



Simulation of Sloshing in Rectangular Tanks under Harmonic Excitation by the Generalized Exponential Basis Functions Meshless Method

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Rashidi H.R.¹ MSc,
Zandi S.M.*¹ PhD,
Mossaiby F.¹ PhD

How to cite this article

Rashidi H.R, Zandi S.M, Mossaiby F.
Simulation of Sloshing in Rectangular Tanks under Harmonic Excitation by the Generalized Exponential Basis Functions Meshless Method. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(6):1397-1408.

ABSTRACT

Sloshing phenomenon is one of the complex problems in free surface flow phenomena. Numerical meshless methods as a new method can be used to solve this problem. In these methods, the lack of a mesh and complex elements for the domain of problems due to the change in geometry of the solution over time provides a lot of flexibility in solving numerical problems. In the previous researches, the sloshing problem in reservoirs was solved, using the Laplace equation with respect to the velocity potential, but the solution to this problem with pressure equations has not much considered; therefore, using the pressure equations and a suitable lagrangian time algorithm, generalized exponential basis function method has been developed for dynamic stimulation reservoirs. The approximation is solved, using a meshless method of generalized exponential basis functions and the entire domain of problem will discrete to a number of nodes and then with appropriate boundary conditions, the unknowns are approximated. In this study, linear and nonlinear examples have been solved under harmonic stimulation, in two-dimensional form of rectangular cube tanks, and the results of them have been compared with the analysis solving methods, other numerical methods, and experimental data. The results show that the present method in two-dimensional mode is very noticeable compared with other available lagrangian methods because of accuracy in solving problem and spending time.

Keywords Sloshing; Meshless Method; Numerical Simulation; Exponential Basis Functions; Rectangular Storage Tank

¹Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering and Transport, University of Isfahan, Iran

*Correspondence

Address: Department of Civil Engineering and Transportation, Azadegan Blvd, University of Isfahan, Azadi Square, Isfahan, Iran. Postal Code: 8174473441
Phone: +98 (31) 37935305
Fax: +98 (31) 36699515
s.m.zandi@eng.ui.ac.ir

Article History

Received: May 07, 2018

Accepted: December 24, 2018

ePublished: June 01, 2019

CITATION LINKS

[1] The dynamic behavior of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology [2] Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars [3] Numerical simulation of 2D sloshing waves using SPH with diffusive terms [4] A truly incompressible smoothed particle hydrodynamics based on artificial compressibility method [5] Smoothed particle hydrodynamics stability analysis [6] Exponential basis functions in solution of incompressible fluid problems with moving free surfaces [7] Simulation of two-dimensional sloshing phenomenon by generalized finite difference method [8] Implementation of a generalized exponential basis functions method for linear and non-linear problems [9] Solving time-dependent problems using the generalized exponential basis functions method [10] Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style [11] Fluid-structure interaction using exponential basis functions via a lagrangian meshless method [12] Nonlinear free surface flow with moving boundaries via a local meshless method using exponential basis functions [13] Sloshing behaviours of rectangular and cylindrical liquid tanks subjected to harmonic and seismic excitations. Earthquake Engineering and Structural Dynamics [14] A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow [15] Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method [16] Investigation of nonlinear sloshing effects in seismically excited tanks

شبیه‌سازی تلاطم سطحی سیال در مخازن مستطیلی تحت تحریک هارمونیک به روش بدون شبکه توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته

حمیدرضا رشیدی MSc

گروه مهندسی عمران، دانشکده عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، ایران

سید مهدی زندی PhD

گروه مهندسی عمران، دانشکده عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، ایران

فرشید مسیبی PhD

گروه مهندسی عمران، دانشکده عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، ایران

چکیده

پدیده تلاطم سطحی سیال از مسایل پیچیده در پدیده‌های جریان با سطح آزاد است. روش‌های عددی بدون شبکه به‌عنوان روشی نوین، کاربرد فراوانی در حل این مساله دارند. در این روش‌ها، عدم وجود شبکه‌بندی و المان‌های پیچیده برای دامنه مسایل با توجه به تغییر هندسه حل در طول زمان، انعطاف‌پذیری زیادی در حل مسایل عددی به وجود می‌آورد. در تحقیقات صورت‌گرفته در گذشته مساله تلاطم سطحی سیال در مخازن با استفاده از حل معادله لاپلاس، با توجه به پتانسیل سرعت، صورت گرفته است، اما حل این مساله با معادلات فشار، چندان مورد توجه نبوده است. بنابراین با استفاده از معادلات فشار و یک الگوریتم زمانی لاگرانژی مناسب، روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته برای مسایل مخازن تحت تحریک دینامیکی توسعه داده شده است. تقریب حل با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته صورت می‌گیرد و کل دامنه حل به تعدادی نقطه گرهی گسسته‌سازی شده و سپس با در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب، مجهولات مساله تقریب زده می‌شوند. در این تحقیق، مثال‌های خطی و غیرخطی، تحت تحریک هارمونیک، به‌صورت دو بُعدی از مخازن مکعب مستطیلی، حل شده و نتایج حاصل از آنها، با روش‌های حل تحلیلی دیگر روش‌های حل عددی و همچنین، داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که به لحاظ دقت حل مساله و صرف وقت روش حاضر در حالت دو بُعدی در مقایسه با دیگر روش‌های لاگرانژی موجود، بسیار درخور توجه است.

کلیدواژه‌ها: تلاطم سطحی سیال، روش بدون شبکه، شبیه‌سازی عددی، توابع پایه نمایی، مخزن ذخیره مستطیلی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۰۳

* نویسنده مسئول: s.m.zandi@eng.ui.ac.ir

۱- مقدمه

در کنار تلاش‌های آزمایشگاهی و عددی زیادی که برای شبیه‌سازی تلاطم سیال صورت گرفته است، روش‌های عددی بدون شبکه به‌عنوان دسته‌ای نوین از روش‌های عددی، کاربرد فراوانی در حل این مساله می‌توانند داشته باشند^[1]. در این روش‌ها عدم وجود شبکه‌بندی برای دامنه مسایل با توجه به تغییر هندسه حل در طول زمان، انعطاف‌پذیری زیادی در حل مسایل عددی به وجود می‌آورد. از طرفی، شبیه‌سازی پدیده نوسانات سیال در طول زمان، یکی از مسایل مهم و پیچیده در روند حل است که توسط روش‌های عددی می‌تواند به‌خوبی شبیه‌سازی شود. یکی از روش‌های آزاد از شبکه اولیه برای اولین بار توسط گینگولد و مونگان تحت عنوان هیدرودینامیک ذرات هموار ارایه شد^[2]. دی‌چودوری و ساناسیراج، هیدرودینامیک هموار شده ذرات را برای مطالعه پدیده تلاطم سیال استفاده کردند^[3]. روزبهانی و هجران‌فر نیز این روش را برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر پایدار و ناپایدار به کار بردند^[4]. از جمله اشکالات این روش می‌توان به جواب غیردقیق در مرزها اشاره نمود که برای اولین بار توسط سویگل و همکاران مورد بررسی قرار گرفت^[5]. زندی و همکاران در سال ۲۰۱۲، روشی نیمه‌تحلیلی و

بدون شبکه را با استفاده از توصیف لاگرانژی برای حل مسایل جریان سیال غیرقابل تراکم و غیرلزج با مرزهای متحرک در تماس با دیواره‌های صلب ارایه کردند^[6]. در سال ۲۰۱۶ ژانگ و همکاران برای مطالعه پدیده تلاطم سیال از روش عددی بدون شبکه تفاضل محدود تعمیم‌یافته (GFDM) برای شبیه‌سازی این پدیده استفاده کردند^[7].

در این پژوهش به بررسی کارایی روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته برای حل حرکت سیال به‌صورت دو بُعدی از مخازن مکعب مستطیلی تحت تحریک هارمونیک پرداخته شده و مثال‌های خطی و غیرخطی، حل شده و نتایج حاصل از آنها، با روش‌های حل تحلیلی، دیگر روش‌های حل عددی و همچنین، داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است. به‌منظور حل مساله تلاطم سطحی سیال با استفاده از معادلات فشار، معادله لاپلاس فشار در هر گام زمانی با استفاده از روش توابع پایه نمایی توسعه‌یافته حل می‌شود و با توجه به فرمول‌بندی لاگرانژی حرکت، هندسه حل به‌نگام می‌شود و حل در زمان پیش می‌رود.

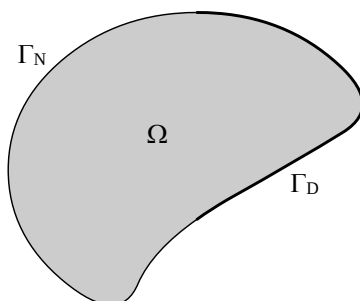
در ادامه، ابتدا به بیان روش عددی برای حل معادلات سیال پرداخته شده و پس از بحث درباره معادلات حاکم، حل معادله لاپلاس فشار با روش عددی مورد بحث قرار گرفته و الگوریتم لاگرانژی حل و به‌نگام‌سازی هندسه آورده شده است و در انتها نیز مثال‌های حل شده همراه با نتایج ارایه می‌شود.

۲- روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته برای حل مسایل خطی

میان تمامی روش‌های بدون شبکه به‌وجودآمده، روش توابع پایه نمایی از مزایای ویژه‌ای از جمله سادگی کاربرد، سرعت بالا و دقت زیاد برخوردار است. روش توابع پایه نمایی با تمام مزایایی که دارد، تنها قادر به حل مسایل خطی با ضرایب ثابت است. این در حالی است که روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته قادر به حل مسایل خطی و غیرخطی با ضرایب متغیر است. همچنین این روش به‌دلیل کاهش عدد شرط ماتریس ضرایب از دقت بالاتری نسبت به روش توابع پایه نمایی برخوردار است و در این روش، برعکس روش توابع پایه نمایی نیازی به استفاده از اعداد مختلط و معادله مشخصه نیست و نیز امکان استفاده از انواع توابع وجود دارد^[8,9].

