



Computation of First and Second-Order Sensitivities for Steady State Incompressible Laminar Flow Using Extended Complex Variables Method

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Hassanzadeh M.^{*1} MSc,
Kashani S.¹ Msc

How to cite this article

Hassanzadeh M, Kashani S. Computation of First and Second-Order Sensitivities for Steady State Incompressible Laminar Flow Using Extended Complex Variables Method. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(1):237-246.

ABSTRACT

In this paper, extended complex variables method (ECVM) is presented in fluid flow problems for the first and second-order sensitivity analysis. The finite element method is used to solve the Navier-Stokes equations, and the complex variables method is implemented to it. In the complex variables method, a complex step that only includes the imaginary part is used, but in its development, it uses a complex step that includes both the imaginary part and the real part to achieve higher performance. In the first-order sensitivity calculation, the results are not dependent on the step size, but in the second-order sensitivity, the results of the sensitivity depending on the step size and inevitably the developed formulas should be used to obtain higher accuracy. The proposed method is first validated for a problem with a closed-form solution, and the convergence rate is investigated and, then, applied to a uniform flow past a cylindrical cylinder and, finally, the results are compared by finite difference method. The results show that the range of accuracy for second-order sensitivity in the extended complex variable method is doubled compared to the complex variable method and it can be reduced to 10-12. It means that the effectiveness of the proposed method has increased. The introduced method is applicable to a wide range of problems with simple and complex parameters.

Keywords First and Second-Order Sensitivities Analysis; Extended Complex Variable Method (ECVM); Navier-Stokes Equation; Finite Element Method (FEM)

¹Mechanical Engineering Department, Kordkuy Center, Gorgan Branch, Islamic Azad University, Kordkuy, Iran

*Correspondence

Address: Kordkuy Center, Islamic Azad University, Kordkuy, Iran.
Postal Code: 4915686166
Phone: +98 (17) 34353257
Fax: +98 (17) 34353256
m.hassanzadeh@kordkuyiau.ac.ir

Article History

Received: March 23, 2018
Accepted: October 07, 2018
ePublished: January 01, 2019

CITATION LINKS

[1] Topology optimization of heat conduction problem via Level-Set method and the finite elements analysis [2] Shape optimization of a body in compressible inviscid flows [3] Uncertainty quantification of electroosmotic flow in a microchannel [4] A continuous second-order sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows [5] Airfoil design on unstructured grids for turbulent flows [6] Discrete adjoint sensitivity analysis for fluid flow topology optimization based on the generalized lattice Boltzmann method [7] Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation [8] Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method [9] Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables [10] Numerical differentiation of analytic functions [11] Numerical algorithms based on the theory of complex variable [12] Using complex variables to estimate derivatives of real functions [13] The complex-step derivative approximation [14] An automated method for sensitivity analysis using complex variables [15] A multidisciplinary optimization method for designing inlets using complex variables [16] Computationally efficient, numerically exact design space derivatives via the complex Taylor's series expansion method [17] Extensions of the first and second complex-step derivative approximations [18] An introduction to nonlinear finite element analysis: With applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics [19] An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder [20] Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers

محاسبه حساسیت مرتبه اول و دوم برای جریان‌های لایه‌ای تراکم‌ناپذیر پایا با استفاده از روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته

مهدی حسن‌زاده * MSc

گروه مهندسی مکانیک، مرکز کردکوی، واحد گرگان، دانشگاه آزاد اسلامی، کردکوی، ایران

سینا کاشانی MSc

گروه مهندسی مکانیک، مرکز کردکوی، واحد گرگان، دانشگاه آزاد اسلامی، کردکوی، ایران

چکیده

در این مقاله روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته برای تحلیل حساسیت مرتبه اول و دوم در مسایل جریان سیال معرفی می‌شود. برای حل معادلات ناویر-استوکس از روش المان محدود بهره گرفته و روش متغیرهای مختلط روی آن پیاده می‌شود. در روش متغیرهای مختلط از گام مختلطی که فقط شامل قسمت موهومی است استفاده می‌شود ولی در متغیرهای مختلط توسعه‌یافته از گام مختلطی که شامل قسمت موهومی و قسمت حقیقی است برای حصول کارایی بالاتر استفاده می‌شود. در محاسبه حساسیت مرتبه اول نتایج وابسته به اندازه گام نیستند ولی در حساسیت مرتبه دوم نتایج حساسیت وابسته به اندازه گام هستند و ناگزیر باید برای حصول دقت بالاتر از فرمول‌های توسعه‌یافته استفاده کرد. روش ارائه‌شده ابتدا برای یک مساله با حل دقیق اعتبارسنجی شده و نرخ همگرایی مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس برای جریان یکنواخت از روی یک سیلندر استوانه‌ای به کار گرفته و سرانجام نتایج با روش تفاضل محدود مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که محدوده طول گام همگرایی حساسیت مرتبه دوم در روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته نسبت به روش متغیرهای مختلط دوبرابر شده و تا ۱۰-۱۲ می‌توان آن را کاهش داد. این یعنی کارایی روش ارائه‌شده افزایش یافته است. روش معرفی‌شده برای طیف وسیعی از مسایل با پارامترهای ساده و پیچیده قابل کاربرد است.

کلیدواژه‌ها: تحلیل حساسیت مرتبه اول و دوم، روش اعداد مختلط توسعه‌یافته، معادلات ناویر-استوکس، روش المان محدود

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۱/۳۰

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۷/۱۵

* نویسنده مسئول: m.hassanzadeh@kordkuyiau.ac.ir

۱- مقدمه

آنالیز حساسیت یک ابزار نسبتاً جدید و قدرتمند در دینامیک سیالات محاسباتی است. حساسیت (مشتق تابع نسبت به یک پارامتر طراحی) نشان می‌دهد که چگونه یک متغیر وابسته نسبت به تغییرات پارامتر طراحی واکنش نشان می‌دهد و کاربردهای وسیعی از جمله استخراج الگوریتم‌های بهینه‌سازی^[1, 2]، ارزیابی سریع جریان‌های نزدیک یا تخمین عدم قطعیت حل^[3] دارد. همچنین حساسیت در کنترل جریان با توجه به توانایی‌های خود در یافتن پاسخ جریان نسبت به تغییرات پارامتر طراحی، کاربرد پیدا می‌کند. برای محاسبه حساسیت می‌توان از روش‌هایی چون روش تفاضل محدود، روش تحلیل حساسیت پیوسته^[4, 5]، روش تحلیل حساسیت گسسته^[6, 7] و روش متغیرهای مختلط (CVM)^[8, 9] بهره برد. اخیراً روش متغیرهای مختلط با توجه به مزایای خود مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است.

روش متغیرهای مختلط اولین بار توسط لینس و مولر^[10] و لینس^[11] توسعه داده شد. اسکوتر و ترب^[12] با بهره‌گیری از CVM مشتقات توابع حقیقی را تعیین کردند. در زمینه هوافضا مارتینز و همکاران^[13] از حلگر CVM در سازه‌های هوایی سه‌بعدی به‌منظور تعیین حساسیت برای بهینه‌سازی طراحی استفاده کردند. همچنین مارتینز و همکاران^[14]، CVM را برای محاسبه (تعیین) حساسیت

در دینامیک سیالات محاسباتی دو‌بعدی به کار گرفتند. کیل/ندرسون و همکاران^[9] از CVM برای تعیین مشتقات حساسیت برای جریان‌های توربولانس استفاده کردند. رودریگز^[15] از روش متغیرهای مختلط به‌منظور به‌دست‌آوردن گرادیان‌های مورد نیاز در الگوریتم بهینه‌سازی، برای بهینه‌سازی غیرخطی کوپله با معادلات ناویراستوکس جریان برای طراحی دریچه ورودی هواپیما استفاده کرده است. حسن روش متغیرهای مختلط برای محاسبه حساسیت مرتبه اول این است که وابسته به اندازه گام نیست و وقتی به‌درستی مورد استفاده قرار گیرد، مشتقات طراحی را با دقت مطلوب نتیجه می‌دهد^[16].

تقریب گام مختلط در اکثر کاربردهای مهندسی تنها برای مشتقات مرتبه اول استخراج و استفاده شده است. استخراج تقریب مشتق مرتبه دوم با استفاده از گام مختلط موهومی سرراست بوده، اما این روش برای اندازه گام کوچک با خطاهای گردکردن مواجه است، زیرا همانند روش تفاضل محدود خطاهای ناشی از تفریق وجود دارد. وقتی اندازه گام افزایش یابد، دقت محاسبات به‌علت خطای برش کاهش می‌یابد. کاهش اندازه گام، دقت را تا یک نقطه بهینه افزایش می‌دهد و کاهش بیشتر دقت را به‌دلیل خطای گردکردن از بین می‌برد. از این رو بایستی بین خطای گردکردن و خطای برش در محاسبه حساسیت مرتبه دوم، توازن برقرار نمود.

