



A Theoretical Model for Evaporation of Leidenfrost Drop for Prediction of Vapor Layer Thickness under the Drop

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Mirzaparikhany S.¹ MSc,
Ansari M.R.*¹ PhD

How to cite this article

Mirzaparikhany S, Ansari M.R. A Theoretical Model for Evaporation of Leidenfrost Drop for Prediction of Vapor Layer Thickness under the Drop. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(4):969-979.

ABSTRACT

In this paper, a theoretical model is proposed for Leidenfrost droplet evaporation by solving the mass, momentum, and energy conservation equations. This model involves a set of four equations, of which the values of vapor layer thickness, evaporation rate on the lower surface of the drop, the volume of evaporating droplet, and temperature distribution in vapor layer are obtained. This set of equation is solved with Fortran code by the predictor-corrector method. The main unknown value in these equations is the vapor layer thickness, which is predicted in every step of simulation and corrected by the balance of forces that act on the drop. In this study, the upper surface of the drop, where contacts with air and the lower surface of droplet, where contacts with the vapor layer are predicted with high accuracy by solving the Young-Laplace equation. The vapor layer thickness obtained from the proposed model is compared with experimental data and encouraging agreement is observed.

Keywords Leidenfrost Drop; Droplet Evaporation Model; Vapor Layer Thickness

¹Mechanical Engineering Faculty, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Faculty, Tarbiat Modares University, Nasr Bridge, Jalal-Al-Ahmad Highway, Tehran, Iran
Phone: -
Fax: +98 (21) 82883363
mra_1330@modares.ac.ir

Article History

Received: May 31, 2018
Accepted: August 05, 2018
ePublished: April 06, 2019

CITATION LINKS

[1] Analytical and computational methodology for modeling spray quenching of solid alloy cylinders [2] The effects of spray characteristic on heat transfer during spray quenching of aluminum alloy 2024 [3] Heat transfer characteristics of water spray impinging on high temperature stainless steel plate with finite thickness [4] Heat transfer for Leidenfrost drops bouncing onto a hot surface [5] The contribution of non-wetting droplets to direct cooling of the fuel during PWR post-LOCA reflood [6] Droplets behavior impacting on a hot surface above the Leidenfrost temperature [7] Heat transfer of droplets impinging onto a wall above the Leidenfrost temperature [8] The Leidenfrost phenomenon: Film boiling of liquid droplets on a flat plate [9] Evaporation time of liquid droplet on superheating horizontal surface [10] A model for droplet evaporation near Leidenfrost point [11] A mathematical model of the Leidenfrost effect on an axisymmetric droplet [12] Prediction of vapor film thickness below a Leidenfrost drop [13] Leidenfrost effect: Accurate drop shape modeling and refined scaling laws [14] The Leidenfrost effect: From quasi-spherical droplets to puddles [15] Maximum size of drops levitated by an air cushion [16] Take off of small Leidenfrost droplets [17] Leidenfrost drops [18] Geometry of the vapor layer under a Leidenfrost drop [19] Effects of droplet diameter and fluid properties on the Leidenfrost temperature of polished and micro/nanostructured surfaces [20] Effects of droplet diameter on the Leidenfrost temperature of laser processed multiscale structured surfaces [21] Leidenfrost dynamics [22] An introduction to convective heat transfer analysis [23] Convective heat and mass transfer [24] Advanced fluid mechanics [25] Young-laplace equation in convenient polar coordinates and its implementation in matlab [26] Axisymmetric drop shape analysis: Computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops

مدل تئوری تبخیر قطره لیدن فراست برای محاسبه ارتفاع لایه بخار زیر قطره

ساناز میرزایی MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

محمدرضا انصاری PhD*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله با حل معادلات پیوستگی، بقای مومنتوم و انرژی مدلی برای تبخیر قطره لیدن فراست ارائه شده است. مدل تبخیر قطره یک دستگاه چهارمعدله‌ای است که با حل این معادلات، ارتفاع لایه بخار زیر قطره، شدت تبخیر قطره از سطح پایینی، حجم قطره حین تبخیر و توزیع دما در لایه بخار محاسبه می‌شود. این دستگاه معادله به روش پیش‌بینی، تصحیح و با استفاده از کد فترن حل می‌شود. مجهول اصلی این دستگاه معادله، ارتفاع لایه بخار است که در هر مرحله از شبیه‌سازی پیش‌بینی شده و با شرط تعادل نیروهای وارد بر قطره تصحیح می‌شود. در این مطالعه پروفیل سطح بالایی قطره که در تماس با هوا بوده و سطح پایینی قطره که در تماس با لایه بخار است با حل معادله یانگ-لاپلاس با دقت بالایی محاسبه می‌شوند. نتایج مدل تئوری ارائه‌شده با نتایج تجربی موجود در منابع تجربی مقایسه شده و توافق بسیار خوبی به دست آمده است.

کلیدواژه‌ها: قطره لیدن فراست، مدل تبخیر قطره، ارتفاع لایه بخار

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۱۴

*نویسنده مسئول: mra_1330@modares.ac.ir

۱- مقدمه

فرآیند خنک‌کاری سطح داغ با قطرات آب یا هوایی که شامل قطرات آب است، در صنایع کاربرد زیادی دارند. قطرات آب، انرژی مورد نیاز تبخیرشان را از سطح داغ می‌گیرند و باعث خنک‌کاری سطح مورد نظر می‌شوند. اما وقتی دمای سطح از دمای جوش مایع بیشتر می‌شود، بلافاصله بعد از برخورد قطره به سطح داغ، قسمتی از مایع سریعاً تبخیر و فیلمی از بخار زیر قطره، تشکیل و قطره روی این لایه بخار شناور می‌شود. به دلیل پایین بودن ضریب انتقال حرارت هدایتی فیلم بخار، انتقال حرارت از سطح داغ به قطره کاهش می‌یابد، در نتیجه تبخیر قطره کندتر می‌شود و قطره مدت‌زمان بیشتری روی سطح باقی می‌ماند. این حالت، پدیده لیدن فراست نامیده می‌شود. پدیده لیدن فراست در خنک‌کاری سطوح داغ و شکل‌های مرکب آلیاژی [1-3]، خنک‌کاری میله سوخت رآکتور آب فشرده (PWR) در حادثه نبود آب خنک‌کاری (LOCA) [4-6]، تبخیر قطرات سوخت تزریق‌شده در محفظه احتراق [7] و خنک‌کاری بخار سوپرهییت ورودی توربین رخ می‌دهد.

طبق مشاهدات تجربی، پروفیل قطره و سطح زیرین آن با توجه به اندازه قطره متفاوت خواهد بود. قطره با اندازه بزرگ‌تر به‌صورت پادل روی سطح داغ پخش می‌شود و سطح پایینی قطره دارای تقعر به سمت بالا است. قطره کوچک‌تر به‌صورت کروی با سطح زیرین صاف و قطره با اندازه بسیار کوچک به‌صورت کروی روی لایه بخار شناور می‌ماند. در مطالعات تئوری انجام‌شده در رابطه با قطره لیدن فراست استاتیک، قطره به‌صورت کروی یا قطره کروی با سطح زیرین صاف تقریب زده شده است.

گاتفر و همکاران [8] برای تبخیر قطرات کوچک آب، تئوریک‌رایدکربن، اتانول و اکتان نرمال روی صفحه داغ فولادی در دماهای بالای لیدن فراست، مدل تحلیلی ارائه کرده و نتایج مدل را با کار تجربی‌شان مقایسه کرده‌اند. در این مدل، تئوری قطره به‌صورت

کروی مدل شده و انتقال حرارت هدایتی و تشعشعی در نظر گرفته شده است. همچنین تبخیر قطره از سطح پایینی و دیفیوژن جرم از سطح بالایی قطره نیز در نظر گرفته شده است. موسی و حنفی [9] نیز تبخیر یک قطره مایع روی سطح با دمای بالای لیدن فراست را به‌صورت تحلیلی مدل کرده و رابطه‌ای برای زمان تبخیر قطره و شدت انتقال حرارت قطره به دست آورده و با نتایج تجربی مقایسه کرده‌اند. در این تحلیل، قطره مایع بسیار کوچک است، به‌گونه‌ای که روی سطح داغ به‌صورت کروی با سطح زیرین صاف قرار می‌گیرد. انتقال حرارت از طریق هدایت از سطح داغ به قطره، منتقل و از تبخیر قطره به دلیل تشعشع و نفوذ جرم صرف نظر می‌شود. در مطالعه خی و زو [10]، فرآیند تبخیر قطره بعد از برخورد به سطح داغ بالای دمای لیدن فراست به‌صورت تئوری تحلیل شده است. در این مطالعه از تبخیر قطره در لحظه برخورد صرف نظر شده است و مدل انتقال حرارت در دو مرحله پس‌زنی و حالت کروی مدل می‌شود. شعاع تماس ماکزیم اولیه نیز از روابط تئوری محاسبه می‌شود. در این مدل فرض بر آن است که قطره بعد از برخورد به‌صورت یک استوانه روی لایه بخار شناور می‌شود و به دلیل وزن قطره، بخار در لایه جریان می‌یابد. زمان عمر قطره به‌صورت تابعی از عدد وبر، دمای سطح و قطر قطره، محاسبه و با نتایج تجربی مقایسه می‌شود.