۲-۱- بررسی اجمالی روش توابع پایه نمایی

در این قسمت، به‌طور خلاصه روش توابع پایه نمایی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بررسی می‌شود. دامنه محدود دو بُعدی یا سه بُعدی Ω به‌همراه مرز $\Gamma = \partial\Omega$ را در نظر بگیرید (شکل ۱).



شکل ۱) نمایش دامنه و مرزهای حل

یک مساله خطی در حالت کلی را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد:

$$L_{\Omega} u = f_{\Omega} \text{ در } \Omega \quad (۱-الف)$$

$$L_{\Gamma} u = f_{\Gamma} \text{ روی } \Gamma \quad (۱-ب)$$

توصیف فرمول‌بندی روش، برای حل مسایل خطی اشاره می‌شود. ابتدا u به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u = u^h \approx \hat{u} = \hat{u}^h = \sum_{i=1}^m \psi_i c_i = \sum_{i=1}^m \psi_i c_i^h \quad (9)$$

در رابطه بالا، m تعداد پایه‌های مورد استفاده است. در نوشتار ماتریسی، رابطه ۹ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u \approx \hat{u} = \Psi c = \Psi c^h \quad (10)$$

با استفاده از معادله ۴- الف و در نظر گرفتن تعدادی نقطه در داخل دامنه حل Ω $(x_{\Omega,j}, j = 1, \dots, n_{\Omega})$ حالت همگن معادله محاسبه می‌شود:

$$L_{\Omega} \hat{u}^h|_{x_{\Omega,j}} = L_{\Omega} \Psi|_{x_{\Omega,j}} c^h = 0 \quad (11)$$

رابطه ۱۱ به شکل ماتریسی به صورت زیر در می‌آید:

$$Q c^h = 0 \quad (12)$$

که در آن سطر Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(Q)_j = L_{\Omega} \Psi|_{x_{\Omega,j}} \quad (13)$$

به منظور به دست آوردن حلی غیربدیهی، c^h باید عضوی از فضای پوچ ماتریس Q باشد.

$$c^h \in \text{null}(Q) \quad (14)$$

اگر ضرایب c^h معادله ۱۲ را ارضا کنند، می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی پایه‌های فضای پوچ ماتریس نوشت که نام دارند:

$$c^h = \sum_{i=1}^b t_i d_i = T d \quad (15)$$

در رابطه ۱۵، d_i ها ضرایب مجهول بوده و T ماتریسی است که ستون‌هایش، t_i هستند. b نیز تعداد پایه‌ها است. حال با توجه به روابط ۱۰ و ۱۵ می‌توان نوشت:

$$\hat{u}^h = \Psi T d \quad (16)$$

برای اعمال شرایط مرزی، تعدادی نقطه روی مرز انتخاب می‌شود $(x_{\Gamma,j}, j = 1, \dots, n_{\Gamma})$ که در شکل ۲ مشاهده می‌شود و با استفاده از رابطه ۵ می‌توان نوشت:

$$L_{\Gamma} \hat{u}^h|_{x_{\Gamma,j}} = f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} \quad (17)$$

با استفاده از معادلات ۱۵ و ۱۶، معادله ۱۸ به شکل زیر در می‌آید:

$$L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} T d = f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} \quad (18)$$

عبارت ۱۸ در نوشتار ماتریسی به صورت زیر در می‌آید:

$$P T d = g \quad (19)$$

که در آن سطر P و g به صورت زیر قابل تعریف هستند:

$$(P)_j = L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} \quad (20-الف)$$

$$(g)_j = f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} \quad (20-ب)$$

حال d (ضرایب مجهول) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d = (P T)^+ (g) \quad (21)$$

در رابطه بالا علامت "+"، نشانه شبه معکوس مور-پنروز است.

لازم به ذکر بوده که در فرمول‌بندی این روش، هر نوع تابع پایه در Ψ قابل استفاده است که این امر، خود مزیتی بزرگ محسوب می‌شود^[9]. در این تحقیق از توابع پایه نمایی استفاده شده است. با توجه به اینکه در این روش دیگر نیازی نیست تا فرم همگن معادله دیفرانسیل برآورده شود، می‌توان از قسمت‌های حقیقی و موهومی توابع پایه نمایی استفاده کرد و محاسبات را تنها با اعداد حقیقی انجام داد. با محاسبه d و c^h تابع مجهول u در هر مکان دلخواهی از دامنه به دست می‌آید^[9].

در روابط بالا، u بردار میدان متغیرها است. L_{Ω} و f_{Ω} به ترتیب معرف اپراتور دیفرانسیل خطی و تابع سمت راست در دامنه Ω است. همچنین L_{Γ} و f_{Γ} به ترتیب اپراتور شرایط مرزی و تابع سمت راست روی مرز Γ هستند. در مسایل با مرزهای ترکیبی، از شرایط دریشله و نویمان، رابطه (۱-ب) به شکل زیر در می‌آید:

$$L_{\Gamma} = \begin{cases} L_D & \text{روی } \Gamma_D \\ L_N & \text{روی } \Gamma_N \end{cases} \quad (2-الف)$$

$$f_{\Gamma} = \begin{cases} f_D & \text{روی } \Gamma_D \\ f_N & \text{روی } \Gamma_N \end{cases} \quad (2-ب)$$

در روابط بالا، L_D و L_N به ترتیب نشان‌دهنده اپراتورهای مرزی دریشله و نویمان هستند. همچنین Γ_D و Γ_N نیز شرایط مرزی دریشله و نویمان روی مرز Γ هستند که f_D و f_N روی آنها تعریف می‌شوند. در روابط ۱-الف و ب، عبارت u می‌تواند به دو بخش همگن و خصوصی به شکل زیر تجزیه شود:

$$u = u^h + u^p \quad (3)$$

در رابطه بالا u^h و u^p به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که:

$$L_{\Omega} u^h = 0 \quad (4-الف)$$

$$L_{\Omega} u^p = f_{\Omega} \quad (4-ب)$$

از آنجایی که اپراتور L_{Γ} در رابطه ۱-ب خطی است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$L_{\Gamma} u = L_{\Gamma} (u^h + u^p) = L_{\Gamma} u^h + L_{\Gamma} u^p = f_{\Gamma} \quad (5)$$

در اینجا برای اختصار، فقط حالت $f_{\Omega} = 0$ بررسی می‌شود که برای آن می‌تواند $u^p = 0$ در نظر گرفته شود. حالت کلی را می‌توان در یک پژوهش صورت گرفته^[10] یافت. قسمت همگن پاسخ معادله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u^h \approx \hat{u}^h = \sum_{i=1}^m \psi_i^h c_i^h = \psi^h c^h \quad (6)$$

در رابطه بالا، $\hat{u}^h$ تقریب u^h ، m^h تعداد پایه‌ها، Ψ^h شامل توابع پایه نمایی و c^h هم شامل ضرایب مجهول مربوطه است. برای مثال در مسایل دو بُعدی، این توابع پایه به شکل $\exp(\alpha_i x + \beta_i y)$ خواهد بود که در آن α_i و β_i دارای مقادیر معلوم مختلط است و $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ و x, y نیز نقطه‌ای روی مرز یا داخل دامنه دو بُعدی هستند. در روش توابع پایه نمایی، ψ^h به گونه‌ای انتخاب می‌شود که حالت همگن معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم ارضا شود. با جایگزینی رابطه ۶ در رابطه ۴-الف، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L_{\Omega} \hat{u}^h = L_{\Omega} \psi^h c^h = H \psi^h c^h = 0 \quad (7)$$

در رابطه ۷، H ماتریس ضرایب است که به منظور به دست آوردن راه حل غیربدیهی برای معادله همگن ψ^h دترمینان H باید صفر شود:

$$\det H = 0 \quad (8)$$

معادله ۸، معادله مشخصه برای اپراتور دامنه است و نقش مهمی در روش توابع پایه نمایی دارد. از معادله مشخصه قبلی می‌توان، برای مثال α_i را برحسب β_i یا برعکس به دست آورد. معادله ۷ تنها هنگامی معتبر است که L_{Ω} اپراتوری خطی با ضرایب ثابت باشد. معادله مشخصه ۸، یک معادله جبری است و می‌توان آن را برای همه اپراتورهای با ضرایب ثابت به طور تحلیلی یا عددی حل کرد^[8,9].

