



Experimental Identification of Mechanical and Damping Properties of a Viscoelastic Material Using the Relaxation Test

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Imani F.¹ MSc,
Jahani K.*¹ PhD

How to cite this article

Imani F, Jahani K. Experimental Identification of Mechanical and Damping Properties of a Viscoelastic Material Using the Relaxation Test. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(11):2571-2579.

ABSTRACT

This study aims to extract the dynamic parameters of a viscoelastic material sample. The mechanical model considered for viscoelastic material is the standard linear solid model. To extract the parameters of the model, first, a sample of the viscoelastic polymer was made. Then, it was subjected to a constant initial strain value and immediately pressure variations were measured over time. Then, using the governing relations of the standard linear solid viscoelastic model, by comparing theoretical and experimental relaxation functions, the dynamic properties of the viscoelastic material, such as storage and loss modulus, and its damping property were identified in terms of frequency. To investigate the effects of time passing on the dynamic mechanical properties of the viscoelastic material, the studies were repeated at a different time, which was ten times more than the first study. Also, the effects of constant strain amplitude on the dynamic mechanical properties and damping characteristic of the viscoelastic sample were investigated with three different levels of strain. These values for the relaxation function in the first test for the displacement of 2 mm were $E(0)=523177.2$ N/m² and after 70 days this value was equivalent to $E(0)=666060.8$ N/m². In the same test, the values of the relaxation function for the first test are equivalent to $E(\infty)=458717.9$ N/m² and in the second test, the value is $E(\infty)=573029.7$ N/m². Also, the results show that, in smaller constant strains, the efficacy of the viscoelastic material is greater in energy dissipation. In addition, the intrinsic parameter of the Young Modulus is obtained in the experimental estimate of 0.89 MPa.

Keywords Viscoelastic Material; Experimental Relaxation Test; Standard Linear Solid Model; Storage and Loss Modulus; Damping

CITATION LINKS

[1] Vibration damping [2] An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring [3] Axial wave propagation in viscoelastic bars using a new finite-element-based method [4] Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track [5] Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes [6] Axial vibration of a rod with viscoelastic support [7] Recent developments and open problems in the mathematical theory of viscoelasticity [8] Investigation of effects of viscoelastic boundary supports on transient sound radiated from a rectangular plate by modal strain energy method [9] The response of rotating machines on viscoelastic supports [10] Identification of damping and dynamic young's modulus of a structural adhesive using radial basis function neural networks and modal data [11] Identification of damping characteristic of a structural adhesive by extended modal based direct model updating method [12] The experimental study on viscoelastic material dampers and the formulation of analytical mode [13] Experimental study on variation of mechanical properties of a cantilever beam of bamboo [14] On measuring dynamic properties of damping materials using Oberst beam method [15] Experimental investigation of damping performance of viscoelastic material using constrained layer damping treatment [16] Experimental estimations of viscoelastic properties of multilayer damped plates in broad-band frequency range [17] Mechanical response of polymers an introduction [18] Finite element based dynamic analysis of viscoelastic solids using the approximation of volterra integrals [19] Adhesives and sealants (engineered materials handbook, volume 3): AMS International, USA, 1990, 850 pp + index, \$118.00 (non-ASM members), \$94.40 (ASM members) [20] Vibration damping of flexible and rigid polyurethane composites

¹Mechanical Engineering Department, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

*Correspondence

Address: University of Tabriz, 29 Bahman Boulevard, Tabriz, Iran, Postal code: 516614766
Phone: +98 (041) 33393060
Fax: +98 (041) 33354153
ka_jahani@tabrizu.ac.ir

Article History

Received: August 21, 2018
Accepted: May 21, 2019
ePublished: November 2, 2019

شناسایی تجربی خواص مکانیکی و میرایی یک ماده ویسکوالاستیک با استفاده از تست ریلکسیشن

فرناز ایمانی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

کمال جهانی PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

هدف از انجام این مقاله استخراج پارامترهای دینامیکی یک نمونه ماده ویسکوالاستیک می‌باشد. مدل مکانیکی در نظر گرفته شده برای ماده ویسکوالاستیک، مدل جامد خطی استاندارد می‌باشد. جهت استخراج پارامترهای مدل، ابتدا نمونه ماده ویسکوالاستیک از نوع پلیمری ساخته شد. سپس تحت اثر اعمال مقدار کرنش ثابت اولیه قرار گرفت و بلافاصله تغییرات نیروی فشاری با گذشت زمان اندازه‌گیری شد. در ادامه، با استفاده از روابط حاکم بر توابع مدل ویسکوالاستیک جامد خطی استاندارد با مقایسه توابع ریلکسیشن تئوری و تجربی، خواص دینامیکی ماده ویسکوالاستیک نظیر مدول‌های ذخیره و اتلاف و خاصیت میرایی آن بر حسب فرکانس شناسایی شد. جهت بررسی اثر گذشت زمان بر خواص مکانیکی نمونه ویسکوالاستیک پلی‌مری، بررسی‌ها در دو زمان کامل متفاوت یعنی در ۱۰ برابر گذشت زمان نسبت به بررسی اول تکرار شد. همچنین تأثیر میزان کرنش ثابت بر روی خواص دینامیکی و میرایی ماده ویسکوالاستیک با سه سطح مختلف کرنش ثابت بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که با گذشت زمان تقریباً طولانی، خاصیت میرایی ماده ویسکوالاستیک کاهش یافته و سفتی دینامیکی افزایش یافته است. برای فشردگی ۲mm در تست اول مقدار مقدار تابع ریلکسیشن در زمان صفر برابر $E(0) = 513177/2N/m^2$ و بعد از گذشت ۷۰ روز، این مقدار $E(0) = 666060/8N/m^2$ شده است. مقادیر تابع ریلکسیشن در زمان بی‌نهایت برای تست اول $E(\infty) = 458717/9N/m^2$ و در تست دوم مقدار $E(\infty) = 573029/7N/m^2$ می‌باشد. نتایج بیانگر این است که در کرنش‌های ثابت کوچکتر، کارایی نمونه ساخته شده از ماده ویسکوالاستیک در اتلاف انرژی بیشتر است. همچنین مدول یانگ ماده در تخمین تجربی انجام شده $0.89MPa$ به دست آمده است.

کلیدواژگان: ماده ویسکوالاستیک، تست تجربی ریلکسیشن، مدل جامد خطی استاندارد، مدول‌های ذخیره و اتلاف، میرایی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۵/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۳۱

*نویسنده مسئول: ka_jahani@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه استفاده از الاستومرها به دلیل بازدهی خوب در کاهش سطح ارتعاشات و همچنین به دلیل قیمت مناسب در بسیاری از صنایع مرسوم می‌باشند^[1, 2]. به عنوان مثال پلیمرهای ویسکوالاستیک در بسیاری از کاربردهای مهندسی نظیر صنایع مکانیکی، هوافضا و همچنین سازه‌های عمرانی به کار گرفته شده‌اند^[2]. دارا بودن خاصیت جذب انرژی بالا و کاهش دامنه ارتعاشات باعث شده است که محققین زیادی روی مدل‌سازی^[3, 4]، کاربردها^[5] و تست مواد ویسکو الاستیک^[6] کار کنند.

از آنجا که مواد ویسکوالاستیک هر دو رفتار الاستیک و ویسکوز را با هم نشان می‌دهند دارای ویژگی‌های منحصر به فرد هستند. برای مثال، در حالی که تحت یک نیروی ثابتی قرار گرفته‌اند، علاوه بر این که یک جابه‌جایی آبی را تحمل می‌کنند، در یک محدوده زمانی دچار خزش (Creep) هم می‌شوند^[7]؛ یعنی در آنها یک تغییر شکل وابسته به زمان وجود دارد.