میسیرس و چارپین [11]، قطره لیدن فراست متقارن با دمای ثابت و لایه بخار پایدار نازک (با تقریب بدون اصطکاک) را به‌صورت تئوری مدل کرده‌اند. در این مطالعه، سطح پایینی قطره که عمده تبخیر قطره از این قسمت رخ می‌دهد، صاف فرض می‌شود و شکل سطح بالایی قطره توسط معادله یانگ-لاپلاس تعیین می‌شود. در سطح پایینی قطره در حال تبخیر نیز با حل معادله بقای مومنتوم (با صرف نظر از نیروی اینرسی بخار)، پیوستگی و تعادل نیروهای وارد بر سطح مشترک قطره و بخار، تغییرات حجم قطره با زمان به دست می‌آید. در این مطالعه، تبخیر از سطح بالایی قطره نیز در نظر گرفته می‌شود. به‌خصوص برای حالتی که قطره، حالت کروی دارد، مقدار تبخیر از سطح بالایی در مقایسه با تبخیر از سطح پایینی قابل صرف نظر نیست. با توجه به این که تبخیر قطره روی سطحی رخ می‌دهد که اندازه سطح با زمان کاهش می‌یابد، بنابراین در طول زمان، شدت کاهش حجم قطره نیز کاهش می‌یابد. در این مطالعه، انتقال حرارت در لایه بخار همراه با شرط سرمایش بخار روی سطح داغ و استفاده از ضریب انتقال حرارت محدودی بین بخار و سطح داغ حل می‌شود و توزیع دما در لایه بخار به دست می‌آید. با استفاده از معادله استفان، شدت تبخیر قطره از سطح پایینی و حجم قطره حین تبخیر به دست می‌آید.

در مطالعه داسگوپتا و همکاران [12] با تعادل نیروهای وارد بر قطره، ضخامت لایه بخار زیر قطره لیدن فراست ساکن پیش‌بینی می‌شود. در این مطالعه، نیروی مومنتوم بخار خروجی از سطح پایینی قطره نیز در نظر گرفته می‌شود. برای سرعت شعاعی بخار در سطح مشترک قطره و بخار، دو فرض سرعت صفر و تنش صفر در سطح مشترک در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این مطالعه، قطره به‌صورت پیوسته تغذیه می‌شود تا این که مقدار مایع در قطره با زمان تغییر نکند. البته این یک ساده‌سازی است که در گام اول تحلیل مساله پیچیده برخورد قطره تبخیرشونده در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه، سطح پایینی قطره نیز صاف فرض می‌شود و برای جریان بخار در فیلم نازک زیر قطره، فرض بدون اصطکاک مورد استفاده قرار می‌گیرد. نیروهای وارد بر قطره نیروی گرانش به دلیل وزن قطره، نیروی فشاری در لایه بخار و نیروی

شدت تغییرات اندازه قطره و ضخامت لایه بخار نیز اندازه‌گیری شده است. *بیانس و همکاران*^[17]، ضخامت لایه بخار تشکیل شده زیر قطره لیدن فراست و شدت تبخیر قطره برای شعاع‌های مختلف قطره را اندازه‌گیری و توابعی را برای داده‌های تجربی، برازش کرده‌اند. در این مطالعه، قطره آب ساکن روی سطح داغ دورآلومین 300°C ، به‌صورت پیوسته تغذیه می‌شود تا اندازه آن طی تبخیر روی سطح داغ ثابت بماند. با تغییر شدت تغذیه قطره، شعاع قطره نیز تغییر می‌کند. با این آزمایش، شدت تبخیر قطره برای اندازه‌های مختلف نیز مشخص می‌شود. تغییر شعاع قطره حین تبخیر روی سطح داغ و زمان تبخیر کامل قطره نیز در این مطالعه به دست آمده و مشاهده شده است که شعاع قطره حین تبخیر کاهش می‌یابد و در انتهای مرحله تبخیر که قطره شکل کروی دارد، تغییرات شعاع سریع‌تر می‌شود. در این مطالعه، تغییرات ضخامت لایه بخار حین تبخیر قطره نیز اندازه‌گیری شده است.

شعاع، انحنا و ارتفاع لایه بخار زیر قطره لیدن فراست در دماهای مختلف سطح داغ با استفاده از نور لیزر اینترفرنس همراه با تصاویر سرعت بالا توسط *بورتون و همکاران*^[18] اندازه‌گیری شده است. در این مطالعه، ارتفاع گردنی لایه بخار، شعاع گردنی برای دماهای مختلف سطح داغ که شار بخار متفاوتی دارند، شعاع انحنا در مرکز لایه بخار، شعاع انحنای شعاعی گردنی و همچنین اختلاف ارتفاع مرکز و گردنی لایه بخار برای اندازه‌های مختلف قطره اندازه‌گیری شده است.

در این مقاله، در گام اول با استفاده از تحلیل مرتبه بزرگی نیروهای وارد بر قطرات با اندازه‌های مختلف، مقیاس شعاعی پروفیل‌های متفاوت قطره لیدن فراست به دست آمده است. سپس یک مدل تئوری برای تبخیر قطره لیدن فراست استاتیک ارائه شده و برای صحت‌سنجی مدل ارائه شده، ارتفاع لایه بخار زیر قطره لیدن فراست با نتایج تجربی مقایسه شده است. در این مدل تئوری، پروفیل قطره لیدن فراست با استفاده از حل معادله یانگ-لاپلاس محاسبه شده است. این امر باعث شده است تا سطح پایینی قطره لیدن فراست و سطح بالایی آن به‌درستی محاسبه شود. در این مدل، تبخیر قطره لیدن فراست و کاهش جرم آن در معادله پیوستگی و تاثیر جابه‌جایی حرارت روی توزیع دما در لایه بخار نیز در نظر گرفته شده است.

حرارت منتقل شده از سطح داغ به قطره لیدن فراست از طریق لایه بخار تشکیل شده زیر قطره صورت می‌گیرد. بنابراین ضخامت این لایه بخار و پروفیل آن، تعیین‌کننده شدت تبخیر قطره است. برای قطره لیدن فراست با اندازه‌های متفاوت، ارتفاع لایه بخار زیر قطره و پروفیل آن متفاوت خواهد بود و قطره حین تبخیر، ضریب انتقال حرارت متغیری را تجربه خواهد کرد. تغییرات ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بخار زیر قطره لیدن فراست حین تبخیر نیز با استفاده از نتایج مدل به دست آمده است.

۲- شرح مساله

قطره مایعی به‌آرامی روی سطح داغ با دمای بالاتر از دمای جوش مایع قرار می‌گیرد. به‌دلیل دمای بالای سطح، بلافاصله قسمتی از قطره که در تماس با سطح داغ است، به‌سرعت تبخیر و لایه بخاری زیر قطره تشکیل می‌شود. انتقال حرارت به قطره از طریق این لایه بخار صورت می‌گیرد. به‌دلیل پایین‌بودن انتقال حرارت هدایتی بخار، انتقال حرارت از سطح داغ به قطره کاهش می‌یابد و قطره مدت‌زمان بیشتری روی لایه بخار شناور می‌شود که این حالت پدیده لیدن فراست نام گرفته است. در واقع، حالت لیدن فراست

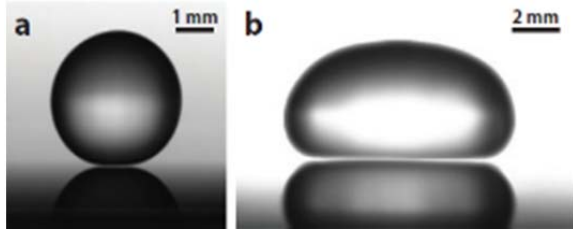
عکس‌العملی سرعت بخار است که با تعادل این نیروها روی قطره، ضخامت لایه بخار به دست می‌آید. طبق مشاهدات تجربی، سطح پایینی قطره صاف نبوده و مقعر است، بنابراین ضخامت فیلم مطالعه حاضر، یک مقدار متوسطی را برای ضخامت لایه بخار بیان می‌کند که همواره بزرگ‌تر از ضخامت لایه‌هاست.

در مطالعه *سویاک و همکاران*^[13]، پروفیل لایه بخار قطرات کوچک تا بزرگ به‌صورت تئوری محاسبه می‌شود. حد پایین اندازه قطره مورد مطالعه با حالت بالاپریدن قطره و حد بالای اندازه قطره با تشکیل حباب‌های بخار محدود است. به‌دلیل این که زمان تبخیر قطره در مقایسه با زمان لزجی و حرارتی بزرگ‌تر است، تنها شکل پایای قطره با تقریب بدون اصطکاک در این مطالعه در نظر گرفته می‌شود. برای بررسی قطره لیدن فراست در حالت پایا، دو ناحیه متفاوت روی قطره را در نظر گرفته‌اند. در سطح بالایی قطره، فشار هیدرواستاتیک و موئینگی در حال تعادل بوده و در سطح پایینی قطره که ناحیه لایه بخار است، تاثیر ناپایای تبخیر و افت فشار لزجی در جریان لایه بخار در نظر گرفته می‌شود. با صرف نظر از حرکات ممکن داخل قطره، با تعادل نیروی وزن قطره و نیروی کشش سطحی وارد به سطح پایینی قطره، فشار در لایه بخار و جریان استوکسی ناشی از این فشار در لایه بخار را محاسبه کرده و با استفاده از شار تبخیر محلی در سطح مشترک، رابطه‌ای برای ضخامت فیلم بخار و انحنای سطح مشترک که با شعاع قطره تغییر می‌کند را به دست آورده‌اند.