روش مرسوم برای استخراج مشتقات مرتبه اول با استفاده از بسط سری تیلور با گام مختلط فقط موهومی انجام می‌شود. این گام مختلط توسط لای و کراسیدیسی^[17] با گام مختلط کلی جایگزین شده است. عدد مختلط با توابع مثلثاتی به‌وسیله رابطه اویلر مرتبط می‌شود. بنابراین سری تیلور مختلط را می‌توان بر حسب زاویه نیز بسط داد. برای استخراج مشتقات مرتبه اول و دوم در یک مطالعه^[17]، جفت سری تیلورهایی به کار گرفته شد که اختلاف 180° با یکدیگر دارند، تا روابط با دقت بالاتر برای تحلیل حساسیت به دست آید. همانند مشتق مرتبه اول با روش متغیرهای مختلط مرسوم، تقریب جدید به‌دست‌آمده نیز فاقد خطای گردکردن است، اما خطای برشی بهتری دارد، ولی مشتق مرتبه دوم ارائه‌شده تقریب بهتری را برای خطای گردکردن ارائه می‌دهد. فرمول‌های استخراج‌شده تاکنون برای کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار نگرفته‌اند. از این رو هدف مقاله حاضر، به‌کارگرفتن این فرمول‌ها برای کاربرد مهندسی و به‌طور خاص در معادلات ناویر-استوکس است.

در این مقاله کاربرد جدیدی برای بسط روش متغیرهای مختلط برای محاسبه حساسیت مرتبه اول و دوم با دقت بالا در جریان‌های لایه‌ای تراکم‌ناپذیر پایا ارائه می‌شود. رژیم جریان با استفاده از روش المان محدود غیرخطی مدل می‌شود و سپس با استفاده از روش متغیرهای توسعه‌یافته برای مثال‌هایی، حساسیت مرتبه اول و دوم، محاسبه و سپس با دیگر روش‌های متداول برای اندازه گام‌های مختلط مقایسه می‌شود. از ویژگی‌های بارز این فرمول‌ها، سادگی پیاده‌سازی و قابل‌اعتمادبودن آن در محاسبه حساسیت‌ها، عدم وابستگی به المان استفاده‌شده و وابستگی کمتر به اندازه گام برای مشتق مرتبه دوم است.

۲- معادلات ناویراستوکس

رژیم جریان برای سیال تراکم‌ناپذیر به‌وسیله معادلات مومنوم و پیوستگی مدل می‌شود^[18].

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u = -\nabla P + f + \nabla \cdot [2\mu \gamma(u)] \quad (1)$$

$$\int_{\Omega^e} \left(w_y \rho_0 \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial w_y}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_y}{\partial y} P - \rho_0 w_y f_y \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_y t_y ds = 0$$

در این عبارت، (t_x, t_y) مولفه‌های تنش‌های مرزی (ترکشن) هستند.

$$t_x = \left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - P \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_y \quad (۱۲)$$

$$t_y = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_x + \left(2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - P \right) n_y \quad (۱۳)$$

و (n_x, n_y) کسینوس‌های هادی بردار نرمال یک $\hat{n}$ روی Γ^e مرزی هستند.

متغیرهای وابسته (P, v_x, v_y) را در نظر بگیرید که با شکل زیر تقریب زده می‌شوند:

$$v_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x, y) v_x^m(t) \quad (۱۴)$$

$$v_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x, y) v_y^m(t) \quad (۱۵)$$

$$P(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(x, y) P_n(t) \quad (۱۶)$$

در این معادلات ψ و ϕ تابع‌های میان‌یابی (یا شکل) هستند و (P_n, v_x^m, v_y^m) اندازه‌های گرهی (P, v_x, v_y) هستند. تابع‌های وزنی (w_x, w_y, Q) رابطه‌های زیر را دارند:

$$Q \approx P, w_x \approx v_x, w_y \approx v_y \quad (۱۷)$$

جایگزینی معادله ۱۷-۱۴ در معادله ۹-۱۱ منجر به تشکیل معادلات محدود ۱۸ می‌شود.

$$\begin{bmatrix} [C(v)] & [0] & [0] \\ [0] & [C(v)] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_x\} \\ \{v_y\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2[S^{xx}] + [S^{yy}] & [S^{yx}] & -[S^{x0}] \\ [S^{xy}] & [S^{xx}] + 2[S^{yy}] & -[S^{y0}] \\ -[S^{x0}]^T & -[S^{y0}]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_x\} \\ \{v_y\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ [0] \end{Bmatrix}$$

ضرایب ماتریس‌ها که در معادله ۱۸ نشان داده شده است، با عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij}^e(v) = \int_{\Omega^e} \rho_0 \psi_i^e \left(v_x \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy$$

$$S_{ij}^{\zeta\eta} = \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} dx dy; \zeta, \eta = x, y$$

$$S_{ij}^{\zeta 0} = \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \zeta} \phi_j^e dx dy; \zeta, \eta = x, y$$

$$F^1 = \int_{\Omega^e} \rho_0 \psi_i^e f_x dx dy + \oint_{\Gamma^e} \psi_i^e t_x ds$$

$$F^2 = \int_{\Omega^e} \rho_0 \psi_i^e f_y dx dy + \oint_{\Gamma^e} \psi_i^e t_y ds$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (۲)$$

که ρ چگالی، u سرعت، p فشار، μ ویسکوزیته، t زمان، $\gamma(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$ تانسور نرخ برشی و f نیروی حجمی است. معادلات ۱ و ۲ با شرایط اولیه:

$$u(x, t = 0) = U_0(x) \quad \text{in } \Omega \quad (۳)$$

و شرایط مرزی نیومن و دیریکله:

$$u(x, t) = U_D(x, t) \quad \text{on } \Gamma_D \quad (۴)$$

$$t = [-pI + 2\mu\gamma(u)] \cdot \hat{n} = F^N \quad \text{on } \Gamma_N \quad (۵)$$

کامل می‌شوند که U_0 مقادیر اولیه سرعت روی دامنه Ω ، U_D مقادیر سرعت اعمالی روی مرز Γ_D ، I تانسور واحد، $\hat{n}$ بردار هادی و F^N مقادیر نیروی ترکشن سطحی t روی مرز Γ_N هستند.

۳- مدل المان محدود فشار-سرعت

روش المان محدود مبتنی بر این ایده است که هر سیستمی از لحاظ فیزیکی از اجزای مختلفی تشکیل شده است و از این رو حل آن می‌تواند برای آن اجزا بیان شود.

انتگرال وزنی معادلات ۱ و ۲ روی یک المان نوعی Ω^e برای مساله دوبعدی به‌صورت زیر نوشته می‌شود [18]:

$$\int_{\Omega^e} Q \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (۶)$$

$$\int_{\Omega^e} w_x \left\{ \rho_0 \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_0 f_x \right\} dx dy = 0$$

$$\int_{\Omega^e} w_y \left\{ \rho_0 \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \rho_0 f_y \right\} dx dy = 0$$

در این معادله‌ها $(Q$ و $w_x, w_y)$ تابع‌های وزنی هستند که در مدل‌های المان محدود ریتز-گلرکین به‌ترتیب برابر تابع‌های میان‌یابی برای (P, v_x, v_y) هستند. در این معادلات (f_x, f_y) مولفه‌های برداری نیروی حجمی هستند. معادله ۶ بدون تغییر باقی می‌ماند، چون انتگرال جزء به جزء، هیچ کمکی برای کاهش مرتبه دیفرانسیلی (v_x, v_y) نمی‌کند. علاوه بر آن، شرایط مرزی به‌دست‌آمده در تضاد شرایط مرزی فیزیکی است. توضیحات مشابهی برای عبارت اول در معادله‌های ۷ و ۸ به کار می‌رود. انتگرال‌گیری جزء به جزء این امکان را می‌دهد که متغیر فشار تقریب مرتبه پایین‌تری را داشته باشد. عبارت‌های پایانی برای شکل‌های ضعیف به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [18]:

$$\int_{\Omega^e} Q \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (۹)$$

$$\int_{\Omega^e} \left(w_x \rho_0 \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_x}{\partial x} P - \rho_0 w_x f_x \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_x t_x ds = 0$$

برخی کاربردها از حساسیت خروجی که در بهینه‌سازی طراحی مطرح می‌شود، به شرح زیر خلاصه می‌شود:

(الف) با استفاده از سری تیلور مرتبه اول تغییرات y وقتی که بردار متغیر مستقل x به میزان کوچکی منحرف شود، به سرعت تقریب زده می‌شود. حساسیت خروجی می‌تواند برای ساخت مدل جایگزین از تابع اصلی به کار گرفته شود که به لحاظ محاسباتی ارزان‌تر اجرا می‌شود.

