



Dynamic and Vibration Analysis of Composite Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Kharestany A.A.¹ MSc,
Mousavi S.A.¹ MSc,
Kaffash Mirzarahimi M.² MSc,
Mahjoub Moghadas S.^{*1} PhD

How to cite this article

Kharestany A.A. Mousavi S.A, Mahjoub Moghadas S, Kaffash Mirzarahimi M. Dynamic and Vibration Analysis of Composite Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(11):2689-2696.

ABSTRACT

Beams are the basic geometries in engineering and many engineering issues are simplified as a beam problem. In this paper, the dynamics and vibration analysis of composite Timoshenko beam made of epoxy graphite layers with two piezoelectric layers on both sides have been investigated. Extraction of motion equations has been conducted based on the first-order shear deformation beam theory using the Hamilton principle. The partial differential equations were converted to the first-order coupled differential equations and then they were solved by fourth-order Runge-Kutta method. The effect of piezoelectric parameters on the vibrational and dynamic response of the beam has been investigated. The results show that the natural frequency of the beam decreases with increasing the length of the beam. Among piezoelectric parameters, the parameter of C11 has a lower effect than the effective transverse coefficient of e_{31} in the frequency response. As the ratio of the length of the beam is lower than the thickness, the effect of C11 will be greater on the natural frequency. The effect of the other piezoelectric parameters in the frequency response has also been evaluated very small relative to these two parameters.

Keywords Vibrations; Timoshenko Beam; Piezoelectric; Runge-Kutta

¹Mechanical Department, Engineering Faculty, Imam Hossein University, Tehran, Iran

²Mechanical Department, Engineering Faculty, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Department, Engineering Faculty, Imam Hossein University, Tehran, Iran. Postal code: 1698715461

Phone: +98 (21) 74189315

Fax: +98 (21) 77105121

smahjoubmoghadas@ihu.ac.ir

Article History

Received: October 10, 2018

Accepted: May 21, 2019

ePublished: November 2, 2019

CITATION LINKS

[1] Size effects in carbon nanotubes [2] Active control of piezo-fgm beams [Internet] [3] Vibration control of functionally graded material plate patched with piezoelectric actuators and sensors under a constant electric charge [4] Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment [5] Free and forced vibration of functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load [6] Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load [7] A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads [8] Forced vibration of FGM Timoshenko beam with piezoelectric layers carrying moving load [9] An analytical solution for free and forced vibration of a piezoelectric laminated plate coupled with an acoustic enclosure [10] Static and dynamic analysis of two-layer Timoshenko composite beams by weak-form quadrature element method [11] Bending and vibration analysis of curved FG nanobeams via nonlocal Timoshenko model [12] Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory [13] An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams [14] Vibrations of continuous systems [15] Linear Piezoelectric Plate Vibration [16] Vibration of laminated shells and plates [17] Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation [18] Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method [19] Recent advances in composite materials

تحلیل دینامیکی و ارتعاشی تیر تیموشینکو کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک

علی اصغر خارستانی MSc

گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین^(ع)، تهران، ایران

سیدعلی موسوی MSc

گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین^(ع)، تهران، ایران

محمود کفاش میرزا رحیمی MSc

گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

سعید محبوب مقدس * PhD

گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین^(ع)، تهران، ایران

چکیده

تیرها از هندسه‌های اساسی در مهندسی هستند و بسیاری از مسائل مهندسی به صورت تیر ساده‌سازی می‌شود. در این مقاله تحلیل دینامیکی و ارتعاشاتی تیر تیموشینکو ساخته شده از لایه‌های گرافیت اپوکسی به همراه دو لایه پیزوالکتریک در دو طرف آن پرداخته شده است. استخراج معادلات حرکت بر پایه تئوری مرتبه اول برشی تیرها و استفاده از اصل همپلتون انجام شده است. معادلات حرکت که به صورت مشتق‌های جزئی به دست می‌آیند، ابتدا به معادلات معمولی کوپل مرتبه اول تبدیل و سپس به روش رانگ کوتای مرتبه چهارم حل شده‌اند. در نهایت تأثیر پارامترهای پیزوالکتریک در پاسخ ارتعاشاتی و دینامیکی تیر بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش طول تیر فرکانس طبیعی آن کاهش پیدا می‌کند. در میان پارامترهای پیزوالکتریک پارامتر C_{11} تأثیر کمتری نسبت به ضریب موثر عرضی e_{31} در پاسخ فرکانسی دارد. هرچه نسبت طول به ضخامت تیر کمتر باشد تأثیر C_{11} روی فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود. تأثیر سایر پارامترهای پیزو الکتریک نیز نسبت به این دو پارامتر در پاسخ فرکانسی ناچیز ارزیابی شده است.

