



Evaluation of Rarefied Shear Flow in Micro/Nano Geometries Using Fokker-Planck Technique

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Rezapour Jaghargh V.¹ MSc,
Mahdavi A.M.¹ MSc,
Roohi E.^{*1} PhD

How to cite this article

Rezapour Jaghargh V, Mahdavi A.M, Roohi E . Evaluation of Rarefied Shear Flow in Micro/Nano Geometries Using Fokker-Planck Technique. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(7):1721-1732.

ABSTRACT

In this article, rarefied gas flow was investigated and analyzed by the Fokker-Planck approach in different Knudsen numbers and Mach numbers at subsonic and supersonic regimes. The presented Fokker-Planck approach is used to solve the rarefied gas flows in different shear-driven micro/nano geometries like one-dimensional Couette flow and the two-dimensional cavity problem. Boltzmann's equation, and especially statistical technique of the Direct Simulation Monte Carlo (DSMC), are precise tools for simulating non-equilibrium flows. However, as the Knudsen number becomes small, the computational costs of the DSMC are greatly increased. In order to cope with this challenge, the Fokker-Planck approximation of the Boltzmann equation is considered in this article. The developed code replaces the molecular collisions in DSMC with a set of continuous stochastic differential equations. In this study, the Fokker-Planck method was evaluated in the Couette flow in the subsonic Mach number of 0.16 (wall velocity was 50 m/s) and in the supersonic Mach number of 3.1 (wall velocity was 1000 m/s), where Knudsen numbers range from 0.005-0.3. Also, the cavity flow with a wall Mach number of 0.93 (wall velocity was 300 m/s) in Knudsen numbers ranging from 0.05-20 was investigated. The results show that by increasing speed and Knudsen numbers, the accuracy of Fokker-Planck increases. In addition, despite using larger number of simulator particles, the rapid convergence and lower computational costs relative to other methods are the features of this method.

Keywords Knudsen Number; Shear-driven flow; Micro/Nano Flow; Fokker Planck Approach

¹Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
Phone: +98 (51) 38806055
Fax: +98 (51) 38807185
e.roohi@um.ac.ir

Article History

Received: March 31, 2018
Accepted: January 8, 2019
ePublished: July 01, 2019

CITATION LINKS

[1] Flow of rarefied gases [2] Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas [3] The statistical mechanical theory of transport processes I [4] The Boltzmann equation [5] A solution algorithm for the fluid dynamic equations based on a stochastic model for molecular motion [6] Fokker-Planck model for computational studies of monatomic rarefied gas flows [7] Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation [8] On Fokker-Planck model for the Boltzmann collision integral at the moderate Knudsen numbers [9] The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications [10] A Fokker-Planck based kinetic model for diatomic rarefied gas flows [11] Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas [12] A thorough evaluation of the Fokker-Planck kinetic model in the couette flow [13] Investigation of rarefied gas flow in micro/nano cavity by Fokker Planck approach [14] Thermal and second-law analysis of a micro- or nanocavity using direct-simulation Monte Carlo

تحلیل جریان رقیق شده برشی در هندسه های میکرو/نانو با روش فوکریلانک

وحید رضاپور جعفری MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

امیرمهران مهدوی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

احسان روحی PhD*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

در مقاله حاضر به بررسی و تحلیل جریان رقیق شده با روش فوکریلانک در محدوده های مختلف عدد نودسن و بازه های مختلف اعداد ماخ در رژیم های مادون صوت و مافوق صوت پرداخته شد. از روش فوکریلانک برای حل جریان رقیق شده در هندسه های مختلف میکرو/نانو یک بعدی کوئت و مساله دوبعدی کاویتی که جریان های برشی هستند، استفاده شده است. معادله بولتزمن و به ویژه حل آماری شبیه سازی مستقیم مونت کارلو (DSMC) ابزاری دقیق برای شبیه سازی جریان های غیرتعادلی هستند. با این حال با کاهش عدد نودسن، هزینه های محاسباتی روش DSMC به شدت افزایش می یابد. به منظور مقابله با این چالش، تقریب فوکریلانک از معادله بولتزمن در این مقاله در نظر گرفته شد. در کدی که برای شبیه سازی روش فوکریلانک تدوین شده است این روش با استفاده از مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل تصادفی، جایگزین جملات برخورد بین-مولکولی در DSMC می شود. در این تحقیق، روش فوکریلانک در جریان کوئت در رژیم مادون صوت در اعداد ماخ ۰/۱۶ (سرعت دیواره ۵۰ متر بر ثانیه) و در رژیم مافوق صوت برای عدد ماخ ۳/۱ (سرعت دیواره ۱۰۰۰ متر بر ثانیه) در بازه اعداد نودسن از ۰/۰۰۵ تا ۰/۳ ارزیابی شده است. همچنین جریان کاویتی در عدد ماخ ۰/۹۳ (سرعت دیواره ۳۰۰ متر بر ثانیه) و در بازه اعداد نودسن ۰/۰۵ تا ۲۰ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می دهند که با افزایش همزمان سرعت و عدد نودسن، دقت روش فوکریلانک افزایش می یابد. علاوه بر این با وجود استفاده از ذرات بیشتر، همگرایی سریع و هزینه محاسباتی کمتر این روش نسبت به روش DSMC از ویژگی های قابل توجه این روش است.

کلیدواژه ها: عدد نودسن، جریان برشی، جریان میکرو/نانو، روش فوکریلانک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۸

*نویسنده مسئول: e.roohi@um.ac.ir

روش تعدادی مولکول شبیه سازی شده (ذره) به نمایندگی از کلیه مولکول ها مورد مطالعه قرار می گیرند. این روش هرچند در اعداد نودسن بالا راندمان مناسبی دارد، با این حال در اعداد نودسن پایین از نظر زمانی بسیار هزینه بر است.

روش فوکریلانک برای اولین بار توسط کرکود برای مایعات بررسی شد [3]. کاربرد این روش برای جریان های با غلظت بالا است. این روش بعدها توسط سرسیگناتی برای گازهای غلیظ نیز گسترش یافت [4]. جنی و همکاران [5] در سال ۲۰۱۰ این روش را برای گازهای رقیق توسعه دادند و یک الگوریتم آماری بر مبنای تقریب فوکریلانک برای مدل سازی گازهای رقیق ارائه کردند. تنش های مولکولی و سرعت متوسط در نتایج به دست آمده تطابق بسیار مناسبی با نتایج DSMC، معادله بولتزمن خطی شده و داده های آزمایشگاهی داشت. با این وجود، مقدار انتقال حرارت و دما توسط تقریب آنها اشتباه محاسبه می شد؛ چون عدد پرانتل این روش اشتباه محاسبه شده بود. گرجی و همکاران [6] الگوریتم مذکور را توسعه دادند تا مشکل مربوط به عدد پرانتل نادرست را برطرف نمایند. آنها این کار را با معرفی یک جمله راندگی غیرخطی مرتبه چهار بر مبنای سرعت ها انجام دادند. علاوه بر آن، نتایج آنها به لزجت و انتقال حرارت صحیح منجر شد.

در این تحقیق، یک کد عددی مبتنی بر روش فوکریلانک تدوین شده و صحت سنجی شده است. در مقایسه با مراجع دیگری که استفاده از روش فوکریلانک در تحلیل جریان های رقیق شده را گزارش کرده اند، در کار حاضر، برای اولین بار عملکرد روش فوکریلانک در تحلیل جریان های برشی یک بعدی کوئت و دوبعدی کاویتی در بازه گسترده ای از سرعت و عدد نودسن مورد ارزیابی قرار می گیرد و برای اولین بار محدوده صحت این الگوریتم در حل جریان های برشی با دقت و ضریب اطمینان بالاتری گزارش شده است.

۲- تقریب فوکریلانک از معادله بولتزمن

معادله بولتزمن به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

(۲)

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_{\text{coll}} = \frac{1}{m} \int \int_0^{4\pi} (F(V^*)F(V_1^*) - F(V)F(V_1)) g \sigma(\Omega) d\Omega d^3V_1$$

که در آن F تابع توزیع جرمی سرعت ذرات، سرعت های (V^*, V_1^*) سرعت های جفت ذرات بعد برخورد، سرعت های (V, V_1) سرعت های جفت ذرات قبل برخورد، σ سطح مقطع برخورد، Ω زاویه بین سرعت های قبل و بعد برخورد و $g = V - V_1$ سرعت نسبی است. اگر عدد نودسن بیش از حد بزرگ نباشد، مشتق زمانی F با معادله فوکریلانک تقریب زده می شود [5, 7, 8]:

(۳)

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_{\text{coll}} \approx -\frac{\delta}{\delta V_i} (A_i F) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta V_i \delta V_j} (D^2 F) = S^{FP}$$

در اینجا A و D نشان دهنده ضریب راندگی و پخش هستند. با فرض مدل مولکولی ماکسول، گشتاورهای مرتبه های دو و سه که مربوط به تانسور تنش و بردار شار حرارتی است از معادله بولتزمن به دست می آیند:

(۴)

$$P_{ij} = \int_{R^3} v'_i v'_j S^{\text{Boltz}} d^3V$$

۱- مقدمه

میزان رقیق بودن جریان برحسب عدد نودسن بیان می شود که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (۱)$$

که در آن λ و L به ترتیب متوسط فاصله آزاد مولکولی و طول مشخصه جریان هستند.

براساس میزان درجه رقیق شدگی جریان، دسته بندی هایی برای جریان رقیق شده انجام شده است. برای مشخص کردن مرز این رژیم ها، اسکاف و چیمبر [1] عدد نودسن را در یک دسته بندی خاص، به عنوان معیار درجه رقیق شدگی جریان پیشنهاد دادند. در این دسته بندی رژیم پیوسته (عدم لغزش) در محدوده عدد نودسن $0.01 < kn < 0.1$ ، رژیم لغزشی در محدوده عدد نودسن $0.1 < kn < 10$ و رژیم آزاد مولکولی در محدوده عدد نودسن $kn > 10$ قرار دارند.

