



Modeling the Collapse of Granular Material on a Rigid Wall with Material Point Method (MPM)

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Riahipoor M.¹ MSc,
Shafiei A.*¹ PhD,
Salehizadeh S.A.M.¹ MSc

How to cite this article

Riahipoor M, Shafiei A, Salehizadeh S.A.M. Modeling the Collapse of Granular Material on a Rigid Wall with Material Point Method (MPM). Modares Mechanical Engineering. 2019;19(11):2627-2634.

ABSTRACT

The material point method (MPM) is a numerical technique to modeling the large deformation and interaction between different phases of materials. MPM combines the best aspects of both Lagrangian and Eulerian formulations while avoiding some shortcomings of them. In MPM a body is modeled with the particles which carry all physical properties of the continuum such as mass, momentum, strains and stresses. The background mesh is used to solving the momentum equation. In the first phase, information is mapped from particles to nodes. In the second phase, momentum equations are solved for the nodes, and then the updated nodes are mapped to the particles to updating their positions and velocities. In the third phase the grid is reset. In numerical simulation of granular flows, large deformations and interactions between grain boundaries and buildings lead to the complexity in the structural behavior of the material and, as a result, the complexity of the simulations. From different numerical techniques, the material point method is a suitable method for simulating such problems. In this study, the problem of the collapse of a column of granular material on a rigid wall was simulated in two dimensions through material point method. The surface profile and displacement of the front were compared with the laboratory results which a good accordance is observed between them. The results show that the ratio of the initial column plays an important role in the development of granular mass.

Keywords Particle Methods; Material Point Method (MPM); Granular Material; Collapse

¹Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Yazd University, Yazd, Iran

*Correspondence

Address: Engineering Faculty, Yazd University, University Boulevard, Safayieh, Yazd, Iran
Phone: +98 (35) 31232496
Fax: +98 (35) 38210991
arshafiei@yazd.ac.ir

Article History

Received: September 10, 2018
Accepted: May 21, 2019
ePublished: November 2, 2019

CITATION LINKS

[1] Material point method: Basics and applications [2] The particle-in-cell computing method for fluid dynamics [3] FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions [4] A particle method for history-dependent materials [5] Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems [6] Formulation of a dynamic material point method (MPM) for geomechanical problems [Dissertation] [7] A particle-in-cell solution to the silo discharging problem [8] Impact of dry granular flows on a rigid wall: Discrete and continuum approach [9] Axisymmetric collapse of granular columns [10] Numerical simulations for large deformation of granular materials using smoothed particle hydrodynamics method [11] A constitutive law for dense granular flows

مدل سازی فروریزش مواد دانه ای بر دیواره صلب با روش نقطه مادی

مهرنوش ریاضی پور MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

علیرضا شفیعی * PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

سید امیرمسعود صالحی زاده MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده

روش نقطه مادی، روش عددی توانمند برای مدل کردن تغییر شکل های بزرگ و اثر متقابل بین فازهای مختلف ماده است. این روش ترکیبی از مزایای روش های اویلری و لاگرانژی است در حالی که از معایب آنها اجتناب می کند. در این روش جسم با ذراتی که همه خواص فیزیکی از جمله جرم، مومنتوم، تنش و کرنش را داراست، مدل می شود. شبکه مش پس زمینه برای حل معادلات مومنتوم به کار گرفته می شود. در مرحله اول اطلاعات از ذرات به گره ها نگاشته می شود. در مرحله دوم معادلات مومنتوم برای گره ها حل می شود سپس گره های به روز شده به ذرات برای به روز کردن موقعیت و سرعت آنها نگاشته می شود. در مرحله سوم، شبکه دور ریخته شده و شبکه جدید ایجاد می شود. در شبیه سازی عددی جریان های دانه ای، تغییر شکل های بزرگ و اندر کنش های بین مرزهای جریان دانه ای و بناها منجر به پیچیدگی در رفتارهای ساختاری ماده و در نتیجه پیچیده شدن شبیه سازی ها می شود. از بین تکنیک های عددی مختلف، روش نقطه مادی روشی مناسب برای شبیه سازی اینگونه مسائل است. در این تحقیق فروریزش ستون استوانه ای از مواد دانه ای روی دیواره صلب در دو بعد با روش نقطه مادی شبیه سازی شده و پروفیل سطح و جابجایی جبهه پیشروی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد که تطابق خوبی بین نتیجه ها دیده می شود. نتایج نشان می دهد که نسبت ستون اولیه نقش مهمی در گسترش توده دانه ای ایفا می کند.

کلیدواژه ها: روش های ذره ای، روش نقطه مادی، مواد دانه ای، فروریزش

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۶/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۲۹

* نویسنده مسئول: arshafiei@yazd.ac.ir

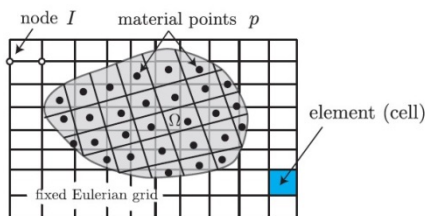
۱- مقدمه

امروزه مدل کردن بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیکی و غیره منجر به معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می شوند که همگی آنها به راحتی با روش های تحلیلی قابل حل نیستند. به همین جهت برای حل این گونه مسائل نیاز به استفاده از روش های عددی برای رسیدن به جواب مورد نظر هست. در همین رابطه روش های عددی گوناگونی با کارایی های مختلف ارائه شده اند. مزیت اصلی این روش ها حذف هرگونه محدودیت هندسی در مسائل است. همچنین سختی، پرهیزی و زمان بری روش های تجربی را ندارند و برای شبیه سازی با شرایط واقعی راحت تر هستند.

روش نقطه مادی، روش عددی توانمند برای مدل کردن تغییر شکل های بزرگ است. در روش نقطه مادی جسم با نقاط لاگرانژی، که ذرات یا نقاط مادی نامیده اند، نشان داده می شود. تغییر شکل های بزرگ با حرکت ذرات درون شبکه ثابت، مدل می گردد. این ذرات همه خواص فیزیکی جسم از جمله: جرم، مومنتوم، پارامترهای ماده، تنش، کرنش و نیروهای خارجی را دارا هستند. در شروع هر گام زمانی، اطلاعات از ذرات به شبکه محاسباتی منتقل می شود. این شبکه برای حل معادله های حاکم در مدل لاگرانژی استفاده گشته و در پایان هر گام زمانی، حل معادلات از شبکه به ذرات برای به روز رسانی اطلاعات، منتقل می شود.