(ب) ∇y و $-\nabla y$ به ترتیب دلالت بر جهت حداکثر کاهش یا افزایش y دارد. بنابراین حساسیت می‌تواند در روش جست‌وجوی مبتنی بر گرادین به کار گرفته شود.

(ج) زمانی که x به عنوان یک بردار صفر- میانگین تصادفی با ماتریس همبستگی C مدل می‌شود، در این حالت حساسیت مرتبه اول می‌تواند برای تقریب آمار y طبق رابطه مقابل $\langle y \rangle = \nabla y C \nabla y^T$ ، احتمال وقوع عملگر است.

در ادامه روش‌های متنوعی که در آن حساسیت ممکن است به صورت جبری یا تجزیه و تحلیل تابعی محاسبه شود، بررسی می‌شود. مزایا و معایب روش‌های مختلف شرح داده و دستورالعملی برای انتخاب مناسب‌ترین روش برای حل مسایل فراهم شده است.

۴-۱- روش تفاضل محدود

یک روش معمول و قابل فهم برای تخمین مشتقات، استفاده از روش تفاضل محدود است. تقریب تفاضل محدود برای مشتقات با کوتاه کردن بسط سری تیلور از تابع $y=f(x)$ نسبت به نقطه x به دست می‌آید. برای مشتق گرفتن در تقریب تفاضل محدود، بسط سری تیلور را با تابع اسکالر $f(x+h)$ در نظر بگیرید:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots \quad (21)$$

تقریب تفاضل محدود پیشرو برای مشتق اول با حل معادله قبلی برای df/dx به دست می‌آید:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) \quad (22)$$

خطای برش برای تقریب تفاضل محدود پیشرو $O(h)$ است، لذا این تقریب مرتبه اول به شمار می‌آید. به منظور کاهش خطای برش باید تعدادی از معادلات اضافی با بسط سری تیلور $f(x-h)$ به صورت زیر وارد شوند:

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots \quad (23)$$

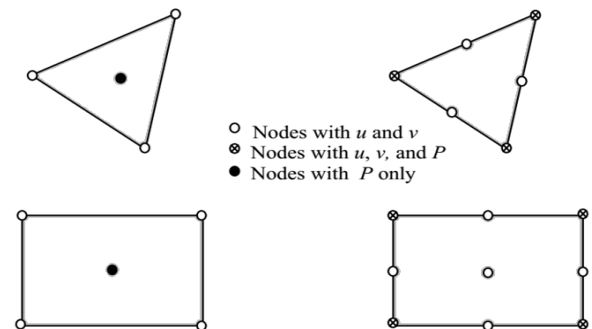
تفریق رابطه ۲۱ از ۲۳ و حل df/dx ، تقریب تفاضلی مرکزی را به شکل زیر نشان می‌دهد:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (24)$$

می‌توان نشان داد که روش تفاضل مرکزی از دقت مرتبه دوم برخوردار است، زیرا که خطای برشی از مرتبه دوم است. اما این روش مستلزم استفاده از دوبار ارزیابی تابعی بوده که برای تقریب تفاضل پیشرو مورد نیاز است. به طور مشابه این امکان برای ساختن فرمول تفاضل محدود در مرتبه‌های بالاتر وجود دارد. تقریب تفاضل محدود برای مشتقات مرتبه بالاتر را می‌توان با مشتق‌گیری از فرمول مرتبه‌های پایین‌تر به دست آورد. به عنوان مثال تقریب تفاضل مرکزی در رابطه ۲۵ می‌تواند برای تخمین مشتق مرتبه دوم طبق رابطه زیر به کار گرفته شود:

دو المان مختلف مربوط به دو مجموعه از متغیرهای میدان (v_x, v_y) و P وجود دارد، بنابراین دو شبکه المان متفاوت، مطابق با دو متغیر در همان محدوده Ω وجود دارد.

میان‌یابی مورد استفاده برای متغیر فشار باید متفاوت از میان‌یابی باشد که برای سرعت‌ها به کار می‌رود. چون شکل‌های ضعیف در معادلات ۹-۱۱، صرفاً دارای مشتق‌های اول سرعت‌های v_x و v_y بوده است و هیچ مشتقی از فشار P را شامل نمی‌شود. علاوه بر آن شرایط مرزی اساسی در این فرمول‌بندی شامل مشخصه‌های فشار نیست، بلکه شرایط مرزی به عنوان بخشی از شرایط طبیعی وارد می‌شود. المان‌هایی که برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر ویسکوز مورد استفاده قرار می‌گیرند، باید شرایط LBB را ارضا کنند. المان‌های معمول مورد استفاده برای جریان‌های دو بُعدی سیالات تراکم‌ناپذیر ویسکوز در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ المان‌های مثلثی و چهارضلعی مورد استفاده برای مدل‌های المان محدود

۴-۲- تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت دارای اهمیت اساسی در طراحی بوده که منطبق بر رویکرد محاسباتی است. آنالیز حساسیت، امکان استفاده از روش گرادین نزولی برای یافتن طرح بهینه و تشخیص این که کدام متغیر در هر مرحله از فرآیند طراحی از اهمیت بیشتری برخوردار است، را می‌دهد. یک مدل ریاضی گسسته مربوط به یک سیستم فیزیکی را در نظر بگیرید که به شکل $R(x, w) = 0$ نوشته می‌شود که $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}^T$ مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل طراحی را نشان می‌دهد و w بردار متغیر حالت است. در عمل، شکل گسسته معادلات حاکم معمولاً به وسیله گسسته‌سازی زمانی و مکانی از سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی کویله‌ای به دست می‌آید که از مکانیک محیط پیوسته منتج می‌شود، اگر چه چنین فرضی در آن چه به شرح زیر می‌آید، لازم نیست. در زمینه تجزیه و تحلیل حساسیت می‌توان هم با فرم پیوسته و هم با فرم گسسته معادلات حاکم کار کرد. اگر چه به منظور ساده‌سازی ارایه و تعمیم‌دادن موضوع، عمده بحث در این بخش با تمرکز روی معادلات گسسته حاکم ادامه می‌یابد. فرض مقدار خروجی مورد نظر به صورت تابع $y=f(x, w)$ توصیف می‌شود. به عنوان مثال y در مسایل طراحی می‌تواند تابع هدفی که می‌بایست کمینه شود یا قیدی که باید ارضا شود، در نظر گرفته شود. تحلیل حساسیت را از این پس می‌توان به عنوان محاسبات k امین مرتبه مشتق جزئی y نسبت به بردار متغیر مستقل x تعریف کرد. در بسیاری از مسایل عملی، مشتق مرتبه اول کمیت مورد نظر بوده که در معادله ۲۰ نشان داده شده است.

$$\nabla y = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_p} \right\} \in R^p \quad (20)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Im[f(x+ih)]}{h} + O(h^2) \quad (30)$$

تقریب معادله ۳۰، تخمین مشتق مرتبه اول $\mathcal{L}$ را با $O(h^2)$ می‌دهد. بر خلاف روش تفاضل محدود، تقریب بالا برای مشتق مرتبه اول مواجه با خطای ازدست‌رفتن ارقام بامعنی نیست، زیرا که درگیر عملیات تفریق قرار نمی‌گیرد. این مهم‌ترین برتری روش تقریب با گام مختلط بر روش تقریب تفاضل محدود بوده، زیرا مشکل انتخاب اندازه گام به‌طور موثری حل شده است. در تئوری می‌توان به‌طور دلخواه اندازه گام h را خیلی کوچک انتخاب کرد، بدون این که خطایی در دقت محاسبات ایجاد شود. در اینجا شایان ذکر است استفاده از ۲۸ تقریب برای مشتق مرتبه دوم به‌صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2(f(x) - \Re[f(x+ih)])}{h^2} + O(h^2) \quad (31)$$

معادله ۳۱ مواجه با خطای تفریق در صورت کسر معادله بوده، بنابراین دقت این تقریب متأثر از میزان گام h در معادله ذکرشده است.