به دست آوردن ضریب استهلاک (Loss Factor)، مدول یانگ (Young's modulus) یا مدول برشی (Shear Modulus) مواد

ویسکوالاستیک به عنوان مواد میراکننده، در طراحی‌های مربوط به کاهش ارتعاش در سازه‌ها و نیز کاهش صدای منعکس شده در اثر این ارتعاش بسیار مفید است، زیرا با دانستن این پارامترها، طراحی به صورت اصولی و مهندسی انجام و از تحمیل وزن اضافه به سازه جلوگیری می‌شود^[5, 8, 9].

در زمینه استخراج خواص مواد ویسکوالاستیک کارهای زیادی انجام شده است. جهانی و نویری^[10, 11] به منظور شناسایی مدول‌های یانگ دینامیکی و ضریب دمپینگ وابسته به فرکانس از تست‌های مودال، شبکه‌های عصبی مصنوعی و آنالیز مودال استفاده کردند. آنها برای محاسبه ضریب استهلاک، ابتدا مدول یانگ دینامیکی را با فرض استهلاک کم سازه با استفاده از فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها شناسایی کرده و سپس در مرحله دوم با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط حاصل از تست و مدل‌سازی شناسایی کردند. آسانو و همکاران^[12]، برای استخراج خواص مکانیکی و میرایی دمپ‌های با مواد ویسکوالاستیک دو مدل مکانیکی را بر پایه آزمایشات دینامیکی ارائه کردند. در مدل اول، آنها جهت بررسی تأثیر نیرو و میزان انرژی جذب شده از ترکیب چندین مدل ماکسول با چهار المان مکانیکی فنر و دمپر ویسکوز استفاده کردند. در مدل دوم به منظور بررسی رفتار وابسته به فرکانس دمپر با مواد ویسکوالاستیک، از ترکیب چندین مدل ماکسول با پنج المان مکانیکی استفاده کردند. این محققین مقادیر المان‌های مکانیکی مدول‌های مذکور را با مقایسه منحنی‌های هیستریزس تجربی و شبیه‌سازی شده شناسایی نمودند. /رمدی و همکاران^[13]، برای استخراج تجربی مدول یانگ دینامیکی یک تیر یک‌سرگیردار ویسکوالاستیک (از جنس درخت بامبو)، از استاندارد ASTM E756 استفاده کردند. کوراک و سانلیترک^[14]، با استفاده از روش تیر اوبرست (Oberst Beam Method) و با استفاده از روابط ذکر شده در استاندارد ASTM E756، مدول یانگ دینامیکی و ضریب استهلاک یک ماده ویسکوالاستیک را به دست آوردند. هوجار و ساهازروبیو^[15]، با استفاده از تکنیک تیر اوبرست و همچنین به کارگیری استاندارد مذکور، برای نمونه‌های ساندویچی دارای هسته‌هایی از جنس مواد ویسکوالاستیک مختلف، فرکانس طبیعی و ضرایب میرایی را محاسبه کردند. /گ و همکاران^[16]، برای تخمین تجربی ضریب میرایی و مدول یانگ صفحات دولایه (Bilayer) متشکل از صفحه آلومینیومی به ضخامت ۲mm و لایه پلی‌اتیلن با چگالی بالا به ضخامت ۰/۵ تا ۲mm، از آزمون مودال تجربی صفحه در شرایط آزاد استفاده نموده و از یک روش جدید تحلیل مودال بر پایه الگوریتم اسپریت بهره بردند.

نمونه‌ای از رفتار مواد ویسکوالاستیک در تست کرنش ثابت در شکل ۱ نشان داده شده است^[17]. این مواد هم دارای رفتاری مشابه مواد الاستیک و هم رفتاری مشابه مایعات ویسکوز دارند که بسته به ساختار مولکولی آنها می‌تواند متفاوت باشد. همان‌گونه که از این شکل مشاهده می‌شود، به عنوان مثال در آزمایشی با بارگذاری به صورت کرنش ثابت در یک نمونه ماده ویسکوالاستیک (تست ریلکسیشن) تنش با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

در این مقاله جهت بررسی رفتار مواد ویسکوالاستیک در شرایط تست کرنش ثابت از مدل مکانیکی جامد خطی استاندارد برای بیان خواص ارتجاعی و میرایی مواد ویسکوالاستیک بهره گرفته می‌شود. دستاورد و نوآوری این کار در تعیین خواص ذاتی ماده یعنی ضریب میرایی و مدول یانگ و تابع ریلکسیشن برای ماده ویسکوالاستیک ساخته شده از چسب آکفیکس پی ۶۳۵ جهت به کارگیری در

$$\sigma_d = \tau \frac{d\varepsilon_d}{dt} \quad (۲)$$

از طرفی داریم:

$$\sigma_d = \sigma_s = \sigma_1 \quad (۳)$$

با توجه به شکل ۲ جمع کرنش فنر و دمپر میزان کل کرنش در سمت چپ خواهد بود و داریم:

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d \quad (۴)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_s}{dt} + \frac{d\varepsilon_d}{dt} \quad (۵)$$

با جای گذاری روابط (۱) و (۲) در رابطه (۵) داریم:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_s}{dt} + \frac{\sigma_d}{\tau} \quad (۶)$$

با ساده سازی رابطه (۶) رابطه (۷) حاصل می شود:

$$E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\tau} \quad (۷)$$

همچنین از قسمت سمت راست مدل (از روابط مدل ویت) داریم [۷]:

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (۸)$$

بنابراین بار کل وارده برابر جمع بار هر دو طرف خواهد بود:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (۹)$$

با جمع روابط (۷) و (۸) می توان نوشت:

$$(E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\tau} + \frac{d\sigma_2}{dt} \quad (۱۰)$$

یا به عبارتی:

$$(E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2}{\tau} \varepsilon = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{d\sigma}{dt} \quad (۱۱)$$

با فرض اینکه تاریخچه تنش و کرنش از زمان بعد از صفر شروع می شوند، بنابراین $\varepsilon(0)$ و $\sigma(0)$ وجود ندارند، در نهایت با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه (۱۱)، رابطه (۱۲) حاصل می شود:

$$\sigma(s) = \frac{(s(E_1 + E_2) + \frac{E_2}{\tau})\varepsilon(s)}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (۱۲)$$

با استفاده از روابط انتگرال بولتزمن می توان نوشت [۷]:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \Rightarrow \sigma(s) = sE(s)\varepsilon(s) \quad (۱۳)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \Rightarrow \varepsilon(s) = sJ(s)\sigma(s) \quad (۱۴)$$

با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) می توان نوشت:

$$S(E(s)\varepsilon(s)) = \frac{s(E_1 + E_2 + \frac{E_2}{\tau})\varepsilon(s)}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (۱۵)$$

رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۶) بازنویسی می شود:

$$E(s) = \frac{E_1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{E_2}{s} \quad (۱۶)$$

با گرفتن لاپلاس معکوس از طرفین رابطه (۱۶) که در آن $\tau = \tau_r$ است، در نهایت برای تابع ریلکسیشن رابطه (۱۷) به دست می آید:

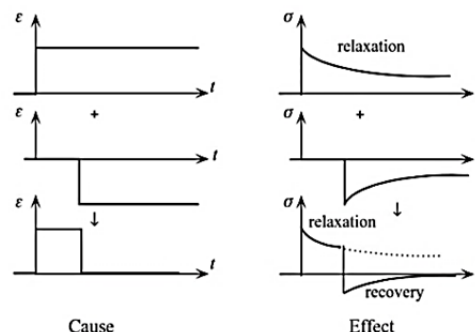
$$E(t) = E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (۱۷)$$

طبق قانون هوک نیز، رابطه (۱۸) را داریم:

$$\sigma(t) = E^* \cdot \varepsilon(t) \quad (۱۸)$$

در رابطه (۱۳) به دلیل اینکه زمان شروع تاریخچه بارگذاری معلوم نیست و همچنین برای ادغام و ایجاد پیوستگی بارگذاری بایستی زمان، قبل از صفر شروع شود، لذا رابطه (۱۳) به صورت رابطه (۱۹) بازنویسی می شود:

تکیه گاه سازه ها جهت کنترل ارتعاشات می باشد. برای تخمین تجربی ضریب میرایی ماده ویسکوالاستیک، نمونه ای با ابعاد مشخص، در شرایط کرنش ثابت، تحت تست ریلکسیشن قرار می گیرد. با توجه به تغییرات تنش برحسب زمان می توان بیان کرد، تابع ریلکسیشن برای مدل جامد خطی استاندارد، به صورت یک تابع نمایی نزولی است. پارامترهای این مدل عبارت اند از ضریب میرایی η ، مدول یانگ E و ثابت زمانی τ_r . پارامترهای مدل جامد خطی استاندارد تابعی از فرکانس می باشند و تا فرکانس ۵۰۰۰ Hz و در محدوده های دمایی مشخص که ماده کارایی خود را از دست ندهد، قابل شناسایی می باشند [۷]. مشخصات فیزیکی مواد ویسکوالاستیک می تواند به شکل چشم گیری تحت تأثیر دما قرار گیرد. بنابراین، آزمون های اندازه گیری باید در شرایط دمایی مشخص صورت پذیرد تا تکرارپذیری و دقت لازم را داشته باشد. ماده ویسکوالاستیک نه تنها به دما حساس است بلکه به رطوبت نیز حساسیت دارد و معمولاً در صورتی که کراس لینک های آن با مولکول های هوا تکمیل شود، در مجاورت رطوبت سفت تر می شود.



شکل ۱ پاسخ یک ماده ویسکوالاستیک به کرنش ثابت اعمالی (تست ریلکسیشن) [۷]

۲- توابع دینامیکی جامد خطی استاندارد

شماتیک مدل مکانیکی جامد خطی استاندارد که در این مقاله مورد استفاده قرار می گیرد به همراه مدل های ماکسول (Maxwell model) و کلوین- ویت (Voight model Kelvin) در شکل ۲ آورده شده است. این مدل ها از المان های مکانیکی شامل فنرها که رفتار کاملاً الاستیک و دمپرها که رفتار کاملاً ویسکوز دارند، تشکیل شده اند. برای ایجاد معادله ساختاری مواد خطی از اصل جمع آثار بولتزمن (Boltzmann Superposition Integral) استفاده می شود. این اصل بیان می دارد که تأثیر یک علل ترکیبی برابر است با جمع تأثیر تک تک علت ها که برقراری این اصل برای یک مدل گواه بر خطی بودن آن مدل می باشد. مدل مکانیکی ماکسول رفتار خزش را در شروع خزش، خطی پیش بینی می کند که منطبق بر واقعیت نیست و در تضاد با تست های تجربی می باشد که در خزش اولیه حکایت از رفتار غیر خطی مواد ویسکوالاستیک می باشد [۷]. بنابراین، در این مقاله به دلیل پیش بینی نزدیک به واقعیت از رفتار ماده ویسکوالاستیک، از مدل جامد خطی استاندارد به جای مدل های ماکسول و ویت استفاده شده است.

با فرض خطی بودن رفتار ماده ویسکوالاستیک در محدوده مورد بررسی، برای مدل جامد خطی استاندارد با اعمال یک کرنش پله ای به این مدل مکانیکی، از قسمت سمت چپ مدل (از قسمت مدل ماکسول) برای فنر و دمپر می توان نوشت [۷]:

$$\sigma_s = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} \quad (۱)$$

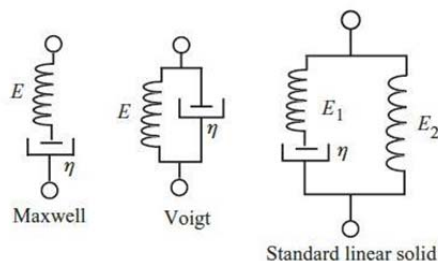
روابط (۳۳) و (۳۴) حاصل می‌شود:

$$E'(\omega) = E_2 + E_1 \frac{\omega^2 \tau_r^2}{1 + \omega^2 \tau_r^2} \quad (33)$$

$$E''(\omega) = E_1 \frac{\omega^2 \tau_r^2}{1 + \omega^2 \tau_r^2} \quad (34)$$

همچنین تابع خزش نیز می‌تواند از تابع ریلکسیشن استخراج شود. [7, 18] برای مدل جامد خطی استاندارد رابطه خزش به فرم رابطه (۳۵) حاصل می‌شود.

$$E^c(t) = \frac{1}{E_2} - \frac{E_1}{(E_2)(E_1 + E_2)} e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (35)$$



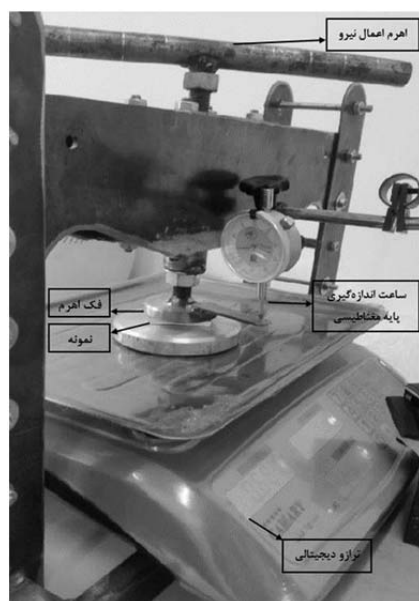
شکل ۲ مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک [7]

۳- آزمایش تجربی اندازه‌گیری خواص ماده ویسکوالاستیک

در این قسمت، در بخش اول به معرفی تجهیزات به‌کار گرفته شده در آزمایشگاه و نحوه به‌کارگیری این تجهیزات و در بخش دوم با طراحی و ساخت یک نمونه تست مناسب از یک نوع چسب پلی‌یورتان به عنوان ماده ویسکوالاستیک، نحوه انجام آزمایش توضیح داده شده است. در ادامه با استفاده از روابط بیان شده در بخش قبل، خواص ماده ویسکوالاستیک استخراج می‌شود.