در روش نقطه مادی یک جسم پیوسته با مجموعه متناهی از ذرات گسسته (n_p) و موقعیت ذره p در زمان t با x_p^t نشان داده می شود. هر نقطه ماده p دارای جرم m_p ، چگالی ρ_p ، سرعت V_p ، تانسور تنش کوشی σ_p و دیگر متغیرهای حالت لازم برای مدل ساختاری می باشد. بنابراین این مجموعه نقاط یک توصیف لاگرانژی از یک جسم پیوسته را فراهم می کند. از آنجایی که هر نقطه ماده یک مقدار ثابت از جرم را داراست، معادله بقای جرم به طور خودکار برقرار است. برخلاف دیگر روش های بدون مش که معادله مومنتوم روی ذرات حل می شود، در روش نقطه مادی، معادله مومنتوم روی شبکه اویلری ثابت حل می گردد. به عبارت دیگر، ذرات در این روش به طور مستقیم با هم اندرکنش ندارند، بلکه ویژگی های ذرات روی گره های شبکه تجمیع می شود. این امر نیاز به یافتن دامنه پوشش برای هر ذره که در روش های بدون مش کاربرد دارد را از بین می برد [1].

در شکل ۱ نحوه گسسته سازی یک جسم نشان داده شده است. اغلب بعد از هر گام زمانی شبکه به حالت اولیه خود تبدیل می شود. این مطلب یک تفاوت کلیدی بین روش نقطه مادی و روش المان محدود است. به این سبب که نقاط ماده جرم، سرعت و دیگر متغیرهای حالت در بین گام های زمانی را ذخیره می کند، مش بندی مجدد در مسئله ایجاد خطا نمی کند، اما این مسئله در روش المان محدود، در تغییر شکل های بزرگ، باعث ایجاد خطا می شود. این تفاوت به روش نقطه مادی اجازه می دهد تا تغییر شکل های بزرگ، پدیده نفوذ، برخورد، انتشار ترک و جریان های دانه ای را مدل سازی کند. روش نقطه مادی همچنین می تواند مسائل چند فازی، با روابط ساختاری مختلف برای هر فاز را نیز مدل کند.



شکل ۱) گسسته سازی و شبکه بندی روش نقطه مادی

روش نقطه مادی یکی از توسعه یافته ترین روش های ذره در سلول (Particle In Cell; PIC) و ساده ترین روش های گسسته فضایی برای حل مسائل مکانیک جامدات و ترکیبی از روش های اویلری و لاگرانژی می باشد. اولین روش ذره در سلول در اوایل دهه ۱۹۶۰ توسط هارلو [2] توسعه یافت و برای برنامه های کاربردی در مکانیک سیالات مورد استفاده قرار گرفت. در روش ذره در سلول اولیه اتلاف انرژی بیش از حد بود، در سال ۱۹۸۶ برکبیل و روپل [3] با معرفی تکنیک FLIP (The Fluid Implicit Particle Method) این معضل غلبه کردند.

سالمسی و همکاران [4] روش FLIP را برای کاربردهایی در مکانیک جامدات گسترش دادند. آنها معادله ساختاری را برای هر ذره حل کردند. با این روش، مشکل المان هایی که شامل مواد مختلف با معادله ساختاری های مختلف هستند، نیز حل شد. آنها همچنین به حل مسائل عددی با چرخش های بزرگ پرداختند و نشان دادند که اتلاف انرژی که در روش اویلری وجود دارد، در رویکرد آنها مشاهده نشد.

$$\rho \frac{De}{Dt} = D: \sigma \quad (۳) \quad \text{معادله بقای انرژی}$$

$$D = \frac{1}{2} (L + L^T) \quad (۴) \quad \text{نرخ کرنش}$$

$$\sigma^v = S_t^D(D, \sigma) \quad (۵) \quad \text{معادله ساختاری}$$

در این روابط ρ چگالی، v سرعت، σ تانسور تنش کوشی، b نیروی حجمی (Body Force) و ∇ اپراتور گرادیان است. نرخ تانسور تغییر شکل با D ، تانسور گرادیان سرعت با $L_{ij} = v_{ij}$ ، انرژی داخلی بر واحد جرم با e نشان داده می‌شود. روش نقطه مادی از فرمول‌بندی ضعیف همانند روش المان محدود به شرح زیر استفاده می‌کند:

$$\int_{\Omega} \rho \delta u_i a_i d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}^s d\Omega = \int_{\Omega} \rho \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \rho \delta u_i \bar{t}_i^s d\Gamma \quad (۶)$$

در این رابطه Ω پیکربندی جسم، σ_{ij}^s تنش‌های مخصوص یعنی $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij} / \rho$ ، δu میدان جابه‌جایی مجازی است. بردار کشش مخصوص با $\bar{t}_i^s$ نشان داده شده است. تمام دامنه ماده Ω توسط زیر مجموعه‌ای از مواد گسسته‌سازی و فرض شده است که همه جرم یک زیرمجموعه در ذره متناظر با آن جمع شده است. به این معنی که میدان چگالی جرم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho(x, t) = \sum_{p=1}^{n_p} M_p \delta(x - x_p) \quad (۷)$$

که در آن δ تابع دلتای دیراک و n_p تعداد کل ذرات است. با جایگزینی رابطه ۷ در رابطه ۸ خواهیم داشت:

$$\sum_{p=1}^{n_p} M_p \delta u_i(x_p) a_i(x_p) + \sum_{p=1}^{n_p} M_p \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}^s(x_p) = \sum_{p=1}^{n_p} M_p \delta u_i(x_p) b_i(x_p) + \sum_{p=1}^{n_p} M_p \delta u_i(x_p) \bar{t}_i^s(x_p) \quad (۸)$$