پومو و همکاران^[14]، قوانین مقیاسی پدیده لیدن فراست را بررسی کرده و معادلات محاسبه پروفیل سطح پایینی قطره و توزیع فشار در لایه بخار را برای قطرات کوچک تا پادل‌های بزرگ به دست آورده‌اند. در این مطالعه، اندازه قطره مورد مطالعه به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری که حین تبخیر نزدیک سطح باقی بماند و از روی سطح بالا نپرد. با این فرض طول لایه بخار در مقایسه با ارتفاع لایه بخار بسیار بزرگ‌تر است و می‌توان از تقریب بدون اصطکاک در لایه بخار استفاده کرد. قطره با اندازه‌های کوچک تا بزرگ در چهار رژیم کروی، شبه‌کروی، قطرات بزرگ و پادل لیدن فراست بررسی می‌شود و مجموعه‌ای از دو معادله کوپل برای ارتفاع لایه بخار و توزیع فشار در لایه بخار برای این چهار رژیم به دست می‌آید. در این مطالعه، شدت تبخیر قطرات و زمان تبخیرشان در رژیم‌های مختلف نیز بررسی شده است.

سنویچر و همکاران^[15] محدودیت شدت جریان کم در لایه بخار که اندازه لایه بخار بین قطره و سطح داغ بسیار کوچک می‌شود را بررسی کرده و یک توضیح تحلیلی برای حالت قطره لیدن فراست استاتیک و پایداری آن به دست آورده‌اند. در این مطالعه، شعاع بحرانی که در آن دودکش گازی زیر قطره لیدن فراست ایجاد شده و باعث متلاشی شدن قطره می‌شود به دست آمده است. *سلستینی و همکاران*^[16] رفتار قطره لیدن فراست در مراحل نهایی تبخیرشان را به‌صورت تجربی و تئوری بررسی کرده‌اند. طبق مشاهدات تجربی حین تبخیر قطره روی لایه بخار، وقتی اندازه قطره از یک مقدار بحرانی کمتر می‌شود، وزن قطره برای مقابله با فشار در لایه بخار سبک‌تر می‌شود و قطره از روی لایه بخار بالا می‌پرد. با تبخیر قطره و کوچک‌تر شدن آن، ارتفاع پریدن قطره نیز بیشتر می‌شود. در این مطالعه، با استفاده از قوانین مقیاسی، مقیاس شعاعی بالاپریدن قطرات لیدن فراست نیز به دست آمده است.

در مطالعات تجربی انجام شده روی قطره لیدن فراست استاتیک، ضخامت لایه بخار تشکیل شده زیر قطره و شعاع این لایه بخار برای اندازه‌های مختلف قطره لیدن فراست و همچنین شدت تبخیر قطره،



شکل ۳) پروفیل قطره لیدن فراست استاتیک بزرگ و کوچک [21]

مقیاس شعاعی تخمین پروفیل قطره: برای به دست آوردن مقیاسی که بتوان پروفیل قطره را با توجه به اندازه آن تخمین زد، از تحلیل اندازه مرتبه بزرگی [22] استفاده می‌شود. بدین منظور، قطره‌ای به جرم M را در نظر بگیرید که لایه بخار پایداری بین قطره و سطح داغ تشکیل می‌شود. معادلات حاکم بر لایه بخار زیر قطره لیدن فراست، معادلات پیوستگی، بقای مومنتوم و انرژی [23] هستند که به روش آنالیز مرتبه بزرگی و با در نظر داشتن این که قطره متقارن بوده و ارتفاع لایه بخار در مقایسه با شعاع قطره بسیار کوچک است، به صورت زیر ساده می‌شوند [22]:

$$\rho_v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \dot{m}_{\text{evap}}''' \quad (1)$$

$$\rho_v \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_v g \quad (3)$$

$$\rho_v c_{p,v} \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k_v \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4)$$

رابطه بین سرعت شعاعی و عمودی در لایه بخار از رابطه پیوستگی جریان بخار در لایه (معادله ۱) به دست می‌آید [24]. طول افقی لایه بخار l و ضخامت آن h است:

$$\frac{u}{l} \sim \frac{w}{h} \quad (5)$$

به دلیل گرادیان فشار افقی در لایه بخار، بخار در لایه جریان می‌یابد. مرتبه بزرگی گرادیان فشار با استفاده از معادله بقای مومنتوم افقی در لایه بخار و با صرف نظر از اینرسی جریان در لایه بخار (معادله ۲) به دست می‌آید [24]:

$$\frac{\partial P}{l} \sim \mu_v \frac{u}{h^2} \quad (6)$$

فرض می‌شود که حرارت جابه‌جایی در لایه بخار در انتقال حرارت از سطح داغ به قطره تأثیری ندارد و انتقال حرارت به قطره فقط توسط هدایت از طریق لایه بخار صورت می‌گیرد. با استفاده از شرط استفان، شدت تبخیر قطره از سطح پایینی قطره و مرتبه بزرگی آن به دست می‌آید:

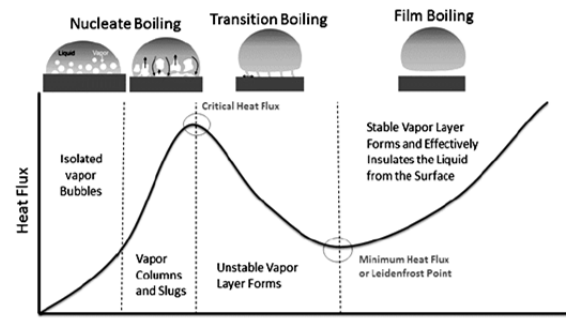
$$\rho_v w L_q = -k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} \quad (7)$$

$$k_v \frac{\partial T}{h} \sim \rho_v w L_q \quad (8)$$

∂T اختلاف دمای قطره و سطح داغ و L_q گرمای نهان تبخیر قطره است. با استفاده از روابط ۵ و ۸ در رابطه ۶، مرتبه بزرگی گرادیان فشار در لایه بخار به دست می‌آید:

$$\partial P \sim \frac{\mu_v k_v \partial T}{\rho_v L_q} \frac{l^2}{h^4} \quad (9)$$

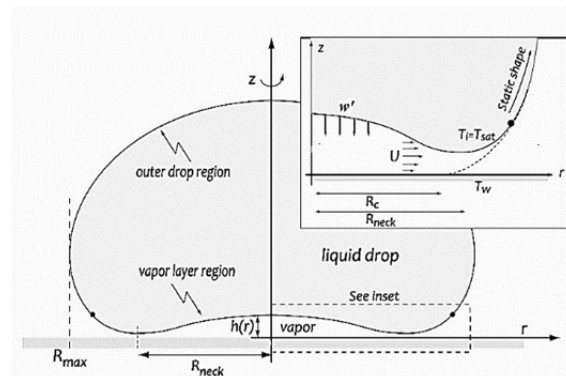
نقطه انتقال حرارت کمینه بوده و به لحظه نخست تشکیل لایه بخار پایدار زیر تمامی سطح پایینی قطره مربوط است. در شکل ۱، شماتیک رشد حالت لیدن فراست قطره روی سطح داغ نشان داده شده است. با انتقال حرارت از سطح داغ به قطره مایع، حباب‌های بخار ناهمگن به صورت ناهمزمان روی سایت‌های هسته‌زایی فعال سطح رشد می‌کنند. با افزایش شار حرارتی، شدت تولید بخار و چگالی، احتمال تولید حباب‌های بخار افزایش می‌یابد و یک پاکت بخار بزرگ روی سطح ایجاد می‌شود. در این لحظه، قطره توسط این لایه بخار از سطح داغ جدا می‌شود و جوشش فیلمی اتفاق می‌افتد [19, 20].



شکل ۱) شماتیک رشد حالت لیدن فراست قطره روی سطح داغ [19]

عمده تبخیر قطره لیدن فراست از طریق انتقال حرارت هدایتی توسط لایه بخار، از سطح پایینی قطره صورت می‌گیرد که این سطح، لیدن فراست نامیده می‌شود. سطح بالایی قطره نیز در معرض تبخیر بوده، اما شدت آن نسبت به سطح پایینی کمتر است. با تبخیر قطره و کوچک‌تر شدن آن، سطح لیدن فراست کوچک‌تر می‌شود و عمده تبخیر قطرات کروی از طریق کل سطح قطره صورت می‌گیرد. شماتیک قطره لیدن فراست به شعاع R_{max} در حالت شبه پایا که روی لایه بخار با ضخامت غیریکنواخت $h(r)$ شناور بوده، در شکل ۲ نشان داده شده است. لایه بخار توسط یک باریکه حلقوی به شعاع R_{neck} احاطه شده است و به دلیل تبخیر مایع با شدت w' از سطح زیرین قطره، جریان شعاعی بخار با سرعت U به سمت بیرون در لایه بخار ایجاد می‌شود [14].

در مشاهدات تجربی، پروفیل متفاوتی برای قطره لیدن فراست با اندازه شعاع کوچک و بزرگ گزارش شده است (شکل ۳). قطره با اندازه کوچک‌تر به صورت کره با سطح زیرین صاف روی لایه بخار قرار می‌گیرد و قطرات با اندازه‌های بزرگ‌تر به صورت پادل روی سطح داغ پخش می‌شوند [21].



شکل ۲) شماتیک قطره لیدن فراست در حالت شبه پایا [13]

برای قطره‌ای که حین تبخیر کروی باقی می‌ماند، فشار لزجی در مقایسه با فشار لاپلاسی در قطره قابل نظر بوده $\ll \partial P$ σ/R و مرتبه بزرگی شعاع قطره $R_c \ll R$ است.

