d_2 e_3 - e_2 d_3) \\
 A_4 &= d_1 (e_2 g_3 - e_3 g_2) - d_2 e_1 g_3 + e_1 g_2 d_3 \\
 & \quad + g_1 (e_3 d_2 - e_2 d_3)
 \end{aligned}$$

3-5- پیوست (پ)

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^6 (c_1 b_2 a_3 - a_1 b_3 c_3) \\
 B_2 &= (\pi/L)^4 [d_1 b_3 c_3 + (b_2 + c_3) a_1 - g_1 b_2 a_3 - (b_2 + a_3) c_1] \\
 B_3 &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 [-d_1 (b_2 + c_3) - a_1 (a_2 g_3 - g_2 a_3) + d_2 e_1 c_3 \\
 & \quad - e_1 g_2 a_3 + g_1 (b_2 + a_3) - c_1 (d_2 e_3 - e_2 d_3)] \\
 B_4 &= d_1 (e_2 g_3 - g_2 e_3) - e_1 (d_2 g_3 - g_2 d_3) \\
 & \quad + g_1 (d_2 e_3 - e_2 d_3)
 \end{aligned}$$

6- مراجع

- [1] H. Xia, N. Zhang, W. Guo, Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, No. 3, pp. 810-822, 2006.
- [2] R. Hosseini, M. Hamed, A. Ebrahimi Mamaghani, H. C. Kim, J. Kim, J. Dayou, Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution, *International Journal of Smart and Nano Materials*, Vol. 8, No. 2-3, pp. 110-124, 2017.
- [3] H. Sarparast, S. E. Khadem, Vibration analysis of a laminated deep curved beams subjected to a moving load by considering the rotary inertia and shear force, *Motors Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 141-151, 2017. (in Persian)
- [4] H. Sarparast, M. R. Ashory, M. Hajiazizi, M. Afzali, M. M. Khatibi, Estimation of modal parameters for structurally damped systems using wavelet transform, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 47, No. 3, pp. 82-91, 2014.
- [5] C. S. Kumar, C. Sujatha, K. Shankar, Vibration of simply supported beams under a single moving load: a detailed study of cancellation phenomenon,

دینامیکی سیستم، از روش عددی استفاده شد. در ادامه تاثیر پارامترهای مختلف نظیر فاصله بارها از یکدیگر، ترتیب لایه‌چینی و تعداد لایه‌ها بر پاسخ زمانی تیر به هنگام رخداد پدیده‌های لغو، تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد مورد بررسی قرار گرفت. مهم‌ترین نتایج مقاله را می‌توان به‌صورت زیر ارائه کرد:

- ✓ تعیین نوع لایه‌چینی در مشخصات ارتعاشی تیر خمیده لایه‌ای نقش بسزایی دارد. به‌طوری‌که برای لایه‌چینی متقارن جابجایی دینامیکی سیستم بیشتر از لایه‌چینی نامتقارن است.
- ✓ افزایش سرعت‌های لغو و حداکثر منجر به کاهش دامنه ارتعاشات سیستم و تعداد قله‌های بخش اجباری پاسخ می‌شوند.
- ✓ نوع لایه‌چینی و تعداد لایه‌ها در مقدار سرعت‌های لغو و حداکثر تیر تحت بار متحرک تکی اثری ندارند ولی سرعت‌های لغو و تشدید را در تیر تحت بارهای متحرک چندتایی تحت شعاع قرار می‌دهند.
- ✓ کمترین جابجایی دینامیکی تیر حتی در سرعت‌های لغو، حداکثر و تشدید مربوط به لایه‌چینی‌های عمود برهم است.
- ✓ در تیر تحت بارهای متحرک چندتایی افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت باعث کاهش سرعت لغو می‌شود.
- ✓ در پدیده لغو اختلاف بین حداکثر و حداقل دامنه ارتعاشات اجباری تیر برای حالتی که بارهای متحرک از یکدیگر دورترند، بیشتر است. ولی حداکثر دامنه ارتعاشات اجباری تیر به فاصله بارهای متحرک از یکدیگر وابسته نیست. در تشدید با افزایش فاصله بارهای متحرک از یکدیگر نمودار پاسخ زمانی تیر تقارن بیشتری نسبت به محور زمان می‌یابد.
- ✓ در لایه‌چینی‌های عمود بر هم متقارن و نامتقارن سرعت‌های لغو و تشدید برابرند و بیشتر از انواع دیگر لایه‌چینی می‌باشند.
- ✓ انتخاب تعداد لایه‌ها در دامنه ارتعاشات تیر خمیده لایه‌ای نقش تعیین‌کننده‌ای دارد. به‌طور مثال برای لایه‌چینی $[0/90]_n$ در تیر تحت بار متحرک تکی هنگام رخداد پدیده‌های لغو و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد، افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت، منجر به افزایش جابجایی دینامیکی سیستم می‌شود. همچنین در تیر تحت بارهای متحرک چندتایی، دامنه ارتعاشات اجباری در پدیده لغو و دامنه ارتعاشات اجباری و آزاد در پدیده تشدید با افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تیر افزایش می‌یابند.