تا این مرحله، روش نقطه مادی و روش المان محدود یکسان است. شبکه اویلری پیش‌زمینه به صورت مش المان محدود با توابع شکل $\{N_I\}_{I=1}^{n_n}$ که در آن n_n تعداد کل گره‌هاست، به کار گرفته می‌شود. به لطف استفاده از شبکه، محاسبه توابع شکل و مشتقات آنها امکان‌پذیر است و نیازی به یافتن نقاط همسایگی که در روش‌های بدون مش مانند SPH مرسوم است، نیست. موقعیت و جابه‌جایی ذره p طبق روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$x_i(x_p) = \sum_{I=1}^{n_n} N_I(x_p) x_{iI} \quad (۹)$$

$$u_i(x_p) = \sum_{I=1}^{n_n} N_I(x_p) u_{iI} \quad (۱۰)$$

در روابط قبل، x_{iI} مؤلفه i ام بردار موقعیت گره I و u_{iI} مؤلفه i ام بردار جابه‌جایی گره I است. زیرنویس I نشانگر شماره گره شبکه و زیرنویس p نشانگر شماره ذره است. برای بردار سرعت و شتاب روابط زیر وجود دارد:

$$v_i(x_p) = \sum_{I=1}^{n_n} N_I(x_p) v_{iI} \quad (۱۱)$$

در سال ۱۹۹۶ سالسکی و چریپر[۵] این روش را روش نقطه مادی نامیده و فرمول‌بندی آن را ارائه کردند. آنها روش نقطه مادی را برای مسئله تست برخورد تیلور نیز به کار بردند. همچنین اثر دما را در معادله ساختاری لحاظ کردند[۶].

در سال ۱۹۹۹ ویکوسکی و همکاران[۷] روش نقطه مادی را برای شبیه‌سازی مسائل تخلیه سیلو که شامل جریان مواد دانه‌ای است، به کار بردند. آنها فرمول‌های الگوریتم تماس اصطکاکی روش نقطه مادی و از المان‌های مثلثی با توابع شکل خطی برای گسسته‌سازی مسئله استفاده کردند.

جریان‌های دانه‌ای به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ، نرخ کرنش‌های بزرگ، اندرکنش‌های بین مرزهای جریان دانه‌ای و بناها و برخورد بین دانه‌ها منجر به پیچیدگی در رفتارهای ساختاری ماده و در نتیجه پیچیده‌شدن شبیه‌سازی‌های عددی می‌شود. تکنیک‌های عددی مختلف برای آنالیزکردن شروع و نحوه گسترش زمین‌لغزه استفاده می‌شود، ولی فقط چند روش برای شبیه‌سازی همه روند مسئله از جمله برخورد و ضربه مناسب هستند که یکی از این روش‌ها روش نقطه مادی است[۸].

مطالعاتی در زمینه فروریزش خاک یا دیگر مواد دانه‌ای روی سطح صاف با استفاده از هر دو روش تجربی و عددی انجام شده است. لوب و همکاران[۹] نتایج حاصل از آزمایشات تجربی را برای مسئله سه‌بعدی فروریزش برای مواد دانه‌ای خشک مختلف ارائه کرده‌اند. آنها در ابتدا مواد را در عمق‌های مختلف درون استوانه‌ای قرار دادند و استوانه را به طور ناگهانی برداشتند. جرم فرو ریخت و روی سطح صاف گسترش یافت. مجموعه‌ای از دوربین‌های سریع این حرکت را ثبت کردند که این تصاویر اجازه اندازه‌گیری ابعاد هندسه نهایی را به محققان می‌دهد. نتایج ارائه‌شده نشان می‌دهد که هندسه نه‌نشین‌شده نهایی تابعی از ضریب a ($a = h_0/L_0$) است و به سختی سطح و سائز دانه‌ها وابسته نیست. همچنین یافته‌ها حاکی از آن است که خواص اصطکاکی محیط فقط در لحظه آخر جریان نقش دارد.

این آزمایشات به طور عددی توسط چن و کیو[۱۰] با روش هیدرودینامیک ذرات هموار مدل شده است. نتایج عددی به‌دست‌آمده با مشاهدات تجربی منطبق بود که توانایی این روش برای شبیه‌سازی دینامیک جریان دانه‌ای را نشان می‌دهد. هدف از بیان این مسئله، نشان‌دادن توانایی روش نقطه مادی برای مدل‌کردن جریان دانه‌ای دینامیکی ناشی از گرانش، زمانی که با معادلات ساختاری مناسبی همراه است، می‌باشد.

در این مقاله به بررسی مسئله فروریزش ستونی از مواد دانه‌ای بر سطح صاف صلب که نمونه‌ای از جریان‌های دانه‌ای است، با استفاده از الگوریتم روش نقطه مادی و همچنین ارائه مدل ساختاری مناسب با آن پرداخته می‌شود. سپس نتایج به‌دست‌آمده با نتایج مدل‌سازی تجربی مقایسه می‌شود.

۲- معادلات حاکم بر روش نقطه مادی

برای یک جسم پیوسته تحت بار مکانیکی خالص (بدون در نظر گرفتن تغییرات دمایی) معادلات دیفرانسیلی حاکم شامل قانون تعادل، معادله ساختاری، معادله سینماتیک و شرایط مرزی و اولیه می‌باشد. این معادلات عبارت‌اند از:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (۱) \quad \text{معادله بقای جرم}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho b \quad (۲) \quad \text{معادله بقای مومنتوم خطی}$$

که در آن $\nabla N_I = (\frac{\partial N_I}{\partial x_1}, \frac{\partial N_I}{\partial x_2}, \frac{\partial N_I}{\partial x_3})^T$ گرادیان تابع شکل، V_p حجم ذره p است. توجه شود که چگالی ذرات به صورت نسبت جرم ذره به حجم آن تعریف می‌شود. اگر ماتریس جرم توده‌ای استفاده شود، معادله ۱۶ به صورت زیر خواهد بود:

$$m_I^t a_I^t = f_I^{ext} + f_I^{int} \equiv f_I^t \quad (22)$$

استفاده از این معادله اجازه می‌دهد که شتاب گره‌ها، به جای استفاده از یک سیستم معادلات جبری خطی، گره به گره محاسبه شود [10].

