



## وابستگی ابعادی ارتعاشات غیرخطی میکروتیر با مقطع غیریکنواخت و شرایط مرزی مختلف

عطیه اندخشیده<sup>1</sup>، ستار مالکی<sup>2\*</sup>، حسین کارآمد<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

\* قوچان، صندوق پستی 9477167335، s.maleki@qiet.ac.ir

### چکیده

در این پژوهش، برای اولین بار، تاثیر غیریکنواختی مقطع میکروتیر و شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات غیرخطی میکروتیر با در نظر گرفتن رفتار وابسته به ابعاد براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، بررسی می‌شود. با استفاده از اصل همیتون، معادله حاکم بر میکروتیر اولیه- برنولی، با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی فون کارمن و براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده استخراج می‌گردد. سپس معادله ارتعاشات غیرخطی حاصل، با استفاده از روش مشتقات تربیعی بهبود یافته و روش تکرار مستقیم حل می‌شود تا فرکانس طبیعی غیرخطی به دست آید. در این مرحله، با استفاده از روش گلرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حاکم بر ارتعاشات به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از نوع دافینگ با متغیر زمان کاهش می‌یابد. معادله حاصل، با استفاده از ماتریس دیفرانسیل گیر اسپکترا که براساس مشتقات توابع پریودیک پایه تعریف شده است، تفکیک می‌گردد. سپس با استفاده از روش طول کمان، معادله غیرخطی پارامتری حاصل، حل می‌شود و پاسخ فرکانسی ارتعاشات اجباری غیرخطی میکروتیر به دست می‌آید. نهایتاً فرکانس طبیعی غیرخطی و پاسخ فرکانسی میکروتیر برای مقاطع غیریکنواخت و شرایط مرزی مختلف محاسبه و تحلیل می‌شود. نتایج پژوهش جاری نشان می‌دهد که ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری میکروتیر وابسته به ابعاد است. همچنین برای تیرغیریکنواخت، این وابستگی ابعادی، چشمگیرتر و برای شرایط مرزی مختلف، متفاوت است. راستی‌آزمایی روش با مقایسه نتایج با نتایج حل دقیق در حالت ساده شامل مقطع یکنواخت و تکیه‌گاه ساده صورت گرفته که بیانگر دقت خوب روش حاضر می‌باشد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 10 اسفند 1396

پذیرش: 17 اردیبهشت 1397

ارائه در سایت: 10 خرداد 1397

کلید واژگان:

وابستگی ابعادی

ارتعاشات غیرخطی

پاسخ فرکانسی

میکروتیر

تئوری تنش کوپل اصلاح شده

## Size-dependent nonlinear vibration of non-uniform microbeam with various boundary conditions

Atieh Andakhshideh, Sattar Maleki\*, Hossien Karamad

Department of Mechanical Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran

\* P.O.B. 9477167335, Quchan, Iran, s.maleki@qiet.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 01 March 2018  
Accepted 07 May 2018  
Available Online 31 May 2018

#### Keywords:

Size dependent  
nonlinear vibration  
frequency response  
microbeam  
modified couple stress theory

### ABSTRACT

In this article, for the first time, the effect of non-uniformity of microbeam cross section and various boundary conditions on the nonlinear vibration of microbeam is investigated considering the size dependent behavior based on modified couple stress theory. Using the Hamilton's principle, the governing equation of Euler-Bernoulli microbeam with von Karman geometric nonlinearity based on the modified couple stress theory is derived. The nonlinear vibration governing equation is then solved using the Generalized Differential Quadrature method (GDQ) and direct iterative method to obtain the nonlinear natural frequencies. In this step, the Galerkin method is used to reduce the nonlinear PDE governing the vibration into a time-dependent ODE of Duffing-type. The time domain is then discretized via spectral differentiation matrix operators which are defined based on the derivatives of a periodic base function. Next, the nonlinear parametric equation is solved using pseudo arc-length method and the frequency-response curves of microbeam nonlinear forced vibration is obtained. Finally, nonlinear natural frequency and frequency response of microbeam with various non-uniformity of cross sections and boundary conditions are obtained. Present results show that, the nonlinear free and forced vibration of microbeam is size dependent and this size dependency is more significant for non-uniform microbeam and is deferent for various boundary conditions. The result of present method for simple case including uniform section and simply supported boundary condition is validated with that of exact method and have good agreement.

### 1- مقدمه

میکروالکترومکانیکی و نانوالکترومکانیکی عموماً در مقیاس میکرون و نانو می‌باشند. یکی از لزومات اساسی برای طراحی میکروتیرها، شناسایی خاصیت ارتعاشی میکروتیرهاست تا عملکرد مورد انتظار را داشته باشد. در این پژوهش این خاصیت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مطالعات اولیه برای ارتعاشات تیر در ابعاد میکرو با استفاده از تئوری‌های

مدل‌سازی ریاضی رفتار مکانیکی در ابعاد میکرو و نانو از مباحث روز می‌باشد. میکروتیرها در بسیاری از سیستم‌ها کاربرد دارند که در این میان می‌توان به شاک سنسورها [1]، عملگرها با تحریک الکترواستاتیکی [2] و میکروسکوپ اتمی [3-5] اشاره نمود. ضخامت تیر به کار برده شده در این سیستم‌های

فرکانسی به دست آمده براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده نسبت به تئوری کلاسیک وجود دارد [25]. ارتعاشات اجباری غیرخطی برای میکروتیر ناکامل هندسی توسط فرخی و همکاران براساس همین تئوری مورد تحلیل عددی قرار گرفت [26] و همچنین پاسخ فرکانسی میکروتیر اویلر برنولی غیرخطی با حرکت داخل و خارج صفحه‌ای با در نظر گرفتن برهم‌کنش مودها توسط قایش و همکاران ارائه گردید [27].

تئوری گرادیان کرنش [28]، از جمله تئوری‌های مرتبه بالا مرسوم برای تحلیل مسائل وابستگی ابعادی در بررسی رفتار میکروتیر، می‌باشد که در سال‌های اخیر مورد توجه محققان بوده است. با استفاده از این تئوری، معادلات دینامیکی و استاتیکی حاکم بر میکروتیرهای خطی اویلر-برنولی و تیموشنکو بترتیب توسط کنگ و همکاران [29] و وانگ و همکاران [30] استخراج گردید. ارزیابی رفتار وابسته به ابعاد، برای خیز استاتیکی و فرکانس طبیعی میکروتیر غیرخطی اویلر-برنولی، نیز توسط کهربائیان و همکارانش [31]، ارائه شد. در کنار تحلیل ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی براساس این تئوری، ارتعاشات اجباری نیز توسط وطن خواه و همکاران با استفاده از روش مقیاس زمانی چندگانه تحلیل و تفاوت قابل توجه نتایج تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک گرادیان کرنش برای میکروتیر بسیار لاغر نشان داده شد [32]. در ادامه پژوهش‌ها، قایش و همکاران با استفاده از روش عددی وابستگی ابعادی ارتعاشات اجباری میکروتیر مورد تحلیل قرار دادند [33].

همان‌طور که اشاره شد، در مطالعات گذشته تحلیل ارتعاشات آزاد خطی [29, 23]، غیرخطی [31, 24] و ارتعاشات اجباری غیرخطی [25-27، 33, 32] براساس تئوری‌های غیرکلاسیک تنها برای میکروتیر با مقطع عرضی یکنواخت انجام شده است. درحالی‌که رفتار وابسته به ابعاد برای میکروتیر با مقطع عرضی غیریکنواخت کاملاً متفاوت خواهد بود. ارتعاشات تیر با مقطع غیر یکنواخت براساس تئوری کلاسیک در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است [34-36]. در تحقیق جاری، ارتعاشات آزاد خطی، غیرخطی و همچنین ارتعاشات اجباری غیرخطی میکروتیر با مقاطع عرضی غیریکنواخت مختلف، براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل تحلیل عددی شده است و برای اولین بار اثر غیریکنواختی مقطع عرضی تیر بر رفتار ارتعاشاتی وابسته به ابعاد، برای شرایط مرزی مختلف مطالعه شده است.