۲-۲- بررسی روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

در این قسمت، به معرفی روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته، برای حل معادله لاپلاس همگن پرداخته می‌شود. در اینجا فقط به

ρ ، V بردار سرعت و ∇ اپراتور گرادیان است. شرط تراکم‌ناپذیری به این معناست که چگالی سیال تغییر نمی‌کند، یعنی $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ است. در نتیجه، در صورتی که چگالی سیال در طول حرکت ثابت باشد، معادله ۲۶ به صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (۲۷)$$

۳-۲- معادله تعادل دینامیک (بقای اندازه حرکت)

معادله بقای اندازه حرکت در حالت کلی و در فرم لاگرانژی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot V) + \rho g \quad (۲۸)$$

در رابطه ۲۸، $V = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ سرعت سیال، $g = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$ شتاب ثقل، p فشار و μ لزجت دینامیک سیال است. برای سیال تراکم‌ناپذیر با توجه به رابطه ۲۸ می‌توان نوشت:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (۲۹)$$

و برای سیال غیرلزج ($\mu \rightarrow 0$)، معادله ۲۹ به شکل ساده‌شده‌ی زیر نوشته می‌شود (معادله حرکت اویلر):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (۳۰)$$

با ضرب داخلی اپراتور گرادیان در دو طرف رابطه ۳۰ می‌توان نوشت:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\nabla \cdot V) = -\nabla^2 p \quad (۳۱)$$

که در رابطه ۳۱، اپراتور $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ لاپلاسین است. برای سیال تراکم‌ناپذیر، با توجه به رابطه ۲۷ می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (۳۲)$$

بنابراین، در نهایت مجموعه معادلات حاکم به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۱]:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (۳۳)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (۳۴)$$

۳-۳- شرایط مرزی

در اینجا شرایط مرزی مساله، براساس فشار بیان می‌شود. حال اگر فشار به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$p = p_H - \rho g y \quad (۳۵)$$

در رابطه ۳۵، y ، مولفه قائم مختصات است. با قراردادن فشار کل از رابطه ۳۵ در معادلات ۳۳ و ۳۴، این روابط به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

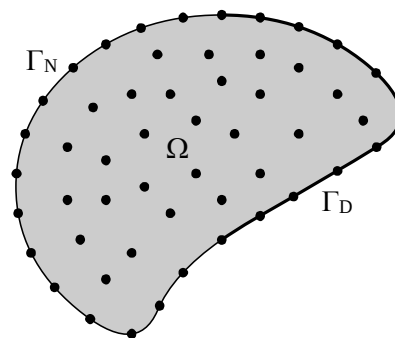
$$\nabla^2 p_H = 0 \quad (۳۶)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p_H \quad (۳۷)$$

بنابراین، با توجه به آنکه معادله ۳۷ باید در تمام ناحیه حل و از جمله روی مرزها برقرار باشد و با فرض آنکه n بردار یکه عمود (نرمال خارجی) بر مرز سیال در تماس با دیواره‌های صلب Γ_s باشد، می‌توان نوشت:

$$\rho n^T a = -n^T \nabla p_H \Rightarrow \left. \frac{\partial p_H}{\partial n} \right|_{\Gamma_s} = -\rho n^T a|_{\Gamma_s} \quad (۳۸)$$

رابطه ۳۸، شرط مرزی معادله روی مرزهای نفوذناپذیر در تماس با سیال است و بردار a شتاب سازه صلب در تماس با سیال خواهد بود. در این مرزها، لغزش سیال نسبت به دیواره به طور کامل اتفاق می‌افتد و به همین سبب مرز لغزشی نیز نامیده می‌شود. این حالت با فرض غیرلزج بودن سیال کاملاً منطبق است. مرزهای مورد نظر در



شکل ۲) گسسته‌سازی دامنه و مرزهای مساله با استفاده از نقاط گرهی

۳-۲- پیاده‌سازی روش

محاسبه فضای پوچ ماتریس Q و محاسبه ضرایب، از مهم‌ترین قسمت‌های این روش است [۹]. این قسمت، بیشترین زمان را در بر می‌گیرد و بنابراین باید به دقت پیاده‌سازی شود. همچنین روش‌های محاسبات موازی می‌تواند برای تولید ماتریس Q مورد استفاده قرار گیرد [۹]. با توجه به آنچه در بخش قبل گفته شد، معکوس و فضای پوچ ماتریس Q در فرآیند حل مورد نیاز است. بهترین روش برای محاسبه این دو، استفاده از تجزیه مقدارهای منفرد است:

$$Q = U \Sigma V^* \quad (۲۲)$$

که در آن ماتریس‌های U و V منحصربه‌فرد بوده و Σ ماتریسی است قطری که شامل مقادیر تکین σ_k است:

$$(\Sigma)_{kk} = \sigma_k \quad \text{بدون جمع روی } k \quad (۲۳)$$

همچنین بالانویس * ترانپوز * ترانپوز مزدوج ماتریس است. معکوس تعمیم‌یافته مور-پنروز به صورت معادله ۲۴ تعریف می‌شود:

$$Q^+ = V \Sigma^+ U^* \quad (۲۴)$$

که در آن ماتریس قطری Σ^+ به صورت معادله ۲۵ تعریف می‌شود:

$$(\Sigma^+)_{kk} = \begin{cases} \sigma_k^{-1} & \sigma_k \neq 0 \\ 0 & \sigma_k = 0 \end{cases} \quad (۲۵)$$

ستون‌هایی از V شامل مقادیر تکین که مقداری برابر با صفر دارند، در ساخت ماتریس Q^+ اثری ندارند. بنابراین با محاسبه مقدار تجزیه مقادیر تکین ماتریس Q ، هم ماتریس معکوس و هم ماتریس فضای پوچ به دست می‌آید.

۲-۴- مراحل گام‌به‌گام حل به روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته

مراحل حل به روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته به صورت خلاصه برای یک مثال خطی به صورت زیر است [۹]:

۱- تولید ماتریس Q با استفاده از معادله ۱۳

۲- محاسبه تجزیه مقادیر تکین ماتریس Q

۳- محاسبه c^h از معادله ۱۵ به کمک محاسبه d از معادله ۲۱

۴- محاسبه جواب نهایی u .

۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان سیال شامل معادلات پیوستگی (بقای جرم) و تعادل دینامیک (بقای اندازه حرکت) است. در روش حاضر، این معادلات برای سیال نیوتنی، تراکم‌ناپذیر و غیرلزج در قالب لاگرانژی مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۱- معادله پیوستگی (بقای جرم)

معادله بقای جرم در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0 \quad (۲۶)$$

که در رابطه فوق، ρ چگالی سیال، $\frac{D\rho}{Dt}$ مشتق کامل یا مادی متغیر

حال برای به‌دست‌آوردن ضرایب مجهول d_i از ارضای شرایط مرزی استفاده می‌شود. برای این منظور از رابطه ۱۹ استفاده می‌شود. درایه‌های بردار $\mathbf{g}$ در رابطه ۱۹، مقادیر شرایط مرزی معادله ۴۱ در لحظه و هندسه مورد نظر است. بنابراین در درایه اول این بردار، مربوط به Γ_s ، مقادیر رابطه ۳۸ قرار داده می‌شود که این مقادیر براساس شتاب سازه صلب در تماس با سیال در نقطه مرزی مربوطه محاسبه می‌شود. در S نقطه باقیمانده، مربوط به سطح آزاد Γ_F ، مقادیر مرزی از رابطه ۴۰ قرار می‌گیرد. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a}|_{(x_1, y_1)} \\ -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a}|_{(x_2, y_2)} \\ \vdots \\ -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a}|_{(x_{m-s}, y_{m-s})} \\ \vdots \\ \rho g y|_{(x_{m-s+1}, y_{m-s+1})} \\ \vdots \\ \rho g y|_{(x_m, y_m)} \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (45)$$

رابطه فوق را می‌توان به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -\rho(n_x a_x + n_y a_y)|_{(x_1, y_1)} \\ -\rho(n_x a_x + n_y a_y)|_{(x_2, y_2)} \\ \vdots \\ -\rho(n_x a_x + n_y a_y)|_{(x_{m-s}, y_{m-s})} \\ \vdots \\ \rho g y|_{(x_{m-s+1}, y_{m-s+1})} \\ \vdots \\ \rho g y|_{(x_m, y_m)} \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (46)$$

ماتریس $\mathbf{P}$ براساس شرایط مرزی موجود در هر یک از نقاط مرزی یا به عبارت دیگر، براساس درایه‌های بردار $\mathbf{g}$ تعریف می‌شود. بنابراین در نقاط مربوط به Γ_s باید $\frac{\partial}{\partial n} l$ ام در آن نقطه محاسبه شود. در نقاط مربوط به Γ_F نیز مقدار پایه l ام در آن نقطه محاسبه و در درایه نظیرش در ماتریس $\mathbf{P}$ قرار داده می‌شود. بنابراین، با توجه به توضیحات ارائه شده می‌توان نوشت:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e^{\alpha_1 x_1 + \gamma_1 \beta_1}}{\partial n} & \dots & \frac{\partial e^{\alpha_k x_1 + \gamma_1 \beta_k}}{\partial n} \\ \frac{\partial e^{\alpha_1 x_2 + \gamma_2 \beta_1}}{\partial n} & \dots & \frac{\partial e^{\alpha_k x_2 + \gamma_2 \beta_k}}{\partial n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e^{\alpha_1 x_{m-s} + \gamma_{m-s} \beta_1}}{\partial n} & \dots & \frac{\partial e^{\alpha_k x_{m-s} + \gamma_{m-s} \beta_k}}{\partial n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e^{\alpha_1 x_{m-s+1} + \gamma_{m-s+1} \beta_1}}{\partial n} & \dots & \frac{\partial e^{\alpha_k x_{m-s+1} + \gamma_{m-s+1} \beta_k}}{\partial n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\alpha_1 x_m + \gamma_m \beta_1} & \dots & e^{\alpha_k x_m + \gamma_m \beta_k} \end{bmatrix} \quad (47)$$

حال برای تعیین ماتریس مجهولات $\mathbf{d}$ از معادله ۲۱ استفاده می‌شود. با معلوم شدن ماتریس مجهولات $\mathbf{d}$ ، ماتریس ضرایب $\mathbf{c}^h$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{c}^h = \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (48)$$

با به‌دست‌آوردن ماتریس مجهولات $\mathbf{d}$ و بنابراین، ماتریس ضرایب $\mathbf{c}^h$ تابع مجهول $\hat{p}_H$ در هر جای دامنه قابل محاسبه خواهد بود و حل معادله ۴۱ کامل خواهد بود.