معادله ۲۲ برای به‌دست‌آوردن شتاب گره‌ای $a_I^t = f_I^t / m_I^t$ استفاده و سپس سرعت‌های گره‌ای با استفاده از گسسته‌سازی زمانی اوپلری صریح به‌روزرسانی می‌شود (این رایج‌ترین استفاده از روش انتگرال‌گیری زمانی در MPM است).

$$v_I^{t+\Delta t} = v_I^t + \Delta t a_I^t \quad (23)$$

سرعت‌ها و شتاب‌های گره‌ها به ذرات نگاشته می‌شوند تا موقعیت و سرعت‌های ذرات را به روزرسانی کنند:

$$x_p^{t+\Delta t} = x_p^t + \Delta t \sum_I N_I(x_p^t) v_I^{t+\Delta t} \quad (24)$$

$$v_p^{t+\Delta t} = v_p^t + \Delta t \sum_I N_I(x_p^t) a_I^{t+\Delta t} \quad (25)$$

از آنجایی که شرایط مرزی معمولاً روی سرعت به جای شتاب اعمال می‌شوند، بهتر است که از رابطه $a_I^t = (1/\Delta t)[v_I^{t+\Delta t} - v_I^t]$ برای به‌دست‌آوردن سرعت ذرات با استفاده از سرعت‌های قبلی و جدید، استفاده شود:

$$v_p^{t+\Delta t} = v_p^t + \sum_I N_I(x_p^t)[v_I^{t+\Delta t} - v_I^t] \quad (26)$$

در پایان تنش‌های ذرات که بستگی به مدل ساختاری ماده دارند، محاسبه می‌شوند. به عنوان مثال گرادیان سرعت ذرات در صورت نیاز از معادله زیر به دست می‌آید:

$$L_p^{t+\Delta t} \equiv \nabla v_p^{t+\Delta t} = \sum_I \nabla N_I(x_p^t) v_I^{t+\Delta t} \quad (27)$$

که در آن L_p یک ماتریس 3×3 با مؤلفه‌های $L_{ij} = v_{i,j}$ (در سه بعد) است. در حالت دوبعدی این ماتریس 2×2 است. از گرادیان سرعت می‌توان گرادیان تغییر شکل را از رابطه $\dot{F} = LF$ محاسبه نمود. با استفاده از روش اوپلری می‌توان نوشت:

$$\frac{F^{t+\Delta t} - F^t}{\Delta t} = L^{t+\Delta t} F^t \quad (28)$$

و تانسور گرادیان تغییر شکل:

$$F_p^{t+\Delta t} = (I + L_p^{t+\Delta t} \Delta t) F_p^t \quad (29)$$

که می‌توان حجم ذرات آپدیت‌شده را از $V_p^{t+\Delta t} = \det F_p^{t+\Delta t} V_p^0$ محاسبه کرد. در معادله بالا I ماتریس واحد است. نرخ کرنش را در صورت لزوم می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\Delta e_p = (\text{sym} L_p^{t+\Delta t}) \Delta t \quad (30)$$

و از آن برای محاسبه نرخ تنش $\Delta \sigma_p$ استفاده کرد. تنش‌های ذرات آپدیت‌شده برابر خواهد بود با:

$$\sigma_p^{t+\Delta t} = \sigma_p^t + \Delta \sigma_p \quad (31)$$

چگالی ذرات از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \frac{\rho_p^t}{1 + \text{tr}(\Delta e_p)} \quad (32)$$

۳- تئوری معادلات ساختاری

در روابط ارائه‌شده در این بخش از علائم استاندارد مکانیک پیوسته

$$a_i(x_p) = \sum_{I=1}^{n_n} N_I(x_p) a_{iI} \quad (12)$$

که در آنها v_{iI} و a_{iI} به ترتیب مؤلفه نام بردارهای سرعت و شتاب گره I هستند. با استفاده از روش گلرکین میدان جابه‌جایی مجازی به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\delta u_i(x_p) = \sum_{I=1}^{n_n} N_I(x_p) \delta u_{iI} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \sum_{I=1}^{n_n} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \delta u_{iI} \quad (14)$$

با قرار دادن روابط ۱۲، ۱۳ و ۱۴ در رابطه ۸ واز آنجایی که δu_{iI} دلخواه است، معادله زیر ایجاد می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) \left(\sum_{j=1}^{n_n} N_j(x_p) a_{ij} - \sum_{p=1}^{n_p} M_p \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \big|_{(x_p)} \sigma_{ij}^s(x_p) \right) \\ = \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) b_i(x_p) + \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) \bar{t}_i(x_p) \end{aligned} \quad (15)$$

که می‌توان معادله بالا را به فرم فشرده زیر نوشت:

$$m_{IJ} a_J = f_I^{ext} + f_I^{int} \quad (16)$$

که در آن f_I^{ext} و f_I^{int} به ترتیب ماتریس جرم ثابت، بردار نیروی خارجی و بردار نیروی داخلی هستند. این معادله دقیقاً مشابه با روش المان محدود است. مقدار ماتریس جرم ثابت در رابطه زیر داده شده است:

$$m_{IJ} = \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) N_J(x_p) \quad (17)$$

ماتریس جرم همانند المان محدود ثابت نمی‌ماند و به این علت که ذرات بین سلول‌های شبکه حرکت می‌کنند، این ماتریس نیز تغییر می‌کند. بنابراین، برای هر گام زمانی، ماتریس معکوس ماتریس جرم باید محاسبه شود. برای برخی جای‌گیری‌های خاص ذرات احتمال دارد که ماتریس جرم منفرد شود. در این حالت انتگرال‌گیری صریح معمولاً با استفاده از یک ماتریس قطری جرم توده‌ای (Diagonal Lumped Mass Matrix)، خوش‌رفتار می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$m_I = \sum_{j=1}^{n_n} m_{IJ} = \sum_{j=1}^{n_n} \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) N_j(x_p) = \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) \quad (18)$$

مومنتوم گره‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$(m \mathbf{v})_I = \sum_p N_I(x_p) (M \mathbf{v})_p \quad (19)$$

که در آن M جرم هر ذره است. بردار نیروی خارجی و بردار نیروی داخلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$f_I^{ext} = \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) \mathbf{b}(x_p) + \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_I(x_p) \bar{\mathbf{t}}^s(x_p) \quad (20)$$

$$(21)$$

$$f_I^{int} = - \sum_{p=1}^{n_p} (M_p / \rho_p) \sigma_p \nabla N_I(x_p) = - \sum_{p=1}^{n_p} V_p \sigma_p \nabla N_I(x_p)$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_0: \sigma_0)} \quad (43)$$

$$p = \frac{-1}{3} tr \sigma \quad (44)$$

جای و همکاران^[11] در مدل خود نشان دادند که عدد اینرسی I از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$I = \dot{\gamma}^p \frac{\sqrt{d^2 \rho_s}}{\sqrt{p}} \quad (45)$$