معادله ارتعاشات غیرخطی حاکم بر مسئله، با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی و تکرار مستقیم حل شده است. بدین ترتیب فرکانس طبیعی غیرخطی به دست آمده و با استفاده از روش گلرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حاکم به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از نوع دافینگ<sup>4</sup> با متغیر زمان کاهش می‌یابد. معادله حاصل، با استفاده از ماتریس دیفرانسیل گیر اسپیکترال<sup>5</sup> که براساس مشتقات توابع پیرویدیک پایه تعریف شده است [37]، تفکیک می‌گردد. نهایتاً، معادله غیرخطی پارامتری حاصل با به کارگیری روش طول کمان حل می‌شود و پاسخ فرکانسی ارتعاشات اجباری غیرخطی میکروتیر، به دست می‌آید. رهیافت عددی جدید فوق توسط حسرتی و انصاری [38] و حسرتی و همکاران [39] در تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی پوسته‌ها ارائه شد. برای اعتبارسنجی دقت روش جاری، برخی از نتایج، با نتایج حاصل از حل دقیق [23] مقایسه و دقت خوبی مشاهده شد.

## 2- معادلات حاکم

سیستم موردنظر، شامل یک میکروتیر به طول  $L$ ، چگالی جرم  $\rho$  با مقطع

کلاسیک انجام گرفته است [6-9]. به کارگیری تئوری‌های کلاسیک باعث شد تا معادلات حاکم بر میکروتیر، همان معادلات تیر ماکرو باشد. مدل‌سازی کلاسیک محیط پیوسته برای میکروتیرها، فقط برای زمانی که پارامتر مقیاس طول<sup>1</sup> (یک خاصیت ذاتی میکروساختار است، به‌طور مثال طول شبکه بین دو اتم منفرد) نسبت به طول مشخصه خارجی کوچکتر از محدوده مشخصی باشد، تا حدودی کاربرد دارد [10]. بنابراین استفاده از تئوری کلاسیک محدودیت دارد و نتایج حاصل از آن در برخی موارد قابل اتکا نیستند. نتایج آزمایشگاهی نیز این موضوع را تایید می‌کند [11-13]. لذا استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک برای تحلیل میکروتیر یک ضرورت است.

اولین تئوری غیرکلاسیک در اوایل قرن بیستم توسط برادران کوزرات ارائه شد [14]. این مطالعات در حدود نیم قرن متوقف گردید تا این‌که در دهه‌های 1960-1970، محققان به توسعه تئوری‌های غیرکلاسیک مرتبه بالا از دیدگاه ریاضی پرداختند [15-18]. در میان تئوری‌های غیرکلاسیک مرتبه بالا، در تئوری اولیه تنش کوپل [16, 19] دو ثابت غیرکلاسیک برای ماده در معادله چگالی انرژی کرنشی وجود داشت. در واقع، چگالی انرژی کرنشی، علاوه بر کرنش بی‌نهایت کوچک، تابعی از گرادیان چرخش بعنوان یک متغیر جدید اندازه‌گیری تغییر شکل نیز بود. در این تئوری، حداقل دو آزمایش برای به دست آوردن دو ثابت مستقل غیرکلاسیک ماده، نیاز است. این چالش، باعث شد که تئوری اولیه تنش کوپل، در سال‌های اخیر بازنگری و اصلاح شود. یانگ و همکارانش [20]، تنها بخش متقارن تانسور انحنا و حاج اسفندیاری و درگوش [21]، تنها بخش پاد متقارن تانسور انحنا را در انرژی تغییر شکل مشارکت دادند. درواقع، در تئوری اصلاح شده تنش کوپل [20]، یانگ و همکارانش استدلال کردند که علاوه بر معادلات تعادل کلاسیک نیرو و گشتاور، معادله تعادل دیگری برای المان‌های ماده می‌توان بکاربرد. این معادله تعادل جدید، معادله تعادل گشتاور و کوپل می‌باشد. براساس این معادله، نتیجه گرفتند که تانسور تنش کوپل، یک تانسور متقارن است. در نتیجه تعداد ثابت‌های غیرکلاسیک ماده، به یک ثابت که پارامتر مقیاس طول است، کاهش پیدا می‌کند. در میان تئوری‌های غیرکلاسیک، برای به دست آوردن وابستگی ابعادی رفتار سازه میکرو/نانو، تئوری تنش کوپل اصلاح شده در سال‌های اخیر به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است که در اینجا به برخی از این مقالات اشاره می‌گردد. خواص استاتیکی تیر اویلر-برنولی<sup>2</sup>، براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل تحلیل و نتایج تست خمش تیر از جنس اپوکسی تفسیر شد [22]. در مقاله دیگری، این تئوری برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی بکاربرده و نشان داده شده که فرکانس طبیعی تیر وقتی ضخامت تیر برابر با مشخصه مقیاس داخلی طول ماده باشد به‌طور چشمگیری افزایش پیدا می‌کند [23]. تحلیل خمش استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروتیر با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی فون کارمن<sup>3</sup> توسط ژیا و همکارانش انجام شد [24]. در این تحلیل تیر دارای مقطع یکنواخت مستطیلی بود. همچنین وابستگی ابعادی در ارتعاشات اجباری برای میکروتیر با مقطع یکنواخت براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل در مقالات متعددی به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است. ارتعاشات اجباری با خیز بزرگ برای میکروتیر دارای مقطع یکنواخت مستطیلی توسط کهربائیان و همکارانش با استفاده از تکنیک اغتشاش مورد تحلیل قرار گرفت و نشان داده شد که برای میکروتیر بسیار لاغر، تفاوت چشمگیری بین منحنی پاسخ

<sup>1</sup> Length scale parameter

<sup>2</sup> Euler-Bernoulli

<sup>3</sup> Von Karman

<sup>4</sup> Duffing

<sup>5</sup> Spectral differentiation matrix

همچنین، مولفه‌های تانسور تنش نیرو،  $\sigma_{ij}$  و تانسور تنش کوپل،  $m_{ij}$  عبارتند از:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (11)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zy} = \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy} = 0$$

$$m_{xy} = -G l^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (12)$$

$$m_{yy} = m_{xx} = m_{zz} = m_{zy} = 0$$

انرژی تغییرشکل خمشی  $U_m$ ، در میکروتیر تغییرشکل یافته که تابعی از کرنش (مزدوج با تنش) و انحنا (مزدوج با تنش کوپل) است، از رابطه (13) محاسبه می‌شود [22]. در این رابطه  $M_x$ ، منتهجه ممان و  $Y_{xy}$ ، منتهجه تنش کوپل هستند که به ترتیب از روابط (14) و (15) به دست می‌آیند:

$$U_m = -\frac{1}{2} \int_0^L M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L Y_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (13)$$

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (14)$$

$$Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA \quad (15)$$

انرژی ذخیره شده در تیر ناشی از نیروهای محوری نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U_s = \int_0^L (T_0 - T_a) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (16)$$

در این جا  $T_0$  و  $T_a$ ، به ترتیب نیروی محوری اعمالی به تیر و نیروی محوری ناشی از میانگین افزایش طول در تیر بر اثر خیز، می‌باشند. نیروی محوری  $T_0$  ممکن است همراه با بار اعمالی خارجی یا ناشی از تنش پسماند باشد. زمانی که تیر تحت تنش کششی باشد، طول واقعی تیر،  $\bar{L}$ ، بلندتر از طول اولیه تیر،  $L$ ، خواهد بود. اگر تیر در دو انتها ثابت فرض شود، خمشی تیر باعث ایجاد یک نیروی اضافه محوری در تیر مطابق با رابطه (17) می‌شود.

$$T_a = \frac{EA}{L} (\bar{L} - L) \approx \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (17)$$

با صرف نظر کردن از نیروهای جسمی و کوپل‌های جسمی، کار انجام شده توسط نیرو عرضی خارجی، عبارتست از:

$$V = \int_0^L q(x,t) w(x) dx \quad (18)$$

انرژی جنبشی میکروتیر نیز به صورت زیر است:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (19)$$

بر اساس اصل همیلتون، معادلات دینامیکی حاکم بر میکروتیر و شرایط مرزی معادل با آن، از رابطه زیر استخراج خواهد شد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U_m - U_s - V) dt = 0 \quad (20)$$

با حل رابطه حساب تغییرات (20)، معادله دینامیکی حاکم بر میکروتیر و شرایط مرزی آن، به ترتیب به شکل روابط (21) و (22) به دست می‌آیند:

$$(EI(x) + GA(x)l^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[ T_0 - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = q(x,t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ یا } w = 0 \quad x = 0, l \quad (22)$$

عرضی غیریکنواخت به ارتفاع اولیه  $h_0$  و عرض ثابت  $b$  می‌باشد (شکل 1). در ادامه، معادله تعادل دینامیکی غیرخطی میکروتیر با شرایط مرزی بدون حرکت، با استفاده از اصل همیلتون<sup>1</sup> استخراج خواهد شد.

بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده [20]، چگالی انرژی تغییر شکل  $U$ ، تابعی از تانسور کرنش (مزدوج با تنش نیرو) و تانسور متقارن انحنا (مزدوج با تنش کوپل) است. بنابراین برای انرژی کرنشی کل ماده ایزوتروپ خطی در ناحیه  $\Omega$ ، می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (1)$$

در این جا  $\sigma_{ij}$ ، تانسور تنش نیرو،  $m_{ij}$ ، تانسور تنش کوپل،  $\varepsilon_{ij}$ ، تانسور کرنش،  $\chi_{ij}$ ، تانسور متقارن انحنا و  $\theta_i$ ، بردار چرخش هستند:

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon_{ij}) I + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$m_{xy} = 2G l^2 \chi_{ij} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j \theta_i + \partial_i \theta_j) \quad (5)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} \text{curl}(u_i) \quad (6)$$

بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی، میدان جابجایی و چرخش مقطع به ترتیب، به صورت روابط (7) و (8) فرض می‌شوند:

$$u = -z \psi(x,t), v = 0, w = w(x,t) \quad (7)$$

$$\psi(x,t) \approx \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (8)$$

جابجایی در جهت  $x$  با نماد  $u$ ، جابجایی در جهت  $y$  با  $v$  و جابجایی در جهت  $z$  با نماد  $w$  مشخص شده است و با توجه به معادلات میدان هدف بررسی ارتعاشات در جهت  $z$  می‌باشد.

مولفه‌های تانسور کرنش،  $\varepsilon_{ij}$  و تانسور متقارن انحنا،  $\chi_{ij}$ ، به ترتیب از روابط (9) و (10) به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = 0$$

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\chi_{yy} = \chi_{xx} = \chi_{zz} = \chi_{xz} = \chi_{zy} = 0 \quad (10)$$

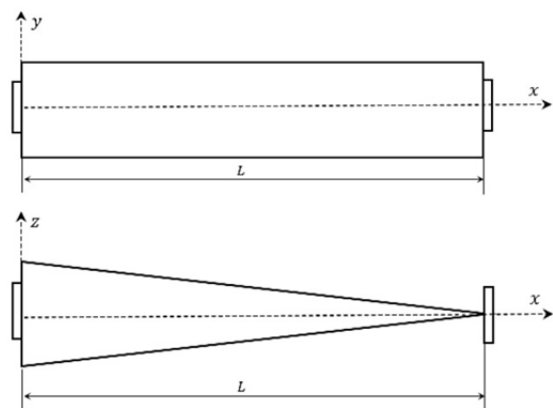


Fig. 1 Microbeam with nonuniform cross section

شکل 1 میکروتیر با مقطع عرضی غیریکنواخت

<sup>1</sup> Hamilton's principle

"شکل 3"، نمودار نسبت فرکانس غیرکلاسیک به کلاسیک ( $\Omega_{Ncl}/\Omega_{Cl}$ ) در مقابل نسبت ابعاد ( $h_0/l$ )، برای شرط مرزی دو سر ساده و مقطع عرضی یکنواخت، در پژوهش جاری و مقاله کنگ مطابقت کامل داشته و صحت سنجی می‌شود. لازم بذکر است که این نمودار در بین خواص مکانیکی تنها وابسته به نسبت پواسون می‌باشد. با توجه به دقت خوب نتایج، روش جاری راستی آزمایی شده و می‌توان به بررسی نتایج در حالت کلی با مقاطع عرضی غیریکنواخت و شرایط مرزی مختلف پرداخت.

شکل مود اول حاصل برای شرط مرزی یک سرگیردار یک سر ساده و برای مقاطع عرضی مختلف میکروتیر در "شکل 4" نشان داده شده‌است. براساس مرجع [23]، برای بررسی وابستگی ابعادی در ارتعاشات میکروتیر با مقطع غیریکنواخت، از نسبت عرض اولیه مقطع،  $h_0$ ، به پارامتر مقیاس طول ماده،  $l$ ، استفاده می‌شود.

"شکل 5"، نسبت فرکانس طبیعی غیرکلاسیک به فرکانس طبیعی کلاسیک برای مود اول ارتعاشات را در مقابل نسبت  $h_0/l$  نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، برای تمامی مقاطع عرضی و شرایط مرزی مورد مطالعه، وقتی نسبت عرض اولیه مقطع  $h_0$  به پارامتر مقیاس طول ماده  $l$  به یک نزدیک می‌شود، نسبت فرکانس غیرکلاسیک به کلاسیک ( $\Omega_{Ncl}/\Omega_{Cl}$ ) به طور چشمگیری افزایش پیدا می‌کند. این وابستگی ابعادی در ارتعاشات، برای مقاطع عرضی غیریکنواخت نسبت به مقطع عرضی یکنواخت بسیار متفاوت خواهد بود. همچنین برای مقطع غیریکنواخت، شرایط مرزی نیز در این رفتار تاثیرگذار خواهد بود، در حالی‌که در میکروتیر با مقطع عرضی یکنواخت، تمامی شرایط مرزی، نمودار وابستگی ابعادی مشابهی دارند. با توجه به این شکل، وابستگی ابعادی برای مقطع غیریکنواخت نوع سوم، نسبت به مقاطع دیگر شدیدتر است. این وابستگی ابعادی، از مقطع نوع دوم به نوع اول و سپس به مقطع یکنواخت، کاهش می‌یابد. برای تمامی مقاطع عرضی غیریکنواخت، نسبت فرکانس غیرکلاسیک به کلاسیک، در شرط مرزی دو سر ساده بیشترین مقدار و در شرط مرزی یکسر گیردار و یکسر ساده، کمترین مقادیر را دارد.

در این‌جا، برای بررسی اثر ابعاد بر غیرخطی هندسی فون کارمن، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی ( $\Omega_{Nl}/\Omega_l$ ) که هر دو براساس معادلات غیرکلاسیک محاسبه می‌شوند، مطالعه می‌شود. این بررسی، برای نسبت دامنه ماکزیمم به عرض اولیه مقطع برابر با دو ( $w_{max}/h_0 = 2$ ) و وقتی نسبت عرض اولیه مقطع  $h_0$  به پارامتر مقیاس طول ماده  $l$  در بازه صفر مثبت تا ده تغییر می‌کند، در مود اول ارتعاشی بررسی می‌شود.