۴-۱ نحوه انتخاب ضرایب β_i و α_i

در تحقیق حاضر، براساس تجربه مسایل مختلف، محدوده مناسب ضرایب پایه‌های حل به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

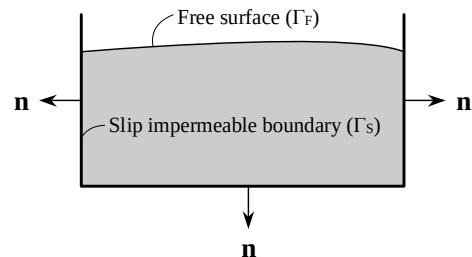
شکل ۳ نشان داده شده‌اند. شرط مرزی روی سطح آزاد Γ_F به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$p|_{\Gamma_F} = 0 \quad (39)$$

که با توجه به رابطه ۳۵ می‌توان نوشت:

$$p_H|_{\Gamma_F} = \rho g y|_{\Gamma_F} \quad (40)$$

همان گونه که ملاحظه می‌شود، در صورت حل معادله لاپلاس ۳۶ همراه با شرایط مرزی ۳۸ و ۴۰ و با در نظر گرفتن رابطه ۳۵، فشار در یک لحظه و یک هندسه مشخص محاسبه می‌شود، سپس با استفاده از رابطه ۳۷، شتاب لاگرانژی به دست می‌آید [11].



شکل ۳) مرزهای سیال احاطه شده توسط دیواره‌های صلب

۴- حل معادله لاپلاس فشار به روش توابع پایه تعمیم یافته ابتدا با در نظر گرفتن معادله ۳۶:

$$\nabla^2 p_H = 0 \quad (41)$$

می‌توان نوشت:

$$\hat{p}_H = \sum_{i=1}^k c_i e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (42)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \hat{p}_H = \sum_{i=1}^k c_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$

در رابطه فوق، x و y مختصات یک نقطه عمومی در دامنه Ω یا روی مرز Γ است و α_i و β_i اعداد حقیقی هستند و ضرایب c_i چنان تعیین می‌شوند که شرایط مرزی ارضا شود. برای محاسبه ضرایب c_i تعداد m نقطه روی مرز Γ و تعداد n نقطه در دامنه Ω در نظر گرفته می‌شود. از تعداد m نقطه روی مرز، تعداد s نقطه روی سطح آزاد Γ_F سیال در نظر گرفته می‌شود و $p = m - s$ نقطه بر دیگر مرزها که فصل مشترک سیال و سازه صلب است، Γ_s خواهد بود (شکل ۴).

برای محاسبه ضرایب c_i از رابطه ۱۲ استفاده می‌شود. برای به‌دست‌آوردن حلی غیربدهی، $\mathbf{c}^h$ باید عضوی از فضای پوچ ماتریس $\mathbf{Q}$ باشد (رابطه ۱۴)؛ در این صورت ضرایب $\mathbf{c}^h$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

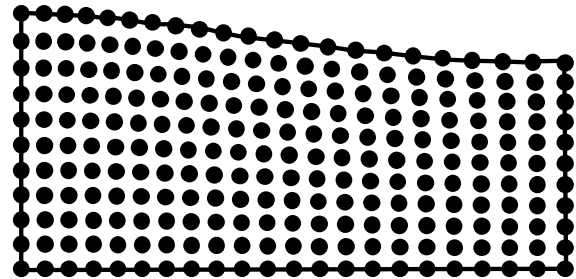
$$\mathbf{c}^h = \sum_{i=1}^b \mathbf{t}_i d_i = \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (43)$$

که شکل باز آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^b \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_k^1 & t_k^2 & \dots & t_k^b \end{bmatrix}_{k \times b} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_b \end{bmatrix}_{b \times 1} \quad (44)$$

$$\alpha, \beta \in \left[-\frac{0.2}{\max(l_1, l_2)}, \frac{0.2}{\max(l_1, l_2)} \right] \quad (۴۹)$$

که در این رابطه l_1 و l_2 فواصل نقاط در دو جهت هستند. پایه‌های حل نیز به تعداد مورد نیاز با رعایت حدود فوق، قابل تولید خواهند بود.[12]



شکل ۴: نقاط در نظر گرفته شده روی مرزها و داخل دامنه

۵- الگوریتم لاگرانژی حل و بهنگام‌سازی هندسه

در این قسمت الگوریتم زمانی بیان می‌شود که در یک مرجع [12] ارائه شده است. برای این منظور، ابتدا هندسه اولیه مساله مورد نظر تعریف می‌شود و دامنه حل و مرزها به نقطه گسسته‌سازی می‌شوند. پس از تقسیم کل زمان حل به بازه‌های زمانی کوچک Δt در هر گام زمانی، معادله ۳۷ دو مرتبه حل می‌شود. اگر فرض شود که در حال حاضر، حل مساله در گام n ام $(t^{n+1} - t^n)$ است، سرعت سیال در ابتدای این گام زمانی، لحظه t^n به صورت V^n نشان داده می‌شود. ابتدا شرایط مرزی در لحظه t^n و در هندسه موجود در این لحظه، x^n ، با استفاده از رابطه ۴۵ محاسبه می‌شود:

$$g^n = g(t^n, x^n) \quad (۵۰)$$

ماتریس P ، Q و T ، نیز در لحظه t^n و هندسه x^n ، محاسبه و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$P^n = P(t^n, x^n) \quad (۵۱)$$

$$Q^n = Q(t^n, x^n) \quad (۵۲)$$

$$T^n = T(t^n, x^n) \quad (۵۳)$$

در این صورت، پاسخ معادله ۴۱ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{p}_H^n = \sum_{i=1}^k c_i^n e^{\alpha_i x^{(n)} + \beta_i y^{(n)}} \quad (۵۴)$$

و ضرایب c_i^n به صورت زیر خواهند بود:

$$c_i^n = T^n d^n \quad (۵۵)$$

و ضرایب d^n با استفاده از رابطه ۲۱ محاسبه می‌شود:

$$d^n = (P^n T^n)^+ g^n \quad (۵۶)$$

بنابراین حل معادله لاپلاس فشار در ابتدای گام زمانی n ام، لحظه t^n کامل خواهد بود. حال با توجه به رابطه ۳۷، اگر شتاب لاگرانژی a با $\frac{DV}{Dt}$ نشان داده شود، می‌توان نوشت:

$$a = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p}_H \quad (۵۷)$$

و بنابراین شتاب نقاط مرزی در موقعیت x^n و لحظه t^n به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a^n = a^n(t^n, x^n) = -\frac{1}{\rho} \sum c_i^n [\alpha_i] e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (۵۸)$$

پس از به دست آوردن مقادیر عددی شتاب در تمام درجات آزادی دامنه و مرزها و قراردادن آنها در بردار a^n ، سرعت نقاط با استفاده از رابطه زیر بهنگام می‌شود:

$$\tilde{V}^{n+1} = V^n + a^n \Delta t \quad (۵۹)$$

در رابطه فوق، $\tilde{V}^{n+1}$ در واقع سرعت در انتهای گام زمانی است. حال با استفاده از رابطه زیر، نقاط گرهی مرزها جابه‌جا می‌شوند:

$$\tilde{x}^{n+1} = x^n + \tilde{V}^{n+1} \Delta t \quad (۶۰)$$

به این ترتیب تقریبی از هندسه نهایی حاصل خواهد شد. $\tilde{x}^{n+1}$ هندسه‌ای واسطه است و از این هندسه برای محاسبه سرعت در انتهای بازه زمانی استفاده خواهد شد. سپس هندسه نهایی در این گام زمانی محاسبه می‌شود. حال مقادیر $\tilde{V}^{n+1}$ با استفاده از پایه‌های نمایی قبلی مجدداً به صورت یک تابع تحلیلی، بیان و سپس در هندسه $\tilde{x}^{n+1}$ به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$V^{n+1} = \tilde{V}^{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) \quad (۶۱)$$

این سرعت به عنوان سرعت اولیه گام بعدی ذخیره می‌شود. سپس هندسه نهایی توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$x^{n+1} = x^n + (V^n(1 - \gamma) + V^{n+1}\gamma)\Delta t \quad (۶۲)$$

در رابطه فوق، پارامتر تطبیقی γ در محدوده $0 \leq \gamma \leq 1$ قابل استفاده خواهد بود. $\gamma = 1$ یک الگوریتم زمانی کاملاً ضمنی را نتیجه می‌دهد. مقدار γ بر پایداری حل و تغییر حجم سیال در طول حل اثر دارد و در این تحقیق، بهینه‌ترین مقدار آن از نظر تغییر حجم به دست آمده است.

۱-۵- خلاصه مراحل حل

خلاصه مراحل حل به صورت زیر بیان می‌شود:

۱- مقداردهی اولیه مساله با استفاده از شرایط اولیه در گام $n = 0$ و در لحظه $t = 0$ شامل هندسه اولیه و سرعت اولیه در صورت وجود

۲- محاسبه شرایط مرزی مساله در هندسه فعلی x^n و در لحظه t^n توسط ۵۰

۳- حل معادله لاپلاس فشار با شرایط مرزی روی دیواره‌ها و سطح آزاد مربوط به هندسه x^n و در لحظه t^n و محاسبه شتاب با استفاده از رابطه ۵۸

۴- بهنگام‌سازی سرعت نقاط با استفاده از رابطه ۵۹

۵- بهنگام‌سازی هندسه (مختصات نقاط گره‌ای) با استفاده از سرعت محاسبه شده در مرحله قبل، با استفاده از رابطه ۶۰

۶- درون‌یابی سرعت $\tilde{V}^{n+1}$ روی هندسه x^n و محاسبه سرعت در هندسه $\tilde{x}^{n+1}$ که با V^{n+1} بیان می‌شود. این سرعت به عنوان سرعت اولیه گام بعدی ذخیره می‌شود.