کلیدواژه‌ها: ارتعاشات، تیر تیموشینکو، پیزو الکتریک، رانگ کوتا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۷/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۳۱

* نویسنده مسئول: smahjoubmoghadas@ihu.ac.ir

۱- مقدمه

مواد مرکب به طور کلی جایگاه خود را در قالب مهندسی مشخص نموده و در حال حاضر در نقاط مختلف به عنوان مواد معمولی خصوصاً برای اهداف سازه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه در صنایع نظامی، هواپیماسازی، خودروسازی، ساخت وسایل ورزشی و سرگرمی، الکترونیک، مکانیک و پزشکی، مواد کامپوزیت کاربرد دارند.

پیزوالکتریسیته یک متغیر خطی است که به ساختار میکروسکوپی جامدات مربوط می‌شود. مواد پیزوالکتریک به دو دسته پیزوسرامیک‌ها و پیزوپلیمرها (مثل پلیوینیلیدن فلوراید) تقسیم می‌شوند. یکی از ویژگی‌های غیرمعمولی که بعضی سرامیک‌ها ذخیره می‌کنند پدیده پیزوالکتریک یا لغت تحت الفظی آن جریان ناشی از فشار است. با اعمال نیروی خارجی دوقطبی‌ها تحریک می‌شوند و میدان الکتریکی ایجاد می‌شود. وارون کردن اثر نیرو (مثلاً از کششی به فشاری) جهت میدان را معکوس می‌کند. رفتار پیزوالکتریک یا پیزوالکتریسیته عبارت است از تولید الکتریسیته ایجادشده توسط پلاریزاسیون یک کریستال در اثر اعمال تنش. زمانی که یک میدان الکتریکی به یک کریستال پیزوالکتریک اعمال شود، تحت کرنش قرار می‌گیرد که اصطلاحاً آن را رفتار پیزوالکتریک

معکوس می‌نامند. به طور مثال اگر الکترود در سطح داخل و خارج استوانه قرار گیرد، با توجه به مستقیم‌بودن یا معکوس‌بودن جریان الکتریکی (ولتاژ الکتریکی) می‌تواند باعث افزایش یا کاهش ضخامت شود^[1].

کاربردهای عمده مواد پیزوالکتریک به طور خلاصه عبارت‌اند از:

۱- کاربردهای سوئیچینگ: بر اساس تولید ولتاژ در هنگام اعمال فشار (اولت در برابر فشار انگشت)

۲- کاربرد در تولید صفحه‌کلید

۳- کاربردهای صوتی: هم به عنوان حسگر و هم به عنوان محرک

۴- کاربرد در سیستم‌های زنده‌یاب: در این کاربرد درواقع از خاصیت منحصربه‌فرد پلی‌وینیلیدن فلوراید، یعنی تولید ولتاژ در هنگام قرارگرفتن در برابر اشعه مادون قرمز برای تشخیص موجود زنده استفاده می‌شود.

۵- کاربرد در سیستم‌های نظارت سلامت ساختار: یکی از مهم‌ترین کاربردهای عناصر پیزوالکتریک، در نظارت سلامت ساختارها می‌باشد.