برای ضریب اصطکاک:

$$\mu = \mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1} \quad \text{if } I > 0, \\ \mu \leq \mu_s \quad \text{if } I = 0 \quad (46)$$

که در آن I_0 ثابت ماده، ρ_s چگالی دانه‌های جامد و d اندازه میانگین ذرات است. از آنجایی که μ از طریق $\bar{\tau}$ و p به تنش و نیز به $\dot{\gamma}^p$ مربوط می‌شوند، می‌توان معادله تنش برشی را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(p, \dot{\gamma}^p) = p \left(\mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\xi \sqrt{p/\dot{\gamma}^p} + 1} \right) \quad \text{if } \dot{\gamma}^p > 0 \\ \bar{\tau} \leq 0 \quad \text{if } \dot{\gamma}^p = 0 \quad (47)$$

که در آن $\xi = I_0/\sqrt{d^2 \rho_s}$ می‌باشد. μ_s ضریب اصطکاک ایستایی است و جریان پلاستیک در $\mu < \mu_s$ رخ نمی‌دهد. با توجه به رفتارهای ماده دانه‌ای در فازهای مختلف، اگر چگالی ماده کمتر از چگالی بحرانی باشد، ماده غیرپیوسته است و به صورت تنش آزاد مدل می‌شود. در غیر این صورت، ماده متراکم است و دارای فشار مثبت می‌باشد و می‌توان از رابطه الاستو ویسکو پلاستیک استفاده کرد. در مجموع می‌توان نوشت:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{if } p < p_c \\ \mathbb{C}:(D - \hat{D}^p(\sigma)) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (48)$$

که در آن $\hat{D}^p$ از روابط ۳۹ به دست می‌آید. از آنجایی که وقتی $\mu < \mu_s$ ، $\hat{D}^p$ صفر می‌شود، روابط بالا اساساً رابطه ساختاری سه‌فازی است که می‌تواند بین رفتار شبه جامد الاستیکی، جریان شبه سیال ویسکوپلاستیک و رفتار دانه‌ای ناپیوسته تغییر کند^[10].

۴- بیان مسئله و ارائه نتایج

فروریزش ستونی از مواد دانه‌ای با برداشتن تدریجی قیدهای عمودی روی ستون تشکیل شده از مواد، ایجاد می‌شود. این پدیده با شروع در حالت ایستا تحت گرانش آغاز می‌شود. در فضای دوبعدی، مستطیلی از مواد دانه‌ای روی سطح بدون اصطکاک واقع شده است.

مسئله با شرایط اولیه تنش اولیه صفر و کرنش صفحه‌ای مدل شده است. ابعاد دامنه محاسباتی $1 \times 0.15 m^2$ که متشکل از ۱۵۰۰ سلول (۱۰۰ سلول در جهت x و ۱۵ سلول در جهت y) است. در نمودار ۱ موقعیت ذرات و توزیع فشار در زمان‌های مختلف آورده شده است. ابعاد ستون مواد دانه‌ای $0.2 \times 0.14 m^2$ است و در هر سلول ۴ ذره واقع شده که مجموع کل ذرات برابر ۱۱۲۰ ذره است. خواص فیزیکی در نظر گرفته شده برای مسئله و دیگر پارامترهای روش نقطه مادی در جدول ۱ ارائه شده است. در حل مسائل روش نقطه مادی انتخاب تعداد ذرات در هر سلول به ابعاد هر سلول و فیزیک مسئله بستگی دارد. برای این مسئله انتخاب ۱ یا ۲ ذره انتخابی نامناسب می‌باشد به این سبب که به خوبی نمی‌تواند مواد

استفاده می‌شود. تنش کوشی با نماد σ ، عملگرهای گرادینان و دیورژانس به ترتیب با ∇ و ∇ و مشتق زمانی با علامت $\cdot$ در بالای متغیر نشان داده می‌شوند. تریس تانسوری مانند A با $tr A$ ، ترانپاده آن A^T و تانسور انحرافی آن در سه بعد $A_0 = A - (tr A)I/3$ می‌باشد. معادله تعادل مومنوم برابر است با:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho b = \rho \dot{v} \quad (33)$$

که در آن ρ چگالی، b نیرو حجمی و $\dot{v}$ نرخ تغییر سرعت ماده است. گرادینان سرعت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \nabla v \quad (34)$$

که می‌تواند به تانسور چرخش W و تانسور نرخ کرنش D تجزیه شود:

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) \quad (35)$$

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (36)$$

معادله بقای جرم براساس چگالی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\rho} = -\rho tr L \quad (37)$$

در حالت چگال، مواد دانه‌ای به صورت الاستیک رفتار می‌کنند تا زمانی که وارد فاز پلاستیک شوند. به همین علت گرادینان سرعت به قسمت‌های الاستیک و پلاستیک یعنی $L = L^e + L^p$ گسسته می‌شود. قسمت‌های الاستیک و پلاستیک هرکدام می‌توانند به تانسورهای چرخشی و نرخ کرنش خودشان یعنی D^e و D^p تقسیم شوند.