۷- بهنگام‌سازی نهایی هندسه (مختصات نقاط گره‌ای) با استفاده از رابطه ۶۲ و ذخیره آن به عنوان هندسه اولیه گام بعدی

۸- رفتن به گام دو و تکرار تا پایان حل.

۶- شبیه‌سازی سیال دارای سطح آزاد بر مبنای فرمول‌بندی فشار

در این قسمت، مسایل حل شده با روش ذکر شده در قسمت قبل بیان می‌شود. مخازن حل شده، مخازن مستطیلی با ابعاد مختلف هستند که تحت تحریک افقی به صورت سینوسی و کسینوسی قرار گرفته‌اند و در مراجع مختلف با روش‌های متفاوت عددی، تحلیلی یا آزمایشگاهی حل شده‌اند و نتایج آنها ارائه شده است.

۶-۱- مخزن به طول (L) ۰/۸ متر و عمق (h) ۰/۱ متر تحت تحریک افقی، مقایسه با روش المان مرزی

با توجه به اینکه سیال مورد نظر آب است، می‌توان از لزجت آن صرف نظر کرد. چگالی آب در محاسبات برابر $\rho = 1g/cm^3$ و شتاب ثقل $g = 981cm/s^2$ منظور می‌شود. اولین فرکانس طبیعی مخزن مستطیلی با استفاده از تئوری موج خطی، از رابطه زیر قابل محاسبه است [13]:

در حالتی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم متفاوت باشد، برش پایه با استفاده از تئوری موج خطی در مرجع [13] ارایه شده است که در نتایج ارایه می‌شود و البته به علت اختلاف زیاد، با حل غیرخطی قابل مقایسه نیست. اما به منظور مقایسه می‌توان برش پایه را با استفاده از فشار هیدرواستاتیک وارد بر دیواره‌ها به صورت زیر نیز تقریب زد:

$$\bar{F}_b = \frac{\rho g B}{2} (h_R^2 - h_L^2) \quad (۶۸)$$

که B عرض مخزن و h_L و h_R به ترتیب، ارتفاع آب در دیواره‌های راست و چپ مخزن است. نیروی محاسبه شده توسط رابطه فوق، برش پایه هیدرواستاتیک نامیده می‌شود.

۶-۱-۳- مقایسه و تایید نتایج

با توجه به اینکه اولین فرکانس طبیعی مخزن مورد مطالعه برابر ۳/۷۹ رادیان بر ثانیه بوده، حل برای فرکانس‌های تحریک برابر ۱/۹، ۳/۷۹ و ۱۱/۳۸ رادیان بر ثانیه انجام شده است. بدین ترتیب، پدیده تشدید و فرکانس‌های کمتر و بیشتر آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول‌های ۲ و ۳ همانند جدول ۱، پارامترهای استفاده شده در الگوریتم را برای فرکانس تحریک ۱/۹ و ۱۱/۳۸ رادیان بر ثانیه نشان می‌دهد. دامنه تحریک A_f در هر سه مورد برابر ۰/۰۴ سانتی‌متر است. در مرجع [13] برای هر سه حالت از $\Delta t = 0/001$ (ثانیه) و تعداد ۶۰۰ المان مربعی استفاده شده است.

جدول ۲ مقادیر متغیرهای استفاده شده در الگوریتم برای مخزن $L=80\text{ cm}$
 $\omega_1 = 1/9\text{ rad/s}$ و $h=10\text{ cm}$

Δt	تعداد نقاط گرهی	تعداد پایه‌ها	(γ)	محدوده پایه‌ها
۰/۰۱	۳۶۴	۴۴۱	۰/۵	-۰/۰۲۲، ۰/۰۲۲

جدول ۳ مقادیر متغیرهای استفاده شده در الگوریتم برای مخزن $L=80\text{ cm}$
 $\omega_1 = 11/38\text{ rad/s}$ و $h=10\text{ cm}$

Δt	تعداد نقاط گرهی	تعداد پایه‌ها	(γ)	محدوده پایه‌ها
۰/۰۱	۹۰۲	۱۳۶۷	۱	-۰/۱۱، ۰/۱۱

در نمودار ۱- الف تا ج، نتایج ارتفاع موج در دیواره سمت راست، نمودار ۲- الف تا ج، نیروی برش پایه و نمودار ۳، تغییر حجم سیال در طول حل برای هر سه فرکانس تحریک ارایه شده است. تطابق نتایج با مرجع [13] به خوبی مشاهده می‌شود و همان گونه که مشخص است به علت کوچک بودن فرکانس تحریک و کمترین آن نسبت به فرکانس تشدید، برش پایه هیدرواستاتیک و هیدرواستاتیک تقریباً بر هم منطبق هستند. در نمودار ۴ نیز پروفیل سطح آزاد به همراه بردارهای سرعت سیال در زمان‌های مختلف مشاهده می‌شود.

۶-۲- مخزن به طول یک متر و عمق ۵/۵ متر تحت تحریک افقی، مقایسه با حل تحلیلی

یک نمونه پاسخ تحلیلی توسط *فالتینسن* [14] و وو و همکاران [15] ارایه شده است. بر این اساس، پاسخ تحلیلی خطی سازی شده برای ارتفاع موج روی سطح آزاد (η در شکل ۶) در یک مخزن مستطیلی به طول L و عمق h در اثر تحریک افقی سینوسی با دامنه x_0 و فرکانس ω_x ، $X(t) = x_0 \sin(\omega_x t)$ ، به صورت $\eta = \eta_1 + \eta_2$ بیان می‌شود که η_1 و η_2 به صورت زیر خواهد بود:

$$\eta_1(x, t) = \frac{x_0}{g} (x \omega_x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \omega_x \sin(k_n x)) \sin(\omega_x t) \quad (۶۹-الف)$$

$$\eta_2(x, t) = \quad (۶۹-ب)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh \frac{\pi h}{L}} \quad (۶۳)$$

که در رابطه فوق، L طول مخزن، h ارتفاع آب در حالت ساکن و g شتاب ثقل است. برای مقایسه نتایج و امکان بررسی آنها، با توجه به مرجع [13]، طول مخزن (L) ۸۰ سانتی‌متر، عرض (B) ۱۴/۱ سانتی‌متر و عمق آب (h) ۱۰ سانتی‌متر در نظر گرفته می‌شود و لذا اولین فرکانس طبیعی سیستم (ω_1) برابر ۳/۷۹ رادیان بر ثانیه خواهد بود. برای مدل‌سازی عددی مساله برای فرکانس طبیعی، از ۲۵۲ نقطه گرهی و ۸۱ پایه استفاده شده و سایر مشخصات الگوریتم در جدول ۱ آورده شده است. در این تحقیق، گام زمانی که در ابتدای حل مساله تعریف می‌شود، با Δt برحسب ثانیه نشان داده می‌شود.

۶-۱-۶- تحریک هارمونیک تکیه‌گاه مخزن

با توجه به شکل ۵، مخزن مورد مطالعه تحت تحریک افقی شتاب قرار گرفته و شتاب اعمالی به صورت زیر است:

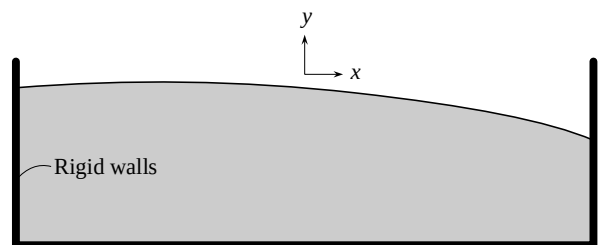
$$\ddot{X}_g(t) = A_f \omega_f^2 \cos(\omega_f t) \quad (۶۴)$$

که در رابطه فوق، A_f دامنه جابه‌جایی مخزن و ω_f فرکانس تحریک کف مخزن است. بنابراین شتاب نقاط مرزی در رابطه ۴۵ به صورت زیر خواهد بود:

$$a|_{\Gamma_s} = \left\{ \begin{matrix} a_x|_{\Gamma_s} \\ a_y|_{\Gamma_s} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A_f \omega_f^2 \cos(\omega_f t) \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (۶۵)$$

جدول ۱ مقادیر متغیرهای استفاده شده در الگوریتم برای مخزن $L=80\text{ cm}$
 $\omega_1 = 3/79\text{ rad/s}$ و $h=10\text{ cm}$