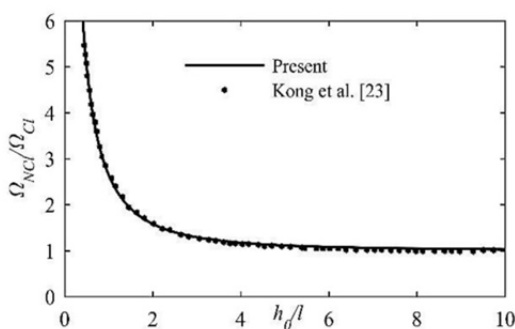


Fig. 3 The ratio of non-classical frequency to classical frequency ( $\Omega_{Ncl}/\Omega_{Cl}$ ) versus size ratio ( $h_0/l$ ) in simply supported microbeam

شکل 3 نسبت فرکانس طبیعی غیرکلاسیک به کلاسیک ( $\Omega_{Ncl}/\Omega_{Cl}$ ) در مقابل نسبت ابعاد ( $h_0/l$ ) در میکروتیر با شرایط مرزی ساده

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ یا } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \text{ و } l \quad (23)$$

در این مقاله، میکروتیر دارای چهار نوع مقطع عرضی متقارن می‌باشد. یکی از این مقاطع یکنواخت و بقیه غیریکنواخت مربعی (شکل 2)، هستند که مساحت و ممان دوم سطح در این مقاله، به ترتیب از روابط (24) و (25) به دست می‌آید. برای مقطع یکنواخت،  $i = 0$  و برای مقاطع غیریکنواخت نوع اول تا سوم به ترتیب،  $i = 1/2, 1, 3/2$  در نظر گرفته شده است:

$$A(x) = A_0(1 + \alpha(\frac{x}{L})^i) \quad (24)$$

$$I(x) = I_0(1 + \alpha(\frac{x}{L})^i)^3 \quad (25)$$

حال با فرض تفکیک متغیرها مطابق رابطه (26) و در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد (27)، معادله ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر مطابق رابطه (28) حاصل می‌گردد:

$$\eta(x, t) = w(x)q(t) \quad (26)$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad W = \frac{w}{w_{max}}, \quad \beta = \frac{GA_0(1 + \alpha(\frac{x}{L})^i)l^2}{EI_0(1 + \alpha(\frac{x}{L})^i)} = (\frac{6}{(1 + \nu)}) (\frac{l}{h})^2, \quad \kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{w_{max}^2}{h^2} \right), \quad \Omega = \frac{\rho A_0 L^4}{EI_0} \omega \quad (27)$$

$$\left( (1 + \alpha(X)^i)^2 + \beta \right) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \left[ \kappa \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \Omega^2 W = 0 \quad (28)$$

لازم به ذکر است که خواص ماده به کار برده شده در میکروتیر، عبارتست از: مدول یانگ  $E = 1.44 \text{ GPa}$ ، پارامتر مقیاس طول،  $l = 17.6 \mu\text{m}$  و نسبت پواسون،  $\nu = 0$  [22].

### 3- ارتعاشات آزاد

رابطه (28)، با استفاده از روش مشتقات تربیعی بهبود یافته و تکرار مستقیم [40] و فرض سه شرط مرزی، دو سرگیردار  $\partial w/\partial x = w = 0$ ، دو سر ساده  $\partial^2 w/\partial x^2 = w = 0$  و یک سرگیردار در  $x = 0$  و یک سر ساده در  $x = L$ ، با استفاده از روش ارائه شده در مرجع [41] اعمال می‌شود.

ابتدا به منظور بررسی دقت روش جاری، به مقایسه نتایج با نتایج حاصل از حل دقیق کنگ و همکارانش [23] می‌پردازیم. "شکل 3"، مقایسه نتایج وابستگی ابعادی به دست آمده از روش مشتقات تربیعی بهبود یافته، برای شرط مرزی دو انتها ساده و مقطع عرضی یکنواخت با نتایج به دست آمده از روش حل دقیق با همین شرایط مرزی، مقطع عرضی و برای نسبت پواسون  $\nu = 0$  در مقاله کنگ و همکارانش [23] نشان می‌دهد. با توجه به

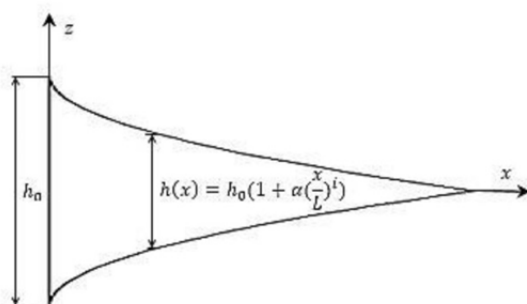


Fig. 2 Cross section of microbeam as a polynomial function

شکل 2 مقطع عرضی غیریکنواخت میکروتیر به صورت تابع چندجمله‌ای

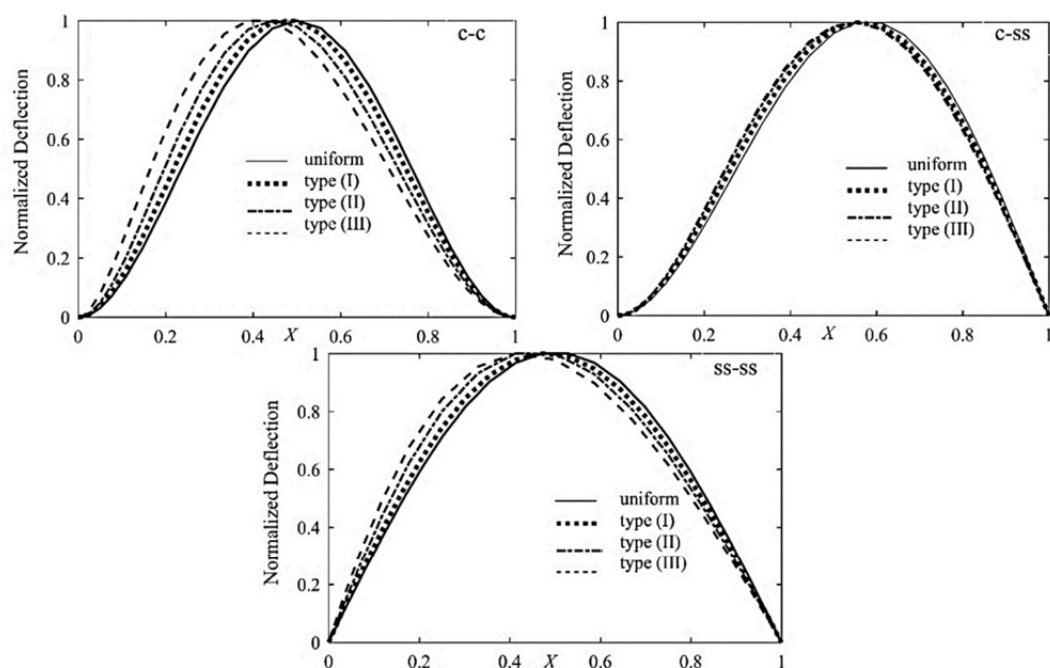


Fig. 4 Microbeam vibration mode shapes for different boundary conditions and cross sections