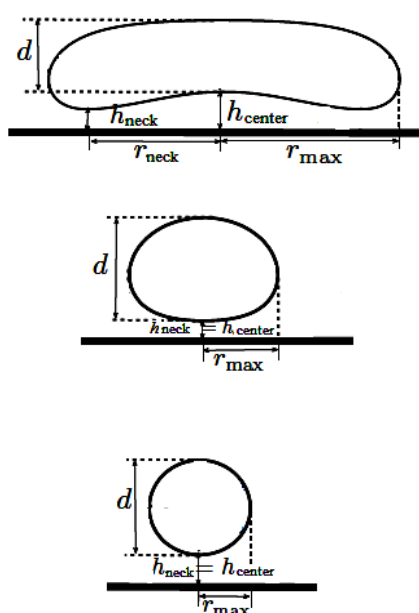
برای قطره آب در دمای 100°C با چگالی $958/4\text{Kg/m}^3$ ضریب کشش سطحی $58/9\text{mN/m}$ و گرمای نهان تبخیر $2/676 \times 10^6\text{J/Kg}$ که روی سطح داغی با دمای 300°C قرار دارد، ویژگی‌های بخار در لایه در دمای متوسط 200°C محاسبه می‌شوند. ضریب هدایت $0/3328\text{W/mK}$ ، لزجت بخار $1/618 \times 10^{-6}\text{Ns/m}^2$ و چگالی بخار $0/4665\text{Kg/m}^3$ است. بنابراین شعاع‌های مشخصه چنین قطره‌ای به‌صورت زیر است:

$$R_c \equiv \left(\frac{\sigma}{\rho_l g} \right)^{1/2} = 2.5\text{mm}$$

$$R_l \equiv (R_c^4 R_l^3)^{1/7} = 0.321\text{mm}$$

$$R_l \equiv \left(\frac{\mu_v k_v \partial T}{\rho_v \rho_l g L_q} \right)^{1/3} = 20.9\mu\text{m}$$

طبق مشاهدات تجربی برای اندازه بزرگ‌تر از اندازه بحرانی $(R_{\max} \sim 4R_c)$ ، یک حباب بخار (یا برای قطرات بزرگ‌تر، چندین حباب بخار) در زیر قطره لیدن فراست تشکیل می‌شود و در مرکز قطره بالا می‌آید و وقتی به سطح بالایی قطره می‌رسد، می‌ترکد [17]. این حالت به دلیل ناپایداری رایلی-تیلور در سطح پایینی قطره است. در نتیجه، قطره به چندین قطره کوچک‌تر تجزیه می‌شود که به دلیل تبدیل سریع انرژی سطحی قطره اصلی به انرژی جنبشی، قطرات تجزیه شده سریعاً از هم دور می‌شوند. همچنین با تبخیر قطره و کوچک‌تر شدن آن، وقتی وزن قطره از نیروی فشار در لایه بخار کوچک‌تر می‌شود، رژیم لیدن فراست حالت شبه پایا از بین می‌رود و فشار لایه بخار، قطره را به سمت بالا پرتاب می‌کند. قطره دوباره به سطح برخورد می‌کند و این عمل برایش تکرار می‌شود تا به‌طور کامل تبخیر شود [16]. تبخیر قطره شبه‌استاتیک با شروع از حالت پنکیک تا بالا بردن از سطح داغ به‌صورت شماتیک در شکل ۵ بیان شده است.



شکل ۴) شماتیک شکل‌های مختلف قطره لیدن فراست. پادل، شبه‌کروی و کروی

برای قطره لیدن فراست استاتیک، وزن قطره با فشار لزجی جریان بخار زیر قطره تعادل است:

$$Mg \sim l^2 \partial P \quad (10)$$

با روابط ۹ و ۱۰، رابطه بین طول و ارتفاع لایه بخار به دست می‌آید:

$$\frac{l^2}{h^4} \sim \frac{M/\rho_v}{R_l^3} \quad (11)$$

$$R_l \equiv \left(\frac{\mu_v k_v \partial T}{\rho_v \rho_l g L_q} \right)^{1/3} \quad (12)$$

شماتیک شکل‌های مختلف قطره لیدن فراست شامل پادل، شبه‌کروی و کروی در شکل ۴ نشان داده شده است. ضخامت قطره، $R_{\max}$ شعاع ماکزیمم، R_{neck} شعاع گردنی قطره، h_{center} ارتفاع لایه بخار در مرکز و h_{neck} ارتفاع لایه بخار در گردنی است. در مورد پادل لیدن فراست، نیروی گرانش قطره بر نیروی کشش سطحی غلبه می‌کند و قطره به‌صورت پنکیک روی لایه بخار پخش می‌شود. با تعیین توازن بین انرژی سطح آزاد و انرژی پتانسیل گرانشی در واحد سطح، مقیاس ضخامت قطره به دست می‌آید که تقریباً ثابت است:

$$2\sigma l \cdot l \sim \rho_l g d \frac{d}{2} \rightarrow d \sim 2R_c \quad (13)$$

پارامتر $R_c = (\sigma/\rho_l g)^{1/2}$ طول موئینگی قطره است و به‌عنوان پارامتر تعیین‌کننده شکل قطره لیدن فراست شناخته می‌شود. مقیاس طولی لایه بخار زیر پادل لیدن فراست نیز با تعادل نیروی کشش سطحی با وزن قطره به دست می‌آید:

$$\sigma \pi l \cdot l \sim \rho_l g \pi R^2 d \rightarrow l \sim R \quad (14)$$

بنابراین با قراردادن رابطه ۱۴ در رابطه ۱۱، مقیاس ارتفاع لایه بخار در زیر پادل لیدن فراست به دست می‌آید:

$$h \sim \left(\frac{R_l^3}{R_c} \right)^{1/4} R^{1/2} \quad (15)$$

فشار در لایه بخار بزرگ‌تر از فشار لاپلاسی در قطره است $(\partial P > \frac{\sigma}{R})$ با قراردادن روابط ۱۴ و ۱۵ در این رابطه، مقیاس شعاعی پادل لیدن فراست به دست می‌آید:

$$R > R_c \quad (16)$$

برای قطره کروی به شعاع R جرم قطره از مرتبه بزرگی $M \sim \rho_l R^3$ و طول افقی لایه بخار از مرتبه بزرگی $l \sim (Rh)^{1/2}$ است [12]. با قراردادن این روابط در رابطه ۱۱، مقیاس ارتفاع لایه بخار زیر قطره شبه‌کروی به دست می‌آید:

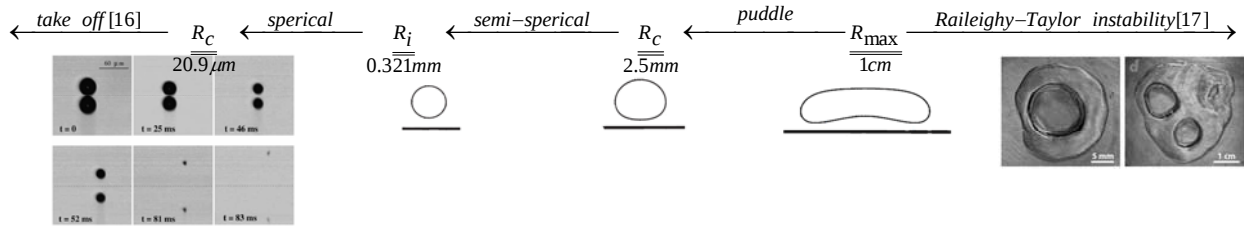
$$h \sim R_l^{3/2} R^{-1/2} \quad (17)$$

برای قطره شبه‌کروی، فشار لزجی در لایه بخار با فشار لاپلاسی قابل مقایسه است $(\partial P \sim \sigma/R)$. این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که شعاع قطره از مرتبه بزرگی R_l باشد و با استفاده از روابط ۱۱ و ۱۷ و رابطه $l \sim (Rh)^{1/2}$ ، طول مشخصه قطرات شبه‌کروی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_l \sim (R_c^4 R_l^3)^{1/7} \quad (18)$$

در مورد قطره کروی، طول لایه بخار با ارتفاع لایه بخار هم‌مرتبه است $(l \sim h)$ و تقریب بدون اصطکاک از بین می‌رود. بنابراین طول مشخصه قطرات کروی از رابطه ۱۱ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

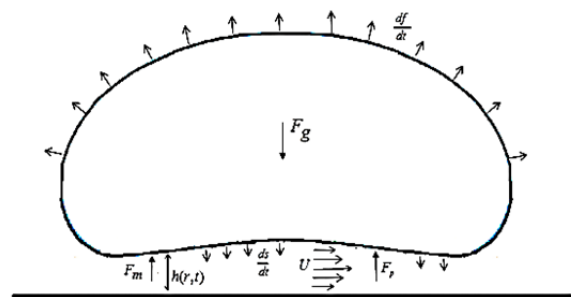
$$R \sim R_l \quad (19)$$



شکل ۵) شماتیک تبخیر قطره لیدن فراست و مرتبه بزرگی اندازه قطره

۳- مدل تبخیر قطره لیدن فراست

قطره لیدن فراستی را در نظر بگیرید که به آرامی روی سطح داغ قرار گرفته است. بلافاصله بعد از قرارگرفتن قطره روی سطح داغ، لایه بخاری زیر قطره تشکیل می‌شود و با تعادل نیروی وزن قطره، نیروی فشار بخار در لایه و نیروی مومنتوم بخار خروجی از سطح پایینی قطره، قطره به صورت استاتیک روی لایه بخار شناور می‌ماند. تبخیر قطره هم از سطح پایینی و هم از سطح بالایی قطره تبخیر رخ می‌دهد. شماتیک چنین قطره‌ای در شکل ۶ نشان داده شده است (در حالت کلی، پروفیل لایه بخار زیر قطره یکنواخت نیست).