روش شبیه سازی مستقیم مونت کارلو (DSMC) در اوایل دهه ۶۰ میلادی توسط بر [2] به منظور شبیه سازی جریان های گازی رقیق شده ارائه شد. در این روش، تحلیل جریان از طریق شبیه سازی حرکت مولکول های گاز ممکن می شود؛ اما از آنجایی که بررسی حرکت تک تک مولکول ها بسیار وقت گیر و پرهزینه است، در این

برای بستن دستگاه معادلات، باید یک ضریب پخش انتخاب شود. در اینجا مطابق معادله ساده لانگوین، ضریب پخش به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D = \sqrt{\frac{4e_s}{3\tau}} \quad (۱۲)$$

که در آن e_s انرژی درونی ذرات است. در نتیجه معادله تقریبی فوکریلانک براساس معادله بولتزمن برای گاز تک‌اتمی مطابق زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta F}{\delta t} + V_i \frac{\delta F}{\delta x_i} + G_i \frac{\delta F}{\delta V_i} + \\ & \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\tilde{c}_{ij} v_j' + Y_i \left(v_j' v_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left(v_i' v_k' v_k' - \frac{2q_i}{\rho} \right) \right) F \\ & = \frac{\delta^2}{\delta V_i \delta V_j} \left(\frac{kT}{m\tau} F \right) \end{aligned} \quad (۱۳)$$

در حالی که ضرایب C_{ij} و γ_i باید با حل سیستم معادلات خطی به دست آیند که با مقایسه معادله (۶) با معادله (۸) برای تنش مولکولی و معادله (۷) با معادله (۹) برای شار حرارتی دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$c_{il} p_{jl} + c_{jl} p_{il} + 2Y_i q_j + 2Y_j q_i + 2\rho \Lambda \langle M_i' M_j' M_k' M_k' \rangle = 0 \quad (۱۴)$$

$$4\Lambda \left[\langle M_i' M_j' M_j' M_i' \rangle - \frac{q_i p_{il}}{\rho^2} - \frac{3kT q_i}{m\rho} \right] + 2C_{jl} \langle M_i' M_j' M_i' \rangle + 2C_{il} \frac{q_l}{\rho} + 2Y_i \left[\langle M_l' M_l' M_i' M_j' \rangle - \frac{3kT p_{ij}}{m\rho} \right] + Y_i \left[\langle M_l' M_l' M_j' M_j' \rangle - 9 \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \right] = -\frac{10q_i}{3\rho\tau} \quad (۱۵)$$

که در آن $M' = M - U$ و M سرعت ذره است. هرچند برای استخراج معادلات فوکریلانک ساده‌سازی‌هایی انجام شده، هنوز چندبعدی بودن محدوده حل موجب شده که حل مستقیم معادلات (۱۴) و (۱۵) پرهزینه باشد. به‌منظور حل مشکل، این معادلات به معادل فرآیند Ito تبدیل شده‌اند^[۴]:

$$dM_i = A_i dt + G_i dt + D dW_i \quad (۱۶)$$

$$dX_i = M_i dt \quad (۱۷)$$

که در آن dW_i تغییرات فرآیند وینر با امید ریاضی صفر و وردایی dt است. معادلات (۱۶) و (۱۷) دارای مزایای عددی زیادی در اعداد نودسن کوچک و متوسط هستند. از آنجایی که روند محاسبات مستمر است، تقسیم‌بندی‌های زمانی و مکانی می‌تواند مستقل از برخوردها باشد. همچنین در مقایسه با DSMC، در اینجا برخورد بین ذرات محاسبه نمی‌شود، فرآیندی که با هزینه محاسباتی بالا در اعداد نودسن کوچک همراه است.

از آنجایی که معادلات (۱۶) و (۱۷) یک دستگاه تصادفی غیرخطی را تشکیل می‌دهند، نمی‌توان یک راه حل تحلیلی مانند مدل خطی لانگوین پیدا کرد. برای سادگی، فرض می‌شود که نیروی خارجی وجود ندارد ($G_i=0$). استراتژی حل این است که معادله غیرخطی

(۵)

$$P_i = \frac{1}{2} \int_{R^3} v_i' v_j' v_j' S^{\text{Boltz}} d^3V$$

که در آن $v' = V - U$ سمت چپ معادله بولتزمن و U سرعت میانگین سلولی است. با فرض مدل مولکولی ماکسول می‌توان نوشت^[۵, ۷, ۸]:

$$P_{ij} = \frac{\delta \pi_{ij}}{\delta t} = -\frac{P}{\mu} \pi_{ij} \quad (۶)$$

$$P_i = \frac{\delta q_i}{\delta t} = -\frac{2P}{3\mu} q_i \quad (۷)$$

$$P_i = \frac{\delta q_i}{\delta t} = -\frac{2P}{3\mu} q_i$$

در اینجا μ ضریب لزجت دینامیکی، P فشار گاز، π_{ij} تانسور تنش و q_i شار حرارتی است. در نتیجه نسبت بین تنش و شار حرارتی که بیانگر عدد پرانتل است به $\frac{2}{3}$ می‌رسد، که مقدار صحیح عدد پرانتل برای گازهای تک‌اتمی است. با به‌کارگیری همین روش برای عملگر S^{FP} و فرض ضریب نفوذ اسکالر و اینکه $\int_{R^3} (A_i v_j' + A_j v_i' + D^2 \delta_{ij}) F d^3V$ می‌توان نوشت:

$$P_{ij} = \int_{R^3} (A_i v_j' + A_j v_i' + D^2 \delta_{ij}) F d^3V \quad (۸)$$

$$P_i = \int_{R^3} (A_i v_j' v_j' + 2A_j v_j' v_i') F d^3V \quad (۹)$$

که در آن δ_{ij} دلتای دیراک است.

۲-۱- ضرایب تقریب فوکریلانک

مساله مهم پیدا کردن یک فرمول مناسب برای ضرایب A و D است. برای ضریب پخش، یک تابع چندجمله‌ای از سرعت حرارتی مولکول‌ها ارایه شده است، که درجه آزادی کافی را برای مطابقت با لزجت و عدد پرانتل ارایه می‌دهد. ساده‌ترین شکل معادله یک معادله درجه دوم است، اما می‌تواند راه حل را واگرا کند^[۹]. بنابراین در این کار مدل درجه چهار که توسط گرجی و همکاران معرفی شده به کار گرفته می‌شود^[۱۰]:

$$A_i = \tilde{c}_{ij} v_j' + Y_i \left(v_j' v_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left(v_i' v_k' v_k' - \frac{2q_i}{\rho} \right) \quad (۱۰)$$

$$A_i = \tilde{c}_{ij} v_j' + Y_i \left(v_j' v_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left(v_i' v_k' v_k' - \frac{2q_i}{\rho} \right)$$

در اینجا تانسور متقارن $\tilde{c}_{ij}$ ، بردار Y_i و مقدار عددی Λ بعداً مشخص خواهند شد. با فرض $\gamma_i=0$ ، $\Lambda=0$ ، $\tilde{c}_{ij} = -\delta_{ij}/\tau$ یک معادله ساده خطی لانگوین به دست می‌آید که منجر به عدد پرانتل اشتباه $Pr = \frac{3}{2}$ می‌شود. ابتدا مقدار عددی Λ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Lambda = -\frac{1}{\alpha \rho^3} |\det(\pi_{ij})| \quad (۱۱)$$

که در آن $\det(\pi_{ij})$ تعیین‌کننده تانسور تنش π_{ij} ، $\alpha = \tau(3kT)/4m$ به‌عنوان ضریب مقیاسی و $\tau = 2\mu/P$ به‌عنوان ثابت زمانی هستند.

(۱۶) به یک بخش لانگوین خطی L و یک بخش باقی‌مانده غیرخطی N تقسیم شود:

(۱۸)

$$dM_i = -\frac{1}{T} M_i' dt + D dW_i + C_{ij} M_j' dt + Y_i (M_j' M_j' - \langle M_j' M_j' \rangle) dt + \Lambda (M_i' M_k' M_k' - \langle M_i' M_k' M_k' \rangle) dt$$

ابتدا بخش خطی، یعنی $dM_i = dL_i$ در نظر گرفته می‌شود و برای بخش غیرخطی، یک طرح گسسته‌سازی زمانی اوپلر مرتبه اول رو به جلو استفاده شده است. ابتدا تغییرات سرعت با مدل خطی بررسی می‌شود:

(۱۹)

$$dM_i = \frac{-1}{\tau} (M_i(t) - U_i(x(t), \tau)) dt + G_i(x(t)) dt + \sqrt{\frac{kT(x(t), \tau)}{m\tau(x(t), \tau)}} dW_i$$

برای سادگی، وابستگی‌های پارامترها نسبت به مکان ذرات $x(t)$ در نظر گرفته نمی‌شود. برای محاسبه میانگین سرعت، رابطه زیر برقرار است:

(۲۰)

$$U_i(t^{n+1}) = U_i(t^n) + G_i \Delta t$$

با معرفی سرعت‌های نوسانی $M(t) = M(\bar{t}) - U(x, t)$ ، می‌توان نوشت:

(۲۱)

$$dM_i'(t) = -\frac{1}{T} M_i'(t) + \sqrt{\frac{2kT}{m\tau}} dW_i$$

یک جواب تحلیلی برای معادله دیفرانسیل فوق وجود دارد:

(۲۲)

$$M_i'(t^{n+1}) = M_i'(t^n) e^{-\frac{\Delta t}{T}} + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{T}}\right) \xi_i$$