از رابطه جریان پلاستیک زیر استفاده می‌شود:

$$L^p = D^p = \hat{D}^p(\sigma) \quad (38)$$

در این حالت می‌توان نوشت:

$$\hat{D}^p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\gamma}^p(\sigma) \frac{\sigma_0}{\|\sigma_0\|} \quad (39)$$

که در آن $\dot{\gamma}^p$ معادل نرخ کرنش برشی پلاستیک است. برای فشار، معادله حالتی به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$p(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho < \rho_c \\ \frac{K_c}{\rho}(\rho - \rho_c) & \text{if } \rho \geq \rho_c \end{cases} \quad (40)$$

که در آن K_c مدول بالک است. چگالی بحرانی ρ_c ، چگالی ماده است زمانی که دانه‌ها شروع به ازدست‌دادن تماس بین خود می‌کنند (زمانی که فشار صفر است). در چگالی‌های کمتر از ρ_c ماده به صورت غیرپیوسته مدل می‌شود. از آنجایی که از مدل هابیوالاستیک-پلاستیک برای فاز جریان متراکم $\rho \geq \rho_c$ استفاده می‌شود، باید معادله‌ای برای محاسبه نرخ تغییرات تنش از نرخ یامن (Jaumann) استفاده شود:

$$\sigma \triangleq \dot{\sigma} - W \cdot \sigma + \sigma \cdot W \quad (41)$$

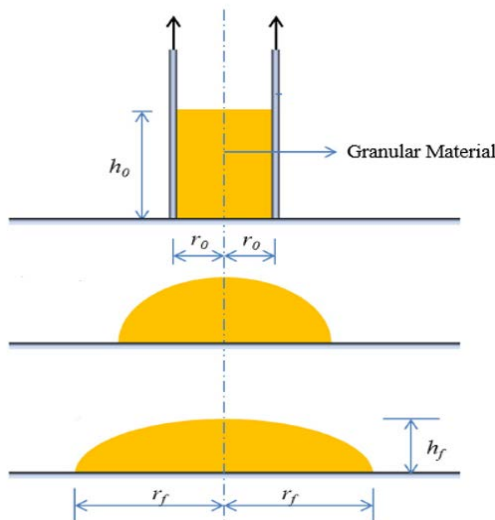
از آنجایی که انتگرال‌گیری صریح با گام‌های زمانی کوچک در مسئله اجرا می‌شود، رابطه ساختاری به صورت رابطه بین نرخ کرنش الاستیک $D^e = D - D^p$ و نرخ تنش نوشته می‌شود:

$$\sigma \triangleq \mathbb{C}: D^e \equiv \frac{E}{1+\nu} \left[(D - D^p) + \frac{\nu}{1-2\nu} tr(D - D^p)I \right] \quad (42)$$

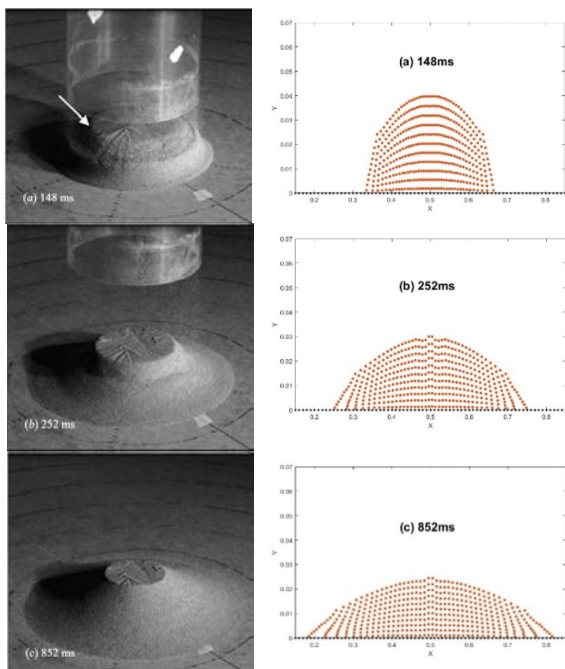
که در آن $\mathbb{C}$ تانسور سختی الاستیک از مرتبه ۴ است که به ضریب پواسون ν و مدول یانگ $E=3K_c(1-2\nu)$ بستگی دارد. ضریب اصطکاک دراکر پارکر $\mu = \bar{\tau}/p$ تعریف می‌شود که در سه بعد مقادیر $\bar{\tau}$ و p از تانسور تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

۵- تحلیل نتایج

لوب و همکاران^[9] در نتایج تجربی مشاهده کردند که متناسب با مقدار a ($a=h_0/r_0$) الگوهای مختلف جریان در طول فرآیند فرو ریزش رخ می‌دهد. برای ستونی از مواد دانه‌ای با مقدار a کوچک ($a<0.74$) مواد فقط در ناحیه بیرونی شکل اولیه حرکت می‌کنند و ناحیه متقارن استاتیکی بدون تغییر باقی می‌ماند که نمایی از پارامترهای مختلف در آزمایش لوب در شکل ۲ آورده شده است. در نمودار ۲ دیده می‌شود که در تصاویر سه بعدی از آزمایش لوب قسمت مرکزی ستون خاک بدون تغییر باقی مانده است که این حالت در نتایج به دست آمده از شبیه سازی نقطه مادی نیز دیده می‌شود.



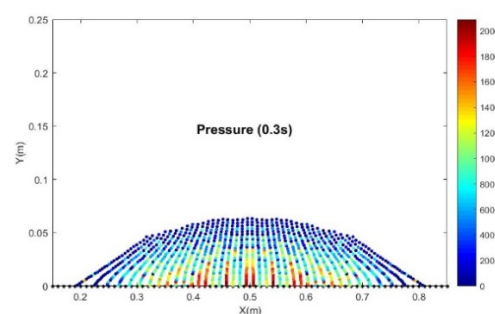
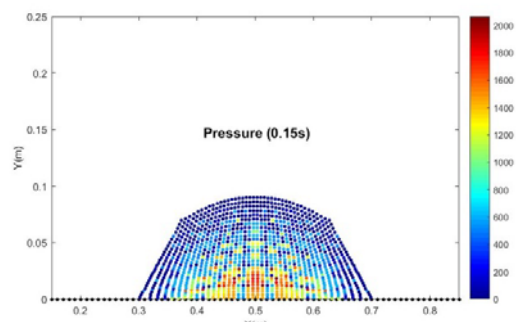
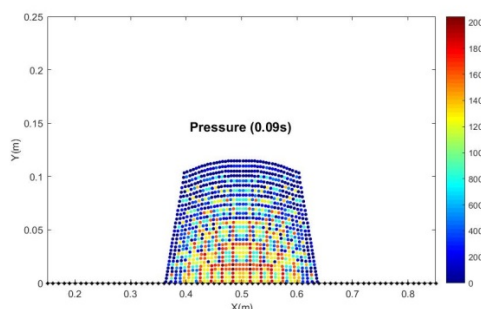
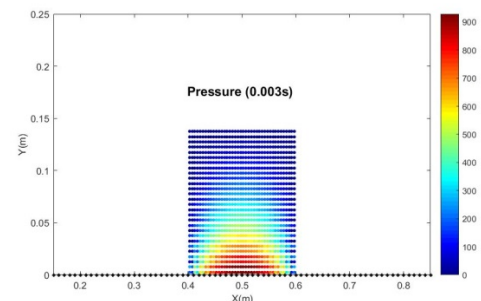
شکل (۲) آزمایش لوب و تعریف پارامترهای ابعادی