شکل 4 شکل مود ارتعاشات میکرو تیر برای شرایط مرزی و مقاطع عرضی مختلف

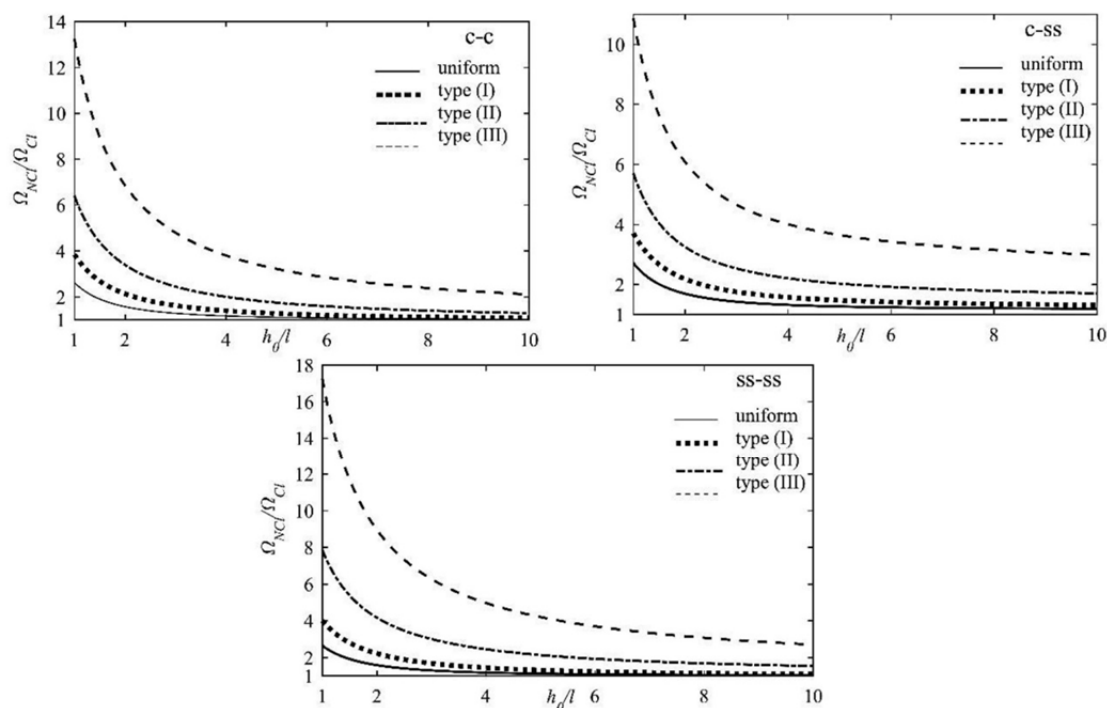


Fig. 5 The ratio of non-classical frequency to classical frequency ( $\Omega_{Ncl}/\Omega_{cl}$ ) versus size ratio ( $h_0/l$ ) with various boundary conditions and sections

شکل 5 نسبت فرکانس طبیعی غیرکلاسیک به کلاسیک ( $\Omega_{Ncl}/\Omega_{cl}$ ) در مقابل نسبت ابعاد ( $h_0/l$ ) برای مقاطع عرضی و شرایط مرزی مختلف

خواهد بود. در شرایط مرزی مورد مطالعه، برای شرط مرزی دو انتها تکیه‌گاه ساده این اثر بزرگتر است. ولی با کاهش ابعاد و برای ابعادی کمتر از مشخصه مقیاس طول ( $h_0/l < 1$ )، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ( $\Omega_{Nl}/\Omega_l$ ) به یک میل کرده و اثر غیرخطی هندسی فون کارمن، به‌طور کامل قابل چشم پوشی است.

براساس "شکل 6"، اثر غیرخطی هندسی فون کارمن با کاهش ابعاد و نزدیک شدن به مشخصه مقیاس طول، برای تمامی شرایط مرزی و مقاطع عرضی مورد مطالعه، کاهش قابل توجهی پیدا کرده است. همچنین، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ( $\Omega_{Nl}/\Omega_l$ ) برای ابعاد بزرگ و مقاطع غیر یکنواخت، نسبت به مقطع یکنواخت چشمگیرتر است. برای مقطع غیر یکنواخت، به ترتیب نوع سوم، نوع دوم و اول، تاثیر غیرخطی هندسی بیشتر



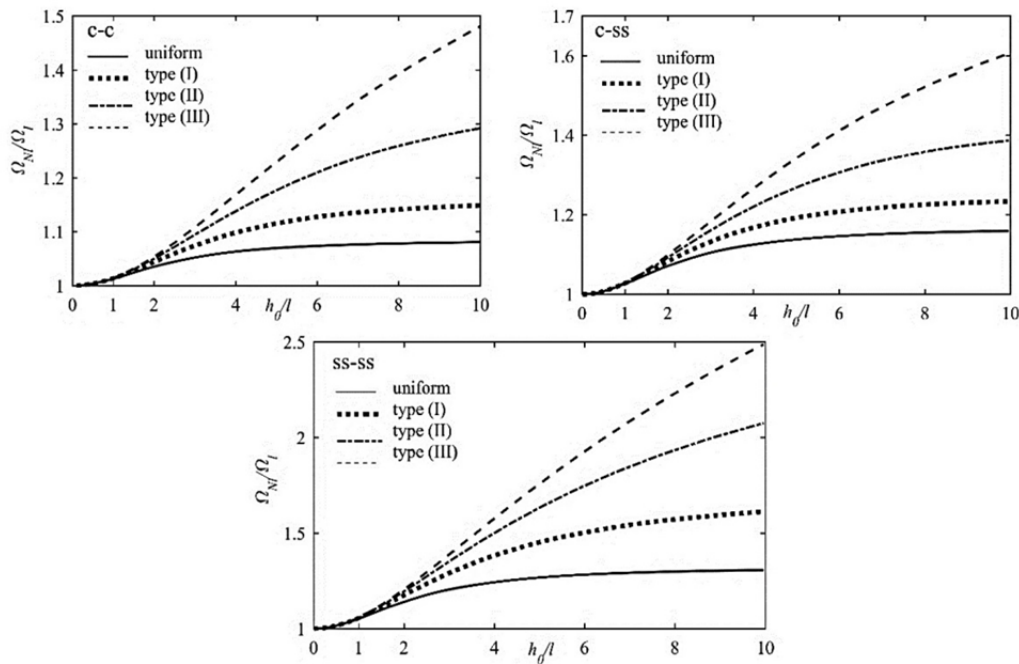


Fig. 6 The ratio of nonlinear frequency to linear natural frequency ( $\Omega_{NL}/\Omega_L$ ) versus size ratio ( $h_0/l$ ) with various boundary conditions and cross sections

شکل 6 نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ( $\Omega_{NL}/\Omega_L$ ) در مقابل نسبت ابعاد ( $h_0/l$ ) برای مقاطع عرضی و شرایط مرزی مختلف

ماتریسی دیفرانسیلی، معادله دیفرانسیل حاکم در حوزه زمان تفکیک می گردد. این معادلات، با شرایط پریودیک، به صورتی حل خواهد شد که بجای اعمال این شرایط در اپراتور دیفرانسیلی حوزه زمان، با انتخاب نقاط خاص و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی، حوزه زمان به صورت طبیعی این شرایط را ارضا کند. بنابراین ماتریس اپراتور دیفرانسیلی اسپکترال، در نقاط بدون پیوند پریودیک، بین 0 تا 1 تعریف می شود. مشتقات پریودیک تابع  $\text{sinc}$  به صورت  $\sin(\pi t/h)/(\tan(\pi/2)(2\pi/h))$ ، به عنوان تابع پایه در روش کالوکیشن استفاده می شود که در این جا  $h = 2\pi/k$  و  $h$  همان تعداد نقاط تفکیک حوزه زمان می باشد [37]. بر همین اساس ماتریس های اپراتور دیفرانسیلی اسپکترال برای مشتق مرتبه اول و دوم،  $\bar{D}_\tau^{(1)}$  و  $\bar{D}_\tau^{(2)}$  به ترتیب در روابط (33) و (34) ارائه شده است. ماتریس های  $\bar{D}_\tau^{(1)}$  و  $\bar{D}_\tau^{(2)}$  قطر ثابت هستند.

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{i,1} = (-1)^{i-1} \cot\left(\frac{\pi(i-1)}{k}\right) \\ a_{i,1} = (-1)^{n-j+1} \cot\left(\frac{\pi(i-1)}{k}\right) \\ a_{i+1,j+1} = a_{i,j} \end{cases} \quad i, j = 2, 3, 4, \dots, k \quad (33)$$

$$\begin{cases} \bar{D}_\tau^{(1)} = 2\pi[a_{i,j}] \\ b_{11} = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{6} \\ b_{i,1} = \frac{(-1)^{i-1}}{2 \sin^2\left(\frac{\pi(i-1)}{k}\right)} \\ b_{i,1} = \frac{(-1)^{n-j+1}}{2 \sin^2\left(\frac{\pi(k-j+1)}{k}\right)} \\ b_{i+1,j+1} = b_{i,j} \end{cases} \quad i, j = 2, 3, 4, \dots, k \quad (34)$$

همچنین با جایگذاری تحریک هارمونیک به صورت رابطه (35)، معادله

#### 4- پاسخ اجباری

با توجه به مقالات سال های اخیر، محققین مسئله وابستگی ابعادی در ارتعاشات اجباری را نیز در کنار ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی میکرونیتر به صورت جداگانه در مقالات متعددی مورد پژوهش قرار داده اند [25-32, 33]. لذا علاوه بر تحلیل ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی ضرورت تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم نیز احساس می شود و در این مقاله به آن پرداخته شده است. همچنین برای حل معادله غیرخطی با متغیر زمان، رهیافت عددی جدیدی که در مقالات روز ارائه شده و دقت بسیار بالای آن نشان داده شده - است [38, 39]، به کار برده می شود.