۳-۱- تجهیزات به‌کار گرفته شده در آزمایش

تجهیزات سخت‌افزاری مورد استفاده جهت انجام آزمایش تست فشار شامل، سیستم اندازه‌گیری دیجیتالی نیرو (یک نوع ترازوی دیجیتالی) با دقت ۱g، اهرم پیچی جهت فشردن نمونه و اعمال نیرو، ساعت اندازه‌گیری با پایه مغناطیسی با دقت ۰/۰۱mm جهت اندازه‌گیری میزان فشردگی ثابت نمونه و همچنین کورنومتر جهت اندازه‌گیری بعد زمانی می‌باشد. این تجهیزات در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳ تجهیزات آزمایش

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (19)$$

با فرض $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ و با جای‌گذاری در رابطه (۲۰) و اینکه مقدار تابع ریلکسیشن از ترم $E(t) = E^o(t) + E_e$ تشکیل شده است که در هر لحظه از زمان بارگذاری E^o (این مقدار در لحظه شروع بارگذاری صفر می‌باشد) و در زمان بی‌نهایت به مقدار E_e میل می‌کند، لذا داریم:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t [E_e + E^o(t-\tau)] (\varepsilon_0 i\omega e^{i\omega\tau}) d\tau \quad (20)$$

$$\sigma(t) = \left(E_e \varepsilon_0 i\omega \frac{1}{i\omega} e^{i\omega\tau} \right) \Big|_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t E^o(t-\tau) (\varepsilon_0 i\omega e^{i\omega\tau}) d\tau \quad (21)$$

$$\sigma(t) = (E_e \varepsilon_0 e^{i\omega t}) \Big|_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t E^o(t-\tau) (\varepsilon_0 i\omega e^{i\omega\tau}) d\tau \quad (22)$$

با فرض $t - \tau = t'$ و همچنین $d\tau = -dt'$ و جای‌گذاری در رابطه (۲۲) رابطه (۲۳) به‌دست می‌آید:

$$\sigma(t) = (E_e \varepsilon_0 e^{i\omega t}) + \int_{\infty}^0 E^o(t') (\varepsilon_0 i\omega e^{i\omega(t-t')}) (-dt') \quad (23)$$

با بازنویسی رابطه (۲۳)، رابطه (۲۴) به‌دست می‌آید:

$$\sigma(t) = (E_e \varepsilon_0 e^{i\omega t}) - \varepsilon_0 i\omega e^{i\omega t} \int_{\infty}^0 E(t') (e^{-i\omega t'}) (dt') \quad (24)$$

حال با ساده‌سازی رابطه (۲۴)، رابطه (۲۵) به‌دست می‌آید:

$$\sigma(t) = \left[E_e + i\omega \int_0^{\infty} E(t') e^{-i\omega t'} dt' \right] \varepsilon(t) \quad (25)$$

با داشتن $e^{i\omega t'} = \cos \omega t' + i \sin \omega t'$ و جای‌گذاری در رابطه (۲۵) داریم:

$$\sigma(t) = \left[\left(E_e + \omega \int_0^{\infty} E(t') \sin \omega t' dt' \right) \varepsilon(t) + \left[i\omega \int_0^{\infty} E(t') \cos \omega t' dt' \right] \varepsilon(t) \right] \quad (26)$$

لذا تابع ریلکسیشن به صورت رابطه (۲۷) استخراج می‌شود:

$$E^* = (E_e + \omega \int_0^{\infty} E(t') \sin \omega t' dt') + i(\omega \int_0^{\infty} E(t') \cos \omega t' dt') \quad (27)$$

از رابطه (۲۷) مشاهده می‌شود E^* دارای دو قسمت حقیقی و موهومی است، لذا رابطه (۲۸) برای E^* حاصل می‌شود:

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (28)$$

از رابطه (۲۸) مشاهده می‌شود روابط خواص مکانیکی دینامیکی (وابسته به فرکانس) برحسب تابع ریلکسیشن برای دو قسمت حقیقی و موهومی داریم:

$$E'(\omega) = E_e + \omega \int_0^{\infty} E(t') \sin \omega t' dt' \quad (29)$$

$$E''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} E(t') \cos \omega t' dt' \quad (30)$$

رابطه (۲۸) به صورت رابطه (۳۱) بازنویسی می‌شود:

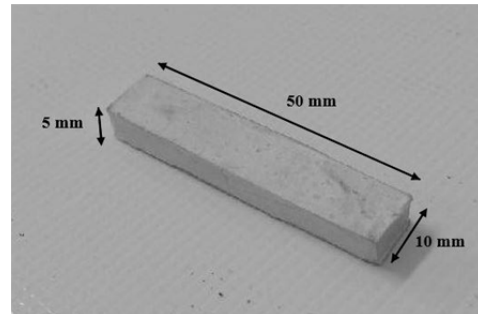
$$E^*(t) = E'(\omega) \left(1 + i \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \right) \quad (31)$$

$$\tan \sigma(\omega) = \frac{E''}{E'} \quad (32)$$

در نهایت با ساده‌سازی معادلات برای روابط جامد خطی استاندارد

۳-۲- آماده‌سازی نمونه و انجام آزمایش

نمونه استفاده‌شده در ابعاد به طول ۵۰mm، به عرض ۱۰mm و به ضخامت ۵mm بود. جهت ساخت نمونه، چسب پلی‌یورتان با نام تجاری آکفیکس پی ۶۳۵ در قالب مکعبی با ابعاد گفته‌شده تزریق شده، بعد از قالب‌گیری ماده و قرارگیری به مدت یک هفته در شرایط محیطی آزمایشگاه (درجه حرارت ۲۵ درجه سانتیگراد و رطوبت ۷۰ درصد) ساخته شده است. در شکل ۴، نمونه ساخته‌شده از چسب پلی‌یورتان نشان داده شده است.



شکل ۴) نمونه ساخته‌شده از مواد ویسکوالاستیک

برای اندازه‌گیری خواص ماده ویسکوالاستیک، نمونه‌ای مطابق ابعاد گفته‌شده پس از یک هفته نمونه از قالب جدا شده و پس از جای‌گذاری نمونه زیر فک اهرم روی سیستم نیروسنج و حصول اطمینان از تماس فک با نمونه، مقدار نیروی کوچک اولیه نشان داده شده روی صفر تنظیم می‌گردد. با چرخاندن دسته اهرم، نمونه به اندازه مورد نظر (مثلاً به اندازه ۲mm) فشرده می‌شود. با اندازه‌گیری هم‌زمان، بعد زمانی توسط کورنومتر و میزان نیرو توسط نیروسنج اندازه گرفته شده است.

با اندازه‌گیری تغییرات نیرو در بعد زمانی، پس از مدتی ملاحظه می‌شود تغییرات ثابت مانده است. این مدت زمان در واقع زمان بی‌نهایت برای نمونه مورد بررسی در شرایط تست می‌باشد. با داشتن روابط مربوط به تنش و کرنش برای نمونه می‌توان نوشت:

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta l}{l} \quad (36)$$

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{A} \quad (37)$$

که در این رابطه $F(t)$ بیانگر مقدار نیروی اعمالی توسط فک به نمونه در راستای قائم برحسب زمان، مقدار A بیانگر سطح مقطع قرارگرفته در زیر فک اهرم و Δl میزان فشرده‌گی ثابت می‌باشد.