شکل ۶) شماتیک نیروهای وارد بر قطره لیدن فراست استاتیک حین تبخیر

با توجه به تبخیر از سطح بالایی و پایینی قطره، شدت تغییر حجم قطره می‌شود:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A_s \frac{df}{dt} + A_l \frac{ds}{dt} \quad (20)$$

و حجم قطره حین تبخیر روی سطح داغ با انتگرال‌گیری از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$V(t) = V_0 - \int_0^t \left(A_s \frac{df}{dt} + A_l \frac{ds}{dt} \right) dt \quad (21)$$

V_0 حجم اولیه قطره، A_s مساحت سطح بالایی و A_l مساحت سطح پایینی قطره است که با حل معادله یانگ- لاپلاس محاسبه می‌شوند. df/dt سرعت تبخیر از سطح بالایی و ds/dt سرعت تبخیر مایع از سطح پایینی قطره است. با صرف نظر از اینرسی بخار و انتگرال‌گیری معادله بقای مومنتوم (رابطه ۲) همراه با شرط بدون لغزش در سطح مشترک بخار با قطره و سطح داغ، توزیع سرعت شعاعی در لایه بخار به دست می‌آید:

$$u = \frac{1}{2\mu_v} \frac{\partial P}{\partial r} z(z-h) \quad (22)$$

با انتگرال‌گیری معادله بقای جرم در لایه بخار (رابطه ۱) و استفاده از توزیع سرعت شعاعی (رابطه ۲۲)، توزیع سرعت عمودی در لایه

بخار نیز به دست می‌آید:

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{z^2}{12\mu_v} (2z-3h) + \frac{\dot{m}_{evap}'''}{\rho_v} z \quad (23)$$

$\dot{m}_{evap}'''$ شدت تبخیر قطره است که به صورت تقریبی برابر بخار وارد شده به لایه بخار به دلیل تبخیر از سطح پایینی قطره در نظر گرفته می‌شود:

(۲۴)

$$\dot{m}_{evap}''' \pi R_{neck}^2 h = \rho_l \frac{ds}{dt} \pi R_{neck}^2 \rightarrow \dot{m}_{evap}''' = \frac{\rho_l}{h} \frac{ds}{dt}$$

بنابراین با قراردادن رابطه ۲۴ در رابطه ۲۳، توزیع سرعت عمودی در لایه بخار به دست می‌آید:

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{z^2}{12\mu_v} (2z-3h) + \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \frac{z}{h} \quad (25)$$

سرعت عمودی بخار در سطح پایینی قطره با قراردادن $z=h$ در رابطه ۲۵ به دست می‌آید:

$$w|_{z=h} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{h^3}{12\mu_v} + \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \quad (26)$$

به دلیل نفوذناپذیری سطح داغ، سرعت عمودی بخار روی سطح داغ صفر است و شرط مرزی سرعت عمودی در سطح پایینی قطره با تعادل جرمی مایع تبخیر شده در سطح پایینی قطره و بخار ورودی به لایه بخار به دست می‌آید:

$$\rho_l (\vec{V}_l - \vec{V}_b) \cdot \vec{n} = \rho_v (\vec{V}_v - \vec{V}_b) \cdot \vec{n} \quad (27)$$

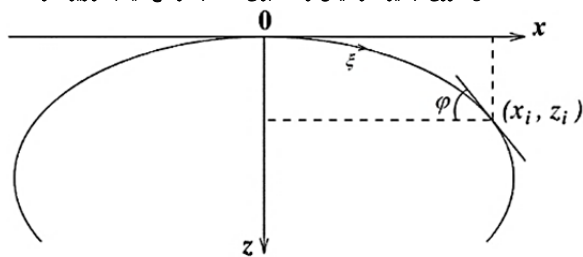
$\vec{V}_b = 0$ ، $\frac{dh}{dt}$ ، $z=h$ سرعت مایع در $\vec{V}_l = \left(0, \frac{dh}{dt} - \frac{ds}{dt}\right)$ مرز قطره و بخار و $\vec{V}_v = (u, w)$ سرعت بخار در $z=h$ بوده و بردار نرمال $\vec{n}$ نیز در جهت z است. بنابراین سرعت عمودی بخار در روی سطح مشترک بخار و قطره می‌شود:

$$w|_{z=h} = \frac{dh}{dt} - \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \quad (28)$$

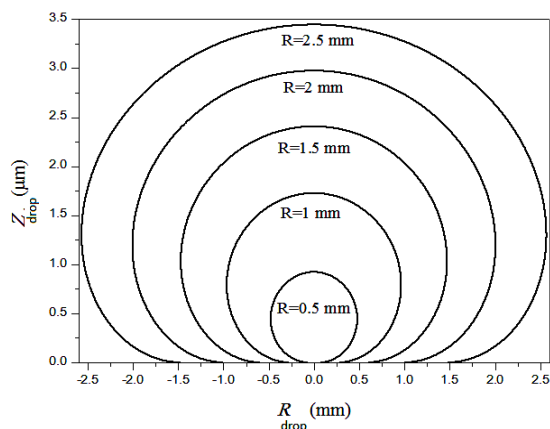
با مساوی قراردادن سرعت عمودی بخار روی سطح پایینی قطره از روابط ۲۶ و ۲۸، توزیع فشار در لایه بخار به دست می‌آید:

$$\frac{1}{12\mu_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} h^3 \right) = \frac{dh}{dt} - 2 \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \quad (29)$$

شرط صحیح بودن محاسبات فشار و ارتفاع لایه بخار، تعادل نیروهای عمودی وارد بر قطره لیدن فراست، پایا و استاتیک است. این نیروها شامل نیروی وزن قطره $F_g = \rho_l g V(t)$ نیروی



شکل ۷) سیستم مختصات حل عددی معادله یانگ- لاپلاس



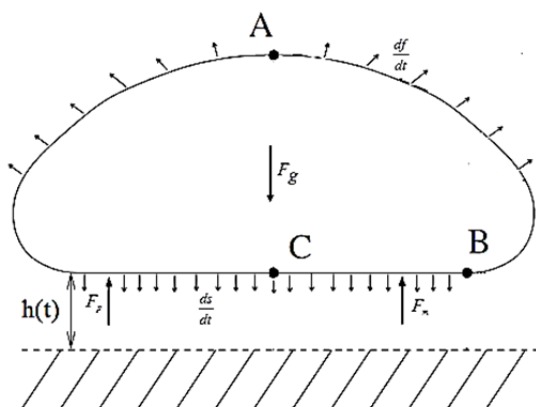
نمودار ۸) پروفیل قطره لیدن فراست شبه کروی از حل عددی معادله یانگ- لاپلاس

۳-۲- مدل تبخیر قطره لیدن فراست شبه کروی

برای قطره‌ای که مقیاس شعاعی آن کوچک‌تر از طول موئینگی قطره بوده، سطح پایینی قطره تقریباً صاف بوده و ضخامت لایه بخار زیر آن یکنواخت است. چنین قطراتی قطرات لیدن فراست شبه کروی نامیده می‌شوند. شماتیک قطرات شبه کروی در شکل ۸ نشان داده شده است. حجم قطره حین تبخیر روی سطح داغ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V(t) = V_0 - \int_0^t \left(A_{AB} \frac{df}{dt} + A_{BC} \frac{ds}{dt} \right) dt \quad (36)$$

V_0 حجم اولیه قطره، A_{AB} مساحت سطح بالایی قطره و $A_{BC} = \pi R_B^2$ مساحت سطح پایینی قطره است که با حل معادله یانگ- لاپلاس محاسبه می‌شوند. سرعت تبخیر از سطح بالایی قطره است که در این مطالعه از نتایج تجربی پژوهش بیانس و همکاران [17] استفاده می‌شود.



شکل ۸) شماتیک قطره لیدن فراست شبه کروی

فشاری لایه بخار $F_p = \int_0^{x_B} P 2\pi x dx$ و نیروی مومنوم بخار خروجی از سطح پایینی قطره $F_m = -W \frac{dm}{dt}$ است:

$$F_g = F_p + F_m \quad (30)$$

توزیع دما در لایه بخار نیز با حل معادله انرژی (رابطه ۴) همراه با شرایط مرزی بدون پخش دمایی در سطح پایینی قطره و روی سطح داغ به دست می‌آید. فرض می‌شود که دمای سطح داغ حین تبخیر قطره ثابت است و با تبخیر قطره تغییر نمی‌کند. همچنین فرض می‌شود که دمای قطره حین تبخیر ثابت بوده و برابر دمای اشباع مایع در فشار محیط است و جریان مارانگونی در قطره وجود ندارد.

$$\rho_v C_{p,v} \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k_v \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$T|_{z=h} = T_{sat}$$

$$T|_{z=0} = T_w$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (31)$$

۳-۱- پروفیل سطح بالایی قطره لیدن فراست

پروفیل سطح بالایی قطره لیدن فراست با حل معادله یانگ- لاپلاس برای قطره بدون خیسگی به دست می‌آید. فرم کلی معادله یانگ- لاپلاس، اختلاف فشار موئینگی در عرض سطح مشترک به دلیل کشش سطحی را توضیح می‌دهد و به شکل زیر است [25]:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (32)$$

از طرفی این اختلاف فشار برابر فشار هیدرواستاتیک و فشار موئینگی است:

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \rho_l g z + \frac{2\sigma}{b} \quad (33)$$

b شعاع انحنای در نقطه اوج قطره است. برای قطره متقارن، شعاع‌های انحنای R_1 و R_2 به صورت تابعی از طول کمان و زاویه بین محور x و خط مماس در نقطه مورد نظر بیان می‌شوند (شکل ۷). فرم کلی رابطه یانگ- لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شود [26]:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{\sin \varphi}{x} = cz + \frac{2}{b}$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos \varphi$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \sin \varphi \quad (34)$$

$c = \frac{\rho_l g}{\sigma}$ ثابت موئینگی سیستم است. معادله یانگ- لاپلاس یک مسئله مقدار اولیه بوده و با شرایط اولیه زیر حل می‌شود:

$$x|_{\xi=0} = z|_{\xi=0} = \varphi|_{\xi=0} = 0$$

$$\left. \frac{1}{b} \right|_{\xi=0} = \frac{\sin \varphi}{x} \rightarrow \left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{b} \quad (35)$$

برای b و c مشخص، با انتگرال‌گیری همزمان مساله مقدار اولیه معادله یانگ- لاپلاس، پروفیل سطح مشترک قطره مایع با هوا در قسمت بالایی تعیین می‌شود.