در این بخش، برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی غیرخطی میکرونیتر تحت تحریک هارمونیک  $F(x,t) = f \cos(\Omega t)$  با استفاده از روش گلرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حاکم (رابطه (21))، به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از نوع دافینگ با متغیر زمان کاهش می یابد:

$$M\ddot{q} + Kq + K_{nl}q^3 = f \cos(\Omega t) \quad (29)$$

سپس، معادله دیفرانسیل حاکم (رابطه (21))، نسبت به زمان حل می شود. در این جا، برای پیش بینی پاسخ پریودیک سیستم در دوره زمانی  $T = 2\pi/\Omega$ ، با تعریف  $t = \tau/T$ ، معادله دیفرانسیل زیر حاصل می گردد:

$$\frac{1}{T^2} M\ddot{q} + Kq + K_{nl}q^3 = f \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (30)$$

برای به دست آوردن پاسخ پریودیک حرکت، باید شرایط زیر در معادلات ارضا شود.

$$\begin{cases} q|_{\tau=0} = q|_{\tau=1} \\ \frac{dq}{d\tau}|_{\tau=0} = \frac{dq}{d\tau}|_{\tau=1} \end{cases} \quad (31)$$

حوزه زمان نیز به صورت زیر تفکیک شده است:

$$\tau_i = \frac{i}{n}, \quad 0 < i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (32)$$

که در این جا،  $k$ ، تعداد نقاط تفکیک حوزه زمان می باشد. با استفاده از اپراتور

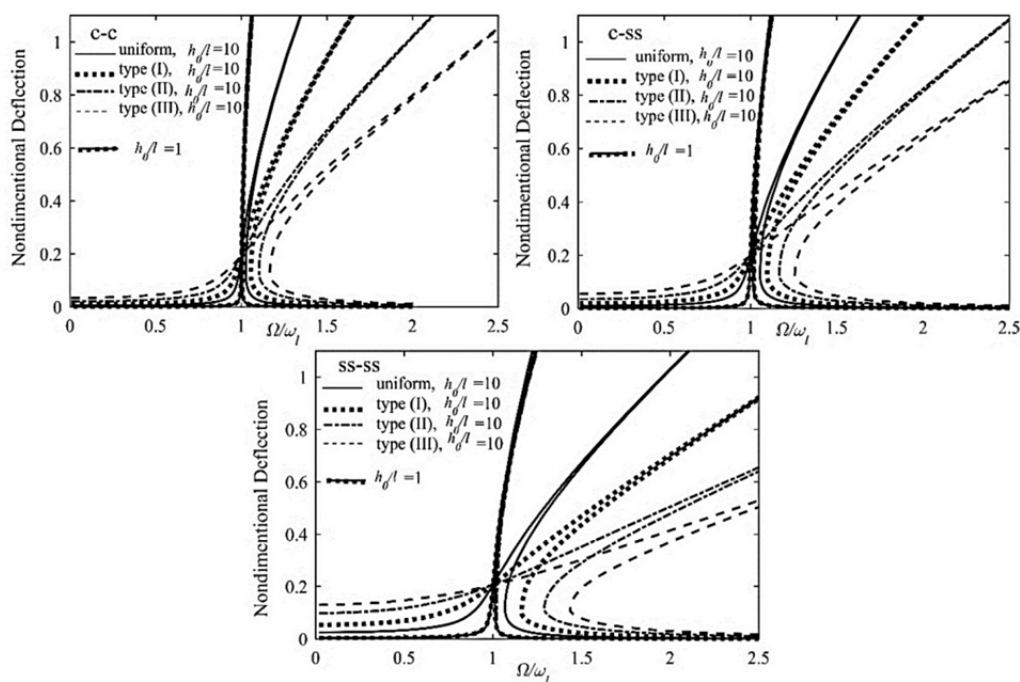


Fig. 7 Frequency response of microbeam with various boundary conditions and cross sections for two different values of size ratio ( $h_0/l$ )

شکل 7 پاسخ فرکانسی میکروتیر برای شرایط مرزی و مقاطع عرضی مختلف برای دو مقدار متفاوت نسبت ابعاد ( $h_0/l$ )

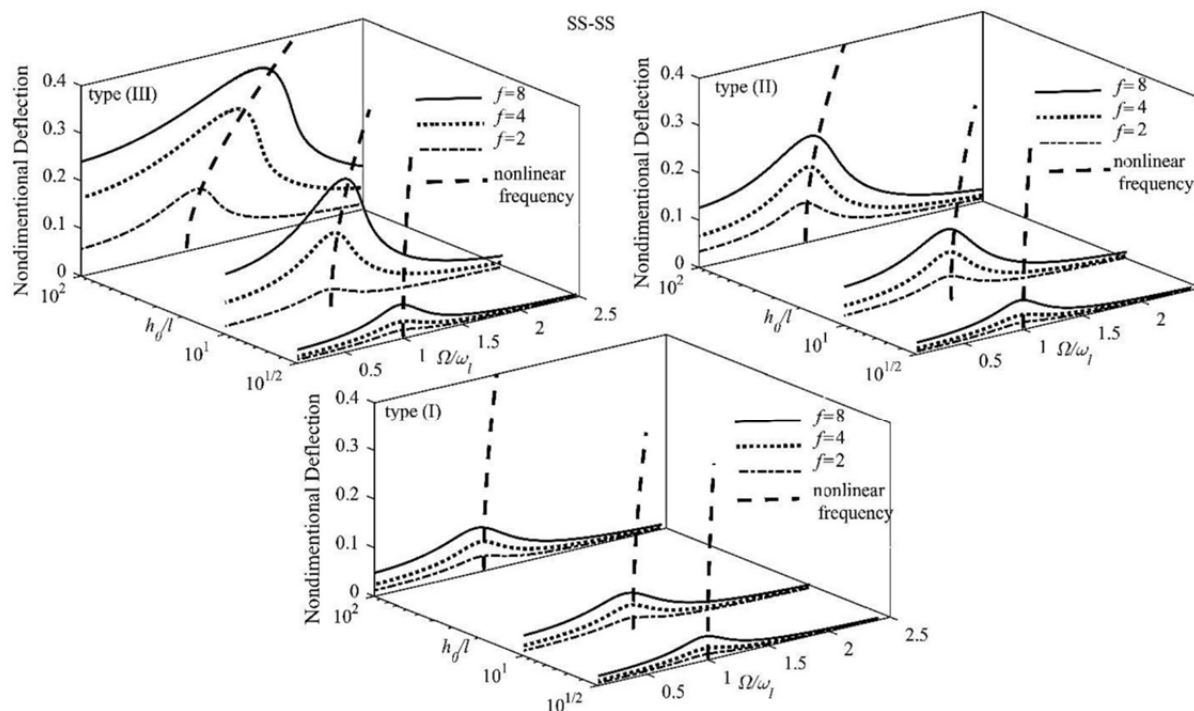


Fig. 8 Frequency response of microbeam for different values of size ratio ( $h_0/l$ ) and non-dimensional force ( $f$ ) with simply supported boundary conditions and various nonuniform cross sections

شکل 8 پاسخ فرکانسی میکروتیر برای مقادیر متفاوت نسبت ابعاد ( $h_0/l$ ) و نیرو بدون بعد  $f$  در مقاطع عرضی غیریکنواخت و شرط مرزی دو انتها تکیه‌گاه ساده

$$\frac{1}{T^2} \widetilde{M} \widetilde{D}_\tau^{(2)} q + \frac{1}{T} \widetilde{C} \widetilde{D}_\tau^{(1)} q + K I_k q + K_{nl} q^3 - f A = 0 \quad (36)$$

نهایتاً، معادله غیرخطی پارامتری (36) با استفاده از روش طول کمان حل شده و پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی میکروتیر به دست می‌آید.