Δt	تعداد نقاط گرهی	تعداد پایه‌ها	(γ)	محدوده پایه‌ها
۰/۰۱	۲۵۲	۸۱	۱	-۰/۰۱۷، ۰/۰۱۷



Horizontal harmonic excitation

شکل ۵ مخزن مستطیلی تحت تحریک هارمونیک

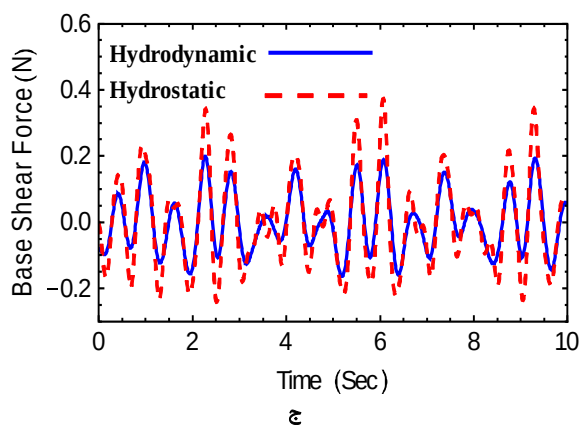
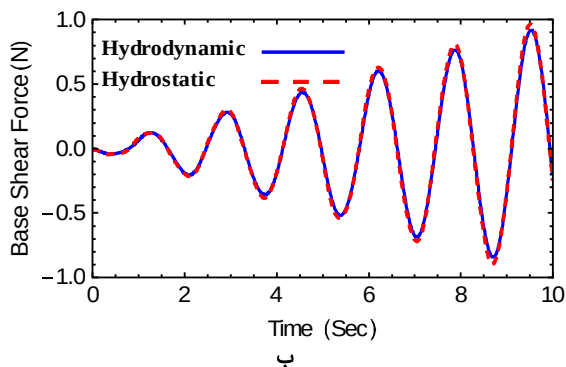
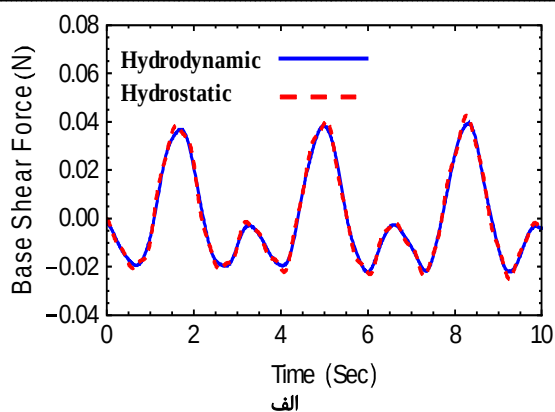
۶-۲-۶- محاسبه نیروی برش پایه

هنگامی که نوسانات سیال درون یک مخزن اتفاق می‌افتد، نیروی برش پایه ایجاد شده در کف مخزن، با انتگرال‌گیری فشار هیدرواستاتیک روی دیواره‌های مخزن محاسبه می‌شود. در این باره باید توجه شود که مرزهای سیال در طول حل تغییر می‌کنند و این مساله مهم باید در انتگرال‌گیری مد نظر باشد. پس از محاسبه فشار هیدرواستاتیک، مولفه فشار در راستای افق از رابطه زیر قابل محاسبه است:

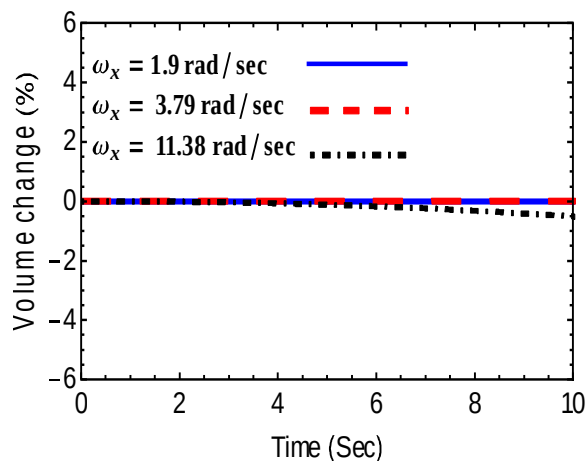
$$p_x = p n_x \quad (۶۶)$$

که در رابطه فوق، n_x مولفه افقی بردار واحد عمود بر مرز سیال است. در نهایت، نیروی برش پایه ایجاد شده در کف مخزن به صورت زیر خواهد بود:

$$F_b = \int p_x d\Gamma_s \quad (۶۷)$$



نمودار ۱ (۲) نیروی برش پایه در کف مخزن: الف) $\omega = 1/9 \text{ rad/s}$ ب) $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$ ج) $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$ د) $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$



نمودار ۳ (۳) تغییر حجم سیال در طول حل عددی

$$-\frac{x_0}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (C_n + H_n)$$

$$/ \omega_x^2 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

که g شتاب ثقل بوده و دیگر پارامترها به صورتی که در ادامه آمده است، تعریف می‌شوند:

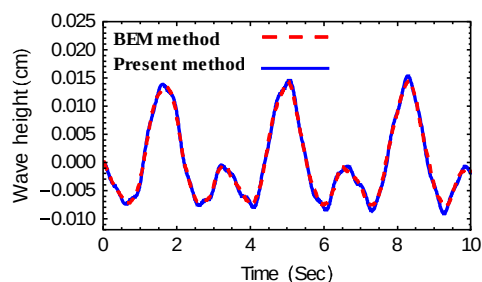
$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{L} \quad (70\text{-الف})$$

$$\omega_n = (g k_n \tanh(k_n h))^{\frac{1}{2}} \quad (70\text{-ب})$$

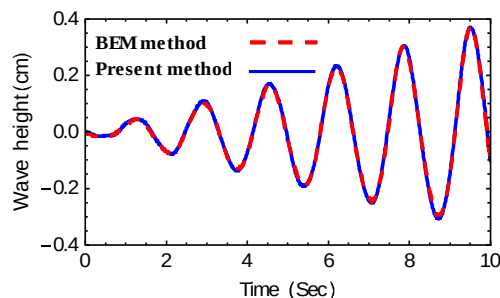
$$H_n = \omega_x^3 \frac{4(-1)^{n-1}}{L k_n^2} \quad (70\text{-ج})$$

$$C_n = \frac{H_n}{\omega_n^2 - \omega_x^2} \quad (70\text{-د})$$

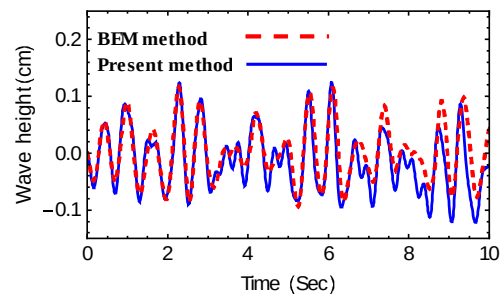
با توجه به مشخصات مساله و استفاده از تئوری موج خطی (رابطه ۶۳)، اولین فرکانس طبیعی سیستم برابر $5/3166 \text{ rad/s}$ بر ثانیه خواهد بود. دامنه تحریک مخزن نیز به صورت $x_0 = 0.0186h$ در نظر گرفته شده است. در اینجا حل این مساله برای فرکانس‌های $\omega_x = 0/999\omega_1$ و $\omega_x = 0/9\omega_1$ انجام شده است و نتایج آن در ادامه ذکر می‌شود. لازم به ذکر بوده که در مراجع مختلف، از این مساله با همین مشخصات برای اعتبارسنجی حل عددی استفاده شده است (به عنوان نمونه به مطالعه گودرزی و صباغ‌یزدی^[16] مراجعه شود) شکل ۷، درجات آزادی مورد استفاده در حل این مخزن با فرکانس تحریک $\omega_x = 0/9\omega_1$ را نشان می‌دهد. جدول‌های ۴ و ۵، مقادیر متغیرهای استفاده شده را در الگوریتم برای فرکانس‌های تحریک $\omega_x = 0/999\omega_1$ و $\omega_x = 0/9\omega_1$ بیان می‌کنند.



الف



ب



ج

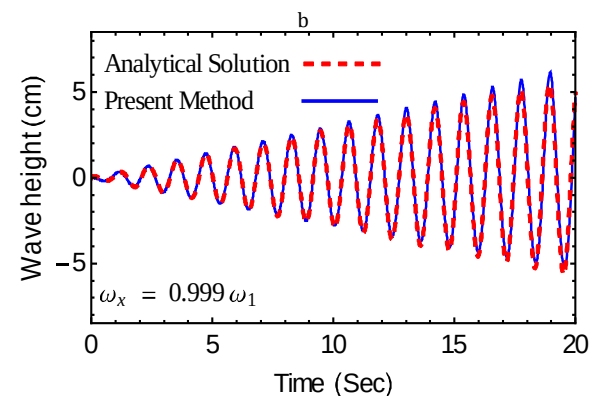
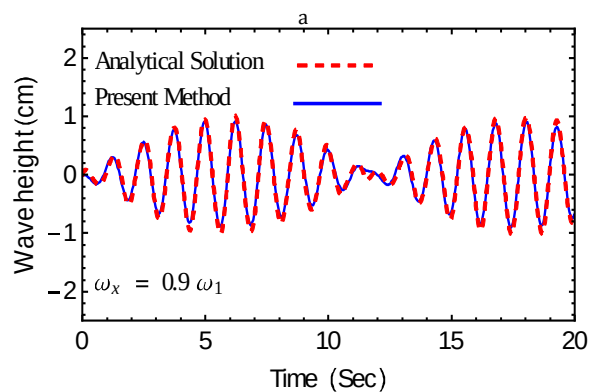
نمودار ۱ (۱) ارتفاع موج در دیواره سمت راست مخزن: الف) $\omega = 1/9 \text{ rad/s}$ ب) $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$ ج) $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$ د) $\omega = 1/3 \text{ rad/s}$

نمودار ۵، ارتفاع موج در دیواره سمت چپ مخزن در مقایسه با حل تحلیلی است که تطابق حل عددی با حل تحلیلی به خوبی دیده می‌شود و نمودار ۶، تغییر حجم سیال در طول حل را نشان می‌دهد که با روش حاضر به دست آمده است.