نمودار (۲) مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی MPM با نتایج به دست آمده از آزمایش لوب برای مقدار $a = 0.55$

تمرکز نتایج روی جبهه پیشروی و فرم نهایی جریان ماده می‌باشد، از این رو براساس ملاحظات تحلیل ابعادی به دست آمده از نتایج

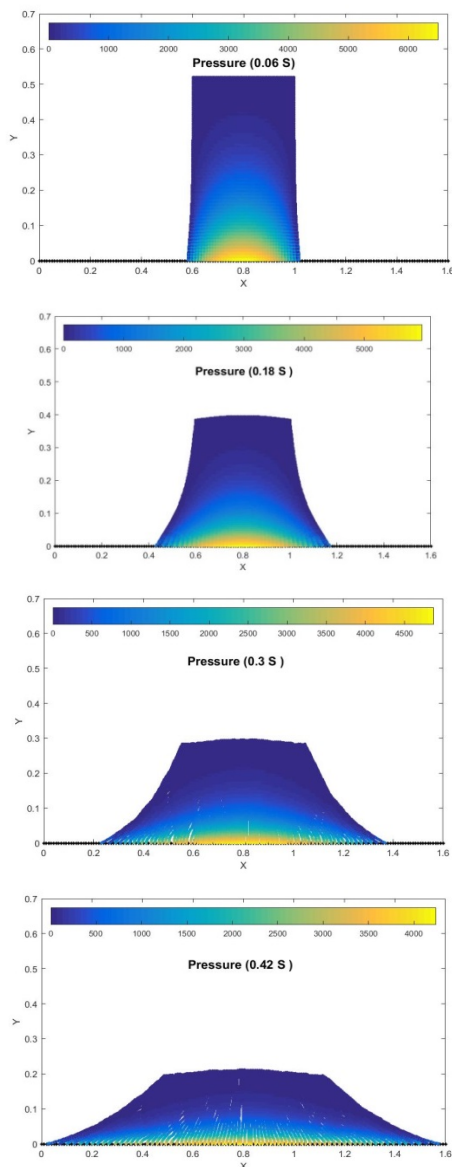
دانه‌ای را شبیه سازی کند. هرچه تعداد ذرات بیشتر باشد نتایج به واقعیت نزدیک تر است اما این افزایش تعداد ذرات منجر به افزایش زمان اجرا می‌شود. به همین سبب مقدار ۴ ذره در هر سلول در این مسئله در نظر گرفته شده است تا هم مواد به خوبی شبیه سازی شوند و هم زمان اجرا بیش از حد طولانی نشود.



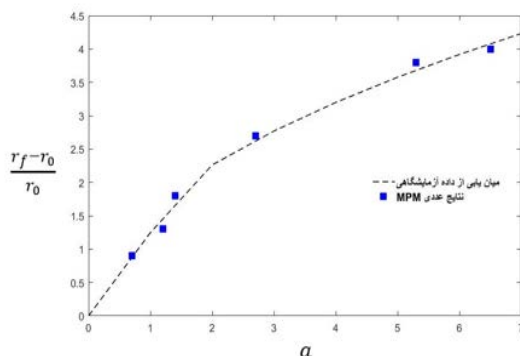
نمودار (۱) توزیع فشار و موقعیت ذرات در زمان‌های مختلف برای $a=1.4$

جدول (۱) مقدار پارامترهای مختلف استفاده شده در شبیه سازی

پارامتر	مقدار
مدول یانگ (pa)	2.0×10^6
چگالی (kg/m^3)	۱۵۰۰
ضریب پواسون	۰/۴۲
μ_s	۰/۳۸۱۹
μ_2	۰/۶۴۳۵
$\xi (m^2 kg^{-1/2})$	۱۱/۲۳۳
$\Delta t (s)$	3×10^{-6}



نمودار (۴) موقعیت و فشار ذرات در شبیه‌سازی فروریزش ستون ماده دانه‌ای با $a = 2.7$



نمودار (۵) مقایسه نتایج عددی شبیه‌سازی با داده‌های آزمایشگاهی ارائه‌شده توسط لوب

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق روش شبیه‌سازی عددی نقطه مادی که روش عددی توانمند برای مدل‌کردن مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ است، معرفی شد. از جمله این مسائل جریان‌های دانه‌ای هستند که به

تجربی، مقیاس مشخصی بین هندسه نهایی تعریف‌شده و نسبت ستون اولیه به فرم زیر تعیین شد:

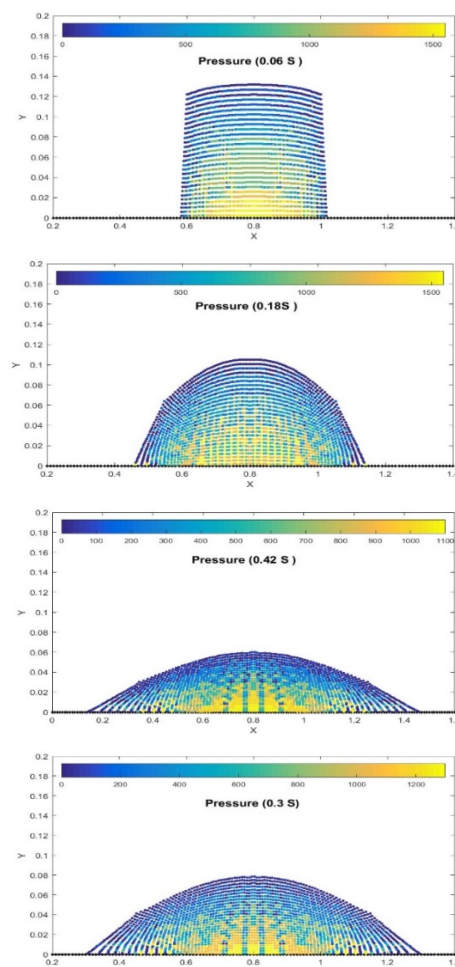
$$\frac{r_f - r_0}{r_0} = \begin{cases} 1.24a & a < 1.7 \\ 1.6a^{1/2} & a > 1.7 \end{cases} \quad (۴۹)$$

$$\frac{h_f}{r_0} = \begin{cases} a & a < 1.7 \\ 0.88a^{1/6} & a > 1.7 \end{cases} \quad (۵۰)$$