عباس‌زاده بیدختی و همکاران^[2] کنترل فعال یک تیر از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر را بررسی کردند. برای این منظور معادلات حرکت را بر پایه تئوری اویلر-برنولی و با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند. کارگرنوین و همکاران^[3] به بررسی کنترل ارتعاشات ورق از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک عملگر و حسگر تحت شارژ الکتریکی ثابت پرداختند. آنها بر پایه تئوری کلاسیک ورق‌ها معادلات حرکت ورق دور مفصل را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند. لی و همکاران^[4] ارتعاش آزاد یک تیر از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک را تحت افزایش دما و ولتاژ بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن مقدار دقیق کشش طولی و برمبنای تئوری کلاسیک تیرها معادلات حرکت تیر را در شرایط بارگذاری الکتریکی حرارتی به‌دست‌آوردند. شیمیشک و کوچاتورک^[5] در سال ۲۰۰۹ ارتعاش آزاد و اجباری تیر از جنس FGM را تحت بار متحرک بررسی کردند. آنها در این تحقیق بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات حرکت را استخراج کردند. شیمیشک^[6] در سال ۲۰۱۰ آنالیز ارتعاش غیرخطی یک تیر تیموشینکو FGM را تحت بار متحرک، با تحریک هارمونیک بررسی کرد. وی نتایج آنالیز غیرخطی بر پایه تئوری تیموشینکو را با تحلیل خطی بر پایه تئوری کلاسیک مقایسه کرد. خلیلی و همکاران^[7] ترکیبی از روش ریلی ریتز و DQM را برای بررسی رفتار دینامیکی تیر از جنس FGM تحت بار متحرک ارائه کردند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با استفاده از روش لاگرانژ استخراج کردند. جعفری و فتح‌آبادی^[8] ارتعاشات اجباری تیر تیموشینکو از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار متحرک با سرعت ثابت را بررسی کردند. معادلات حرکت را بر پایه تئوری مرتبه اول برشی تیرها و با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند. شهرآیینی و همکاران^[9] به مدل‌سازی تحلیلی ارتعاشاتی آگوستیکی یک ورقه ۳ لایه پیزوالکتریک همراه با یک محفظه صوتی پرداختند. در کار آنها اثرات حفره و عمق حفره بر فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی مدل ارائه‌شده بررسی شده است. هو و هی^[10] به آنالیز استاتیکی و دینامیکی تیر تیموشینکو کامپوزیتی ۲ لایه پرداختند. حسینی و رحمانی^[11] به بررسی ارتعاشات و خمش در نانوتیرهای منحنی تابعی با استفاده از تئوری غیرمحمولی تیموشینکو پرداختند و پارامترهای موثر را مورد بررسی قرار دادند.

$$v = 0$$

$$w = w_0(x, t)$$

که در آن u_0 و w_0 جابجایی لایه میانی تیر به ترتیب در راستای x و z می‌باشند و $\psi(x)$ چرخش سطح مقطع تیر است. همچنین میدان کرنش با استفاده از روابط کرنش-جابجایی به صورت زیر به دست خواهد آمد [13]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(x) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz} = 0$$

حال با استفاده از رابطه (۳) که معروف به اصل همیلتون است، معادلات حرکت نیز قابل حصول است [13]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (3)$$

که در رابطه (۳)، t_1 و t_2 دو زمان دلخواه هستند. U و V و T ترتیب انرژی جنبشی، پتانسیل و کار نیروهای خارجی می‌باشند که اولین تغییرات آنها به صورت زیر تعریف می‌شوند [13]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx dy dz \\ \delta T &= \iiint \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dx dy dz \end{aligned} \quad (4)$$

$$\delta V = -b \int_0^t P(x, t) \delta w dx$$

$P(x, t)$ نیروی خارجی وارده بر تیر در راستای عرضی است.