پروفیل سطح بالایی قطره برای اندازه‌های مختلف قطره در محدوده قطره شبه کروی که با حل معادله یانگ- لاپلاس به دست آمده، در نمودار ۱ نشان داده شده است.

بیانس و همکاران^[۱۷] نسبت تبخیر قطره از کل سطح قطره به تبخیر از سطح پایینی قطره (S) را به صورت تجربی اندازه گیری کرده اند. با برازش یک تابع به داده های تجربی ارایه شده توسط آنها^[۱۷] می توان برای محدوده ای از اندازه قطره، رابطه ای را به دست آورد:

$$S = 9.73749 \exp(-0.812889R) \quad (37)$$

رابطه ۳۷ برای محدوده اندازه قطرات $1/7 \text{ mm} < R < 2/8 \text{ mm}$ به دست آمد. در مدل ارایه شده در این مطالعه، رابطه ۳۷ برای تمامی محدوده قطرات شبه کروی به کار گرفته می شود. برای قطرات در محدوده $2/8 \text{ mm} < R < 5/10 \text{ mm}$ مقدار $S = 1/134$ و برای قطرات بزرگ تر مقدار $S = 1/232$ به دست می آید.

با فرض این که تبخیر قطره از سطح پایینی به دلیل انتقال حرارت هدایتی منتقل شده از لایه بخار به سطح پایینی قطره صورت می گیرد، سرعت تبخیر قطره از سطح پایینی با استفاده از شرط استفان به دست می آید:

$$\rho_l L \frac{ds}{dt} = -k_v \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} \quad (38)$$

شرط صحت ارتفاع لایه بخار محاسبه شده، تعادل نیروهای وارد بر قطره است. برای محاسبه نیروی فشاری در لایه بخار باید توزیع فشار در لایه بخار محاسبه شود که این توزیع فشار با در نظر گرفتن h یکنواخت و شرط $P(\pm R_B) = 0$ با انتگرال گیری از رابطه ۲۹ به دست می آید:

$$P = \frac{3\mu_v}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} - 2 \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \right) (r^2 - R_B^2) \quad (39)$$

نیروی فشاری در لایه بخار نیز با انتگرال گیری از این توزیع فشار به دست می آید:

$$F_p = \int_0^{R_B} P 2\pi x dx = -\frac{3\mu_v}{2h^3} \left(\frac{dh}{dt} - 2 \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \right) R_B^4 \quad (40)$$

نیروی مومنتوم بخار خروجی از سطح پایینی قطره:

$$F_m = -W|_{z=h} \frac{dm}{dt} = \rho_l \left(\frac{dh}{dt} - 2 \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} \pi R_B^2 \quad (41)$$

با قراردادن روابط ۴۰ و ۴۱ در رابطه تعادل استاتیک قطره (رابطه ۳۰)، شرط صحیح بودن محاسبات ارتفاع لایه بخار به دست می آید:

$$\rho_l g V(t) = -\frac{3\mu_v}{2h^3} \left(\frac{dh}{dt} - 2 \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \right) R_B^4$$

$$\rho_l \left(\frac{dh}{dt} - 2 \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} \pi R_B^2 \quad (42)$$

۳-۳- روش حل

با حل همزمان روابط ۴، ۳۶، ۳۸ و ۴۲ همراه با معادله یانگ-لاپلاس مربوط به پروفیل قطره (رابطه ۳۴)، مساله قطره لیدن فراست حل می شود. این ۴ معادله شامل ۴ مجهول حجم قطره $V(t)$ ، شدت تبخیر قطره از سطح پایینی $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ ، ارتفاع لایه بخار (h) و توزیع دما (T) است. این دستگاه معادله به روش پیش بینی تصحیح و استفاده از کد فرترن حل می شود. مجهول اصلی در این معادلات، ارتفاع لایه بخار است که در هر مرحله از شبیه سازی پیش بینی می شود. شرط صحیح بودن ارتفاع پیش بینی شده، برقراری رابطه تعادل نیروهای وارد بر قطره (رابطه

۴۲) است.

مساحت سطح بالایی و پایینی قطره از حل معادلات پلانگ-لاپلاس به دست می آید. در حل رابطه یانگ-لاپلاس، مقدار شعاع انحنا مجهول است و مقدار آن نیز به روش پیش بینی، تصحیح و با استفاده از کد فرترن تعیین می شود. زاویه مماسی قطره با لایه بخار در مورد قطره لیدن فراست معلوم و برابر ۱۸۰ درجه بوده و طول x مربوط به این نقطه، شعاع سطح لیدن فراست است. شرط صحیح بودن مقدار شعاع انحنا پیش بینی شده با حجم قطره محاسبه شده در زاویه تماس ارزیابی می شود. حجم قطره، مساحت سطح بالایی و پایینی آن با روابط یانگ-لاپلاس محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} dV &= \pi x^2 dx \\ dA_s &= 2\pi x dx \\ dA_L &= 2\pi x dx \end{aligned}$$

۴- نتایج

در این قسمت، ارتفاع لایه بخار برای قطره شبه کروی به صورت تئوری محاسبه می شود و با نتایج اندازه گیری تجربی بیانس و همکاران^[۱۷] مورد مقایسه قرار می گیرد. طبق نتایج تحلیل مرتبه بزرگی ارایه شده در قسمت ۲، محدوده مقیاس شعاعی قطرات شبه کروی $R_i < R < R_c$ است که برای قطره آب روی سطح داغ با دمای 300°C در محدوده شعاع قطره $0.321 \text{ mm} < R < 0.5 \text{ mm}$ قرار می گیرد.

برای قطره آب روی سطح داغ با دمای 300°C ، ویژگی های لایه بخار در متوسط دمای اشباع مایع و دمای سطح داغ (200°C) محاسبه می شود. ویژگی های بخار در این دما با داده های مورد استفاده در کار تجربی بیانس و همکاران^[۱۷] اندکی متفاوت بوده و به متوسط ویژگی های بخار در دمای سطح داغ و دمای اشباع مایع بسیار نزدیک است (جدول های ۱ و ۲). بنابراین برای صحت سنجی نتایج مدل از داده های آزمایش بیانس و همکاران^[۱۷] استفاده می شود.

جدول ۱) ویژگی های بخار زیر قطره لیدن فراست روی سطح داغ با دمای 300°C

ضریب هدایت ($\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$)	لزجت ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)	چگالی (kgm^{-3})	
۰/۰۳۴۲۸	۱/۶۳	۰/۴۸۸۳	متوسط در دمای 100°C و 300°C
۰/۰۳۳۲۸	۱/۶۱۸	۰/۴۶۶۵	در دمای متوسط 200°C
۰/۰۳۲	۱/۶۳	۰/۵۰	داده های بیانس و همکاران ^[۱۷]

جدول ۲) ویژگی های قطره آب در دمای اشباع 100°C

ضریب کشش سطحی (mNm^{-1})	گرمای نهان تبخیر (Jkg^{-1})	چگالی (kgm^{-3})	
۵۸/۹	$2/476 \times 10^6$	۹۵۸/۴	دمای 100°C
۵۹	$2/26 \times 10^6$	۹۶۰	داده های بیانس و همکاران ^[۱۷]

ارتفاع لایه بخار زیر قطره لیدن فراست به روش پیش بینی تصحیح محاسبه می شود که شرط تصحیح ارتفاع لایه بخار محاسبه شده، تعادل نیروهای وارد بر قطره است. ارتفاع لایه بخار زیر قطره لیدن فراست با فرض یکنواخت بودن لایه بخار زیر قطره، در نمودار ۲ نشان داده شده است. ارتفاع لایه بخاری که با فرض توزیع دمای خطی در لایه بخار به دست آمده با خط چین و ارتفاع لایه بخاری که با حل معادله انرژی (در نظر گرفتن تاثیر جابه جایی حرارت) به دست آمده با خط پُر نشان داده شده است. نتایج اندازه گیری تجربی بیانس و همکاران^[۱۷] نیز با نماد دایره در نمودار ۲ نشان داده شده است.

بین سطح جامد و بخار استفاده کرده‌اند تا داده‌های تئوری به داده‌های تجربی منطبق شود. در این مطالعه، برای قطرات با شعاع‌های کمتر از طول موئینگی با استفاده از ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بین سطح جامد و بخار، توافق خوبی حاصل نمی‌شود.