مقادیر کرنش ثابت و تنش متغیر با زمان به ترتیب از روابط (۳۶) و (۳۷) به دست آمده و پس از جای‌گذاری در رابطه هوک که برای مواد ویسکوالاستیک خطی است، مقدار تابع ریلکسیشن $E(t)$ برای تست به صورت رابطه (۳۸) به دست می‌آید.

$$\sigma(t) = E(t) \cdot \epsilon_0 \quad (38)$$

یا به عبارتی:

$$E(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma(t) \quad (39)$$

حال، با استفاده از $E(t)$ به دست آمده از تست تجربی می‌توان پارامترهای تابع $E(t)$ استفاده‌شده در روابط تئوری را به دست آورد. با داشتن مقدار عددی تابع ریلکسیشن در زمان صفر، $E(0)$ و همچنین در زمان ثابت شدن تغییرات نیرو که همان زمان بی‌نهایت در نظر گرفته شده است مقدار عددی برای $E(\infty)$ نیز معلوم می‌باشد. حال، با استفاده از رابطه (۱۷) و استفاده از مقادیر $E(0)$ برای ماده ویسکوالاستیک برای تخمین مقدار عددی برای T_r نیز با در نظر گرفتن مقادیر متفاوت، تابع ریلکسیشن تئوری را به دست

می‌آوریم، به گونه‌ای که این تغییرات در مقایسه با نتایج در تست، کمترین میزان اختلاف را داشته باشد. این میزان اختلاف را با روش نرم اقلیدسی با استفاده از رابطه (۴۰) به دست می‌آوریم.

$$\Delta = \sqrt{(y_{p1} - y_t)^2 + (y_{p2} - y_t)^2 + \dots} \quad (40)$$

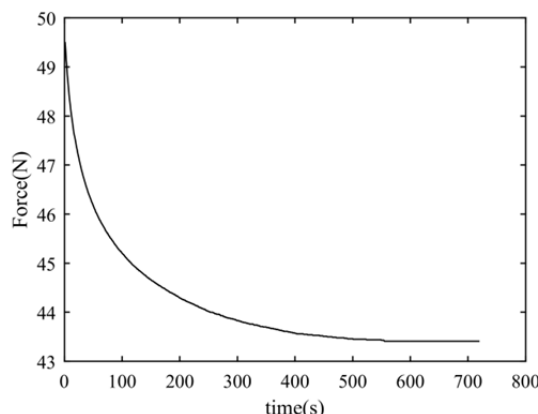
با تخمین مقدار عددی پارامترهای موجود در رابطه، تابع ریلکسیشن برای نمونه ماده آزمایش به دست می‌آید. حال برای به دست آوردن مقدار η ، با استفاده از روابط (۳۳) و (۳۴)، مقادیر $E'(w)$ و $E''(w)$ به دست می‌آیند، با تقسیم مقدار $E''(w)$ بر $E'(w)$ ، مقادیر $loss tangent$ یا همان η به دست می‌آید.

۴- نتایج آزمایش

نتایج آزمایش دربردارنده نتایج برای دو زمان مختلف تست (۷ روز و ۷۰ روز پس از شروع قالب‌ریزی نمونه)، نتایج با دامنه‌های مختلف فشردگی نمونه و صحنه‌سنجی نتایج می‌باشد که در ادامه هر کدام به تفکیک توضیح داده می‌شوند.

۴-۱- نتایج آزمایش پس از یک هفته گذشت از زمان قالب‌ریزی نمونه

طبق روند حل در بخش ۳، با اعمال نیرو و فشرده‌ساختن نمونه به عنوان مثال به اندازه ۲mm نتایج تغییرات نیرو برحسب زمان برای نمونه مورد تست در نمودار ۱ ارائه شده است.



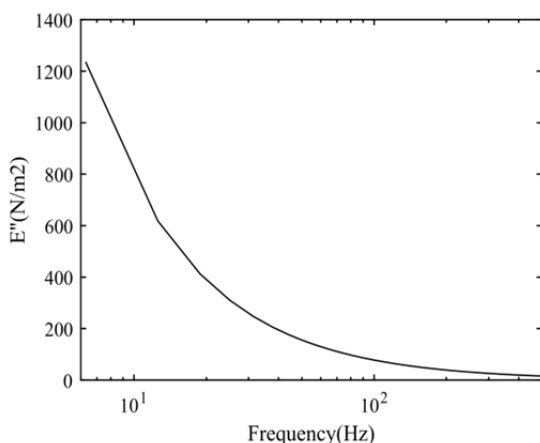
نمودار ۱) تغییرات نیرو برحسب زمان، در فشردگی ثابت نمونه به اندازه ۲mm بعد از ۷ روز

حال با استفاده از روابط ۲۹ تا ۳۲ مقادیر تابع ریلکسیشن به دست می‌آید. با در دست داشتن نتایج تغییرات $E(t)$ به دست آمده از تست که در نمودار ۲ ارائه شده است، مقادیر $E(0) = 513177/2N/m^2$ و همچنین $E(\infty) = 458717/9N/m^2$ می‌باشد. با استفاده از این دو مقدار حدی، مقادیر پارامترهای E_1 و E_2 مربوط به مدل جامد خطی استاندارد از رابطه تئوری (۱۱) به دست می‌آیند و تابع تئوری ریلکسیشن در این مثال به صورت رابطه (۴۱) نوشته می‌شود.

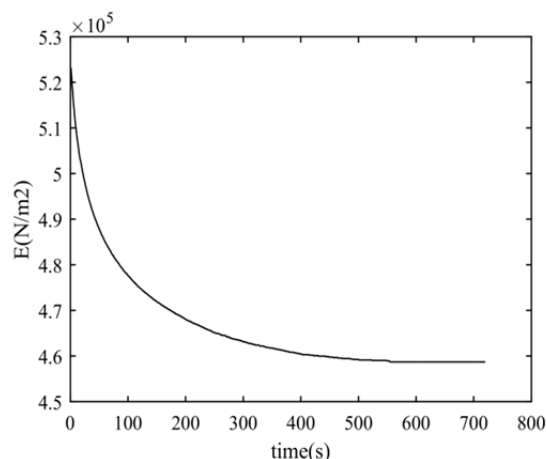
$$E(t) = 458717.9 + 64459.3 \times e^{(-t/\tau_r)} \quad (41)$$

آنچه از نتایج تجربی برای تابع ریلکسیشن به دست آمد مشاهده می‌شود، تغییرات منحنی برای این تابع به صورت یک تابع نمایی نزولی است.

حال، برای محاسبه مقدار ثابت زمانی τ_r از رابطه (۴۰)، تغییرات تابع $E(t)$ به ازای مقادیر مختلف τ_r محاسبه شده است و در نهایت همان گونه که از نمودار ۳ مشاهده می‌شود نتایج مربوط به تغییرات تابع ریلکسیشن به ازای $\tau_r = 83$ نزدیک به نتایج تست نمونه مورد نظر است.



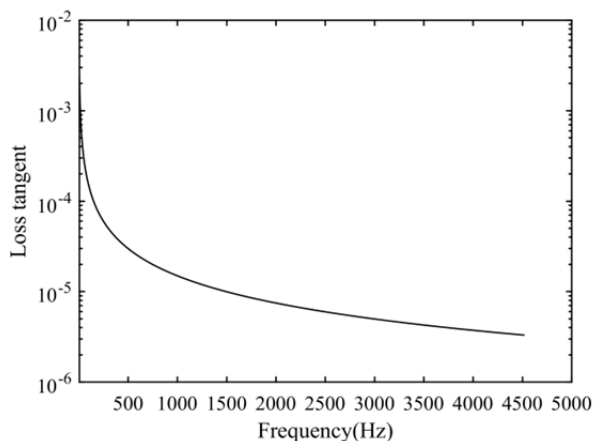
نمودار ۵) تغییرات مدول استهلاکی برحسب فرکانس، در فشردگی ۲mm بعد از ۷ روز