که در آن ξ_i متغیرهای مستقل بی‌بعد شده‌اند. بنابراین، با ترکیب دو معادله (۲۲) و (۲۰) طرح نهایی برای مدل خطی شبیه به یک مطالعه^[۱۱] حاصل می‌شود:

(۲۳)

$$M_i^{n+1} = M_i^n e^{-\frac{\Delta t}{T}} + U_i^n \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right) G_i \Delta t + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{T}}\right) \varepsilon_i$$

عبارت راندگی مرتبه چهار به یک بخش خطی و باقی‌مانده آن تقسیم شده بود. با توجه به حل خطی و اضافه‌کردن بخش غیرخطی آن می‌توان نوشت:

(۲۴)

$$M_i(t^{n+1}) = M_i(t^n) e^{-\frac{\Delta t}{T}} + U_i^n \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right) G_i \Delta t + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{T}}\right) \xi_i + e^{-\frac{\Delta t}{T}} \int_0^{\Delta t} \frac{t}{\tau} N_i dt$$

(۲۵)

$$N_i = C_{ij} M_j' + Y_i \left(M_j' M_j' - \frac{3kT}{m} \right) + \Lambda \left(M_i' M_j' M_i' - \frac{2q_i}{\rho} \right)$$

با انجام ساده‌سازی‌ها در معادله (۲۴) به معادله زیر می‌توان رسید^[۱۶]:

(۲۶)

$$M_i^{n+1} = \frac{1}{\alpha} \left(M_i^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right) \tau N_i^n + \sqrt{\frac{kT}{m\tau}} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}}\right) \xi_i \right) + U_i^n + G_i \Delta t$$

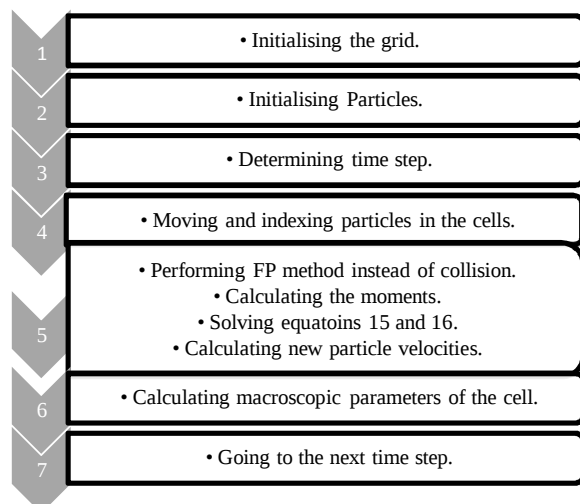
(۲۷)

$$\alpha^2 = 1 + \frac{m\tau}{3kT} (\tau(1-A)^2 \langle N_i^n M_i^n \rangle + 2(A-A^2) \langle N_i^n M_i^n \rangle) A = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$$

با استفاده از راه حل دقیق برای حل بخش خطی و تقریب‌های انجام‌شده برای بخش غیرخطی می‌توان برای موقعیت دقیق ذره هم مانند سرعت ذره، طرحی را توسعه داد و معادله‌ای برای آن نوشت^[۵]. با این حال، در اینجا برای به‌روزرسانی موقعیت، از روش به‌کاررفته در DSMC استفاده می‌شود. دلیل این تقریب، بازده محاسباتی بیشتر است.

۳- طرح کلی الگوریتم

برای شروع یک تعداد مشخص n_p ذره با وزن w_i براساس تابع توزیع در نظر گرفته‌شده $F(V, x, t)$ تولید می‌شوند. باید توجه داشت که در اینجا، شبکه براساس میزان تغییرات متغیرهای ماکروسکوپی جریان تعیین می‌شود و اندازه گام زمانی براساس معیار کورانت معین می‌شود. الگوریتم فوکرپلانک در هر گام زمانی در شکل ۱ بیان شده است. این الگوریتم دقیقاً مشابه الگوریتم روش DSMC است، با این تفاوت که قسمت برخورد مولکولی که در روش DSMC به‌صورت صریح محاسبه می‌شود در اینجا با فرمول‌های (۱۶-۱۷) جایگزین شده است.



شکل ۱) الگوریتم روش فوکرپلانک

۴- شرح مساله

در این قسمت به بررسی اولیه جریان‌های برشی یک‌بعدی کوئت و دوبعدی کاویتی پرداخته می‌شود.

دیوار بالایی کاویتی با سرعت U_w در جهت مثبت محور افقی به حرکت درآمده و به‌وسیله تغییرات فشار و چگالی اولیه در میدان، جریان در کاویتی رژیم‌های رقیق‌شدگی را تجربه می‌کند. دمای دیواره‌های کاویتی ثابت و برابر T_w در نظر گرفته شده است. در ادامه، رفتار جریان در این مساله با استفاده از روش فوکرپلانک در شرایط Kn و U_w متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد و با نتایج DSMC مقایسه می‌شود.

۵- نتایج تحقیق

۵-۱- وابستگی دقت جواب‌ها به عدد نودسن در جریان کوئت با $U_w = 5 \text{ m/s}$

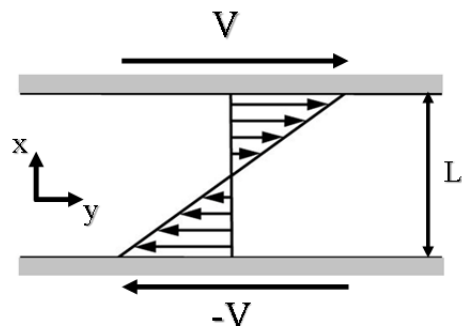
ابتدا جریان کوئت حاوی گاز آرگون مورد بررسی قرار گرفته است. مولکول‌های گاز به‌صورت مولکول‌های ماکسولین با شاخصه قدرت لزجت برابر یک در نظر گرفته می‌شوند. دیوارها با سرعت $U_w = 5 \text{ m/s}$ در جهت مخالف هم حرکت می‌کنند و هر دو دیواره به‌صورت هم‌دمای با $T_w = 273/15 \text{ K}$ در نظر گرفته می‌شوند و دمای مرجع نیز $T_{ref} = 273/15 \text{ K}$ است. در این مساله مقدار عدد نودسن متغیر و بین 0.005 تا 0.3 در نظر گرفته شده است. فاصله طولی دو صفحه $L = 0.01 \text{ m}$ در نظر گرفته شده است. جرم مولکولی گاز آرگون 6.73×10^{-26} کیلوگرم و قطر مولکولی آن 4.17×10^{-10} متر لحاظ شده است. تعداد $500,000$ و $100,000$ ذره در هر سلول (PPC) برای استقلال از تعداد ذرات در سلول انتخاب شدند. همان‌طور که در نمودارهای ۱ و ۲ نشان داده شده است، نمودار سرعت (نمودار ۱) در تعداد ذرات مختلف در هر سلول بسیار خوب با نتایج حاصل از DSMC مطابقت دارد. با این حال بین DSMC و فوکرپلانک در نمودار دما (نمودار ۲) اختلاف کمی وجود دارد. دلیل این تفاوت محاسبه دما از دو روش متفاوت در هر مدل است. البته این را هم باید متذکر شد که این اختلاف دما نسبت به کل بازه تغییرات دمایی (که در حدود 20°C درجه کلون است)، بسیار کم است. درنهایت برای این شبیه‌سازی تعداد 100 سلول و 1000 ذره در هر سلول به کار گرفته شده است [12].

نمودارهای ۳ تا ۵ پروفیل سرعت، دما و تنش بی‌بعدشده در جریان کوئت را در بازه گسترده‌ای از اعداد نودسن از روش فوکرپلانک با نتایج DSMC مقایسه می‌کند. قابل ذکر است پروفیل سرعت در مساله کوئت در اعداد نودسن بسیار کم خطی است، ولی همان‌طور که در نمودار ۳ دیده می‌شود، با افزایش عدد نودسن پروفیل سرعت در کنار دیواره‌ها به‌دلیل رشد لایه نودسن غیرخطی شده و مقدار سرعت به‌دلیل وقوع پدیده لغزش سرعت و گرادیان منفی در مجاورت دیواره، از مقدار سرعت دیواره کمتر می‌شود. روش فوکرپلانک در بازه اعداد نودسن مورد بررسی، با دقت مناسبی نتایجی نزدیک به نتایج DSMC ارائه می‌دهد. با افزایش عدد نودسن، دقت نتایج فوکرپلانک شروع به کاهش می‌کند، همان‌طور که در نمودار ۳ برای $Kn = 0.3$ دیده می‌شود، تفاوت کمی در نمودار سرعت در نزدیکی دیواره‌ها بین دو روش وجود دارد که دلیل آن عدم دقت کافی روش فوکرپلانک در لایه نودسن در اعداد نودسن بزرگ در سرعت‌های کم است.