دیفراسیل حاکم به معادله تفکیک شده برداری در حوزه زمان (رابطه (36)) تبدیل خواهد شد.

$$A_{1 \times k} = \cos(\Omega \tau_i) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \tau_i\right) \quad (35)$$

2- اثر سفت شوندگی غیرخطی هندسی فون کارمن، برای فرکانس طبیعی تیر اویلر-برنولی با کاهش ابعاد و نزدیک شدن به مشخصه مقیاس طول برای تمامی شرایط مرزی و مقاطع عرضی مورد مطالعه، کاهش قابل توجهی پیدا کرده است. برای ابعادی کمتر از مشخصه مقیاس طول، اثر غیرخطی هندسی فون کارمن، قابل چشم‌پوشی است.

3- در ارتعاشات اجباری خمیدگی منحنی پاسخ فرکانسی سیستم به سمت راست و برای شرط مرزی دوسر ساده، بیشتر از شرایط مرزی دیگر است. همچنین برای مقطع غیریکنواخت نوع سوم، بیشتر از مقاطع نوع دوم، اول و نیز مقطع یکنواخت است.

4- پاسخ فرکانسی میکروتیر، براساس تئوری تنش کوپل، وابسته به ابعاد است. خمیدگی منحنی پاسخ فرکانسی، برای ابعادی برابر با مشخصه مقیاس طول، شدیداً کاهش پیدا کرده و پاسخ فرکانسی غیرخطی میکروتیر، بسیار نزدیک به پاسخ خطی می‌شود.

نتایج حاصل از این مطالعه می‌تواند برای مدل‌سازی و بهینه‌سازی میکروتیرها مورد استفاده قرار گیرد.

## 6- پیوست

پارامترهای بی‌بعد رابطه (28)

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{w_{\max}^2}{h^2} \right)$$

$$\Omega = \frac{\rho A_0 L^4}{EI_0} \omega$$

$$\beta = \frac{GA_0(1 + \alpha(\frac{x}{L})^i)l^2}{EI_0(1 + \alpha(\frac{x}{L})^i)} = \left( \frac{6}{(1 + \nu)} \right) \left( \frac{l}{h} \right)^2$$

## 7- فهرست علائم

|                   |                                                        |
|-------------------|--------------------------------------------------------|
| $A_0$             | مساحت اولیه مقطع تیر ( $m^2$ )                         |
| $C$               | ضریب میرایی ریلی                                       |
| $\bar{D}_T^{(1)}$ | ماتریس اپراتور دیفرانسیلی اسپکترال برای مشتق مرتبه اول |
| $\bar{D}_T^{(2)}$ | ماتریس اپراتور دیفرانسیلی اسپکترال برای مشتق مرتبه دوم |
| $E$               | مدول یانگ ( $Nm^{-2}$ )                                |
| $f$               | نیروی گسترده یکنواخت بدون بعد                          |
| $F$               | تابع نیروی گسترده یکنواخت هارمونیک                     |
| $G$               | مدول برشی ( $Nm^{-2}$ )                                |
| $h$               | ضخامت مقطع تیر (m)                                     |
| $h_0$             | ضخامت اولیه مقطع تیر (m)                               |
| $I_0$             | ممان دوم سطح اولیه مقطع تیر ( $m^4$ )                  |
| $I_k$             | ماتریس یک‌مرتبه $k$                                    |
| $k$               | تعداد نقاط تفکیک حوزه زمان                             |
| $K$               | ضریب سفتی                                              |
| $K_{nl}$          | ضریب سفتی غیرخطی                                       |
| $l$               | پارامتر مقیاس طول (m)                                  |
| $L$               | طول اولیه تیر                                          |
| $\bar{L}$         | طول واقعی تیر                                          |
| $m_{ij}$          | تانسور تنش کوپل                                        |
| $M$               | ضریب جرم                                               |
| $M_{ij}$          | منتجه ممان                                             |
| $q$               | بردار مجهولات شامل جابجایی                             |

در این‌جا، به بررسی پاسخ فرکانسی میکروتیر جهت مطالعه رفتار وابسته به ابعاد در ارتعاشات اجباری برای مقاطع عرضی غیریکنواخت و شرایط مرزی مختلف می‌پردازیم. برای حل معادله، ضریب میرایی ویسکوز را برابر صفر،  $C = 0$ ، نسبت دامنه ماکزیمم به عرض اولیه مقطع را برابر دو  $w_{\max}/h_0 = 2$  و همچنین مقدار بار خارجی بی‌بعد را برابر یک،  $f = 1$ ، در نظر گرفته شده است.

"شکل 7" منحنی پاسخ فرکانسی مود اول میکروتیر برای شرایط مرزی و مقاطع عرضی مختلف و دو مقدار متفاوت نسبت ابعاد  $h_0/l = 10$  و  $h_0/l = 1$  نمایش می‌دهد، همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود منحنی پاسخ فرکانسی برای میکروتیر غیریکنواخت وابسته به ابعاد است. خمیدگی منحنی پاسخ فرکانسی سیستم به سمت راست، برای شرط مرزی دو سر ساده، بیشتر از شرایط مرزی دیگر است. همچنین برای مقطع غیریکنواخت نوع سوم، خمیدگی منحنی، بیشتر از مقاطع نوع دوم، اول و نیز مقطع یکنواخت است. این شکل نشان می‌دهد که پاسخ فرکانسی میکروتیر، براساس تئوری تنش کوپل، وابسته به ابعاد است. همان‌طور که در نتایج بخش قبل ذکر شد، اثر سخت‌شوندگی غیرخطی هندسی فون کارمن با کاهش ابعاد و نزدیک شدن به مشخصه مقیاس طول، برای تمامی شرایط مرزی و مقاطع عرضی مورد مطالعه، کاهش قابل توجهی پیدا می‌کند. براساس نمودارهای پاسخ فرکانسی به‌دست آمده، خمیدگی منحنی پاسخ فرکانسی، وقتی عرض اولیه مقطع برابر با مشخصه مقیاس طول می‌شود ( $h_0/l = 1$ )، شدیداً کاهش پیدا کرده و پاسخ فرکانسی سیستم تقریباً مشابه پاسخ فرکانسی خطی می‌شود. با افزایش سختی بخش خطی معادله ارتعاشات میکروتیر بر اثر کاهش ابعاد، منحنی پاسخ فرکانسی برای مقاطع عرضی یکنواخت و غیریکنواخت مختلف منطبق بر یکدیگر بوده و با خمیدگی ناچیزی بسمت راست همراه می‌باشد. "شکل 8"، پاسخ فرکانسی میکروتیر دو سر ساده با مقاطع عرضی غیریکنواخت نوع اول تا سوم، برای سه مقدار نسبت ابعاد،  $h_0/l = 10, 100, \sqrt{10}$  و سه مقدار نیرو بدون بعد،  $f = 2, 4, 8$  نشان می‌دهد. با توجه به "شکل 8" دامنه ماکزیمم در منحنی پاسخ فرکانسی با کاهش نسبت ابعاد، به‌طور قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند. همچنین برای همه نسبت‌های ابعادی، ماکزیمم دامنه برای مقطع غیریکنواخت نوع سوم بیشترین مقدار است. انحنای فرکانس غیرخطی برای مقطع نوع سوم نسبت به مقاطع غیریکنواخت دیگر چشمگیرتر است و با کاهش نسبت ابعاد، این انحنای کاهش پیدا کرده و برای نسبت ابعاد  $h_0/l = \sqrt{10}$  تقریباً انحنای ناچیز می‌شود.