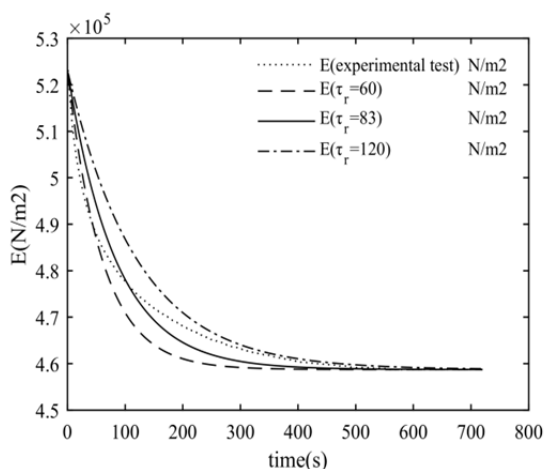
نمودار ۲) تغییرات تابع ریلکسیشن برحسب زمان، در فشردگی ثابت نمونه به اندازه ۲mm بعد از ۷ روز

حال با استفاده از رابطه (۳۲)، تغییرات مقدار Loss Tangent که معادل با تغییرات η است در نمودار ۶ ارائه شده است. تابع خزش برای نتایج تست ۷ روز مطابق رابطه (۳۵) و (۴۲) به دست می‌آید (نمودار ۷).

$$E^C(t) = 2.1 \times 10^{-6} - (2.6 \times 10^{-7})e^{\frac{-t}{83}} \quad (43)$$



نمودار ۶) تغییرات ضریب استهلاک برحسب فرکانس، در فشردگی ۲mm بعد از ۷ روز

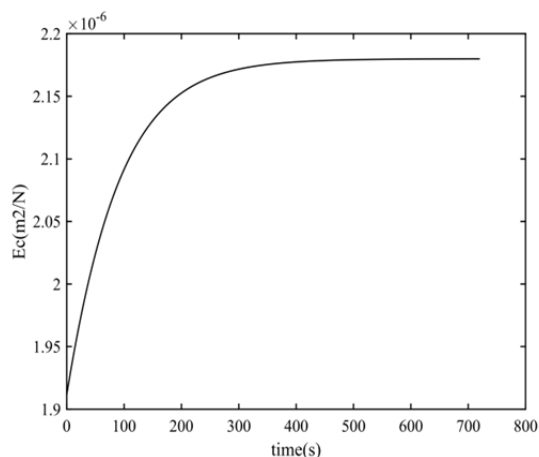


نمودار ۳) مقایسه توابع ریلکسیشن در پارامترهای ثابت زمانی مختلف جهت تخمین تئوری این تابع

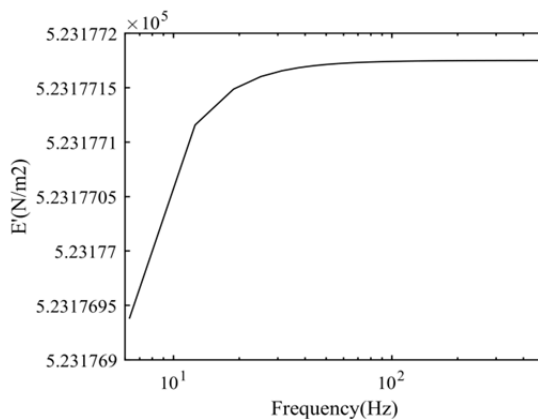
با به دست آوردن τ_r ، در نهایت تابع ریلکسیشن برای مثال مورد بررسی به صورت رابطه (۴۲) به دست می‌آید.

$$E(t) = 458717.9 + 64459.3 \times e^{(-t/83)} \quad (42)$$

با استفاده از روابط (۳۳)، (۳۴) و تغییرات مقادیر $E'(w)$ و $E''(w)$ برحسب فرکانس به ترتیب در نمودار ۴ و نمودار ۵ آورده شده است.

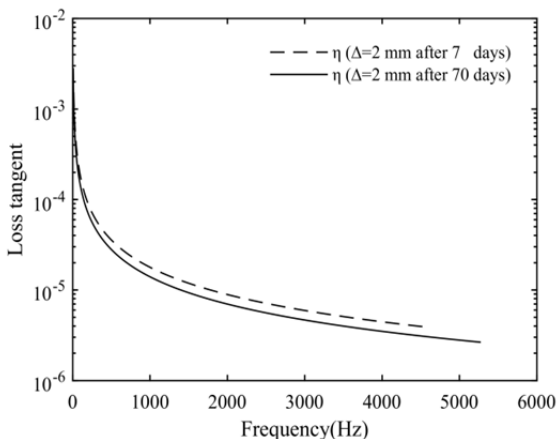


نمودار ۷) تغییرات تابع خزش برحسب زمان، در فشردگی ثابت نمونه به اندازه ۲mm بعد از ۷ روز



نمودار ۴) تغییرات مدول ارتجاعی برحسب فرکانس در فشردگی ۲mm بعد از ۷ روز

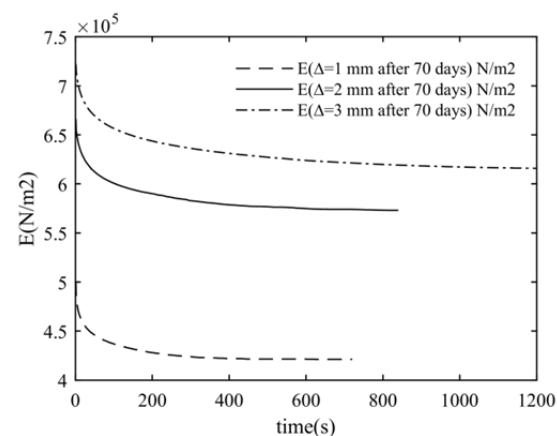
به منظور مشاهده اثر گذشت زمان بر ضریب استهلاک پس از گذشت ۷۰ روز، محاسبات توضیح داده شده در بخش ۳ برای به دست آوردن این پارامتر انجام شده است. نتایج به دست آمده در نمودار ۱۱ نشان می دهد که ضریب استهلاک نمونه ویسکوالاستیک با گذشت زمان زیاد از ایجاد نمونه، کاهش می یابد.



نمودار ۱۱) تغییرات ضریب استهلاک در اثر گذشت زمان با فشردگی ثابت اولیه ۲mm

۳-۴- نتایج آزمایش پس از ده هفته گذشت از زمان قالب ریزی نمونه در فشردگی های مختلف

میزان تغییرات تابع ریلکسیشن به ازای تغییر فشردگی های ثابت اولیه به ترتیب به اندازه ۱، ۲ و ۳mm بررسی شده است. نتایج به دست آمده در نمودار ۱۲ نشان می دهد که ماده ویسکوالاستیک هر چه تحت فشردگی اولیه بیشتر قرار گیرد، سفتی بیشتری از خود موقع ریلکسیشن نشان خواهد داد. همچنین با سفت تر شدن نمونه مشاهده می شود زمان بیشتری برای رسیدن به مقدار ثابت ریلکسیشن نیاز است.



نمودار ۱۲) تغییرات تابع ریلکسیشن بر حسب زمان، با فشردگی های مختلف بعد از ۷۰ روز

تابع تئوری ریلکسیشن برای نمونه مورد بررسی در فشردگی های مختلف به دست آمده است.