همان‌طور که قبلاً هم بیان شد، در نمودار ۴، توزیع دمایی جریان کوئت، مقدار دما در مرکز میدان افزایش را نشان داده است. برای بی‌بعدکردن تنش از فشار اولیه‌ای که بر مبنای پارامترهای ورودی در نظر گرفته شده، استفاده شد. همان‌طور که در نمودار ۵ نیز دیده می‌شود، روش فوکرپلانک در مقایسه با روش DSMC نتایج خوبی را برای تنش برشی در اعداد نودسن کم نشان می‌دهد ولی در اعداد

۴-۱- جریان کوئت

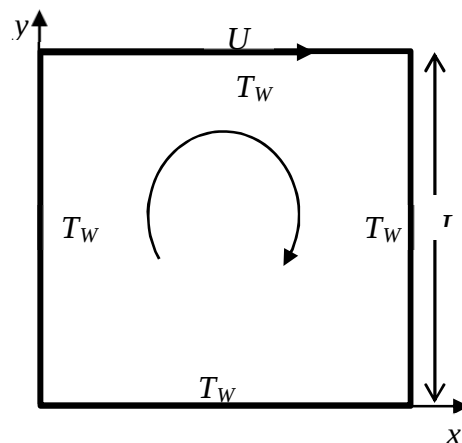
جریان کوئت به‌دلیل سادگی شبیه‌سازی و خاصیت یک‌بعدی آن برای آزمون الگوریتم‌های جدید روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. جریان کوئت رقیق‌شده حالت ساده‌ای برای مطالعه رفتار گاز در شرایط غیرتعادلی است. در این مساله، دیواره‌ها هم‌دمای هستند ($T_1 = T_2$)، اما سرعت مماسی متفاوت دارند ($V_1 \neq V_2 \neq 0$)؛ شکل ۲). بعد از رسیدن به شرایط پایا، مولفه عمودی سرعت صفر می‌شود و یک تنش برشی ثابت و متناظر با آن یک گرادیان سرعت مماسی در طول دامنه وجود خواهد داشت. زمانی که تنش برشی کوچک و جریان تعادلی باشد، طبق قانون نیوتن تنش برشی متناسب با گرادیان سرعت مماسی در گاز توده است. در جریان رقیق‌شده، این شرایط برقرار نیست. جریان کوئت از جریان فوریه پیچیده‌تر است، زیرا تولید حرارت لزجی در طول دامنه غیر صفر است و بنابراین دما توزیعی غیرخطی خواهد داشت. اگر در جریان کوئت $T_1 = T_2$ باشد، توزیع دما در مرکز میدان به بیشترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۲) نمایی از جریان کوئت

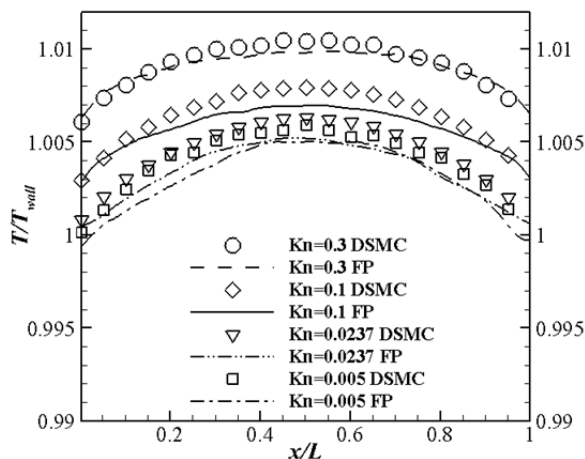
۴-۲- جریان کاویتی

مهم‌ترین کاربرد کد فوکرپلانک در حل مسایل دوبعدی است. زیرا از ترکیب کد فوکرپلانک با الگوریتم DSMC نتایج دقیق با هزینه محاسباتی بسیار کمتر قابل حصول است. مساله کاویتی با اینکه شکل ساده‌ای دارد ولی با این حال دارای رفتار غیرتعادلی شدیدی است. هندسه کاویتی به‌عنوان یک هندسه رایج که در کاربردهای صنعتی به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد شناخته می‌شود. جریان رقیق‌شده در کاویتی تحت تاثیر اثرات شدید غیرتعادلی و دوبعدی قرار می‌گیرد. نمایی از مساله میکرو/نانو کاویتی مورد بررسی در شکل ۳ نمایش داده شده است.

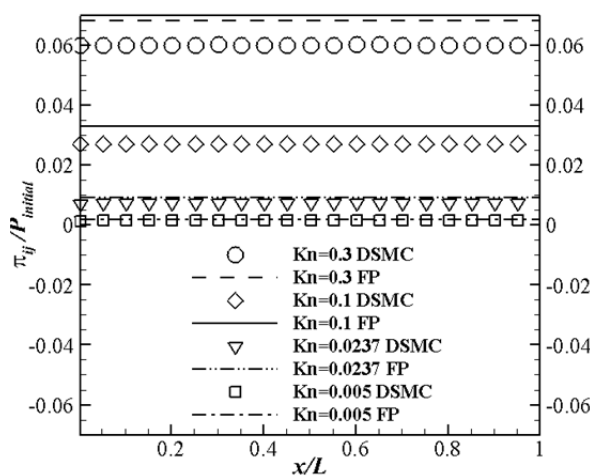


شکل ۳) نمایی از جریان در کاویتی

نودسن بالا نتایج اختلاف بیشتری را با DSMC نشان می‌دهند. بیشینه مقدار خطای نسبی نسبت به نتایج DSMC در نمونه‌های مقایسه‌شده در نمودار ۳ که مربوط به سرعت است، در حدود ۶٪، در نمودار ۴ که مربوط به دما است، در حدود ۱٪ و در نمودار ۵ که مربوط به تنش است، در حدود ۱۲٪ است.



نمودار ۴) مقایسه پروفیل دمای بی‌بعدشده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت $U_w=50\text{m/s}$

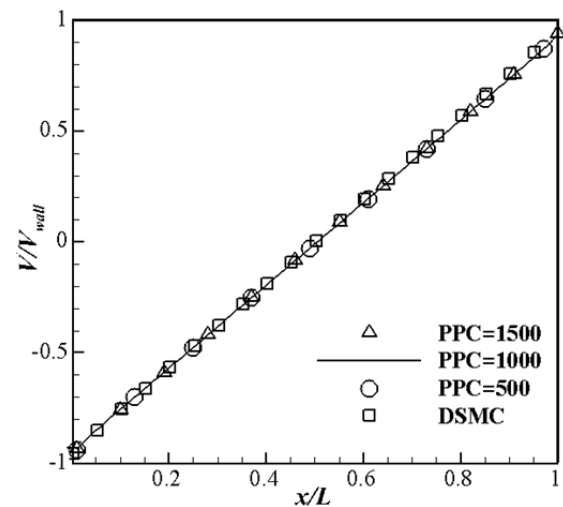


نمودار ۵) مقایسه پروفیل تنش بی‌بعدشده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت $U_w=50\text{m/s}$

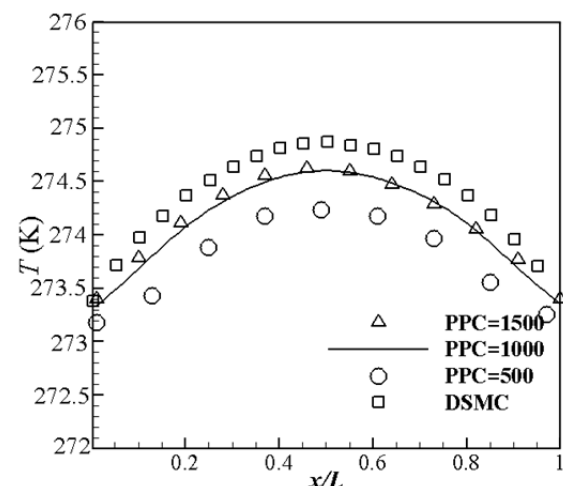
۲-۵- وابستگی دقت جواب‌ها با عدد نودسن در شرایط $U_w=1000\text{m/s}$

به‌عنوان آزمون دوم، جریان کوئت با سرعت $U_w=1000\text{m/s}$ با دو دیواره به‌صورت هم‌دما در شرایط با $T_w=300\text{K}$ و دمای مرجع $T_{ref}=300\text{K}$ در نظر گرفته می‌شود. تعداد ۲۰۰، ۱۵۰، ۱۰۰، ۵۰، ۴۰، ۳۰ و ۲۰ در هر سلول (PPC) برای استقلال از تعداد ذرات در سلول انتخاب شدند. همان‌طور که در نمودار ۶ مشاهده می‌شود، پروفیل سرعت در تعداد ذرات مختلف مطابقت خوبی با هم دارند. با این حال با توجه به نمودار نمودار ۷، مقدار PPC‌های مختلف می‌توان به‌خوبی دید که تعداد ۲۰۰ ذره در هر سلول نتایج منطبق‌تری داشته و با توجه به نمودار دما در نمودار ۷ مقدار تعداد ذره در هر سلول مناسب ۲۰۰ در نظر گرفته می‌شود. در نهایت در این شبیه‌سازی از تعداد ۲۰۰ سلول و ۲۰۰ ذره در هر سلول استفاده شده است [13].

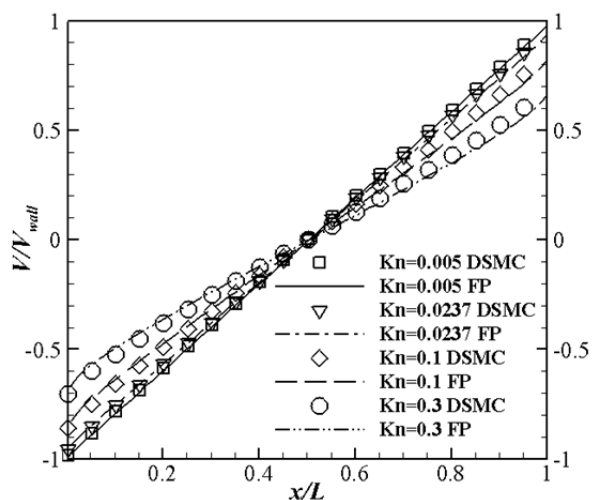
نمودارهای ۸، ۹ و ۱۰ توزیع سرعت، دما و تنش بی‌بعد را در سرعت $U_w=1000\text{m/s}$ نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که فوکریلانک برای محدوده گسترده‌ای از اعداد نودسن در جریان مافوق‌صوت نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد. همان‌طور که در نمودار ۸ برای نمودارهای سرعت دیده می‌شود، مقادیر سرعت تطابق بسیار خوبی با DSMC دارند. با بررسی عدد نودسن در اعداد ماخ مادون‌صوت (نمودار ۳) و ماخ مافوق‌صوت (نمودار ۸) مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت، دقت روش فوکریلانک در اعداد نودسن بالا افزایش می‌یابد. علاوه