۴-۳- روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته

همان‌طور که در قسمت ۴-۲ ذکر شد، معادله ۳۱ به گام اختلال وابسته است. لای و کر/سیدیس^[17] فرمولی با دقت مرتبه بالاتر برای حساسیت مرتبه اول و دوم استخراج کرده‌اند، ولی در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار نگرفته است. شکل ۲، بردار یک مختلط را برای زوایای مختلف (ضربیبی از 15°) نشان می‌دهد. با استفاده از روابط مرسوم در جبر مختلط می‌توان این بردارها را به شکل $i^{p/q} = e^{i\theta}$ و با زاویه فاز $\theta = (p/q)90 = (p/2q)\pi$ نوشت. بسط سری تیلور با دو گام مختلط که اختلاف π با هم دارند، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x + e^{i\theta}h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{ni\theta} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (32)$$

$$(33)$$

$$f(x + e^{i(\theta+\pi)}h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{ni(\theta+\pi)} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

توجه شود که $e^{i(\theta\pm\pi)} = -e^{i\theta}$. به‌جای نمایش گام مختلط به‌صورت توانی i یا نمایشی می‌توان آن را با استفاده از روابط اوایلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ به‌صورت مثلثاتی نشان داد. با جمع و تفریق دو رابطه ۳۲ و ۳۳، روابط ۳۴ و ۳۵ حاصل می‌شود.

$$(34)$$

$$f(x + e^{i\theta}h) + f(x + e^{i(\theta+\pi)}h) = 2f(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\cos 2n\theta + i \sin 2n\theta] \frac{h^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x) \quad (35)$$

$$f(x + e^{i\theta}h) - f(x + e^{i(\theta+\pi)}h) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(2n-1)\theta + i \sin(2n-1)\theta] \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(x)$$

برای کارایی بیشتر، فقط قسمت موهومی را در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$(36)$$

$$\Im(f(x + e^{i\theta}h) + f(x + e^{i(\theta+\pi)}h)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\theta \frac{h^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{df(x+h)/dx - df(x-h)/dx}{2h} + O(h^2) \quad (25)$$

با جای‌گذاری فرمول‌های مربوط به $df(x+h)/dx$ و $df(x-h)/dx$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2} + O(h) \quad (26)$$

یکی از ویژگی‌های جذاب تقریب تفاضل محدود این است که محاسبات شبیه‌ساز $\mathcal{L}$ می‌تواند به‌عنوان جعبه سیاه در نظر گرفته شود و فقط لازم است آن را در یک مجموعه انتخاب‌شده از نقاط اجرا کرد. هزینه محاسباتی به مرتبه تقریب بستگی دارد و به‌صورت خطی با تعداد متغیرهای طراحی افزایش می‌یابد. به‌صورت تئوری، دقت تقریب وابسته به خطای برشی است. این بدان معنی است که به‌طور دلخواه می‌توان خطای تقریب را کوچک کرد، در صورتی که اندازه گام‌ها به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند. در عمل به‌خاطر محدودیت دقت حسابی (خطای گردکردن)، دقت تقریب به‌شدت وابسته به اندازه گام h است. به عبارت دیگر، تقریب تفاضل محدود برای مشتق‌گیری به‌علت خطاهای برشی و گردکردن می‌تواند غیردقیق باشد.

خطای برش به‌خاطر چشم‌پوشی از ترم‌های بسط سری تیلور به وجود می‌آید. این در حالی است که خطای گردکردن را می‌توان به‌صورت اختلاف بین ارزیابی مقدار عددی تابع و مقدار واقعی آن توصیف کرد. برای این که از دقت تقریب در مشتقات اطمینان حاصل کنیم، به‌حداقل رساندن خطای ترکیبی (خطای برش و خطای گردکردن) مورد نیاز است و این منجر به مشکل معروف اندازه گام می‌شود. در ابتدا نیاز به انتخاب اندازه گامی داریم که خطای برش را به حداقل برساند. همزمان اندازه گام انتخاب‌شده نباید آن قدر کوچک باشد که منجر به خطای ازبین‌رفتن ارقام بامعنی شود. در عمل نشان داده شده است که با کاهش اندازه گام، خطای تقریب هم کاهش پیدا می‌کند تا آنجایی که اندازه گام به نقطه بحرانی برسد و پس از آن، خطای تقریب دوباره رو به افزایش می‌رود.

۴-۲- روش متغیرهای مختلط

روش متغیرهای مختلط، روش مشتق‌گیری عددی است که از نظر مفهوم شبیه تفاضل محدود است، اما مزایای قابل توجهی دارد. برای شرح روش متغیر مختلط، خروجی تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید که تابع تحلیلی با متغیر مختلط اسکالر x است. با در نظر گرفتن این فرضیات، $\mathcal{L}$ را می‌توان با بسط سری تیلور حول نقطه حقیقی x طبق رابطه زیر به دست آورد:

$$(27)$$

$$f(x + ih) = f(x) + ih \frac{df}{dx} - \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{ih^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots$$

توجه داشته باشید که سری تیلور در معادله ۲۷، معادل در نظر گرفتن اختلال مختلط ih (که $i = \sqrt{-1}$) به‌جای اختلال حقیقی بوده و در سری تیلور مرسوم در رابطه ۲۱ به کار رفته است. از این رو، این روش گاهی نیز تقریب با گام مختلط نامیده می‌شود. قسمت حقیقی و موهومی رابطه ۲۷ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\Re[f(x + ih)] = f(x) - \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + O(h^4) \quad (28)$$

$$\Im[f(x + ih)] = h \frac{df}{dx} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + O(h^5) \quad (29)$$

از تقسیم رابطه ۲۹ بر h ، مشتق مرتبه اول تابع f در نقطه x حاصل می‌شود:

قسمت‌های موهومی با یکدیگر جمع می‌شود. نکته جالب توجه این است که در فرمول‌های ۳۸ و ۳۹، مشتقات اول و دوم با دو بار شبیه‌سازی به دست می‌آید و دقت حساسیت مرتبه دوم از مرتبه چهارم است.

۴-۳-۲- حالت $\theta=60^\circ$

با جای‌گذاری $\theta=60^\circ$ در معادله ۳۶ و ۳۷ به دو رابطه زیر برای مشتقات اول و دوم می‌رسیم:

(۴۰)

$$f'(x) = \frac{\Im(f(x+i^{2/3}h)-f(x+i^{8/3}h))}{h\sqrt{3}}, \quad E_{trunc}(h) = \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x) \quad (۴۱)$$

$$f''(x) = \frac{\Im(f(x+i^{2/3}h)+f(x+i^{8/3}h))}{h\sqrt{3}}, \quad E_{trunc}(h) = \frac{h^2}{24}f^{(4)}(x)$$

همان طور که دیده می‌شود، رابطه مربوط به مشتق اول از دقت بالاتری نسبت به مشتق دوم برخوردار است. از آنجایی که مشتقات مرتبه اول شامل خطای تفریق نیست، ولی مشتقات دوم شامل خطای تفریق و برش هستند، می‌توان گفت که استفاده از فرمول‌های ۳۸ و ۳۹ برای محاسبه مشتقات ارجحیت دارد.

۵- نحوه اجرا

برای استفاده از روش گام مختلط، دسترسی به کد شبیه‌سازی لازم است که خود از عملیات متغیرهای مختلط استفاده نکند. برای این که روش متغیرهای مختلط در این نوع مسایل قابل اجرا باشد، می‌توان از یک شیوه اتوماتیک برای تولید کد اصلاح‌شده استفاده کرد که قادر است هم‌ارزش تابع و هم مشتق آن را فراهم کند. به غیر از واقعیت آشکار که شخص باید به کد منبع دسترسی داشته باشد، فرآیند تولید نسخه مختلط کد اصلی شامل مراحل زیر است:

- ۱- جایگزین کردن تمام متغیرهای حقیقی با متغیرهای مختلط
- ۲- تعریف تمام تابع‌ها و عملگرها که برای اعداد مختلط تعریف نشده باشد.

۳- استفاده از دامنه مختلط برای هر متغیر مستقل و محاسبه مشتق اجرای اولین مرحله در نرم‌افزار MATLAB سهل و آسان است، زیرا اعداد مختلط را به شکل داده‌های ورودی استاندارد می‌پذیرد. دقت نظر در مرحله دوم باید اعمال شود، زیرا تقریب گام مختلط با این فرض ناشی شده که تابع f تحلیلی است. از این رو مهم است وقتی تبدیل تابع‌ها و عملگرها به شکل مختلط مطرح می‌شود، اعتبار این فرضیه به دقت مورد آزمایش قرار گیرد.

۶- نتایج عددی

در این بخش، ابتدا روش‌های عددی با استفاده از حل مصنوعی اعتبارسنجی می‌شود. سپس برای جریان یکنواخت، یک سیلندر استوانه‌ای به کار گرفته شد. در مورد اعتبارسنجی از حل مصنوعی مشتق گرفته و عبارت دقیق برای حساسیت‌ها استفاده می‌شود و برای هر دو مورد، مطالعه گام و شبکه‌بندی برای ارزیابی همگرایی شبکه، دقت حل جریان و حساسیت‌ها انجام می‌گیرد. برای مورد دوم از حل تفاضل محدود برای اعتبارسنجی استفاده می‌شود.