با قرار دادن رابطه (۴) در رابطه (۳) و انتگرال‌گیری جزء به جزء و بر اساس اصل اساسی حساب دیفرانسیل می‌بایست ضرایب δu_0 و $\delta \psi(x)$ و δw_0 هر کدام به صورت مستقل صفر شوند، در نتیجه معادلات حرکت تیر به صورت زیر به دست می‌آید [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} &= I_1 \ddot{u}_0(x, t) + I_2 \ddot{\psi}(x, t) \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x &= I_2 \ddot{u}_0(x, t) + I_3 \ddot{\psi}(x, t) \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + P(x, t) &= I_1 \ddot{w}_0(x, t) \end{aligned} \quad (5)$$

که منته‌های ممان و ضرایب $I_i (i=1 \text{ to } 3)$ در معادلات (۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(6)$$

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{z_1}^{z_0} \sigma_{xx}^a dz + \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xx}^{com} dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx}^s dz \\ M_{xx} &= \int_{z_1}^{z_0} \sigma_{xx}^a z dz + \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xx}^{com} z dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx}^s z dz \\ Q_x &= \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xz}^{com} dz \\ (I_1, I_2, I_3) &= \int_{z_i}^{z_j} \rho (1, z, z^2) dz, \end{aligned}$$

برای به‌دست‌آوردن معادله حاکم بر حرکت تیر شامل لایه کامپوزیتی و لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر کافیست مقادیر تنش را در رابطه (۶) جای‌گذاری کنیم.

۳-۱- روابط لایه کامپوزیتی

برای محاسبه بخش کامپوزیتی N_{xx} و M_{xx} و Q_x موجود در رابطه (۶) باید تنش‌های σ_{xx}^{com} و σ_{xz}^{com} را به صورت زیر در نظر بگیریم [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{com} &= \bar{Q}_{11} \varepsilon_x \\ \sigma_{xz}^{com} &= \bar{Q}_{55} \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (7)$$

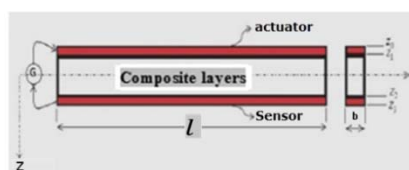
که $\bar{Q}_{11}$ و $\bar{Q}_{55}$ برای لایه‌های کامپوزیتی به صورت زیر تعریف می‌شوند [14]:

تیر تیموشینکو در تعیین رفتار هواپیماها و موشک‌ها و غیره استفاده می‌شود که تحلیل دینامیکی و ارتعاشی آن در صنعت هوایی و نظامی کاربرد دارد. از آنجایی که همواره مبحث ارتعاشات و فرکانس‌های طبیعی از مباحث مهم در تحلیل مواد مختلف به شمار می‌رود و با توجه به اینکه مسئله وزن در سازه‌های هوایی از جمله

موشک بسیار مهم می‌باشد، لذا لازم است که در ساخت تیر تیموشینکو از مواد کامپوزیتی استفاده شود تا نسبت استحکام به وزن آنها تا حد امکان بالا باشد، تا سازه به لحاظ صرفه‌جویی در مصرف مواد، انرژی و هزینه بهینه باشد. همان‌طور که در پیشینه پژوهش ملاحظه شد اکثر پژوهش‌ها روی مواد تابعی صورت گرفته است. کامپوزیت‌های لایه‌ای به دلیل سهولت ساخت و مقرون به صرفه‌تربودن نسبت به مواد تابعی کاربرد گسترده‌تری دارند از این رو در این پژوهش به بررسی ارتعاشات تیر تیموشینکو با هسته لایه‌های کامپوزیتی گرافیک اپوکسی و لایه پیزو در بالا و پایین آن و با شرایط مرزی دوسرگیردار پرداخته شده است.

۲- بیان هندسه مسئله

شکل ۱ شمای شماتیکی از هندسه تیر تیموشینکو به طول l و عرض b را نشان می‌دهد که لایه میانی تعداد n لایه دلخواه کامپوزیتی به ضخامت کل h و ضخامت هر لایه H می‌باشد. لایه بالا عملگر و دارای ضخامت h_a و لایه پایینی حسگر و دارای ضخامت h_s می‌باشد.