که $a = \frac{h_0}{r_0}$ نسبت ستون اولیه می‌باشد. هر ضابطه متناظر با رفتار ماده هنگام فروریزش است. در $a < 1.7$ ، دو ناحیه در ناحیه سطح آزاد ماده شکل می‌گیرد: ناحیه جریان خارجی و ناحیه داخلی استاتیکی. در حالی که در $a < 1.7$ سطح آزاد فوراً بعد از برداشتن استوانه محصور شروع به جریان می‌کند. زمان انجام هر آزمایش تنها وابسته به ارتفاع ستون اولیه توده ماده دانه‌ای بوده و از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$t_f = 3.3 \sqrt{\frac{h_0}{g}} \quad (۵۱)$$

نمودارهای ۳ و ۴ به ترتیب وضعیت ذرات را در لحظات مختلف شبیه‌سازی با نسبت ستون اولیه $a = 0.7$ و $a = 2.7$ نشان می‌دهد. نتایج مطابقت بسیار خوبی با داده‌های تجربی دارد. نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی عددی با داده‌های آزمایشگاهی ارائه‌شده توسط لوب در نمودار ۵ مقایسه شده است. این شکل نشان می‌دهد که روش نقطه مادی به‌طور صحیح قابلیت تشریح رفتار جریان دانه‌ای در شرایط متراکم دارد.



نمودار (۳) موقعیت و فشار ذرات در شبیه‌سازی فروریزش ماده دانه‌ای با $a = 0.7$

صالحی زاده (نویسنده سوم)، روش شناس/پژوهشگر اصلی (۳۰٪)
منابع مالی: موردی بیان نشد.

منابع

- 1- Nguyen VP, Cardiff University. Material point method: Basics and applications. Technical report. Australia: Monash University; 2014.
- 2- Harlow FH. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. Technical Report. Oak Ridge: U.S. Department of Energy Office of Scientific and Technical Information; 1962 March. Report No: LADC-5288.
- 3- Brackbill JU, Ruppel HM. FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions. Journal of Computational Physics. 1986;65(2):314-343.
- 4- Sulsky D, Chen Z, Schreyer HL. A particle method for history-dependent materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1994;118(1-2):179-196.
- 5- Sulsky D, Schreyer HL. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996;139(1-4):409-429.
- 6- Al-Kafaji IKJ. Formulation of a dynamic material point method (MPM) for geomechanical problems [Dissertation]. Stuttgart: University of Stuttgart; 2013.
- 7- Więckowski Z, Youn SK, Yeon JH. A particle-in-cell solution to the silo discharging problem. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999;45(9):1203-1225.
- 8- Gabrieli F, Ceccato F. Impact of dry granular flows on a rigid wall: Discrete and continuum approach. Procedia Engineering. 2016;158:152-157.
- 9- Lube G, Huppert HE, Sparks RSJ, Hallworth MA. Axisymmetric collapse of granular columns. Journal of Fluid Mechanics. 2004;508:175-199.
- 10- Chen W, Qiu T. Numerical simulations for large deformation of granular materials using smoothed particle hydrodynamics method. International Journal of Geomechanics. 2012;12(2):127-135.
- 11- Jop P, Forterre Y, Pouliquen O. A constitutive law for dense granular flows. Nature. 2006;441:727-730.

دلیل تغییر شکل و نرخ کرنش های بزرگ منجر به پیچیده شدن شبیه سازی های عددی می شوند.

در روش نقطه مادی جسم با مجموعه ای از ذرات نشان داده می شود. تغییر شکل و جابه جایی ذرات درون شبکه ثابت مدل می گردد. این اطلاعات از ذرات به گره ها نگاشته می شود. در مرحله بعد معادلات مومنتوم برای گره ها حل شده و خواص این گره ها برای آپدیت کردن موقعیت و سرعت ذرات دوباره به آنها نگاشته می شود. در پایان هر گام زمانی شبکه قبلی دور ریخته شده و شبکه جدید ایجاد می گردد.

در این مقاله، مسئله فروریزش مواد دانه ای بر جسم صلب که نمونه ای از جریان های دانه ای است، با روش نقطه مادی شبیه سازی شد. شرایط و تئوری مدل ساختاری مورد استفاده برای این مسئله ارائه شد و به بررسی درستی مدل سازی، با مقایسه نتایج به دست آمده از این روش عددی با نتایج آزمایش لوب برای موقعیت ذرات در زمان های مختلف در مقادیر متفاوت $a = h_0/r_0$ پرداخته شد که نتایج مشابهی در هر دو روش دیده می شود.

با توجه به نتایج به دست آمده از مدل سازی روش نقطه مادی برای مسائل مختلف و مقایسه آنها با حل های تجربی می توان نتیجه گرفت که روش نقطه مادی روشی قدرتمند برای مدل سازی مسائل با تغییر شکل های بزرگ همچون فروریزش است. این روش به دلیل نداشتن درهم پیچیدگی مش (که در روش المان محدود رخ می دهد)، مدل سازی آسان برخورد بین دانه ها (که در دیگر روش های مدل سازی دشوار است) و مدل سازی آسان شرایط مرزی و سطوح آزاد، روشی مناسب برای شبیه سازی مسائل مختلف مهندسی می باشد. می توان از این مدل شبیه سازی در مسائلی همچون سقوط جریان دانه ای در سطوح صاف و شیب دار استفاده کرد.

تشکر و قدردانی: موردی بیان نشد.

تاییدیه اخلاقی: موردی بیان نشد.

تعارض منافع: موردی بیان نشد.

سهم نویسندگان: مهنروش ریاحی پور (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۴۰٪)؛ علیرضا شفیعی (نویسنده دوم)، روش شناس/پژوهشگر کمکی/نگارنده بحث (۳۰٪)؛ سید امیرمسعود