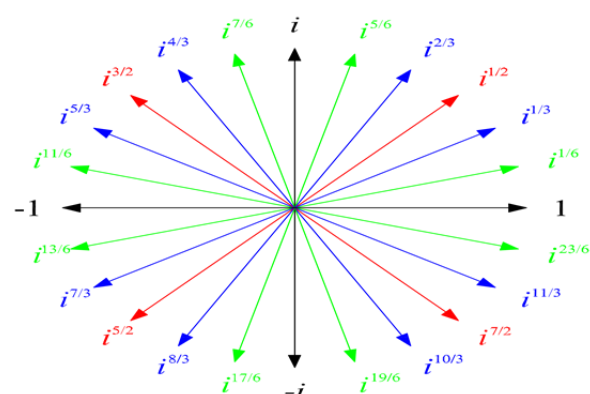
۶-۱- اعتبارسنجی

عبارت مصنوعی برای حل معادلات جریان به صورت معادله ۴۲ در نظر گرفته می‌شود:

$$u = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(ay) \\ \sin(bx) \end{Bmatrix} \quad (۴۲)$$

$$\Im(f(x+e^{i\theta}h)-f(x+e^{i(\theta+\pi)}h)) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n-1)\theta \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(x)$$

مشتقات مرتبه اول و دوم برای هر زاویه‌ای با گام مختلط با روابط ۳۶ و ۳۷ به دست می‌آید، اما زاویه مناسب θ برای استفاده کامل از قابلیت متغیرهای مختلط مورد نیاز است. با توجه به روابط ۳۶ و ۳۷ حالت‌هایی وجود دارد که برخی از $\sin$ ها صفر است. این حالت‌ها مطلوب هستند و باید از این مزیت استفاده کرد تا نرخ همگرایی تقریب سری تیلور افزایش یابد. در حقیقت این نکته، هدف اصلی محاسبات با متغیرهای مختلط است که با انتخاب درست زاویه می‌توان به روابط با دقت و کارایی بالا دست یافت. دو حالت $\theta=45^\circ$ و $\theta=60^\circ$ حالت‌های خاص هستند، زیرا ضرایب زیادی را در معادلات ۳۶ و ۳۷ نسبت به دیگر زوایا صفر می‌کنند.



شکل ۲) اعداد مختلط مختلف

۴-۳-۱- حالت $\theta=45^\circ$

از معادله ۳۶ و با $\theta=45^\circ$ به رابطه زیر می‌رسیم:

(۳۸)

$$f'(x) = \frac{\Im(f(x+i^{1/2}h)+f(x+i^{5/2}h))}{h^2}, \quad E_{trunc}(h) = \frac{h^4}{360}f^{(6)}(x)$$

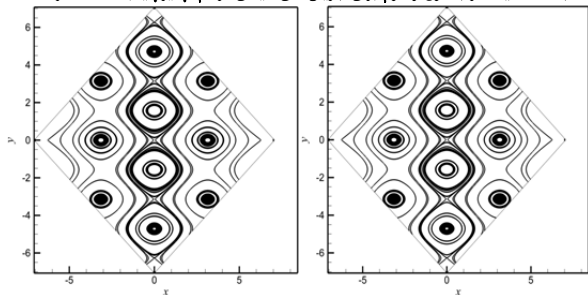
توجه شود هنگامی که $n=2$ مولفه‌های موهومی $\sin 2n\theta = 0$ بوده، بنابراین اولین مقدار غیرصفر برای $n=3$ اتفاق می‌افتد که منطبق بر $O(h^4)$ است. این تقریب هنوز مواجه با خطای تفریق بوده، اما خطای برشی آن $h^4 f^{(6)}/360$ بوده، در حالی که خطای متناظر با معادله ۳۱، $h^2 f^{(4)}/12$ است.

برای محاسبه مشتقات مرتبه اول و دوم با استفاده از معادلات ۳۰ و ۳۸ نیاز به محاسبه $f(x+ih)$ ، $f(x+i^{1/2}h)$ و $f(x+i^{5/2}h)$ است. برای به دست آوردن مشتق مرتبه اول با استفاده از $f(x+i^{1/2}h)$ و $f(x+i^{5/2}h)$ ، $\theta=45^\circ$ را در معادله ۳۷ می‌گذاریم و به رابطه ۳۹ می‌رسیم:

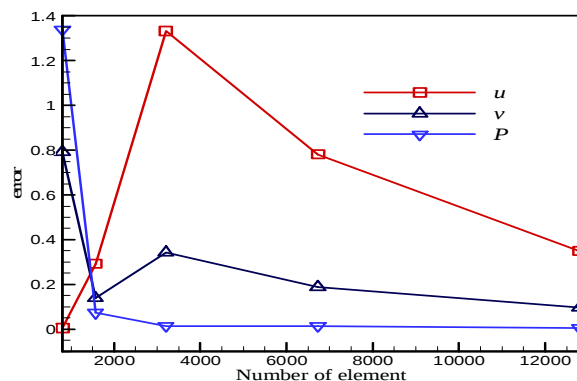
(۳۹)

$$f'(x) = \frac{\Im(f(x+i^{1/2}h)-f(x+i^{5/2}h))}{h\sqrt{2}}, \quad E_{trunc}(h) = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x)$$

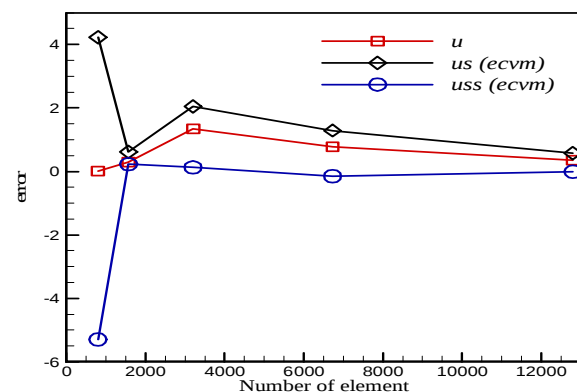
خطای معادله بالا برابر با خطای معادله ۳۰ است، از این رو به جواب‌های یکسانی خواهند رسید. اما معادله ۳۹ از همان توابع مورد استفاده در معادله ۳۸ استفاده می‌کند. معادله ۳۹ نیز همانند معادله ۳۰ شامل خطای تفریق نمی‌شود، زیرا $f(x+i^{1/2}h) - f(x+i^{5/2}h) = f(x+i^{1/2}h) - f(x-i^{1/2}h)$ و در واقع



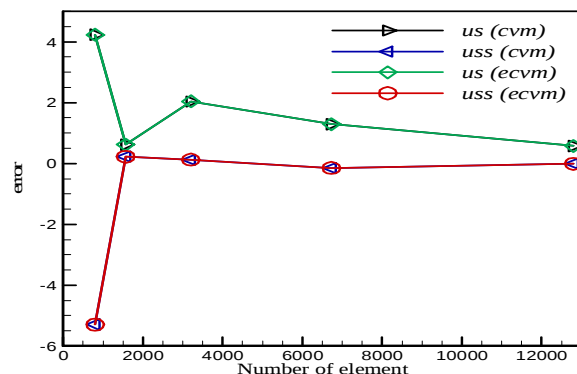
(الف) (ب)
شکل ۴ خطوط جریان در مساله اعتبارسنجی، الف) حل دقیق ب) حل عددی



نمودار ۱) همگرایی سرعت‌ها و فشار نسبت به تعداد المان در مساله اعتبارسنجی



نمودار ۲) همگرایی سرعت افقی و حساسیت‌های مرتبه اول و دوم آن نسبت به تعداد المان در مساله اعتبارسنجی u سرعت افقی، us حساسیت مرتبه اول و uss حساسیت مرتبه دوم است.