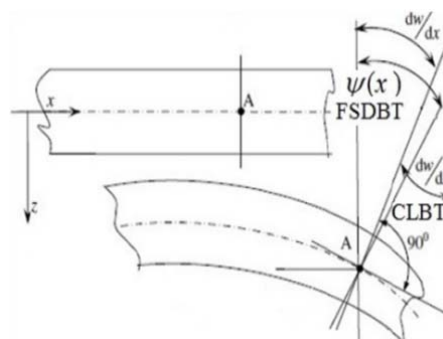


$$\begin{aligned} z_0 - z_1 &= h_a, \\ z_2 - z_3 &= h_s, \\ z_0 &= h/2 + h_a, \\ z_1 &= h/2, \\ z_2 &= -h/2, \\ z_3 &= -h/2 - h_s. \end{aligned}$$

شکل ۱) هندسه تیر تیموشینکو کامپوزیتی با لایه عملگر در بالا و حسگر در پایین لایه‌های کامپوزیتی

۳- استخراج معادلات حرکت

در تئوری مرتبه اول برشی با در نظر گرفتن اثر کرنش برشی، به ویژه برای تیرهای ضخیم، تخمین بهتری زده می‌شود. در شکل ۲ سینماتیک تیر قبل و بعد از تغییر شکل برای تئوری‌های کلاسیک و تیموشینکو نشان داده شده است.



شکل ۲) سینماتیک تیر قبل و بعد از تغییر شکل برای تئوری‌های مختلف [12]

میدان جابجایی بر پایه تئوری مرتبه اول برشی به صورت زیر در نظر گرفته شده است [13]:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\psi(x) \quad (8)$$

بر این اساس رابطه تنش حسگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{xx}^s = (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}) (\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x})^s \quad (16)$$

بر این پایه با برابر قراردادن شدت میدان الکتریکی در حسگر و رابطه تجربی $E_i = \varphi_i$ [15] با هم و انتگرال‌گیری در راستای z خواهیم داشت:

$$V^s = \int_{z_2}^{z_3} E_z^s dz$$

$$V^s = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} h_s (\frac{\partial u_0}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi(x)}{\partial x})^s \quad (17)$$

$$h_m^s = \frac{z_2 + z_3}{2}$$

۳-۴- روابط لایه عملگر

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر عملگر می‌توان فرض کرد که توزیع پتانسیل الکتریکی درون عملگر به صورت یک تابع مرتبه دوم [3] در رابطه زیر آمده است:

$$\varphi^a = \varphi_0 + z \varphi_1 + z^2 \varphi_2 \quad (18)$$

حال با توجه به اینکه در عملگر اختلاف پتانسیل الزامی است، بنابراین شرایط مرزی الکتریکی زیر برای آن در نظر گرفته می‌شود:

$$\varphi = V^a \quad \text{at} \quad z = z_0 = \frac{h}{2} + h_a \quad (19)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{at} \quad z = z_1 = \frac{h}{2}$$

با استفاده از شرایط مرزی فوق و استفاده از رابطه ماکسول [15]، رابطه زیر برای توزیع پتانسیل الکتریکی به دست خواهد آمد:

$$\varphi^a = \varphi_0^a + z (\frac{V^a}{h_a} - h_m^a \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}) + z^2 \frac{e_{31}}{2 \epsilon_{33}} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

بر این اساس برای E_z رابطه زیر را خواهیم داشت [15]:

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{V^a}{h_a} + \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \quad (21)$$

بر این اساس رابطه تنش عملگر به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\sigma_{xx}^a = c_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^a + e_{31} \frac{V^a}{h_a} - \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z)^a \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \quad (22)$$

برای مشاهده اثر کنترل روی سازه، ولتاژ خروجی از حسگر با رابطه زیر به ولتاژ عملگر مربوط می‌شود:

$$V^a = G V^s = -\frac{e_{31} h_s G}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) \quad (23)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲) رابطه نهایی برای تنش عملگر به دست خواهد آمد

$$\sigma_{xx}^a = c_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^a - \frac{e_{31}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}} \times \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) - \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z)^a \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \quad (24)$$

۳-۵- معادلات حرکت تیر تیموشینکو

با جای‌گذاری روابط (۱۰)، (۱۶) و (۲۴) در رابطه (۶) و سپس جای‌گذاری رابطه (۶) در رابطه (۵)، معادلات حرکت تیر تیموشینکو به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$A_1 \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = I_1 \ddot{u}_0(x, t) + I_2 \ddot{\psi}(x, t) \quad (25)$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} c^4 + 2(Q_{12} + 2 Q_{66}) c^2 s^2 + Q_{22} s^4 \quad (8)$$