نمودار ۶) بررسی وابستگی سرعت به تعداد ذرات در جریان کوئت $U_w=50\text{m/s}$

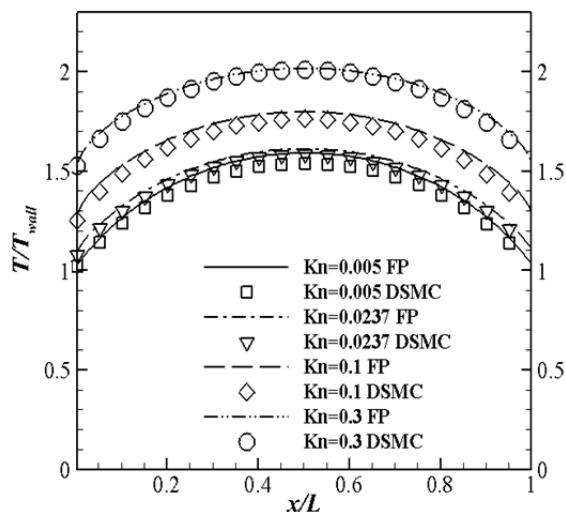


نمودار ۷) بررسی وابستگی دما به تعداد ذرات در جریان کوئت $U_w=50\text{m/s}$

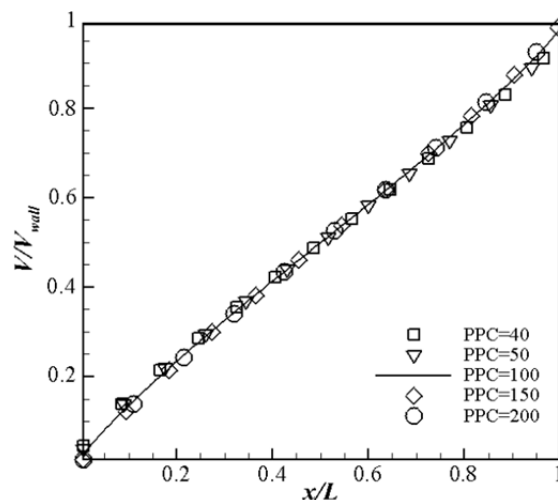


نمودار ۸) مقایسه پروفیل سرعت بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت $U_w=50\text{m/s}$

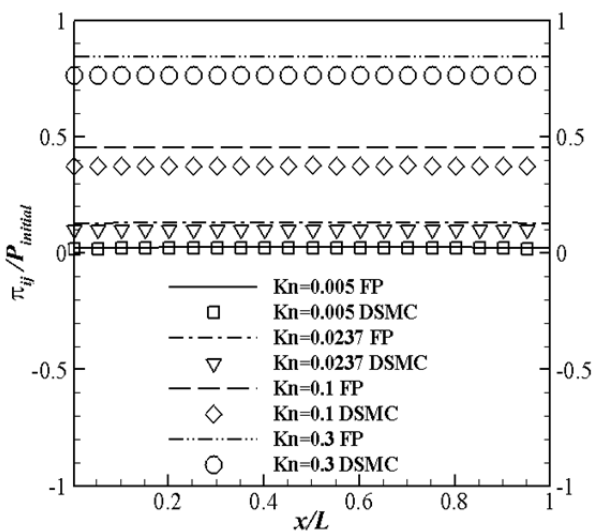
بر این در نمودارهای ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود که نمودار دما و تنش نیز دقت بسیار خوبی داشته و با افزایش عدد نودسن دقت روش فوکرپلانک نیز افزایش می‌یابد.



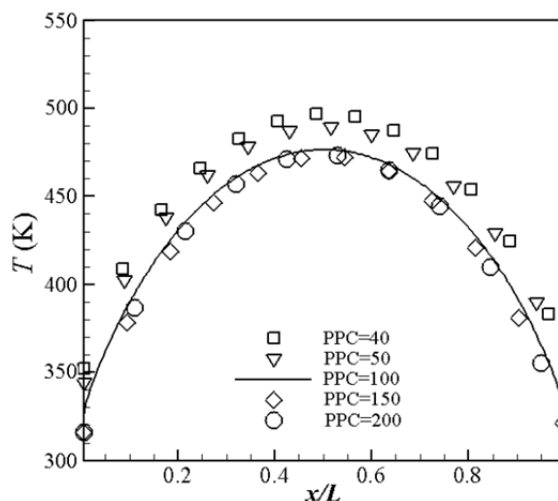
نمودار ۹) مقایسه پروفیل دمای بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت $U_w=1000\text{m/s}$



نمودار ۶) بررسی وابستگی سرعت به تعداد ذرات در جریان کوئت $U_w=1000\text{m/s}$



نمودار ۱۰) مقایسه پروفیل تنش بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت $U_w=1000\text{m/s}$

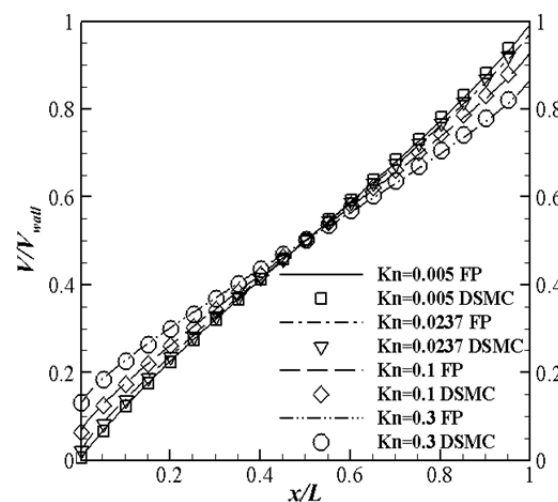


نمودار ۷) بررسی وابستگی دما به تعداد ذرات در جریان کوئت $U_w=1000\text{m/s}$

بیشینه مقدار خطای نسبی نتایج روش فوکرپلانک نسبت به نتایج DSMC در نمونه‌های مقایسه‌شده در نمودار ۸ که مربوط به سرعت است، در حدود ۶٪، در نمودار ۹ که مربوط به دما است، در حدود ۳٪ و در نمودار ۱۰ که مربوط به تنش است، در حدود ۱۰٪ می‌باشد. در ادامه به بررسی همگرایی و خطا در روند اجرای کد جریان کوئت پرداخته می‌شود. معیار همگرایی به صورت زیر (فرمول ۲۸) در نظر گرفته شده است:

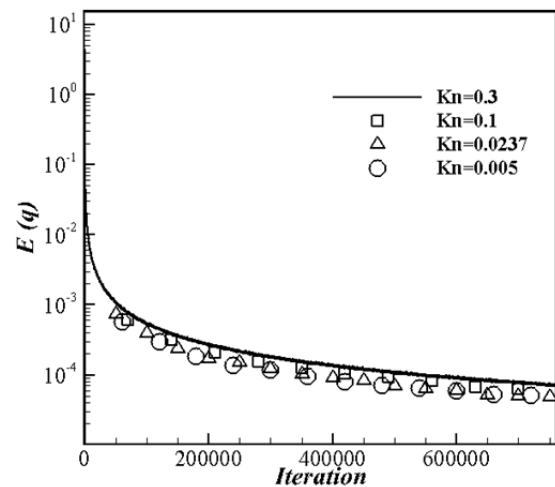
$$E(a) = \frac{\sum |a^{n+1} - a^n|}{a_{ref}} \quad (28)$$

که در آن a یک پارامتر مستقل جریان که می‌تواند سرعت، دما، تنش یا شار حرارتی باشد و a_{ref} پارامتر مرجع از پارامترهای ورودی جریان است. در این فرمول، پارامتر در زمان جدید و زمان قبلی با هم مقایسه می‌شوند و خطای مجموع تک‌تک سلول‌ها با هم جمع می‌شود. روند همگرایی خطا برای شار حرارتی که یک ممان مرتبه سوم سرعت است و دیرتر از پارامترهای دیگر جریان به همگرایی می‌رسد، در نمودار ۱۱ برای اعداد نودسن مختلف نمایش داده شده



نمودار ۸) مقایسه پروفیل سرعت بی‌بعد شده در اعداد نودسن مختلف در جریان کوئت با سرعت $U_w=1000\text{m/s}$

است. با توجه به تغییر عدد نودسن در بازه 0.005 تا 0.3 ، این نمودار نشان می‌دهد که همگرایی خطای شار حرارتی به عدد نودسن وابستگی اندکی دارد و با افزایش عدد نودسن مقدار خطا به میزان بسیار ناچیزی افزایش می‌یابد.



نمودار (۱۱) مقایسه همگرایی خطای انتقال حرارت در اعداد نودسن مختلف در سرعت $U_w=1000\text{m/s}$

حال، زمان مورد استفاده برای مدلسازی برخورد در روش فوکریلانک کمتر از روش DSMC است. زیرا در روش فوکریلانک برخورد محاسبه نمی‌شود و به جای آن دستگاه معادلاتی که همان‌های مختلف در آن محاسبه شده‌اند حل می‌شود که زمان حل آن بسیار کوتاه است، در حالی که در روش DSMC برخوردهای زیادی محاسبه شده و این باعث می‌شود که زمان زیادی برای یک سلول محاسباتی هزینه شود.