5- پیوست‌ها

1-5- پیوست (الف)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= - \int_0^{\theta_l} \bar{I}_0 R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta \\
 c_1 &= \int_0^{\theta_l} \bar{I}_1 R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta \\
 d_1 &= \int_0^{\theta_l} \left(A_{11} \left(\frac{\pi}{\theta_l} \right)^2 \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - A_{55} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right) \right) \\
 & \quad \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right) d\theta \\
 e_1 &= \int_0^{\theta_l} \left((A_{11} + A_{55}) \left(\frac{\pi}{\theta_l} \right) \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right) d\theta \\
 g_1 &= - \int_0^{\theta_l} \left(B_{11} \left(\frac{\pi}{\theta_l} \right)^2 \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} + RA_{55} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_l} - 2 \frac{\theta}{\theta_l}\right) \right)
 \end{aligned}$$

- [15] M. H. Kargarnovin, M. T. Ahmadian, R.-A. Jafari-Talookolaei, Analytical solution for the dynamic analysis of a delaminated composite beam traversed by a moving constant force, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 19, No. 10, pp. 1524-1537, 2013.
- [16] M. Kadiyar, S. Mohebpour, Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear effect and rotary inertia under the action of moving loads, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 29, No. 3, pp. 259-273, 1998.
- [17] Z. Kiral, B. G. Kiral, Dynamic analysis of a symmetric laminated composite beam subjected to a moving load with constant velocity, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 27, No. 1, pp. 19-32, 2008.
- [18] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, *Beam structures: classical and advanced theories*: John Wiley & Sons, 2011.
- [19] F. Gruttmann, W. Wagner, Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections, *Computational Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 199-207, 2001.
- [20] A.E. Mamaghani, S. Khadem, S. Bab, Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 86, No. 10, pp. 1761-1795, 2016.
- [21] A.E. Mamaghani, S.E. Khadem, S. Bab, S.M. Pourkiaee, Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 138, No. 15, pp. 427-447, 2018.
- [22] P. Museros, E. Moliner, M. D. Martínez-Rodrigo, Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 2, pp. 326-345, 2013.
- [23] B. Gören Kiral, Z. Kiral, B. Okutan Baba, Dynamic behavior of laminated composite beams subjected to a moving load, *Journal of Applied Sciences*, Vol. 4, No. 11, pp. 271-276, 2004.
- International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 99, No. 11, pp. 40-47, 2015.
- [6] H. Xia, H. Li, W. Guo, G. De Roeck, Vibration resonance and cancellation of simply supported bridges under moving train loads, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 140, No. 5, pp. 04014015, 2013.
- [7] Y. Yang, C. Lin, J. Yau, D. Chang, Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on bridges with elastic bearings, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 269, No. 1, pp. 345-360, 2004.
- [8] S.-M. Lin, K.-W. Lee, Instability and vibration of a vehicle moving on curved beams with different boundary conditions, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 23, No. 4, pp. 375-384, 2016.
- [9] C. Huang, Y. Tseng, C. Hung, An accurate solution for the responses of circular curved beams subjected to a moving load, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, No. 12, pp. 1723-1740, 2000.
- [10] J. Dai, K. K. Ang, Steady-state response of a curved beam on a viscously damped foundation subjected to a sequence of moving loads, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol. 229, No. 4, pp. 375-394, 2015.
- [11] Y.-B. Yang, C.-M. Wu, J.-D. Yau, Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 3, pp. 519-537, 2001.
- [12] T. Ye, G. Jin, X. Ye, X. Wang, A series solution for the vibrations of composite laminated deep curved beams with general boundaries, *Composite Structures*, Vol. 127, No. 11, pp. 450-465, 2015.
- [13] V. Kahya, Dynamic analysis of laminated composite beams under moving loads using finite element method, *Nuclear engineering and design*, Vol. 243, No. 3, pp. 41-48, 2012.
- [14] P. Malekzadeh, A. Fiouz, H. Razi, Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load, *Composite Structures*, Vol. 90, No. 2, pp. 105-114, 2009.