## 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای اولین بار، ارتعاشات میکروتیر با مقاطع عرضی غیریکنواخت براساس تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل مورد مطالعه قرار گرفت. این مطالعه با استفاده از رهیافت عددی صورت گرفته و شامل ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی و همچنین ارتعاشات اجباری غیرخطی می‌باشد، براساس نتایج این مقاله نشان داده شد که:

1- وابستگی ابعادی در ارتعاشات، برای میکروتیرهایی با مقاطع عرضی غیریکنواخت نسبت به میکروتیر با مقطع عرضی یکنواخت تفاوت چشمگیری دارد. همچنین برای مقطع غیر یکنواخت، شرایط مرزی نیز در این رفتار تاثیرگذار است. این وابستگی ابعادی برای مقاطع غیریکنواخت، به ترتیب در نوع اول، دوم و سوم به‌طور قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند. همچنین، وابستگی ابعادی برای شرط مرزی دو انتها ساده، چشمگیرتر می‌باشد.



- [9] A. H. Nayfeh, M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 48, No. 1-2, pp. 153-163, 2007.
- [10] S. Govindjee, J. L. Sackman, On the use of continuum mechanics to estimate the properties of nanotubes, *Solid State Communications*, Vol. 110, No. 4, pp. 227-230, 1999.
- [11] Q. Ma, D. R. Clarke, Size dependent hardness of silver single crystals, *Journal of Materials Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 853-863, 1995.
- [12] J. Stölken, A. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14, pp. 5109-5115, 1998.
- [13] A. C. Chong, D. C. Lam, Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers, *Journal of Materials Research*, Vol. 14, No. 10, pp. 4103-4110, 1999.
- [14] E. Cosserat, F. Cosserat, Deformable Bodies, *Scientific Library A. Hermann and Sons*, 1909.
- [15] R. D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, No. 1, pp. 51-78, 1964.
- [16] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
- [17] R. D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, No. 4, pp. 417-438, 1965.
- [18] R. Mindlin, N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 109-124, 1968.
- [19] W. Koiter, Couple stresses in the theory of elasticity, *Proc. Koninklijke Nederl. Akad. van Wetensch.*, Vol. 67, 1964.
- [20] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [21] A. R. Hadjesfandiari, G. F. Dargush, Couple stress theory for solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 18, pp. 2496-2510, 2011.
- [22] S. Park, X. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355, 2006.
- [23] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 46, No. 5, pp. 427-437, 2008.
- [24] W. Xia, L. Wang, L. Yin, Nonlinear non-classical microscale beams: static bending, postbuckling and free vibration, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 2044-2053, 2010.
- [25] M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Hoore, M. T. Ahmadian, Nonlinear size-dependent forced vibrational behavior of microbeams based on a non-classical continuum theory, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 18, No. 5, pp. 696-711, 2012.
- [26] H. Farokhi, M. H. Ghayesh, M. Amabili, Nonlinear dynamics of a geometrically imperfect microbeam based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 68, pp. 11-23, 2013.
- [27] M. H. Ghayesh, H. Farokhi, M. Amabili, In-plane and out-of-plane motion characteristics of microbeams with modal interactions, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 60, pp. 423-439, 2014.
- [28] D. C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [29] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.
- [30] B. Wang, J. Zhao, S. Zhou, A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 591-599, 2010.
- [31] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 11, pp. 1256-1267, 2011.
- [32] R. Vatankhah, M. Kahrobaiyan, A. Alasty, M. Ahmadian, Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18-19, pp. 8363-8382, 2013.
- [33] M. H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 63, pp. 52-60, 2013.
- [34] M. De Rosa, M. Lippiello, Natural vibration frequencies of tapered beams Engineering, *Engineering Transactions*, Vol. 57, No. 1, pp. 45-66, 2009.
- [35] I. Zamorska, Free transverse vibrations of non-uniform beams, *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, Vol. 9, No. 2, pp. 243-249, 2010.
- [36] M. C. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin, Vibration of a variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications*, Vol. 34, No. 1, pp. 78-84, 2007.
- [37] L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*: SIAM, 2000.
- [38] E. Hasrati, R. Ansari, Nonlinear vibration analysis of conical shells using a numerical strategy, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 210-220, 2017. (in Persian)

|          |                                                          |
|----------|----------------------------------------------------------|
| $T$      | انرژی جنبشی میکروتیر                                     |
| $T_0$    | نیروی محوری اعمالی به تیر                                |
| $T_a$    | نیروی محوری ناشی از میانگین افزایش طول در تیر بر اثر خیز |
| $u$      | میدان جابجایی در جهت $x$                                 |
| $U$      | چگالی انرژی تغییر شکل                                    |
| $U_m$    | انرژی تغییر شکل خمشی                                     |
| $U_s$    | انرژی ذخیره شده در تیر ناشی از نیروهای محوری             |
| $v$      | میدان جابجایی در جهت $y$                                 |
| $V$      | کار انجام شده توسط نیرو عرضی خارجی                       |
| $w$      | میدان جابجایی در جهت $z$                                 |
| $W$      | خیز بدون بعد                                             |
| $X$      | طول بدون بعد                                             |
| $Y_{ij}$ | منتجه تنش کوپل                                           |

## علائم یونانی

|                    |                                     |
|--------------------|-------------------------------------|
| $\varepsilon_{ij}$ | تانسور کرنش                         |
| $\eta$             | تابع ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر  |
| $\theta_i$         | بردار چرخش                          |
| $\nu$              | ضریب پواسون                         |
| $\sigma_{ij}$      | تانسور تنش نیرو                     |
| $\tau$             | دوره تناوب بدون بعد                 |
| $\chi_{ij}$        | تانسور متقارن انحنا                 |
| $\psi$             | چرخش مقطع                           |
| $\omega$           | فرکانس طبیعی                        |
| $\omega_1$         | فرکانس طبیعی بی بعد خطی مود اول تیر |
| $\Omega$           | فرکانس تحریک خارجی                  |
| $\Omega_{cl}$      | فرکانس طبیعی بی بعد کلاسیک          |
| $\Omega_{Ncl}$     | فرکانس طبیعی بی بعد غیر کلاسیک      |
| $\Omega_1$         | فرکانس طبیعی بی بعد خطی             |
| $\Omega_{N1}$      | فرکانس طبیعی بی بعد غیرخطی          |

## 8- مراجع

- [1] L. J. Currano, M. Yu, B. Balachandran, Latching in a MEMS shock sensor: Modeling and experiments, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 159, No. 1, pp. 41-50, 2010.
- [2] S. Chatterjee, G. Pohit, A large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, No. 4, pp. 969-986, 2009.
- [3] M. H. Mahdavi, A. Farshidianfar, M. Tahani, S. Mahdavi, H. Dalir, A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever, *Ultramicroscopy*, Vol. 109, No. 1, pp. 54-60, 2008.
- [4] M. A. Mohammadi, K. A. Yousefi, M. E. Maani, M. Karipour, Dynamics behavior analysis of atomic force microscope based on gradient theory, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 155-164, 2016. (in Persian)
- [5] M. Abbasi, Nonlinear vibration analysis of a dynamic atomic force microscope microcantilever in the tapping mode based on the modified couple stress theory, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 11, 2015. (in Persian)
- [6] E. M. Abdel-Rahman, M. I. Younis, A. H. Nayfeh, Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 759, 2002.
- [7] Y. Ahn, H. Guckel, J. D. Zook, Capacitive microbeam resonator design, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 11, No. 1, pp. 70, 2001.
- [8] L. D. Gabbay, J. E. Mehner, S. D. Senturia, Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels. I. Non-stress-stiffened case, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 262-269, 2000.

[41] X. Wang, C. Bert, A. Striz, Differential quadrature analysis of deflection, buckling, and free vibration of beams and rectangular plates, *Computers & Structures*, Vol. 48, No. 3, pp. 473-479, 1993.

[39] E. Hasrati, R. Ansari, J. Torabi, A novel numerical solution strategy for solving nonlinear free and forced vibration problems of cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 53, pp. 653-672, 2018.

[40] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of computational physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.