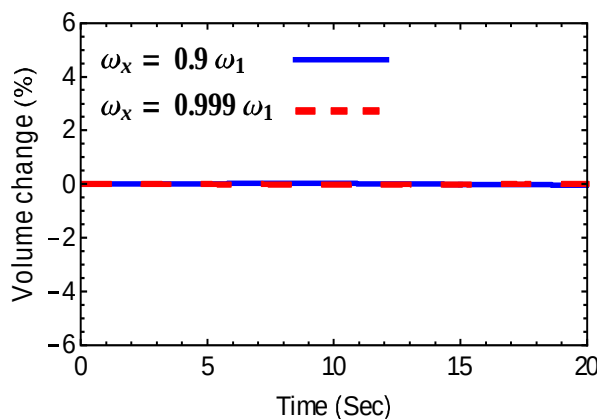
حل این مساله برای فرکانس‌های $\omega_x = 0.9\omega_1$ ، $\omega_x = 0.999\omega_1$ انجام شده است. در حالت $\omega_x = 0.9\omega_1$ پدیده ضربه قابل مشاهده بوده که به خوبی توسط حل عددی حاصل شده است. پریود پدیده ضربه از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$T_{\text{Beating}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (7)$$

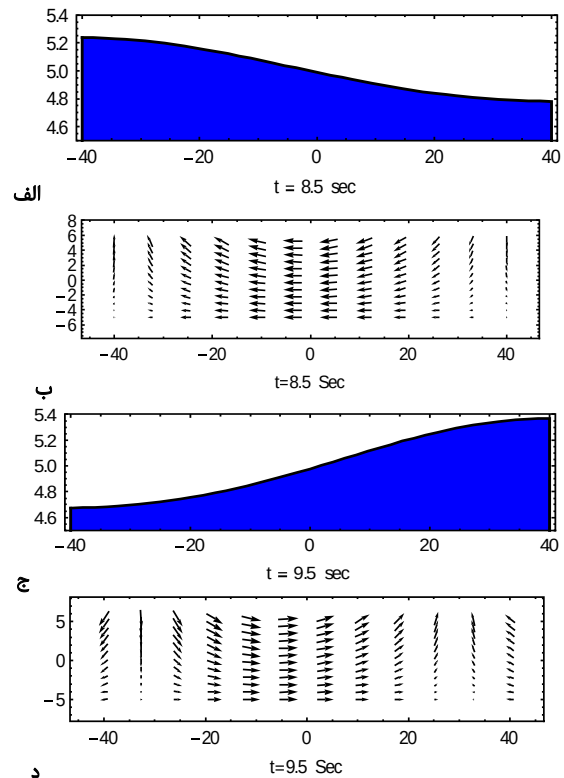
که منظور از $\Delta\omega$ ، اختلاف فرکانس تحریک با ω_1 است. بر این اساس، برای حالت فوق T_{Beating} برابر $11/82$ ثانیه محاسبه می‌شود که در نتایج نیز قابل مشاهده است (نمودارهای ۷ و ۸).



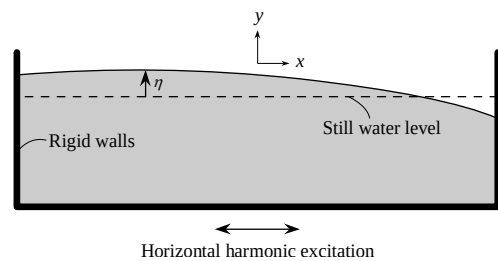
نمودار ۵) ارتفاع موج در دیواره سمت چپ مخزن؛ الف) $\omega_x = 0.9\omega_1$ ، ب) $\omega_x = 0.999\omega_1$



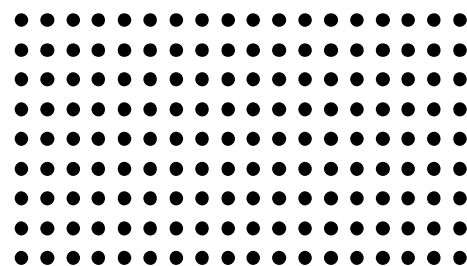
نمودار ۶) تغییر حجم سیال در طول حل عددی



نمودار ۴) پروفیل سطح آزاد مخزن بر اثر تحریک هارمونیک با فرکانس تحریک $\omega = 3/79 \text{ rad/s}$ در زمان‌های متفاوت به همراه میدان سرعت سیال



شکل ۶) مخزن مستطیلی تحت تحریک هارمونیک



شکل ۷) نقاط گرهی مورد استفاده، طول مخزن $L=1\text{m}$ ، عمق آب $h=0.5\text{m}$ برای فرکانس تحریک $\omega_x = 0.9\omega_1$

جدول ۴) مقادیر متغیرهای استفاده شده در الگوریتم برای مخزن $L=1\text{m}$ ، $\omega_x = 0.9 \text{ rad/s}$ و $h=0.5\text{m}$

Δt	تعداد نقاط گرهی	تعداد پایه‌ها	γ	محدوده پایه‌ها
۰/۰۳	۱۶۲	۲۲۵	۱	-۰/۱۶، ۰/۱۶

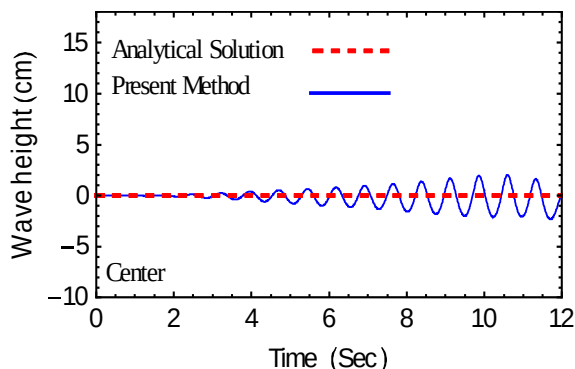
جدول ۵) مقادیر متغیرهای استفاده شده در الگوریتم برای مخزن $L=1\text{m}$ ، $\omega_x = 0.999 \text{ rad/s}$ و $h=0.5\text{m}$

Δt	تعداد نقاط گرهی	تعداد پایه‌ها	γ	محدوده پایه‌ها
۰/۰۱	۲۱۰	۲۲۵	۰/۵۷	-۰/۱۶، ۰/۱۶

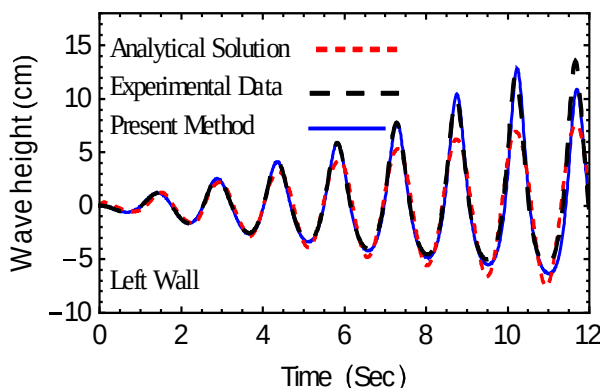
جدول ۷) تعداد درجات آزادی، پایه‌ها و مقادیر سایر پارامترها در الگوریتم برای حل عددی

ω_x/ω_1	Δt	تعداد نقاط گرهی	تعداد پایه‌ها	(γ)	محدوده پایه‌ها
۱/۰۳۸	۰/۰۱	۱۹۸	۷۸۴	۰/۴	-۰/۰۱۱، ۰/۰۱۱

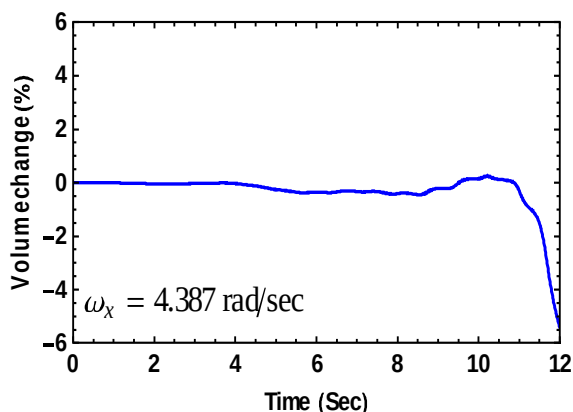
نمودارهای ۹ و ۱۰، نتایج حاصل از حل عددی را در مقایسه با حل تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی برای ارتفاع یک نقطه از موج در مرکز یا سمت چپ مخزن نشان می‌دهد. نمودار ۱۱ نیز نتیجه تغییر حجم سیال را در طول حل عددی ارائه می‌دهد. در نمودار ۱۲، پروفیل سطح آزاد به همراه بردارهای سرعت، ارائه و در نمودار ۱۳ نیز وضعیت سطح آزاد، در یک لحظه، در مقایسه با نتایج روش عددی و کار آزمایشگاهی در مرجع [16] نشان داده شده است.