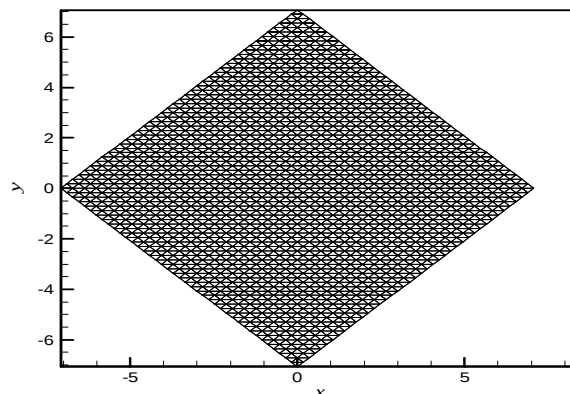
نمودار ۳) مقایسه حل و همگرایی حساسیت‌های مرتبه اول و دوم نسبت به تعداد المان با استفاده از روش متغیرهای مختلط و توسعه‌یافته در مساله اعتبارسنجی cvm روش متغیرهای مختلط مرسوم و ecvm روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته است.

$$P = x$$

از معادله بالا مشاهده می‌شود که دیورژانس جریان صفر است و این یعنی معادله پیوستگی با این میدان سرعت ارضا می‌شود. حال ترم‌های نیروهای حجمی به صورت زیر به دست می‌آید: (۴۳)

$$f = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u - \nabla \cdot [2\mu \gamma(u)] + \nabla P = \left\{ \begin{array}{l} \rho a \cdot \sin(bx) \cos(ay) + \mu a^2 \sin(ay) + 1 \\ \rho b \cdot \sin(ay) \cos(bx) + \mu b^2 \sin(bx) \end{array} \right\}$$

حسن معادله ۴۲، در سادگی آن و سهولت مشتق‌گیری برای به‌دست‌آوردن عبارت ۴۳ و نیز عبارت تحلیلی تحلیل حساسیت است. دامنه محاسباتی یک مربع به ضلع ۱۰ واحد بوده که در شکل ۳ نشان داده شده است. ρ ، μ و b واحد و a دو واحد در نظر گرفته شده است. برای محاسبه حساسیت‌ها به روش متغیرهای مختلط از معادلات ۳۰، ۳۱، ۳۸ و ۳۹ استفاده می‌شود. حساسیت‌ها نسبت به پارامتر a در نقطه $(x, y) = (2, 2)$ محاسبه می‌شوند. خط جریان مربوط به حل دقیق و حل به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی برای مقایسه در شکل ۴ رسم شده است. تطابق خوبی بین دو حل دیده می‌شود. همگرایی جریان نسبت به تعداد المان و همگرایی حساسیت‌های مرتبه اول و دوم نسبت به تعداد المان و اندازه گام انجام می‌گیرد. درصد خطای نسبی جریان و حساسیت‌ها نسبت به تعداد المان‌ها در نمودارهای ۱ و ۲ آمده است. در نمودار ۲ از روش متغیرهای توسعه‌یافته برای محاسبه حساسیت استفاده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، بین خطای سرعت افقی و حساسیت آن تناظر یک‌به‌یک وجود دارد، یعنی جایی که خطای سرعت کم بوده، خطای حساسیت نیز کم است و بالعکس. همچنین هر دو وابسته به تعداد المان‌ها هستند. در نمودار ۳، مشتق مرتبه اول و دوم سرعت افقی با دو روش متغیرهای مختلط مرسوم و توسعه‌یافته رسم شده و نشان‌دهنده آن است که روش توسعه‌یافته همانند روش مرسوم، قابلیت محاسبه مشتقات را با دقت بالا دارد. از نمودارها می‌توان مشاهده کرد که مقدار درصد خطای نسبی ناچیز است. از آنجایی که سرعت عمودی نسبت به a ثابت و مشتقات آن صفر بوده، بنابراین از رسم آن اجتناب شده است. همگرایی حساسیت‌ها نسبت به طول گام مساله برای شبکه‌بندی با تعداد ۶۷۲۸ المان در نمودار ۴ رسم شده است. همان طور که انتظار می‌رفت هر دو روش برای محاسبه حساسیت مرتبه اول در اندازه گام کوچک با خطا مواجه نمی‌شوند، اما برای حساسیت مرتبه دوم روش متغیرهای مختلط مرسوم در طول گام کوچک، خطای زیادی را از خود نشان می‌دهد، ولی روش توسعه‌یافته در همان طول گام نتایج درستی را به دست آورده است.



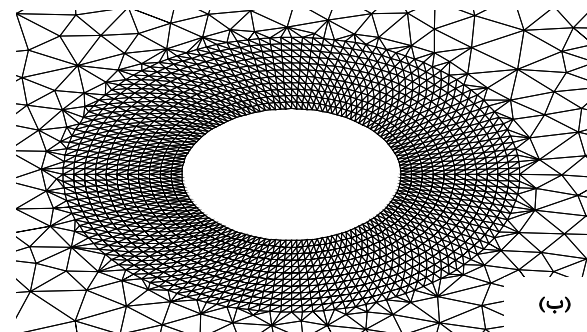
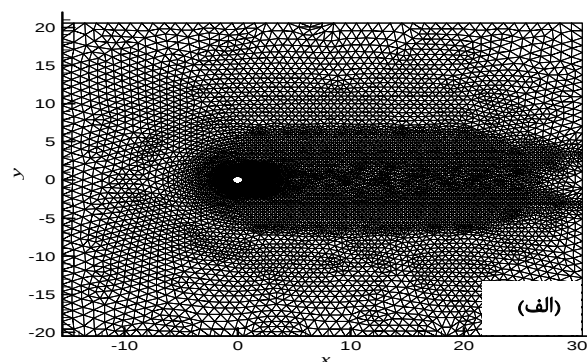
شکل ۳) شبکه و دامنه محاسباتی برای مساله اعتبارسنجی (۳۲۰۰ المان)

به تغییر کوچک در ورودی داریم که در این مثال سرعت ورودی است. این تغییر کوچک که گام نامیده می‌شود، در روش متغیرهای مختلط به صورت مختلط به سرعت ورودی داده می‌شود یعنی:

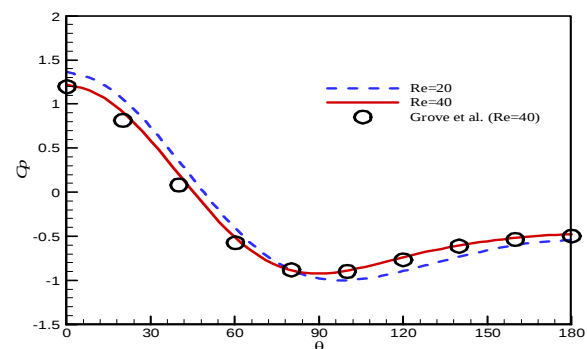
$$U_0 = U_0 + i^n h \quad (44)$$

که U_0 سرعت ورودی، i برابر با $\sqrt{-1}$ و h گام (یا اختلال) و n در روش متغیرهای مختلط مرسوم، ۱ و در توسعه یافته ۱/۲ است. در جدول ۲ حساسیت مرتبه اول برای گام‌های مختلف با استفاده از روش‌های مختلف از جمله روش تفاضل محدود برای اعتبارسنجی آمده است.

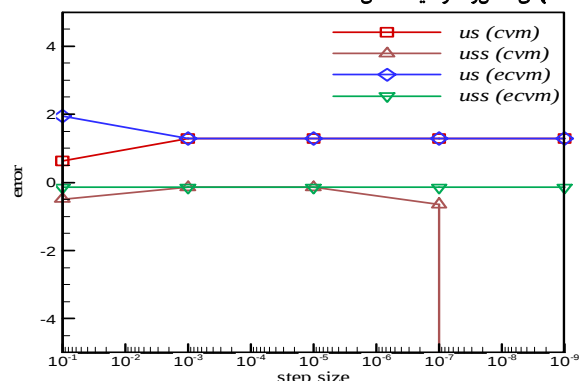
حساسیت محاسبه شده با روش متغیرهای مختلط تطابق خوبی با روش تفاضل محدود دارد. همان طور که دیده می‌شود، روش متغیرهای مختلط، حساس به گام‌های کوچک نبوده است و با استفاده از این دو روش در بازه بزرگی می‌توان به نتایج قابل قبول و پایدار رسید. در این مثال، روش تفاضل محدود هم در بازه نسبتاً بزرگی به جواب‌های با دقت رسیده است، البته در گام‌های بزرگ‌تر هر سه روش جواب‌های قابل قبولی را ارائه می‌دهند و وابستگی کمتری به خطای برش دارند.



شکل ۵) شبکه و دامنه محاسباتی برای عبور جریان از یک سیلندر استوانه‌ای، (الف) شبکه محاسباتی (ب) نمایی بزرگ‌تر از هندسه اطراف سیلندر



نمودار ۵) عبور جریان از یک سیلندر استوانه‌ای: مقایسه‌ی ضریب فشار محاسبه شده، در طول سطح سیلندر با نتایج آزمایشگاهی گرو و همکاران [19] برای $Re=40$



نمودار ۴) مقایسه همگرایی حساسیت‌های مرتبه اول و دوم نسبت به اندازه گام با استفاده از روش متغیرهای مختلط و توسعه یافته در مساله اعتبارسنجی cvm روش متغیرهای مختلط مرسوم و ecvm روش متغیرهای مختلط توسعه یافته است.