تابع ریلکسیشن در فشردگی ۱mm:

$$E(t) = 421173.3 + 79146.7 \times e^{(-t/100)} \quad (44)$$

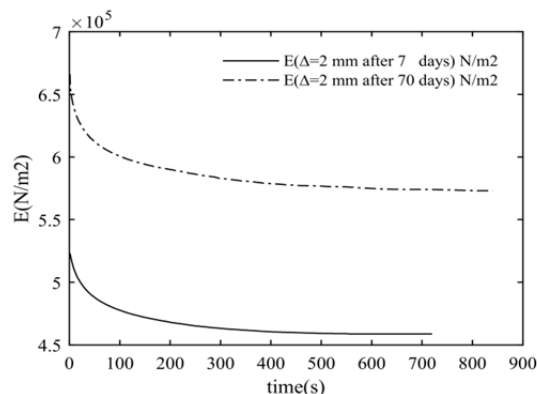
تابع ریلکسیشن در فشردگی ۲mm:

$$E(t) = 573029.7 + 93091.1 \times e^{(-t/100)} \quad (45)$$

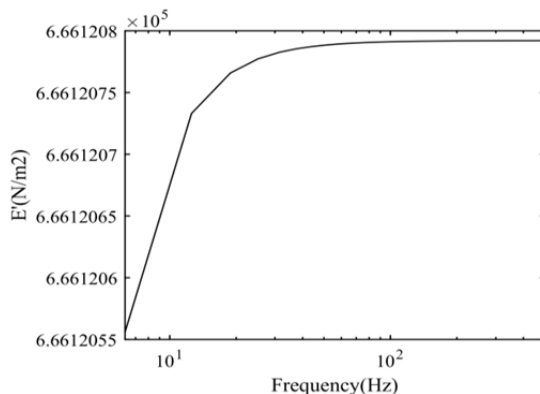
۲-۴- نتایج آزمایش پس از ده هفته گذشت از زمان قالب ریزی نمونه

به منظور مشاهده اثر گذشت زمان بر ماده ویسکوالاستیک، نمونه مورد نظر پس از ۷۰ روز دوباره تست می شود. در شرایط آزمایشگاهی یکسان طبق آزمایش قبل نمونه به اندازه ۲mm فشرده می شود. نتایج به دست آمده در نمودار ۸ نشان می دهد که ماده ویسکوالاستیک مورد بررسی با گذشت زمان سفت تر شده و از خاصیت ارتجاعی آن کاسته می شود.

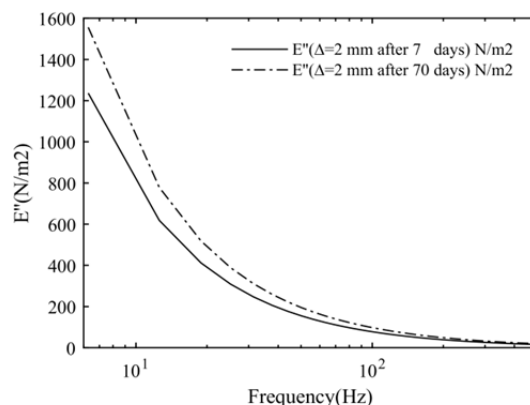
با استفاده از روابط (۳۳) و (۳۴)، تغییرات مقادیر $E'(w)$ و $E''(w)$ بر حسب فرکانس به ترتیب در نمودار ۹ و نمودار ۱۰ آورده شده است.



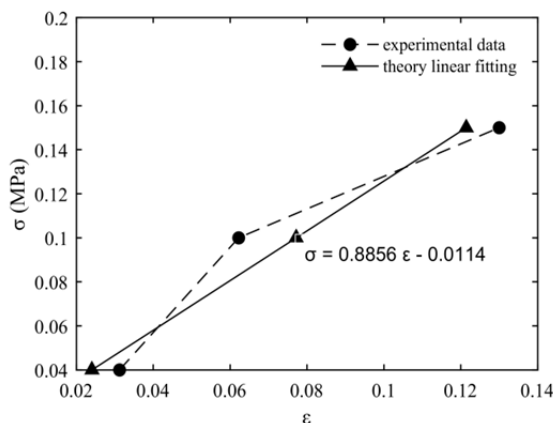
نمودار ۸) مقایسه تغییرات تابع ریلکسیشن بر حسب زمان، در فشردگی ۲mm پس از گذشت ۷۰ روز و ۷ روز



نمودار ۹) تغییرات مدول ارتجاعی بر حسب فرکانس، در فشردگی ۲mm بعد از ۷۰ روز



نمودار ۱۰) تغییرات مدول استهلاکی بر حسب فرکانس، در فشردگی ۲mm بعد از ۷۰ روز و ۷ روز



نمودار ۱۴) تست تجربی کشش ماده ویسکوالاستیک همراه با برازش خطی منحنی به منظور یافتن مدول یانگ بعد از ۱۰۰ روز

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، یک روش ساده تجربی جهت اندازه‌گیری خواص دینامیکی مواد ویسکوالاستیک ارائه گردید و خواص یک نمونه چسب پلی‌یورتان با این روش به صورت موفقیت آمیزی شناسایی شد. ماده ویسکوالاستیک خطی تحت تست ریلکسیشن قرار گرفت و برای مدل‌سازی رفتار ماده از مدل جامد خطی استاندارد استفاده شد. با استفاده روابط بین مدول‌های دینامیکی و فاکتور اتلاف در حوزه فرکانس (در مدل‌سازی) با توابع ریلکسیشن در حوزه زمان (ناشی از تست‌های تجربی)، مقادیر مدول‌های ارتجاعی (E') و استهلاکی (E'') و میرایی نمونه مورد بررسی، برحسب فرکانس استخراج گردید.

نتایج تست‌ها و بررسی‌ها نشان داد که خاصیت دمپینگ ماده ویسکوالاستیک با گذشت زمان از ایجاد نمونه کاهش و مدول ارتجاعی افزایش می‌یابد، زیرا با گذشت زمان به دلیل افزایش تراکم کراس‌لینک‌ها در ماده ویسکوالاستیک مورد بررسی (چسب پلی‌یورتان)، این ماده سفت‌تر می‌شود. همچنین مشاهده شد با افزایش کرنش اولیه ثابت، خاصیت استهلاکی ماده ویسکوالاستیک کاهش می‌یابد.

تشکر و قدردانی: این کار تحقیقاتی در آزمایشگاه مقاومت مصالح دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز انجام شده است لذا نهایت تشکر را بخاطر همکاری در انجام تست‌های آزمایشگاهی از مسئول محترم آزمایشگاه داریم.

تأییدیه اخلاقی: تعهد رعایت اخلاق نشر، واگذاری حقوق مادی، افشای تعارض منافع توسط نویسندگان تکمیل شده و مورد بررسی و تأیید قرار گرفته است.

تعارض منافع: نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافی نسبت به این کار تحقیقاتی ندارند.

سهم نویسندگان: فرناز ایمانی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ کمال جهانی (نویسنده دوم)، روش‌شناس/پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری (۵۰٪)

منابع مالی: کلیه منابع مالی این کار تحقیقاتی بر عهده دانشگاه تبریز بوده است.

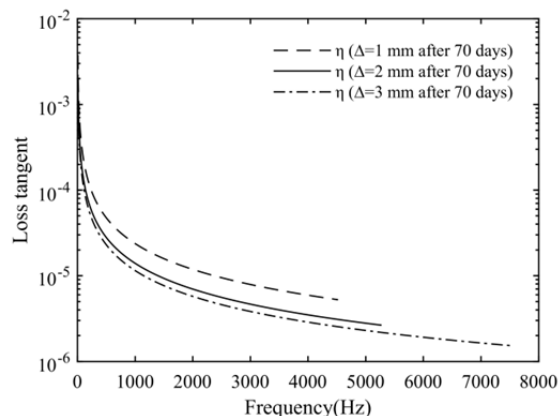
۶- فهرست علائم

A سطح مقطع نمونه ماده ویسکوالاستیک (m^2)

$$E(t) = 615854.57 + 106410.7 \times e^{(-t/100)} \quad (46)$$

با بررسی توابع تئوری ریلکسیشن مشاهده می‌شود با گذشت زمان، ثابت زمانی مواد ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد.