در مطالعه حاضر، پروفیل قطره لیدن فراست با حل معادله یانگ-لاپلاس به دست می‌آید و بنابراین حجم قطره در هر لحظه حین تبخیر و سطح پایینی بالایی و پایینی قطره که تبخیر از آنها صورت می‌گیرد، به‌درستی محاسبه می‌شوند. همچنین تفاوت دیگر این مدل تئوری با مدل‌های تئوری ارایه‌شده توسط نویسندگان دیگر، در نظر گرفتن تبخیر قطره در رابطه پیوستگی و تبخیر از سطح بالایی قطره است. به نظر می‌رسد در نظر گرفتن این عوامل و حل معادله انرژی، دلیل توافق بسیار خوب نتایج تئوری با نتایج تجربی است.

در این مطالعه، ویژگی‌های بخار در دمای متوسط سطح داغ و قطره اشباع در نظر گرفته شده، در حالی که دمای بخار بین قطره و سطح داغ از دمای سطح داغ تا دمای اشباع قطره متغیر است. همراه کردن مدل تئوری ارایه‌شده در این مطالعه با برنامه‌ای که ویژگی‌های بخار را در ارتفاع‌های مختلف لایه بخار محاسبه می‌کند، می‌تواند باعث توافق بیشتر نتایج تئوری و تجربی شود.

۴-۱-۲- ضریب انتقال حرارت

هدف اصلی از ارایه این مدل تبخیر، محاسبه شدت تبخیر قطره در فرآیند خنک‌کاری سطوح داغ است که به دلیل تغییر پروفیل قطره و در نتیجه تغییر پروفیل و ارتفاع لایه بخار حین تبخیر، شدت تبخیر قطره روی سطح داغ متغیر خواهد بود. بنابراین با ارایه یک ضریب انتقال حرارت متغیر با اندازه قطره می‌توان شدت حرارت منتقل شده به قطره حین تبخیر را محاسبه کرد.

قطره از طریق لایه بخار، حرارت را از سطح داغ دریافت می‌کند و تبخیر می‌شود. دمای لایه بخار روی سطح داغ و سطح قطره متفاوت بوده و بنابراین ضریب انتقال حرارت هدایتی بخار در روی سطح داغ و سطح قطره با هم متفاوت است. همچنین گرادیان دما روی این سطوح با هم متفاوت است. بنابراین حرارتی که لایه بخار از سطح داغ دریافت می‌کند و حرارتی که لایه بخار به قطره منتقل می‌کند با هم متفاوت است. حرارت دریافت شده از سطح داغ (q_{wall}) و حرارت منتقل شده به قطره (q_{drop}) به صورت زیر تعریف و برای اندازه‌های مختلف قطره لیدن فراست شبه‌کروی در نمودار ۳ نشان داده شده است. اختلاف حرارت دریافت شده از سطح داغ و حرارت منتقل شده به قطره به صورت حرارت جابه‌جایی توسط جریان بخار از لایه بخار خارج می‌شود.

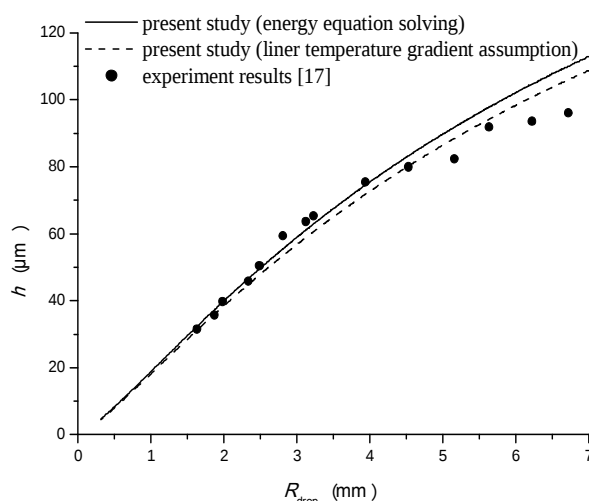
$$q_{wall} = -k_v (@T_{wall}) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$q_{drop} = -k_v (@T_{sat}) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} \quad (43)$$

بنابراین می‌توان ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را براساس حرارت دریافت شده از سطح داغ ($h_{c,wall}$) و حرارت منتقل شده به قطره ($h_{c,drop}$) تعریف کرد. تغییرات این ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی برای اندازه‌های مختلف قطره لیدن فراست شبه‌کروی در نمودار ۴ نشان داده شده است.

$$h_{c,wall} = \frac{q_{wall}}{T_{wall} - T_{sat}}$$

$$h_{c,drop} = \frac{q_{drop}}{T_{wall} - T_{sat}} \quad (44)$$



نمودار ۲) مقایسه ارتفاع لایه بخار از حل مدل تئوری ارایه‌شده با نتایج تجربی بیانس و همکاران [17]

برای قطرات بزرگ‌تر به دلیل این که ارتفاع لایه بخار زیر قطره از مرکز قطره تا لبه آن متغیر است، مقدار متوسطی برای ارتفاع لایه بخار به صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود که بزرگ‌تر از ارتفاع گردنی لایه بخار است. به نظر می‌رسد در کار تجربی [17] ارتفاع لایه بخار در گردنی اندازه‌گیری شده و به همین علت برای قطرات بزرگ‌تر، ارتفاع لایه بخار به دست آمده از مدل تئوری بزرگ‌تر از نتایج تجربی است.

برای قطرات با شعاع کوچک‌تر از ۴ میلی‌متر، نتایج مدل تئوری نزدیک به نتایج اندازه‌گیری تجربی بوده و برای محدوده شعاع قطره $0.321mm < R < 0.5mm$ که قطره به صورت شبه‌کروی روی لایه بخار شناور بوده و ارتفاع لایه بخار زیر آن یکنواخت است، نتایج مدل تئوری با نتایج اندازه‌گیری تجربی توافق بسیار خوبی دارد. همچنین مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن تاثیر جابه‌جایی حرارت روی ارتفاع لایه بخار باعث می‌شود نتایج مدل تئوری با نتایج تجربی، توافق بهتری داشته باشد.

در کار تئوری انجام شده توسط داسگوپتا و همکاران [12]، تفاوت بسیاری بین نتایج تئوری و تجربی مشاهده می‌شود که به نظر می‌رسد به دلیل در نظر نگرفتن تبخیر قطره در معادله پیوستگی است. همچنین در این کار، پروفیل قطره برای قطرات بزرگ و کوچک یکسان در نظر گرفته شده و قطره به صورت استوانه تقریب زده شده است و شعاع تماس قطره با بخار به صورت تقریبی حساب می‌شود. همچنین در این مطالعه برای قطره با شعاع بزرگ‌تر از طول موئینگی نیز ارتفاع لایه بخار یکنواخت در نظر گرفته شده است. در این مطالعه، معادله بقای مومنتوم با دو شرط مرزی سرعت صفر و تنش صفر حل شده است و در تحلیل نتایج ارتفاع لایه بخار، انتخاب شرط مرزی مناسب را شرط رسیدن به نتایج صحیح بیان کرده‌اند. در حالی که در مدل ارایه‌شده در این مطالعه، با توجه به کوچک بودن ارتفاع لایه بخار در مقایسه با طول آن از شرط مرزی سرعت صفر استفاده شده و نتایج صحیحی به دست آمده است.

در کار میرس و چارپین [11] نیز توافق خوبی بین نتایج تئوری و تجربی مشاهده نمی‌شود. در این مطالعه تئوری بدون توجه به پروفیل‌های متفاوت قطرات بزرگ و کوچک، قطره لیدن فراست را به صورت شبه‌کروی با ارتفاع لایه بخار یکنواخت در نظر گرفته‌اند. پروفیل سطح بالایی قطره را با حل معادله یانگ-لاپلاس محاسبه کرده و به جای حل معادله انرژی از ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی

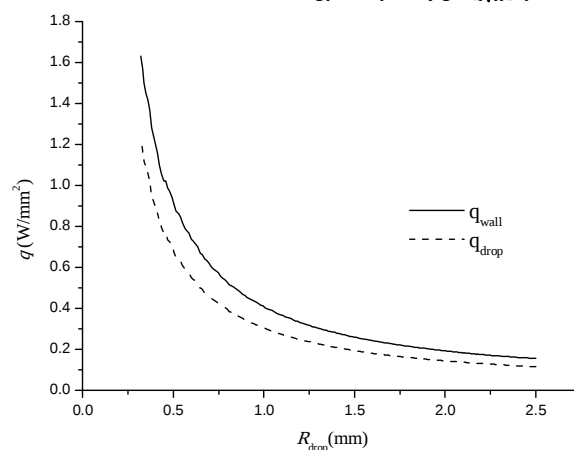
تشکر و قدردانی: از زحمات استاد گرامی، جناب آقای دکتر/انصاری، کمال تشکر را دارم.

تاییدیه اخلاقی: این مقاله در هیچ مجله‌ای چاپ نشده و تمام قوانین مربوط به ارسال مقاله به مجله از طرف اینجانب رعایت شده است.

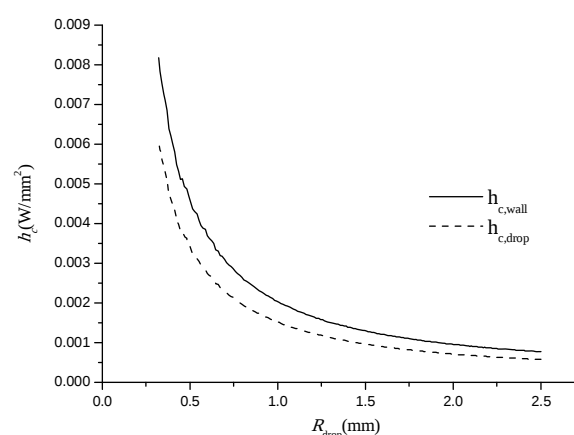
تعارض منافع: این مقاله بخشی از پایان‌نامه دکتری اینجانب با راهنمایی دکتر محمدرضا انصاری می‌باشد.