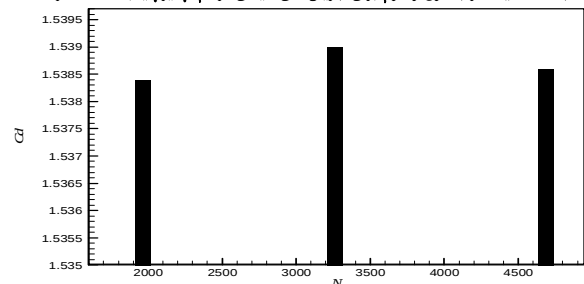
۶-۲- عبور جریان از یک سیلندر استوانه‌ای با اعداد رینولدز پایین

جریان دو بُعدی عبور سیال تراکم‌ناپذیر از یک سیلندر استوانه‌ای را در نظر بگیرید. هدف از این مثال محاسبه حساسیت‌های سرعت‌ها، فشار و ضریب پسا (C_D) نسبت به سرعت ورودی است. به عبارت دیگر میزان تغییر سرعت‌ها و ضریب پسا در اثر تغییر سرعت ورودی مورد مطالعه است.

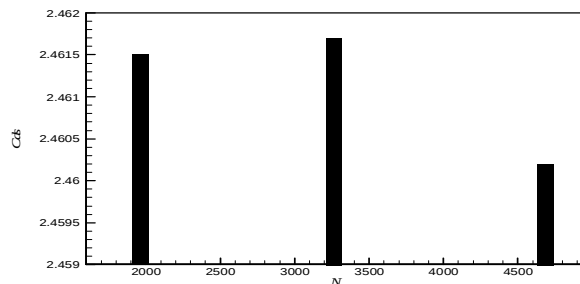
قطر سیلندر واحد بوده است و در ناحیه محدود $\Omega = [-20.5, 20.5] \times [-15.5, 30.5]$ واقع می‌شود. مرکز سیلندر در $(x, y) = (0, 0)$ قرار دارد. بنابراین مرز جریان در $10/5$ قطر سیلندر در قسمت چپ یا جلوی مرکز سیلندر واقع می‌شود و مرز جریان بیرونی در $30/5$ قطر سیلندر و جریان پایین‌دست مرکز سیلندر قرار دارد. هر کدام در مرزهای بالا و پایینی در $20/5$ قطر سیلندر در بالا و پایین مرکز سیلندر واقع می‌شوند. با داشتن دامنه محاسباتی بزرگ مجازیم تا شرایط مرزی جریان آزاد را در بالا و پایین این دامنه بدون تأثیرات قابل توجه روی جواب تحمیل کنیم. شرایط مرزی شامل یک اندازه مشخص $1/0$ برای مولفه سرعت x در جریان ورودی، مرزهای بالا و پایین است. سرعت جریان آزاد u_∞ بوده که واحد تعیین شده است. در این مرزها مولفه سرعت y ، صفر قرار داده می‌شود. شرایط مرزی جریان خروجی شرایط آزاد هستند. اعداد رینولدز مورد توجه در اینجا ۲۰ و ۴۰ هستند که برای آنها یک حل حالت پایدار وجود دارد. اعداد رینولدز براساس سرعت جریان آزاد و قطر سیلندر تعیین می‌شوند.

شبکه‌بندی المان محدود شامل ۷۰۲۶ المان محدود (شکل ۵) بوده و همچنین یک نمای نزدیک از گسسته‌سازی هندسه در اطراف سیلندر نشان داده شده است. برای ارایه دقیق‌تر قوس استوانه، تقریب یکسانی برای هندسه و حل (یعنی فرمول‌بندی ایزوپارامتری) به کار رفته و تعداد درجه آزادی مساله، ۳۲۱۷۷ است. نمودار ۵، ضرایب فشار سطح محاسبه شده در طول سطح سیلندر برای رینولدز ۲۰ و ۴۰ را با اندازه‌های آزمایشگاهی گرو و همکاران [19] نشان می‌دهد. نتایج المان محدود با اندازه‌های آزمایشگاهی بسیار مطابقت دارند. ضریب پسا برای رینولدز ۲۰ و ۴۰ در جدول ۱ آورده شده است. تطابق بسیار خوبی بین ضریب پسای محاسبه شده و نتایج آزمایشگاهی تربیتون [20] وجود دارد. شکل ۶ کانتور فشار محاسبه شده و خطوط جریان را در پشت استوانه برای رینولدز ۴۰ و ۲۰ نشان می‌دهد.

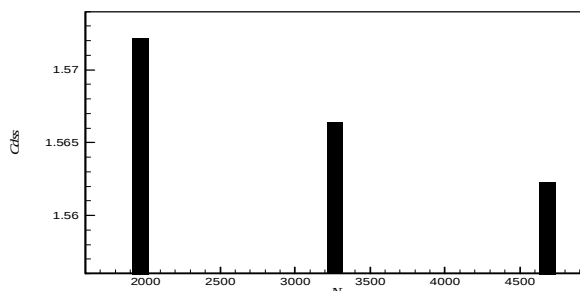
برای محاسبه حساسیت‌ها به روش متغیرهای مختلط از معادلات ۳۰، ۳۱، ۳۸ و ۳۹ استفاده می‌کنیم. برای محاسبه حساسیت نیاز



نمودار ۶) نمودار مقدار ضریب پسا بر حسب تعداد المان



نمودار ۷) نمودار حساسیت مرتبه اول ضریب پسا بر حسب تعداد المان



نمودار ۸) نمودار حساسیت مرتبه دوم ضریب پسا بر حسب تعداد المان

جدول ۳) مقایسه حساسیت مرتبه دوم ضریب پسا نسبت به سرعت ورودی برای جریان عبوری از روی یک سیلندر استوانه‌ای در عدد رینولدز ۴۰

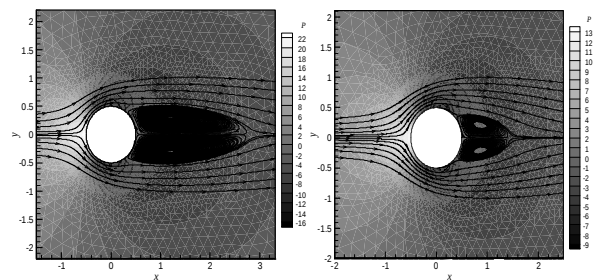
گام	روش متغیر مختلط	روش متغیر مختلط توسعه‌یافته	روش تفاضل محدود
۱/۰۰E-۰۲	۱/۵۷۲۲	۱/۵۷۲۲	۱/۵۷۲۲
۱/۰۰E-۰۴	۱/۵۷۲۲	۱/۵۷۲۲	۱/۵۷۲۲
۱/۰۰E-۰۶	۱/۵۶۹۴	۱/۵۷۲۲	۱/۵۷۴۵
۱/۰۰E-۰۸	-۱۷/۷۶۴	۱/۵۷۲۲	۱۷/۷۶۴
۱/۰۰E-۱۰	-۱/۷۸E-۰۵	۱/۵۷۲۲	۲/۶۶E-۰۵
۱/۰۰E-۱۲	-۱/۷۸E-۰۹	۱/۵۷۱۴	۳/۷۷E-۰۹
۱/۰۰E-۱۴	-۲/۲۲E-۱۳	۱/۶۰۹۳	۲/۴۴E-۱۳

۷- نتیجه گیری

با توجه به اهمیت طراحی بهینه، شناسایی پارامترهای بهینه و دیگر کاربردها در مهندسی استفاده از تحلیل حساسیت لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله ابتدا رژیم جریان با روش المان محدود، مدل‌سازی شد و سپس تحلیل حساسیت مرتبه اول و دوم در مسایل مربوط به سیالات برای رژیم جریان پایا مورد مطالعه قرار گرفت. برای محاسبه تحلیل حساسیت مرتبه اول و حساسیت مرتبه دوم از روش متغیرهای مختلط توسعه‌داده‌شده، استفاده و برای مثال به کار بسته شده است. نتایج نشان می‌دهد رژیم جریان با روش المان محدود به‌درستی و با دقت بالا مدل شده و تحلیل حساسیت‌ها نیز با دیگر روش‌ها همخوانی داشته و از دقت بالایی

جدول ۱) مقایسه ضریب پسا محاسبه‌شده با استفاده از کد نوشته‌شده و مرجع [20]

درصد اختلاف نسبی	مطالعه حاضر	نتایج آزمایشگاهی مرجع	Re
%۱/۷۵	۲/۰۸۵۸	۲/۰۵	۲۰
-%۰/۴۲	۱/۵۵۳۵	۱/۵۶	۴۰