در جدول ۲ هزینه محاسباتی دو روش فوکریلانک و روش DSMC به صورت نسبی در اعداد نودسن مختلف آورده شده است. مشاهده می‌شود که روش فوکریلانک نسبت به روش DSMC سریع‌تر عمل می‌کند و با افزایش عدد نودسن مقدار زمان محاسباتی در روش DSMC کاهش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً ذکر شده است، با افزایش عدد نودسن تعداد برخوردها کمتر شده و در نتیجه زمان برخوردها در روش DSMC نیز زمان کمتری برده و بهتر عمل می‌کند. علاوه بر این در جدول ۲ مشاهده می‌شود که در روش فوکریلانک هزینه محاسباتی (CPU time) به عدد نودسن وابسته نیست و مقدار آن در تمامی اعداد نودسن مختلف تقریباً ثابت است. دلیل آن هم این است که در محاسبات ممانی در روش فوکریلانک تعداد ذرات نقشی در افزایش زمان اجرای کد ندارند.

جدول (۲) مقایسه هزینه محاسباتی در روش‌های DSMC و فوکریلانک در جریان کوئت

عدد نودسن	هزینه محاسباتی روش مونت کارلو	هزینه محاسباتی روش فوکریلانک	نسبت هزینه محاسباتی روش مونت کارلو به روش فوکریلانک
۰/۳	۰/۱۳۸۵۸	۰/۰۰۵۴۹	۲۵/۲۳
۰/۱	۰/۱۴۲۶۸	۰/۰۰۵۴۴	۲۶/۲۰
۰/۰۲۳۷	۰/۱۷۲۸۴	۰/۰۰۵۴۸	۳۱/۵۴
۰/۰۰۵	۰/۰۳۲۲۹	۰/۰۰۵۴۴	۵۹/۲۴

۴-۵- جمع‌بندی جریان کوئت

با توجه به نتایج در جریان کوئت، می‌توان گفت که روش فوکریلانک در جریان‌های با سرعت بالا توانایی عملکردی بهتری را داشته و می‌تواند با سرعت همگرایی بیشتر به نتایج دقیقی دست یابد. با این حال این روش در جریان‌های با عدد ماخ پایین و نودسن بالا در ناحیه لایه نودسن دارای خطا می‌شود و نتایج مطلوبی ندارد. لازم به ذکر است که در روش فوکریلانک هزینه محاسباتی وابسته به عدد نودسن نیست. در حالی که در روش DSMC هزینه محاسباتی تابعی از تعداد برخوردهای بین مولکولی است که با کاهش عدد نودسن تعداد برخوردها افزایش می‌یابد و در نتیجه همگرایی کندتر و هزینه محاسباتی بیشتری را دارد.

۵-۵- بررسی عدد نودسن و سرعت در کاویتی

در این قسمت مساله کاویتی با دو سرعت مختلف دیواره $U_w=100\text{m/s}$ و $U_w=300\text{m/s}$ و اعداد نودسن مختلف از 0.05 تا 0.3 مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی هم‌دمای فرض شده است و تمام دمای دیواره‌ها در $T_w=300\text{K}$ ثابت نگه داشته شده است. پارامترهای عددی که در مساله کاویتی مورد بررسی قرار می‌گیرند، اندازه کاویتی است که اندازه طول و عرض آن $L \times L = 10^{-6} \times 10^{-6} (\text{m}^2)$ در نظر گرفته شده که براساس تحقیقات انجام‌شده توسط گرجی و همکاران [6] شبکه‌ای با ابعاد 10×10 سلول محاسباتی و تعداد 200 ذره در هر سلول (PPC) در نظر گرفته شده است. برای روش DSMC نیز با توجه به نتایجی که توسط محمدزاده و همکاران [14] گزارش کردند شبکه‌ای با ابعاد

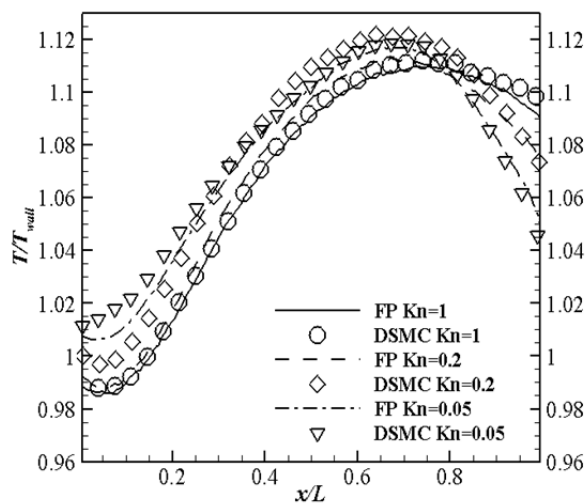
۵-۳- مقایسه هزینه محاسباتی روش FP و DSMC در جریان کوئت

در این قسمت هزینه محاسباتی در کد فوکریلانک بررسی می‌شود. زمان هر زیرروال در کد تهیه شده برای DSMC و فوکریلانک به صورت جداگانه برای 3000 تکرار محاسبه شده است و در نهایت سهم قسمت برخورد در DSMC و سهم قسمت محاسبه ممانی فوکریلانک (که جایگزین برخورد شد و در نهایت مقدار سرعت ذرات را محاسبه می‌کند) به صورت درصدی آمده است. شرایطی که در آن این اندازه‌گیری انجام شده است مربوط به جریان مافوق صوت با شرایط $Kn=0.1$ و $U_w=1000\text{m/s}$ برای هر دو کد DSMC و فوکریلانک، شبکه‌ای با 200 سلول و تعداد 200 ذره در هر سلول در نظر گرفته شده است [13]. هر دو کد روی کامپیوتری با سی‌پی‌یو 3.4GHz Intel(R) Core i7 با رم 24GB اجرا شد. نتایج این مقایسه در جدول ۱ ذکر شده است. این جدول مزیت زمانی روش فوکریلانک را به خوبی نشان می‌دهد.

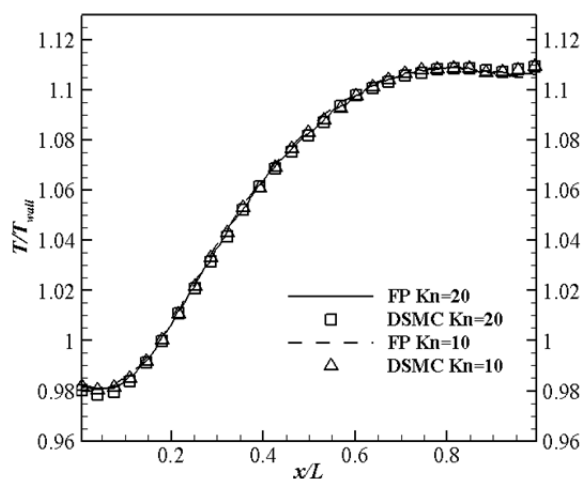
جدول (۱) میانگین زمان هر زیرروال در روش‌های DSMC و فوکریلانک

زیرمجموعه	زمان در DSMC (میلی ثانیه)	زمان در فوکریلانک (میلی ثانیه)
مقداردهی اولیه	۶۲	۳۲
میانگین‌گیری	۷/۷۴	۸/۱۵
چاپ خروجی	۶/۲۹	۷۲/۶
حرکت‌دادن ذرات	۲/۰۶	۲/۰۵
شماره‌گذاری ذرات	۱/۵	۱/۵۱
مدلسازی برخورد	۱۳۱/۹۸	۳۴/۶۶
زمان کامل یک گام زمانی	۱۵۱/۷۹	۵۵/۰۹
درصد مدلسازی برخورد به کل زمان یک تکرار	۸۶/۹۴%	۶۲/۹۱%

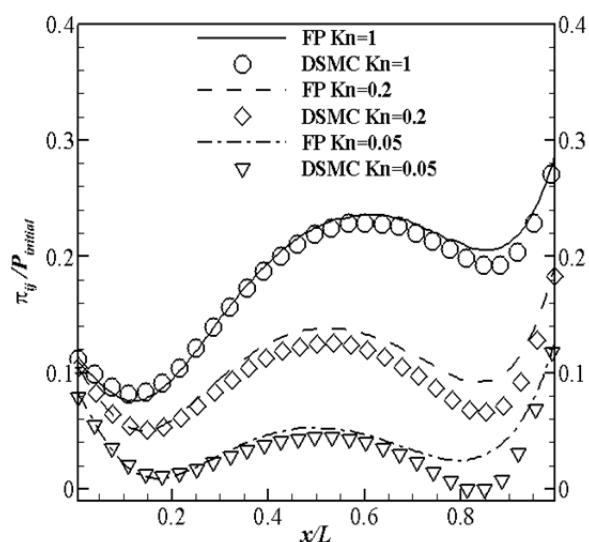
همان‌طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، قسمت عمده ای از زمان پردازش مربوط به مدلسازی برخورد در DSMC و روش ممانی برای محاسبه سرعت جدید ذرات در روش فوکریلانک است. با این



نمودار ۱۴) مقایسه دمای بی‌بعدشده برای اعداد نودسن کوچک مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویته با سرعت $U_w=300\text{m/s}$



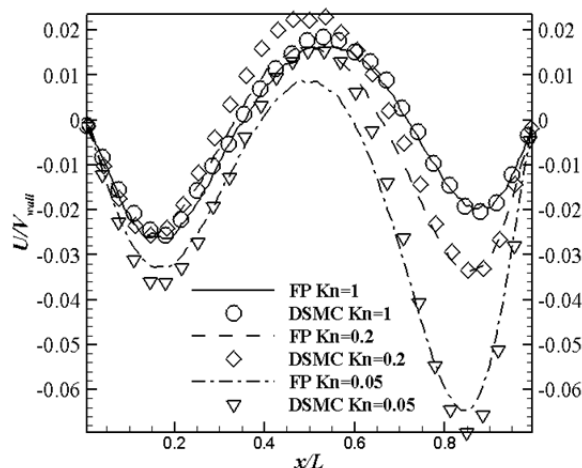
نمودار ۱۵) مقایسه دمای بی‌بعدشده برای اعداد نودسن بزرگ مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویته با سرعت $U_w=300\text{m/s}$



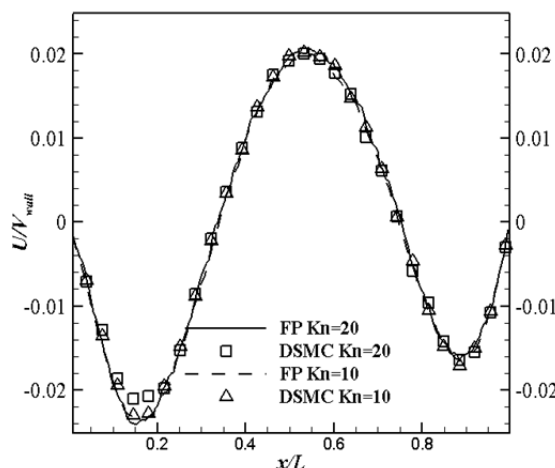
نمودار ۱۶) مقایسه تنش برشی برای اعداد نودسن کوچک مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویته با سرعت $U_w=300\text{m/s}$

۱۵۰×۱۵۰ محاسباتی و با تعداد ذرات ۲۰ ذره در هر سلول محاسباتی انتخاب شده‌اند. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه در شبکه‌های مورد بررسی، روش DSMC با تعداد ۲۰ ذره و روش فوکریلانک با تعداد ۲۰۰ ذره جواب مناسب را به دست می‌دهد، بنابراین مقایسه این دو روش با تعداد ذرات متفاوتی انجام شده است.