همچنین تغییرات ضریب استهلاک در فشردگی‌های اولیه مختلف محاسبه شده است. نتایج به‌دست‌آمده در نمودار ۱۳ حاکی از آن است که با افزایش میزان کرنش، مقدار این پارامتر کاهش می‌یابد.



نمودار ۱۳) تغییرات ضریب استهلاک برحسب فرکانس با فشردگی‌های مختلف بعد از ۷۰ روز

۴-۴- صحه‌گذاری نتایج

به منظور صحه‌گذاری نتایج حاصل از فرآیند شناسایی مورد استفاده در این تحقیق، نمونه مورد بررسی پس از ۱۰۰ روز تحت چند نیروی محدود در راستای طول نمونه مورد تست کشش قرار داده شده و با اندازه‌گیری مقدار جابجایی آن و با استفاده از روابط (۳۷) و (۳۸) مدول یانگ با هر نیروی اعمالی محاسبه شده است. سپس با استفاده از روش برازش خطی منحنی، شیب خط به‌دست‌آمده بیانگر مدول یانگ ماده ویسکوالاستیک می‌باشد. نتایج مربوط به تست کشش در نمودار ۱۴ به همراه منحنی برازش‌شده آورده شده است. با توجه به نتایج، مدول یانگ حاصل از تست کشش برابر 0.89 MPa می‌باشد. با توجه به اینکه مدول یانگ در شرایط تست استاتیکی به دست آمد، لذا این مقدار با مقدار E' شناسایی‌شده در بخش‌های قبلی در فرکانس‌های خیلی پایین (نزدیک به حالت استاتیکی که در آن قسمت موهومی مدول مختلط نزدیک به صفر می‌باشد و قسمت حقیقی آن همان مدول یانگ خواهد بود) برابر خواهد بود. با توجه به نمودار ۹، مقدار E' شناسایی‌شده از تست ریلکسیشن برابر 0.67 MPa می‌باشد. با مقایسه این دو مقدار می‌توان گفت که روش شناسایی مدول یانگ با استفاده از تست ریلکسیشن توانسته با دقت خوبی مدول یانگ را پیش‌بینی کند که حاکی از کارایی روش و صحت نتایج می‌باشد. البته در مراجع دیگر^[19] نیز برای مواد الاستومری از جنس پلی‌یورتان در حالت بالک مقدار مدول یانگ برابر $2-3 \text{ MPa}$ ذکر شده که در حدود مقادیر به‌دست‌آمده در این کار پژوهشی قرار دارد (اختلاف مشاهده‌شده بدین خاطر است که خواص مکانیکی الاستومرها تابع شرایط محیطی، نحوه دسترسی نمونه در قالب به هوای آزاد و ابعاد نمونه می‌باشد و مثل فلزات مقدار تقریباً ثابتی نیست).

همچنین با توجه به نمودارهای ۶ و ۱۱ تغییرات مشاهده‌شده برای ضریب استهلاک، با نتایج ذکرشده در مراجع^[10, 20] که روش‌های مختلفی جهت محاسبه ضریب استهلاک مواد پلی‌یورتان ارائه شده است، هم‌خوانی دارد.

- 9- Friswell MI, Sawicki JT, Inman DJ, Lees AW. The response of rotating machines on viscoelastic supports. *International Review of Mechanical Engineering*. 2007;1(1):32-40.
- 10- Jahani K, Nobari AS. Identification of damping and dynamic young's modulus of a structural adhesive using radial basis function neural networks and modal data. *Experimental Mechanics*. 2010;50(5):607-619.
- 11- Nobari AS, Jahani K. Identification of damping characteristic of a structural adhesive by extended modal based direct model updating method. *Experimental Mechanics*. 2009;49:785-798.
- 12- Asano M, Masahiko H, Yamamoto M. The experimental study on viscoelastic material dampers and the formulation of analytical mode. *Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering, Nagoya Branch, Japan*, 2000.
- 13- Armandei M, Fathi Darwish I, Ghavami K. Experimental study on variation of mechanical properties of a cantilever beam of bamboo. *Construction and Building Materials*. 2015;101(1):784-790.
- 14- Koruk H, Sanliturk KY. On measuring dynamic properties of damping materials using Oberst beam method. *ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*. New York: ASME; 2010.
- 15- Hujare PP, Sahasrabudhe AD. Experimental investigation of damping performance of viscoelastic material using constrained layer damping treatment. *Procedia Materials Science*. 2014;5:726-733.
- 16- Ege K, Boncompagne T, Laulagnet B, Guyader JL. Experimental estimations of viscoelastic properties of multilayer damped plates in broad-band frequency range. *arXiv:1210.3333 [physics.class-ph]*; 2012.
- 17- Wineman AS, Rajagopal KR. *Mechanical response of polymers an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press; 2000.
- 18- Keramat A, Heidari Shirazi K. Finite element based dynamic analysis of viscoelastic solids using the approximation of volterra integrals. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2014;86:89-100.
- 19- Pike RA. *Adhesives and sealants (engineered materials handbook, volume 3)*: AMS International, USA, 1990, 850 pp + index, \$118.00 (non-ASM members), \$94.40 (ASM members). *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 1991;11(2):57-139.
- 20- Sharma A, Peel LD. Vibration damping of flexible and rigid polyurethane composites. *Proceedings of SAMPE 2004, May 2004, Long Beach CA*.

تابع ریلکسیشن (N/m^2)	$E(t)$
پارامتر ثابت مدل ماکسول (N/m^2)	E_1
پارامتر ثابت مدل ویت (N/m^2)	E_2
مدول ارتجاعی (N/m^2)	E'
مدول استهلاکی (N/m^2)	E''
طول اولیه (m)	l
تغییرات طولی (m)	Δl
علائم یونانی	
ضریب استهلاک	η
ثابت زمانی ریلکسیشن (sec)	τ_r
فرکانس (Hz)	ω
تابع تنش (N/m^2)	$\sigma(t)$
کرنش اولیه (m)	ϵ_0
تابع کرنش	$\epsilon(t)$

منابع

- 1- Nashif AD, Jones DI, Henderson JP. *Vibration damping*. New York: John Wiley & Sons; 1985. pp. 1-43.
- 2- De Lima AMg, Rade DA, Léopore NetoFP. L. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2009;23(4):1272-1281.
- 3- Keramat A, Ahmadi A. Axial wave propagation in viscoelastic bars using a new finite-element-based method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2012;77(1):105-117.
- 4- Vostroukhov AV, Metrikine AV. Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track. *International Journal of Solids and Structures*. 2003;40(21):5723-5752.
- 5- Rao MD. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. *Journal of Sound and Vibration*. 2003;262(3):457-474.
- 6- Zanganeh R, Ahmadi A. Axial vibration of a rod with viscoelastic support. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*. 2013;3(1):67-79. [Persian]
- 7- Renardy M. Recent developments and open problems in the mathematical theory of viscoelasticity. *Viscoelasticity and Rheology*. 1985;345-360.
- 8- Fan ZJ, Kim KJ. Investigation of effects of viscoelastic boundary supports on transient sound radiated from a rectangular plate by modal strain energy method. *KSME International Journal*. 1996;11(5):530-536.