(الف) (ب)

شکل ۶) عبور جریان از یک سیلندر استوانه‌ای برای $Re=20$ و $Re=40$ کانتور فشار و خطوط جریان پشت ناحیه کم‌فشار، (الف) $Re=20$ (ب) $Re=40$

جدول ۲) مقایسه حساسیت مرتبه اول ضریب پسا نسبت به سرعت ورودی برای جریان عبوری از روی یک سیلندر استوانه‌ای در عدد رینولدز ۴۰

گام	روش متغیر مختلط	روش متغیر مختلط توسعه‌یافته	روش تفاضل محدود
۱/۰۰E-۰۲	۲/۴۶۰۳	۲/۴۶۰۳	۲/۴۶۰۲
۱/۰۰E-۰۴	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲
۱/۰۰E-۰۶	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲
۱/۰۰E-۰۸	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲
۱/۰۰E-۱۰	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲
۱/۰۰E-۱۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۴
۱/۰۰E-۱۴	۲/۴۶۰۲	۲/۴۶۰۲	۲/۴۳۱۴

در نمودارهای ۸-۶، مقادیر جریان و حساسیت‌ها بر حسب تعداد المان‌ها رسم شده و نشان‌دهنده وابستگی مقادیر محاسبه‌شده به تعداد المان‌ها است، اما روند خاصی برای همگرایی مشاهده نمی‌شود. البته برای حساسیت مرتبه دوم، روند همگرایی دیده می‌شود، ولی با این وجود اختلاف نتایج ناچیز است.

حساسیت مرتبه دوم برای گام‌های مختلف با استفاده از روش متغیرهای مختلط، متغیرهای مختلط توسعه‌یافته و تفاضل محدود در جدول ۳ آمده است. حساسیت مرتبه دوم محاسبه‌شده با روش متغیرهای مختلط و متغیرهای مختلط توسعه‌یافته تطابق خوبی با روش تفاضل محدود دارد. مشاهده می‌شود که حساسیت مرتبه دوم در هر سه روش، حساس به گام‌های کوچک و بزرگ است. روش متغیرهای مختلط و تفاضل محدود تا طول گام 10^{-6} می‌تواند کوچک انتخاب شود، در صورتی که روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته تا طول گام 10^{-13} ، جواب‌های قابل قبولی را نشان می‌دهد. این یعنی از میان سه روش، روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته حساسیت کمتری نسبت به دو روش دیگر دارد و نتایج صحیح در بازه بزرگ‌تری حاصل می‌شود. با مقایسه نتایج عددی حساسیت مرتبه اول با مرتبه دوم دیده می‌شود که اندازه گام در دقت محاسبه حساسیت مرتبه دوم نسبت به حساسیت مرتبه اول تاثیر بیشتری دارد و حتی روش متغیرهای مختلط مورد استفاده در محاسبه حساسیت مرتبه دوم، مستقل از اندازه گام نیست و در هر دو خطای برش و گردکردن وجود دارد. واضح است که در روش تفاضل محدود، بازه گام مطمئن تقریباً نصف حالت حساسیت مرتبه اول است.

order sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2007;55(6):565-587.

5- Kyle Anderson W, Bonhaus DL. Airfoil design on unstructured grids for turbulent flows. *AIAA Journal*. 1999;37(2):185-191.

6- Liu G, Geier M, Liu Z, Krafczyk M, Chen T. Discrete adjoint sensitivity analysis for fluid flow topology optimization based on the generalized lattice Boltzmann method. *Computers & Mathematics with Applications*. 2014;68(10):1374-1392.

7- Wei Y, Zhao C, Yao Z, Hauret P, Li X, Kaliske M. Adjoint design sensitivity analysis and optimization of nonlinear structures using geometrical mapping approach. *Computers & Structures*. 2017;183:1-13.

8- Hassanzadeh M. Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method. *Modares Mechanical Engineering*. 2015;15(11):73-80. [Persian]

9- Kyle Anderson W, Newman JC, Whitfield DL, Nielsen EJ. Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables. *AIAA Journal*. 2001;39(1):56-63.

10- Lyness JN, Moler CB. Numerical differentiation of analytic functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1967;4(2):202-210.

11- Lyness JN. Numerical algorithms based on the theory of complex variable. *ACM '67 Proceedings of the 1967 22nd National Conference*, Washington DC, USA. ACM: New York; 1967. p. 125-133.

12- Squire W, Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Review*. 1998;40(1):110-112.

13- Martins JRR, Sturdza P, Alonso JJ. The complex-step derivative approximation. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2003;29(3):245-262.

14- Martins, Joaquim, Ilan Kroo, and Juan Alonso. An automated method for sensitivity analysis using complex variables. 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Jan 10-13, 2000, Reno NV, USA. Reston VA: Aerospace Sciences Meetings; 2000.

15- Rodriguez D. A multidisciplinary optimization method for designing inlets using complex variables. 8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Sep 6-8, 2000, Long Beach CA, USA. Reston VA: Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences; 2000.

16- Burg COE, Newman III JC. Computationally efficient, numerically exact design space derivatives via the complex Taylor's series expansion method. *Computers & Fluids*. 2003;32(3):373-383.

17- Lai KL, Crassidis JL. Extensions of the first and second complex-step derivative approximations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2008;219(1):276-293.

18- Reddy JN. An introduction to nonlinear finite element analysis: With applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. Oxford: OUP Oxford; 2014.

19- Grove AS, Shair FH, Petersen EE. An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 1964;19(1):60-80.

20- Tritton DJ. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. 1959;6(4):547-567.

در بازه بزرگی از گام‌ها برخوردار است. نتایج به صورت خلاصه به صورت زیر آمده است:

۱- برای حساسیت مرتبه اول، تمام روش‌های استفاده شده در بازه بزرگی از طول گام، نتایج بادقتی را نشان می‌دهند. روش تفاضل محدود از 10^{-4} تا 10^{-2} و دو روش دیگر از 10^{-2} کوچک‌تر، بدون محدودیت به جواب درست منتج می‌شود.

۲- حساسیت مرتبه دوم نسبت به مرتبه اول حساسیت بیشتری نسبت به طول گام دارد. روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته از 10^{-3} تا 10^{-2} و دو روش دیگر از 10^{-2} تا 10^{-1} به جواب درست منتهی می‌شود.

۳- برای محاسبه حساسیت مرتبه دوم، روش متغیر توسعه‌یافته در بازه بزرگ‌تری از گام‌ها نسبت به دیگر روش‌ها به جواب‌های صحیح منتهی می‌شود. در روش ارایه شده تا طول گام 10^{-1} ، ولی در دیگر روش‌ها تا طول گام 10^{-2} به پاسخ درست می‌رسیم.

۴- دقت حساسیت علاوه بر طول گام به تعداد المان‌ها یعنی دقت محاسبه خود متغیرهای اصلی نیز وابسته است.

۵- اگر هدف فقط محاسبه حساسیت مرتبه اول باشد، استفاده از روش متغیرهای مختلط توصیه می‌شود. زیرا تعداد شبیه‌سازی کمتری نسبت به توسعه‌یافته دارد و در عین حال دقتی معادل با آن دارد. ولی اگر علاوه بر محاسبه حساسیت مرتبه اول، محاسبه حساسیت مرتبه دوم نیز مورد نیاز باشد، استفاده از روش متغیرهای مختلط توسعه‌یافته ارجحیت دارد. زیرا با دوبار مدل‌سازی با متغیرهای مختلط، حساسیت‌های مرتبه اول و دوم را با دقت بالا نتیجه می‌دهند.

تشکر و قدردانی: نویسندگان این مقاله از معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد گرگان به علت حمایت مالی این پژوهش تشکر می‌نمایند.

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده است. ضمناً محتویات علمی و ادبی مقاله، منتج از فعالیت علمی خود نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج و متن مقاله برعهده نویسندگان مقاله است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با پایان‌نامه/رساله و طرح پژوهشی ندارد.

سهم نویسندگان: مهدی حسن‌زاده (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۸۰٪)؛ سینا کاشانی (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی (۲۰٪)

منابع مالی: این تحقیق با حمایت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد گرگان به انجام رسیده است.

منابع

- 1- Jahangiry HA, Jahangiri A. Topology optimization of heat conduction problem via Level-Set method and the finite elements analysis. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;16(12):703-710. [Persian]
- 2- Nakajima S, Kawahara M. Shape optimization of a body in compressible inviscid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;197(51-52):4521-4530.
- 3- Nouri R, Raisee M. Uncertainty quantification of electroosmotic flow in a microchannel. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;17(8):291-300. [Persian]
- 4- Ilinca F, Pelletier D, Borggaard J. A continuous second-