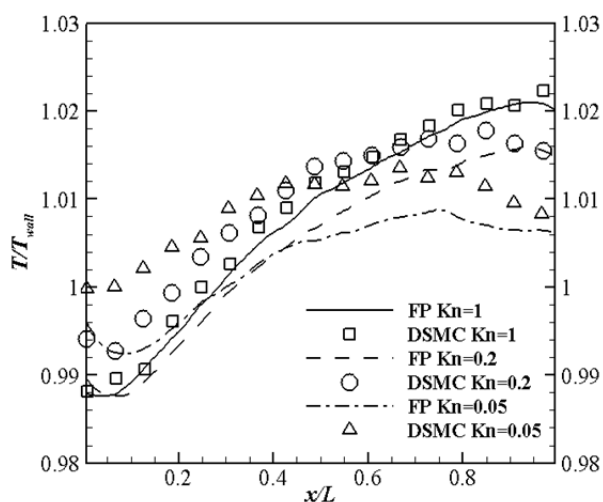
به‌منظور بررسی دقیق نتایج روش فوکریلانک، سرعت به‌عنوان ممان مرتبه یک، دما و تنش به‌عنوان ممان مرتبه دوم در $y=3L/4$ با نتایج DSMC مقایسه شده است و در نمودارهای ۱۲ تا ۱۷ برای اعداد نودسن مختلف ترسیم شده است. در نمودارهای ۱۲ و ۱۳ توزیع سرعت بی‌بعد برای سرعت دیواره 300m/s در موقعیت $y=3L/4$ در اعداد نودسن مختلف ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت دو روش در بازه‌های مختلف عدد نودسن تطابق خوبی دارد که با افزایش عدد نودسن (نمودار ۱۳) اختلاف کمتر شده است، به همین دلیل می‌توان گفت در مساله کاویته با افزایش عدد نودسن دقت روش فوکریلانک نیز افزایش می‌یابد. این افزایش دقت با افزایش عدد نودسن برای توزیع دما و تنش که در نمودارهای ۱۴ تا ۱۷ نشان داده شده‌اند نیز به وضوح قابل مشاهده است. بیشینه مقدار خطای نسبی در نمونه‌های مقایسه‌شده بین دو روش در حدود ۶٪ است.



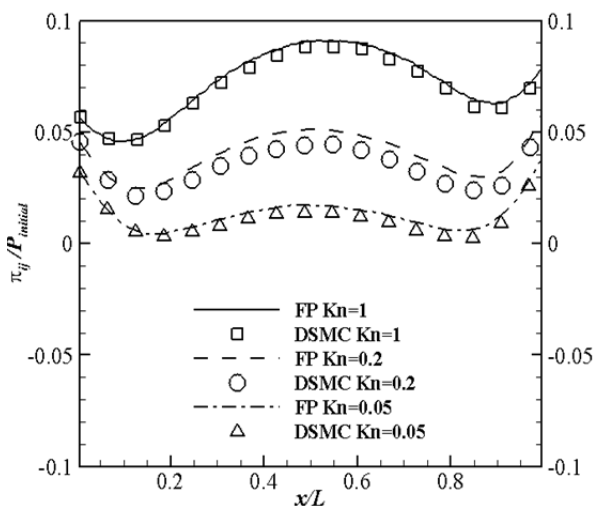
نمودار ۱۷) مقایسه مولفه x سرعت بی‌بعدشده برای اعداد نودسن کوچک مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویته با سرعت $U_w=300\text{m/s}$



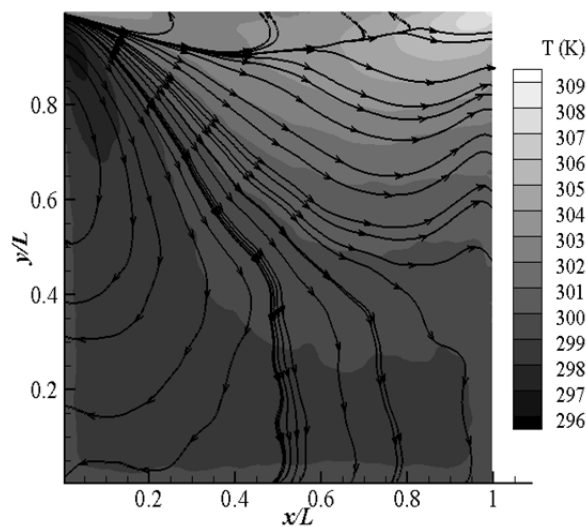
نمودار ۱۸) مقایسه مولفه x سرعت بی‌بعدشده برای اعداد نودسن بزرگ مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویته با سرعت $U_w=300\text{m/s}$



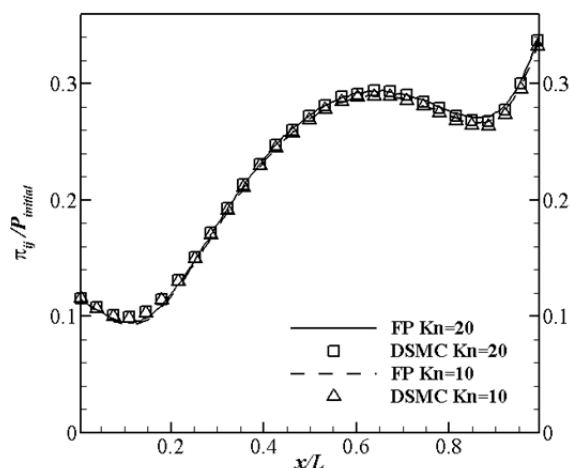
نمودار ۱۹) مقایسه دمای بی‌بعد شده برای اعداد نودسن مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویتی با سرعت $U_w=100\text{m/s}$



نمودار ۲۰) مقایسه تنش برشی برای اعداد نودسن مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویتی با سرعت $U_w=100\text{m/s}$



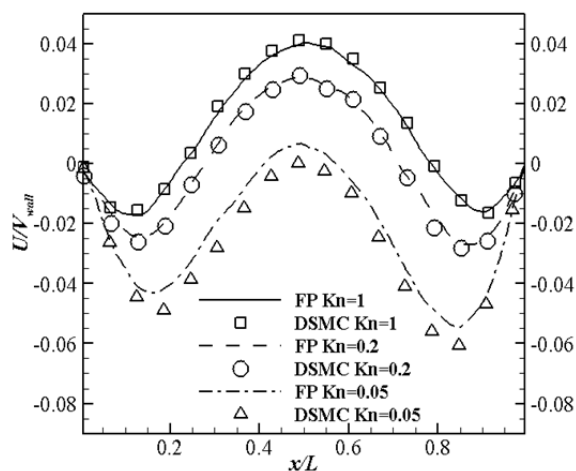
نمودار ۲۱) نمودار دمایی روش فوکریلانک به همراه خطوط شار انتقال حرارت برای کاویتی با سرعت $U_w=100\text{m/s}$ در $Kn=0.01$



نمودار ۱۷) مقایسه تنش برشی برای اعداد نودسن بزرگ مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویتی با سرعت $U_w=300\text{m/s}$

علاوه بر سرعت $U_w=300\text{m/s}$ ، سرعت 100m/s نیز برای کاویتی انجام شده است و نتایج آن در نمودارهای ۱۸ تا ۲۰ برای سرعت، دما و تنش بی‌بعد نیز در $y=3L/4$ ترسیم شده است. در این سرعت نیز در بازه اعداد نودسن ۰/۵ تا ۱ مقایسه انجام شده است. در این سرعت نیز با افزایش عدد نودسن دقت روش فوکریلانک افزایش می‌یابد. با این حال می‌توان دید که مقدار اختلاف در این سرعت بیشتر است. بنابراین می‌توان گفت روش فوکریلانک در سرعت‌های پایین و نودسن پایین خطای کمی دارد. بیشینه مقدار خطای نسبی در نمونه‌های مقایسه شده در نمودارهای زیر در حدود ۱۲٪ است. همان‌طور که می‌توان دید، با مقایسه خطاهای نسبی، دقت روش فوکریلانک در سرعت‌های بالاتر بیشتر است.