که ضرایب Q برای لایه‌های ارتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شود [14]:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (9)$$

$$Q_{44} = G_{23}$$

$$Q_{55} = G_{13}$$

$$Q_{66} = G_{12},$$

حال با جای‌گذاری رابطه (۹) در رابطه (۸) و سپس جای‌گذاری رابطه (۸) در رابطه (۷) و در نهایت جای‌گذاری رابطه (۷) در رابطه (۶) داریم:

$$N_{xx}^{com} = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

$$M_{xx}^{com} = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \quad (10)$$

$$Q_x^{com} = A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi \right)$$

که ضرایب A_{11} ، B_{11} ، D_{11} و A_{55} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{11} = \sum_{k=2}^{n+1} (\bar{Q}_{11})_k (Z_{k-1} - Z_k)$$

$$B_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} (\bar{Q}_{11})_k (Z_{k-1}^2 - Z_k^2)$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n+1} (\bar{Q}_{11})_k (Z_{k-1}^3 - Z_k^3)$$

$$A_{55} = \frac{5}{4} \sum_{k=2}^{n+1} (\bar{Q}_{55})_k (Z_{k-1} - Z_k) \quad (11)$$

۳-۲- روابط لایه پیزوالکتریک

روابط پیزوالکتریک به صورت اندیسی در زیر آورده شده است [15]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (12)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k$$

که در این روابط، c ماتریس سختی پیزوالکتریک، e ماتریس نفوذپذیری دی‌الکتریک مطلق، e ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک و E میدان الکتریکی می‌باشد.

به دلیل نازکی لایه پیزو، از ترم برشی در این لایه صرف نظر کرده و در نتیجه در روابط (۱۲)، برای لایه پیزوالکتریک خواهیم داشت:

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} - e_{31} E_z$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

به دلیل نازکی لایه پیزوالکتریک می‌توان از جابجایی الکتریکی در دو راستای دیگر لایه پیزوالکتریک صرف نظر کرد. در نهایت روابط پیزوالکتریک لایه‌ها به صورت زیر تقلیل خواهند یافت:

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} - e_{31} E_z$$

$$D_z = e_{31} \epsilon_{xx} + \epsilon_{33} E_z \quad (14)$$

۳-۳- روابط لایه حسگر

از آنجایی که در حسگر هیچ‌گونه شارژ الکتریکی خارجی وجود ندارد بنابراین جابجایی الکتریکی این لایه در راستای ضخامت صفر خواهد شد، بنابراین داریم:

$$D_z = e_{31} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^s + \epsilon_{33} E_z = 0$$

$$E_z^s = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^s \quad (15)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & 0 \\ I_2 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} A_1 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 & A_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 & 0 \\ A_3 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 & A_4 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + A_5 & A_5 \left(\frac{m\pi}{l}\right) \\ 0 & A_5 \left(\frac{m\pi}{l}\right) & A_5 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \end{bmatrix}$$

که از رابطه (۲۸) فرکانس طبیعی و شکل مود تیر تیموشینکو تحت شرایط دو طرف تکیه‌گاه ساده و تحت ارتعاش اجباری به دست خواهد آمد. برای حل معادلات جهت به‌دست‌آوردن پاسخ دینامیکی سیستم از روش رانگ‌کوتا مرتبه ۴ استفاده شده است.

۴- نتایج و بحث

در ابتدا صحت انجام محاسبات بررسی شده و سپس نتایج عددی مطالعه و تحلیل خواهند شد. برای این منظور مسئله برای دو حالت مشخص با نتایج موجود مقایسه و ارزیابی شده است.

الف: در حالت اول نتایج به‌دست‌آمده برای فرکانس تیر تیموشینکو ابتدا با در نظر گرفتن قسمت‌های پیزوالکتریک با مقاله [17] مقایسه شده است. نتیجه این مقایسه در جدول ۲ مشاهده می‌شود. تیر بررسی‌شده در این مقاله همگن است که مشخصات تیر مدل‌شده در این مقاله در جدول ۱ آمده است.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۲ مشاهده می‌کنید که نتایج این پژوهش به خصوص در فرکانس‌های پایین تطابق خوبی با پژوهش‌های پیشین دارد.