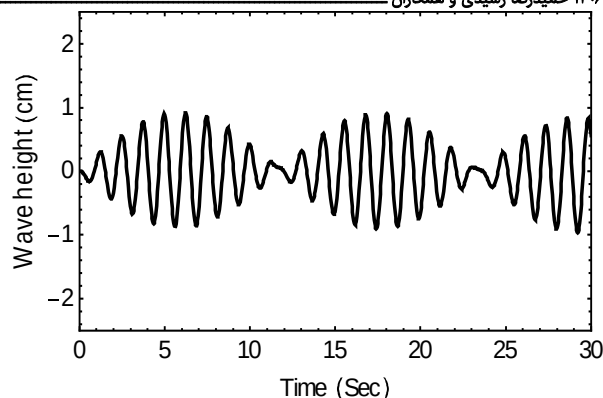
نمودار ۹) ارتفاع موج در مرکز مخزن در مقایسه با حل تحلیلی ($\omega_x = 1/0.38 \omega_1$)



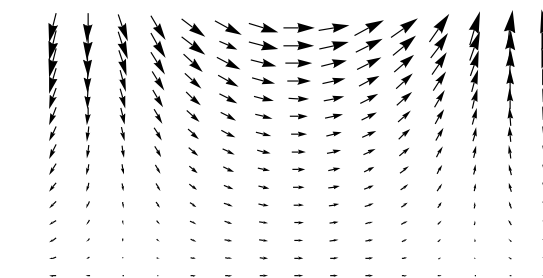
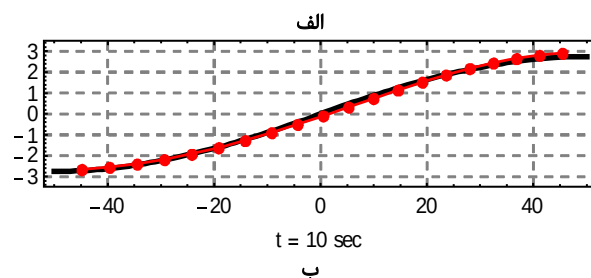
نمودار ۱۰) ارتفاع موج در سمت چپ مخزن در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و حل تحلیلی ($\omega_x = 1/0.38 \omega_1$)



نمودار ۱۱) تغییر حجم سیال در طول حل عددی



نمودار ۱۲) ارتفاع موج در دیواره سمت چپ مخزن، مشاهده پدیده ضربه در حالت $\omega_x = 0.9 \omega_1$



نمودار ۱۴) پروفیل سطح آزاد و میدان سرعت در حالت $\omega_x = 0.999 \omega_1$ در ثانیه دهم (حل عددی روش حاضر با $\omega_x = 0.999 \omega_1$ و حل تحلیلی با $\omega_x = 0.999 \omega_1$ نشان داده شده است)

۳-۶- مخزن به طول ۰/۹۶ سانتی‌متر و عمق ۰/۱۹۲ سانتی‌متر تحت تحریک افقی، مقایسه با نتایج آزمایشگاهی:

آزمایشی که از نتایج آن برای بررسی صحت پاسخها استفاده شده، در پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله واقع در تهران، انجام و در مطالعه‌ای [16] منتشر شده است. موردی که در اینجا به شبیه‌سازی آن پرداخته می‌شود، مخزن به طول ۰/۹۶ سانتی‌متر و عمق ۰/۱۹۲ سانتی‌متر است. تحریک مخزن به صورت سینوسی با دامنه جابه‌جایی ۰/۰۰۵ متر است. فرکانس تحریک نیز شامل حالات مختلف بوده که در جدول ۶، یک مورد از آن حالات نشان داده شده است. جدول ۷ نیز تعداد درجات آزادی و پایه‌ها و سایر مشخصات الگوریتم را برای حل عددی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که روش توابع پایه نمایی، توانایی حل این مثال و مسایل با جابه‌جایی‌های بزرگ را ندارد.

جدول ۶) پارامترهای آزمایش و حل عددی

ω_x/ω_1	$\omega_x(\text{rad/s})$	$\omega_1(\text{rad/s})$	$h(\text{m})$	$L(\text{m})$
۱/۰۳۸	۴/۳۸۷	۴/۲۲۸	۰/۱۹۲	۰/۹۶

به‌دست‌آمده حاصل از این تحقیق، تطابق بسیار خوب و قابل قبولی با نتایج به‌دست‌آمده از دیگر روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند که به‌لحاظ دقت حل مساله و صرف وقت، روش حاضر در حالت دو بعدی، در مقایسه با دیگر روش‌های لاگرانژی موجود، بسیار در خور توجه است و این روش می‌تواند به‌منظور شبیه‌سازی مسایل با جابه‌جایی‌های بزرگ استفاده شود.

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان ذکر نشده است.

تأییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان ذکر نشده است.

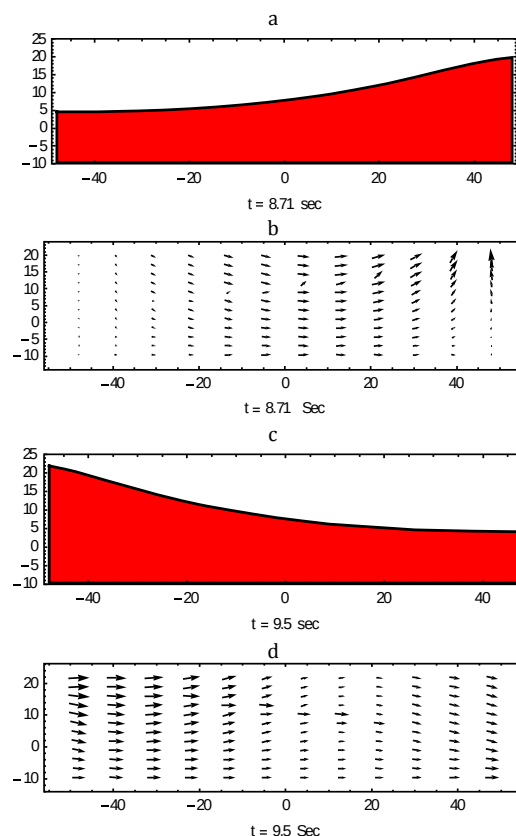
تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان ذکر نشده است.

سهم نویسندگان: حمیدرضا رشیدی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناس/پژوهشگر اصلی (۴۰٪)؛ سیدمهدی زندی (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۳۰٪)؛ فرشید مسیبی (نویسنده سوم)، پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری (۳۰٪)

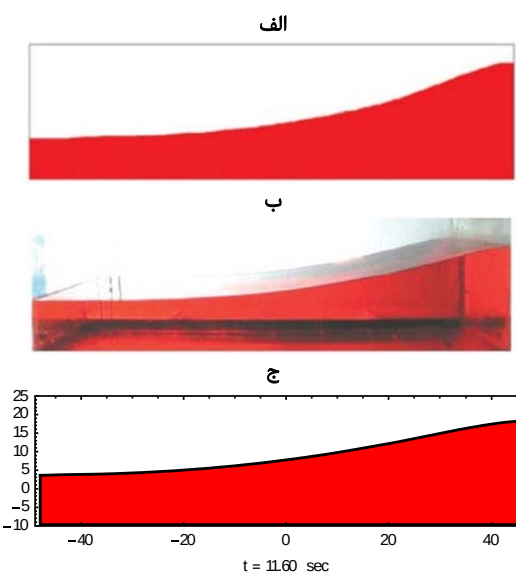
منابع مالی: موردی از سوی نویسندگان ذکر نشده است.

منابع

- 1- Abramson HN. The dynamic behavior of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology [Internet]. Washington: NASA; 1966 [cited 15 Jan 2018]. Available from: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19670006555>
- 2- Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977;181(3):375-389.
- 3- De Chowdhury S, Sannasiraj SA. Numerical simulation of 2D sloshing waves using SPH with diffusive terms. Applied Ocean Research. 2014;47:219-240.
- 4- Rouzbahani F, Hejranfar K. A truly incompressible smoothed particle hydrodynamics based on artificial compressibility method. Computer Physics Communications. 2017;210:10-28.
- 5- Swegle JW, Hicks DL, Attaway SW. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. Journal of Computational Physics. 1995;116(1):123-134.
- 6- Zandi SM, Boroomand B, Soghrati S. Exponential basis functions in solution of incompressible fluid problems with moving free surfaces. Journal of Computational Physics. 2012;231(2):505-527.
- 7- Zhang T, Ren YF, Fan CM, Li PW. Simulation of two-dimensional sloshing phenomenon by generalized finite difference method. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016;63:82-91.
- 8- Mossaiby F, Ghaderian M, Rossi R. Implementation of a generalized exponential basis functions method for linear and non-linear problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2016;105(3):221-240.
- 9- Mossaiby F, Bamonar MJ, Asadi A. Solving time-dependent problems using the generalized exponential basis functions method. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(10):271-280. [Persian]
- 10- Boroomand B, Soghrati S, Movahedian B. Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010;81(8):971-1018.
- 11- Zandi SM. Fluid-structure interaction using exponential basis functions via a lagrangian meshless



نمودار ۱۲) پروفیل سطح آزاد مخزن بر اثر تحریک هارمونیک با فرکانس تحریک در زمان‌های متفاوت به‌همراه میدان سرعت سیال $\omega_x = 1/0.38\omega_1$



نمودار ۱۳) وضعیت سطح آزاد در مقایسه با نتایج حل عددی و آزمایشگاهی مرجع^[16] و روش حاضر: الف) ۱۱/۶۹ ثانیه، ب) ۱۱/۷۲، ج) ۱۱/۶۰ $\omega_x = 1/0.38\omega_1$

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته برای حل معادلات سیال برای شبیه‌سازی عددی پدیده تلاطم سطحی سیال با رویکرد لاگرانژی به کار گرفته شد و معادلات حاکم بر سیال، شرایط مرزی و همچنین الگوریتم حل با روش عددی مورد نظر، برای حل معادله لاپلاس فشار، مورد بررسی قرار گرفت. از آنجایی که برای بررسی مسایل با سطح آزاد، نیاز به حل در زمان است، بنابراین، الگوریتم زمانی برای روش عددی حاضر توسعه داده شد. نتایج

- 14- Faltinsen OM. A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow. *Journal of Ship Research*. 1978;22(3):193-202.
- 15- Wu GX, Ma QW, Taylor RE. Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method. *Applied Ocean Research*. 1998;20(6):337-355.
- 16- Goudarzi MA, Sabbagh-Yazdi SR. Investigation of nonlinear sloshing effects in seismically excited tanks. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012;43:355-365.
- method [Dissertation]. Isfahan: Isfahan University of Technology; 2008. [Persian]
- 12- Zandi SM. Nonlinear free surface flow with moving boundaries via a local meshless method using exponential basis functions [Dissertation]. Isfahan: Isfahan University of Technology; 2014. [Persian]
- 13- Chen YH, Hwang WS, Ko CH. Sloshing behaviours of rectangular and cylindrical liquid tanks subjected to harmonic and seismic excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 2007;36(12):1701-1717.