یکی از ویژگی‌های روش فوکریلانک، پیش‌بینی درست انتقال حرارت سرد به گرم در اعداد نودسن کم است. در مساله کاویتی در سرعت دیواره Kn برابر با ۰/۱ و ۱۰۰ متر بر ثانیه این پدیده اتفاق می‌افتد. هرچند این پدیده توسط روش‌های ناویر استوکس درست پیش‌بینی نشده است، با این حال در روش DSMC این پدیده مشاهده می‌شود^[۱۴]. در روش فوکریلانک نیز این پدیده در لبه بالا و راست کاویتی دیده می‌شود (نمودارهای ۲۱ و ۲۲) که بیانگر عملکرد مناسب روش فوکریلانک در این بازه اعداد نودسن و سرعت پایین است.



نمودار ۱۸) مقایسه مولفه x سرعت بی‌بعد شده برای اعداد نودسن مختلف روی خط $y=3L/4$ برای کاویتی با سرعت $U_w=100\text{m/s}$

(۱) پیاده سازی الگوریتم فوکریلانک در کد DSMC یک بعدی و دوبعدی به جای الگوریتم برخوردی DSMC انجام شده است. بدین ترتیب یک کد DSMC پایه وجود دارد که در آن می توان به جای زیرروال برخوردی پر هزینه از الگوریتم فوکریلانک با هزینه بسیار کمتر استفاده کرد.

(۲) نتایج گزارش شده در مقاله حاضر نشان می دهد با افزایش همزمان سرعت و عدد نودسن، دقت روش فوکریلانک در حل مسایل کوئت و کاویتی افزایش می یابد.

(۳) همگرایی در روش فوکریلانک نسبتاً سریع است و هزینه محاسباتی آن در مسایل انتخاب شده نسبت به DSMC بسیار کمتر است. مزیت محاسباتی فوکریلانک با کاهش عدد نودسن افزایش می یابد.

(۴) در مساله کاویتی، روش فوکریلانک می تواند در اعداد نودسن کم پدیده انتقال حرارت از سرد به گرم را پیش بینی کند.

تشکر و قدردانی: موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

تاییدیه اخلاقی: موردی از طرف نویسندگان بیان نشده است.

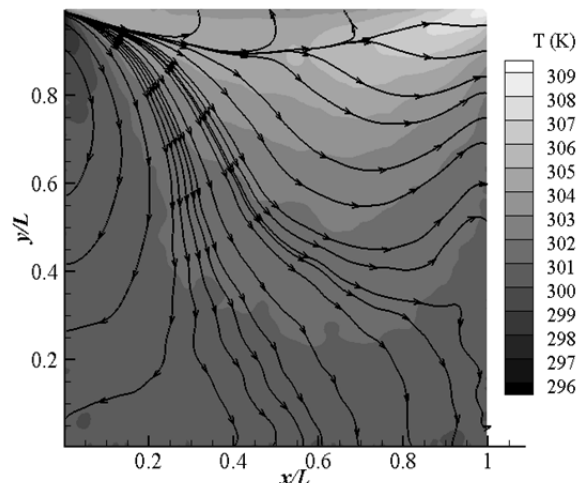
تعارض منافع: هیچ گونه تعارض منافی وجود ندارد.

سهم نویسندگان: وحید رضایورجانی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ امیرمهران مهدوی (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری (۲۵٪)؛ احسان روحی (نویسنده سوم)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۲۵٪).

منابع مالی: منابع مالی خاصی استفاده نشده است.

۷- پی نوشت

A	ضریب راندگی
D	ضریب پخش
e	انرژی داخلی (کیلوژول بر کیلوگرم)
E	خطای نسبی
F	تابع توزیع جرمی
G	نیروی خارجی
k	ثابت بولتزمن (K^{-1})
kn	عدد نودسن
L	طول مشخصه جریان (متر)
m	جرم مولکولی ذره (کیلوگرم)
M	سرعت معادل ذره (متر بر ثانیه)
Ma	عدد ماخ
N	تعداد مولکول ها
P	فشار (نیوتن بر متر مربع)
PPC	تعداد ذرات در هر سلول
Pr	عدد پرانتل
q	شار حرارتی (وات بر متر مربع)
Re	عدد رینولدز
t	زمان (ثانیه)
T	دما (کلوین)
u _j	سرعت در راستای x (متر بر ثانیه)
U	سرعت سلولی (متر بر ثانیه)
v _j	سرعت در راستای y (متر بر ثانیه)
x(t)	موقعیت مکانی ذره (متر)
علامه یونانی	
δ	فاصله متوسط مولکول ها (متر)
Δt	گام زمانی (ثانیه)
Δx	گام مکانی (متر)
λ	متوسط فاصله ی آزاد مولکولی (متر)
Λ	ضریب پایداری
μ	لزجت دینامیکی (کیلوگرم بر متر بر ثانیه)
ξ	متغیرهای مستقل بی بعد شده
π	تانسور تنش



نمودار ۲۲) نمودار دمایی روش DSMC به همراه خطوط شار انتقال حرارت برای کاویتی با سرعت $U_w=100\text{m/s}$ در $Kn=0.01$

۵-۶- بررسی هزینه محاسباتی در مساله کاویتی

همان طور که جدول ۳ نشان می دهد، فوکریلانک با گام زمانی بسیار بزرگتری کار می کند که منجر به همگرایی سریع تر و هزینه های محاسباتی پایین تر می شود. علاوه بر این مقایسه زمانی دیگری نیز بین دو عدد نودسن مختلف نیز انجام شده که در جدول ۴ گزارش شده است.

همان طور که در جدول ۴ مشاهده می شود، هزینه محاسباتی روش DSMC برای هر دو حالت بیشتر از هزینه محاسباتی روش فوکریلانک است. این تفاوت در حدی است که می توان گفت سرعت حل در روش فوکریلانک در شرایط فیزیکی مشخص شده در بالا بسیار بیشتر از روش DSMC است.

جدول ۳) مقایسه گام زمانی در روش های DSMC و فوکریلانک در جریان کاویتی

پارامتر گام زمانی	مقدار
گام زمانی روش فوکریلانک (ثانیه)	$1/33 \times 10^{-11}$
گام زمانی روش مستقیم مونت کارلو (ثانیه)	$1/10 \times 10^{-11}$
نسبت گام زمانی روش فوکریلانک به روش مستقیم مونت کارلو	۱۳/۳

جدول ۴) مقایسه گام زمانی در روش های DSMC و فوکریلانک در جریان کاویتی برای $U_w=300\text{m/s}$

عدد نودسن	هزینه محاسباتی روش مونت کارلو	هزینه محاسباتی روش فوکریلانک	نسبت هزینه محاسباتی در روش مونت کارلو به روش فوکریلانک
۱	۲/۷۵۳۹۱۴	۰/۰۸۴۹۰۹	۳۲/۴۳
۰/۵	۲/۸۳۷۸۶۴	۰/۰۸۱۶۳۰	۳۴/۷۶

۶- نتیجه گیری

با توجه به اینکه الگوریتم فوکریلانک یک روش جدیدی برای استفاده در کدهای ذره مینا است و استفاده از آن می تواند باعث بهبود و افزایش هزینه های محاسباتی در هندسه های پیچیده شود، بنابراین به منظور استفاده از آن باید محدوده عملکردی آن از نظر دقت بررسی شود. به همین دلیل در این پژوهش به بررسی محدوده های مختلف عدد نودسن در محدوده پیوسته، گذار و جریان آزاد مولکولی در رژیم مادون صوت و مافوق صوت پرداخته شده است. دستاوردهای نهایی تحقیق حاضر به صورت زیر قابل جمع بندی هستند:

for computational studies of monatomic rarefied gas flows. Journal of Fluid Mechanics. 2011;680:574-601.

7- Pawula RF. Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation. Physical Review. 1967;162(1):186.

8- Bogomolov SV. On Fokker-Planck model for the Boltzmann collision integral at the moderate Knudsen numbers. Mathematical Models and Computer Simulations. 2009;1:739.

9- Risken H. The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications. Berlin: Springer-Verlag; 1989.

10- Gorji MH, Jenny P. A Fokker-Planck based kinetic model for diatomic rarefied gas flows. Physics of Fluids. 2013;25(6):062002.

11- Truesdell C, Muncaster R. Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas. New York: Academic Press; 1980.

12- Rezapour Jaghargh V, Mahdavi AM, Roohi E. A thorough evaluation of the Fokker-Planck kinetic model in the couette flow. 17th Conference on Fluid Dynamics, Shahrood University of Technology. Shahrood: Physics Society of Iran; 2017.

13- Rezapour V, Mahdavi AM, Roohi E. Investigation of rarefied gas flow in micro/nano cavity by Fokker Planck approach. 26th Annual Conference of Mechanical Engineering. Semnan: Semnan University; 2018.

14- Mohammadzadeh AR, Roohi E, Niazmand H, Stefanov S, Myong RS. Thermal and second-law analysis of a micro- or nanocavity using direct-simulation Monte Carlo. Physical Review E; 2012;85:056305.

ρ چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)

τ ثابت زمانی

بالانویس‌ها

Boltz بولتزمن

FP فوکرپلانک

زیرنویس‌ها

coll برخورد

initial اولیه

ref مربوط به شرایط مرجع

w کمیت روی دیواره

منابع

1- Chambre PA, Schaaf SA. Flow of rarefied gases. Princeton: Princeton University Press; 2017.

2- Bird GA. Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas. The Physics of Fluids. 1963;6(10):1518.

3- Kirkwood JG. The statistical mechanical theory of transport processes I. general theory. The Journal of Chemical Physics. 1946;14(3):180.

4- Cercignani C. The Boltzmann equation. In: Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications, applied mathematical sciences. 67th Volume. New York: Springer; 1988. pp. 40-103.

5- Jenny P, Torrilhon M, Heinz S. A solution algorithm for the fluid dynamic equations based on a stochastic model for molecular motion. Journal of Computational Physics. 2010;229(4):1077-1098.

6- Gorji MH, Torrilhon M, Jenny P. Fokker-Planck model