جدول ۱) مشخصات تیر تیموشینکو در مقاله صحت‌سنجی

E (Pa)	G (Pa)	ρ (kg/m ³)	L (m)	b (m)	h (m)	ν
2.1×10^{11}	8.1×10^{10}	۷۸۶۰	۱	۰.۰۲	۰.۰۸	۰.۳

جدول ۲) مقایسه نتایج جهت صحت‌سنجی تیر تیموشینکو

Frequency no	نتایج کار حاضر	مرجع [17]			
		روش تحلیلی	روش FEM	تیر اویلر-برنولی	روش
۱	۱۱۶۰	۱۱۵۹/۴	۱۱۶۰/۵	۱۱۷۸/۱	
۲	۴۶۴۰	۴۶۳۶/۸	۴۶۴۷/۴	۴۷۱۲/۶	
۳	۱۰۴۰۰	۹۳۵۷/۶	۹۳۸۶/۱	۱۰۶۰۳	
۴	۱۸۵۰۰	۱۵۴۱۰	۱۵۴۳۹	۱۸۸۵۰	

ب: در حالت دوم فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی که از رابطه (۳۰) به دست می‌آید برای لایه چینی $(0^\circ/90^\circ)_a$ و مشخصات $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $L/h=20$, $E_1/E_2=40$ و $\nu_{12}=0.25$ با نتایج مقاله [18] برای دو نوع شرایط مرزی مختلف مقایسه شده است.

$$\lambda = (\omega L^2/h)(\rho/E_2)^{1/2} \quad (۳۰)$$

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۳ مشاهده می‌شود که نتایج این پژوهش برای شرایط مرزی یک‌سرگیردار (CF) و دوسر تکیه‌گاه ساده (SS) تطابق بسیار خوبی با پژوهش‌های پیشین دارد.

جدول ۳) مقایسه نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد جهت صحت‌سنجی تیر تیموشینکو کامپوزیتی

شرایط مرزی	مرجع [19]				نتایج کار حاضر
	روش PSDBT	روش ESDBT	روش FSDBT	روش HSDBT	
SS	۷/۲۱	۷/۲۲	۷/۲۱	۷/۲۱	۷/۲۱
CF	۲/۵۹	۲/۵۹	۲/۵۹	۲/۵۹	۲/۵۷

$$A_3 \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 \psi_x(x, t)}{\partial x^2} - A_5 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) = I_2 \ddot{u}_0(x, t) + I_3 \ddot{\psi}(x, t)$$

$$A_3 \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 \psi_x(x, t)}{\partial x^2} - A_5 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) = I_2 \ddot{u}_0(x, t) + I_3 \ddot{\psi}(x, t)$$

ضرایب A_i ($i=1$ to 5) و I_i ($i=1$ to 3) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = A_{11} + \left(C_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) h_s + \left(C_{11} - \frac{e_{31}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}} \right) h_a$$

$$A_2 = B_{11} + \left(C_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{z_0^2 + z_{N+1}^2 - z_1^2 - z_{N+2}^2}{2} \right) - \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \left(\frac{h_m^s h_s G}{h_a} + h_m^a \right) h_a$$

$$A_3 = B_{11} + \left(C_{11} - \frac{e_{31}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}} \right) \left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2} \right) + \left(C_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{z_{N+1}^2 - z_{N+2}^2}{2} \right)$$

$$A_4 = D_{11} + \left(C_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{z_0^3 + z_{N+1}^3 - z_1^3 - z_{N+2}^3}{2} \right) - \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \left(\frac{h_m^s h_s G}{h_a} + h_m^a \right) \left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2} \right)$$

برای به‌دست‌آوردن پاسخ ارتعاشی تیر تیموشینکو از تقریب زیر استفاده می‌کنیم [16]:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \omega t$$

$$\psi(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \omega t \quad (۲۷)$$

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \omega t$$

$$P(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \omega t$$

در روابط (۲۷)، ω فرکانس طبیعی و u_m , ψ_m , w_m و p_m دامنه توابع هستند.