سهم نویسندگان: ساناز میرزاپریخانی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۷۰٪); محمدرضا انصاری (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی (۳۰٪)

منابع مالی: مقاله به صورت بخشی از پایان‌نامه دکتری در دانشگاه تربیت مدرس (دانشکده مکانیک، گروه تبدیل انرژی) کار شده است.



نمودار ۳) مقایسه حرارت دریافت‌شده از سطح داغ و حرارت منتقل‌شده به قطره توسط لایه بخار



نمودار ۴) تغییر ضریب انتقال حرارت جابجایی بخار با اندازه قطره

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، یک مدل تئوری برای تبخیر قطره لیدن فراست استاتیک ارائه شد. این مدل شامل چهار معادله بوده که با حل همزمان این معادلات همراه با روابط سرعت شعاعی و عمودی جریان در لایه بخار و معادله یانگ-لاپلاس، پارامترهای شدت تبخیر قطره، حجم قطره حین تبخیر، ارتفاع لایه بخار و توزیع دما در لایه بخار به دست آمده است و ضریب انتقال حرارت لایه بخار محاسبه می‌شود. طبق مشاهدات تجربی بسته به اندازه قطره‌ای که روی سطح داغ قرار می‌گیرد، قطره، پروفیل‌های متفاوتی خواهد داشت. بنابراین با تحلیل مرتبه بزرگی نیروهای وارد بر قطره لیدن فراست استاتیک، مقیاس شعاعی پروفیل‌های مختلف قطره لیدن فراست به دست می‌آید.

به‌منظور صحت‌سنجی نتایج مدل تئوری ارائه‌شده، ارتفاع لایه بخار محاسبه‌شده توسط مدل تئوری با نتایج تجربی بیان‌س و همکاران^[17] مقایسه شده و توافق بسیار خوبی به دست آمده است. با بررسی کارهای تئوری ارائه‌شده در منابع چنین به نظر می‌رسد که دلیل توافق نتایج مدل ارائه‌شده در این مطالعه با نتایج تجربی، در نظر گرفتن تبخیر قطره در معادله پیوستگی، تبخیر قطره از سطح بالایی قطره، تاثیر جابه‌جایی حرارت روی توزیع دما در لایه بخار و محاسبه پروفیل قطره با حل معادله یانگ-لاپلاس است. همچنین در این مقاله، حرارت منتقل‌شده از سطح داغ، حرارت دریافت‌شده توسط قطره و ضریب انتقال حرارت لایه بخار زیر قطره حین تبخیر محاسبه شد.

۶- پی‌نوشت

مساحت (m^2)	A
سرعت تغییر ارتفاع لایه بخار (ms^{-1})	$\frac{dh}{dt}$
سرعت تبخیر قطره از سطح بالایی (ms^{-1})	$\frac{df}{dt}$
سرعت تبخیر قطره از سطح پایینی (ms^{-1})	$\frac{ds}{dt}$
نیروی وزن (N)	F_g
نیروی مومنتوم بخار خروجی (N)	F_m
نیروی فشاری (N)	F_p
شتاب گرانش (m/s^2)	g
ارتفاع لایه بخار (m)	h
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی ($w m^{-2} K^{-1}$)	h_c
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی براساس حرارت منتقل‌شده به قطره ($Wm^{-2} K^{-1}$)	$h_{c,wall}$
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی براساس حرارت دریافت‌شده از سطح داغ ($Wm^{-2} K^{-1}$)	$h_{c,drop}$
ضریب انتقال حرارت هدایتی ($Wm^{-1} K^{-1}$)	k
گرمای نهان تبخیر مایع ($jk g^{-1}$)	L
شدت تبخیر قطره در واحد حجم ($kgs^{-1} m^{-3}$)	$\dot{m}'''_{evap}$
فشار ($kgm^{-1} s^{-2}$)	p
حرارت دریافت‌شده از سطح داغ (Wm^{-2})	q_{wall}
حرارت منتقل‌شده به قطره (Wm^{-2})	q_{drop}
شعاع لایه بخار (m) و جهت شعاعی	r
شعاع قطره (mm)	R_{drop}
دما (K)	T
زمان (s)	t
سرعت محوری (ms^{-1})	u
حجم (m^3)	V
سرعت عمودی (ms^{-1})	w
جهت شعاعی مختصات قطره	x
جهت عمودی	z
ارتفاع قطره (μm)	Z_{drop}
علامه یونانی	
چگالی (kgm^{-3})	ρ
لزجت دینامیکی ($kgm^{-1} s^{-1}$)	μ
ضریب کشش سطحی (Nm^{-1})	σ
محور مماس بر سطح بالایی قطره	ξ
بالانویس‌ها	
در واحد حجم	$'''$
زیرنویس‌ها	
مرز سطح قطره و لایه بخار	b
تبخیر	evap.
مایع	l
اشباع	sat
بخار	v

refined scaling laws. *Physical Review E*. 2014;90(5):053011.

14- Pomeau Y, Le Berre M, Celestini F, Frisch T. The Leidenfrost effect: From quasi-spherical droplets to puddles. *Comptes Rendus Mecanique*. 2012;340(11-12):867-881.

15- Snoeijer JH, Brunet P, Eggers J. Maximum size of drops levitated by an air cushion. *Physical Review E*. 2009;79(3):036307.

16- Celestini F, Frisch T, Pomeau Y. Take off of small Leidenfrost droplets. *Physical Review Letters*. 2012;109(3):034501.

17- Biance AL, Clanet Ch, Quéré D. Leidenfrost drops. *Physics of Fluids*. 2003;15(6):1632-1637.

18- Burton JC, Sharpe AL, Van Der Veen RCA, Franco A, Nagel SR. Geometry of the vapor layer under a Leidenfrost drop. *Physical Review Letters*. 2012;109(7):074301.

19- Hassebrook A, Kruse C, Wilson Ch, Anderson T, Zuhlke C, Alexander D, et al. Effects of droplet diameter and fluid properties on the Leidenfrost temperature of polished and micro/nanostructured surfaces. *Journal of Heat Transfer*. 2016;138(5):051501.

20- Hassebrook A, Kruse C, Wilson Ch, Anderson T, Zuhlke C, Alexander D, et al. Effects of droplet diameter on the Leidenfrost temperature of laser processed multiscale structured surfaces. 14th Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITherm), 27-30 May, 2014, Orlando, Florida, USA. Piscataway: IEEE; 2014.

21- Quéré D. Leidenfrost dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2013;45:197-215.

22- Oosthuizen PH, Naylor D. An introduction to convective heat transfer analysis. New Yourk: WCB/McGraw Hill; 1999.

23- Kays WM, Crawford ME, Weigand B. Convective heat and mass transfer. 4th Edition. New York: Mc Graw-Hill Higher Education; 2005.

24- Heydarinejhad Gh. Advanced fluid mechanics. 2nd Edition. Tehran: Tarbiat Modares Univercity; 2015. [Persian]

25- Alois AR, Rincón AF. Young-laplace equation in convenient polar coordinates and its implementation in matlab. *Revista Colombiana de Química*. 2010;39(3):413-425.

26- Del Rio OI, Neumann AW. Axisymmetric drop shape analysis: Computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops. *Journal of Colloid and Interface Science*. 1997;196(2):136-147.

منابع

1- Mascarenhas N, Mudawar I. Analytical and computational methodology for modeling spray quenching of solid alloy cylinders. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2010;53(25-26):5871-5883.

2- Guo R, Wu J, Fan H, Zhan X. The effects of spray characteristic on heat transfer during spray quenching of aluminum alloy 2024. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2016;76:211-220.

3- Dou R, Wen Z, Zhou G. Heat transfer characteristics of water spray impinging on high temperature stainless steel plate with finite thickness. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015;90:376-387.

4- Gradeck M, Seiler N, Ruyer P, Maillet D. Heat transfer for Leidenfrost drops bouncing onto a hot surface. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2013;47:14-25.

5- Chatzikyriakou D, Walker SP, Hewitt GF. The contribution of non-wetting droplets to direct cooling of the fuel during PWR post-LOCA reflood. *Nuclear Engineering and Design*. 2010;240(10):3108-3114.

6- Hamdan KS, Kim DE, Moon SK. Droplets behavior impacting on a hot surface above the Leidenfrost temperature. *Annals of Nuclear Energy*. 2015;80:338-347.

7- Dunand P, Castanet G, Gradeck M, Lemoine F, Maillet D. Heat transfer of droplets impinging onto a wall above the Leidenfrost temperature. *Comptes Rendus Mécanique*. 2013;341(1-2):75-87.

8- Gottfried BS, Lee CJ, Bell KJ. The Leidenfrost phenomenon: Film boiling of liquid droplets on a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1966;9(11):1167-1188.

9- Mousa MM, Hanafy AE. Evaporation time of liquid droplet on superheating horizontal surface. *Alexandria Engineering Journal*. 2004;43(4):433-444.

10- Xie H, Zhou Z. A model for droplet evaporation near Leidenfrost point. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2007;50(25-26):5328-5333.

11- Myers TG, Charpin JPF. A mathematical model of the Leidenfrost effect on an axisymmetric droplet. *Physics of Fluids*. 2009;21(6):063101.

12- Dasgupta A, Chandraker DK, Nayak AK, Vijayan PK. Prediction of vapor film thickness below a Leidenfrost drop. *Journal of Heat Transfer*. 2015;137(12):124501.

13- Sobac B, Rednikov A, Dorbolo S, Colinet P. Leidenfrost effect: Accurate drop shape modeling and