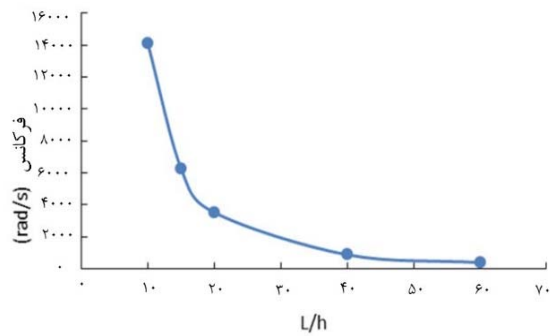
با جای‌گذاری روابط (۲۷) در معادلات (۲۵) و حذف توابع مکانی و زمانی از طرفین، معادلات حرکت به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$[M] \omega^2 \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix} - [K] \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix} = \vec{F} \quad (۲۸)$$

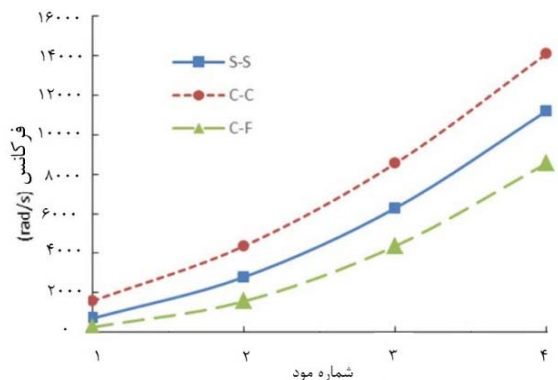
که بردار نیروی F و ماتریس‌های به ترتیب جرم و سفتی $[M]$ و $[K]$ در رابطه (۲۹) تعریف شده‌اند.

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 P_0 \sin \frac{m\pi v t}{l} \end{Bmatrix} \quad (۲۹)$$



نمودار ۳) تغییرات سومین فرکانس طبیعی برحسب نسبت طول به ارتفاع



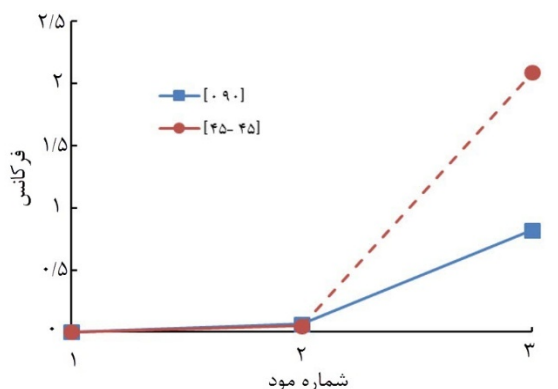
نمودار ۴) تغییرات فرکانس در ۴ مود اول در حالت‌های تکیه‌گاهی مختلف

یک متغیر مهم دیگر در کامپوزیت‌ها، زاویه الیاف لایه‌ها می‌باشد که تاثیر بسزایی در مقاومت و سفتی کامپوزیت دارد. تغییرات فرکانس طبیعی تیر با تغییر در زاویه الیاف کامپوزیت در نمودار ۵ مورد مقایسه قرار گرفته است. همان‌طور که مشخص است با افزایش سفتی سازه در راستای طول تیر، میزان فرکانس طبیعی به خصوص در موده‌های بالا بیشتر می‌شود.

یکی از پارامترهای اساسی در این پژوهش بررسی تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک است. در نمودار ۶ تغییرات فرکانس برحسب ضرایب پیزوالکتریک بررسی شده است.

با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که مقدار C_{11} با فرکانس طبیعی رابطه مستقیم دارد و همچنین هرچه نسبت طول به ضخامت تیر کمتر باشد، تاثیر C_{11} بر فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود.

تاثیر ضریب موثر عرضی پیزو الکتریک در نمودار ۷ بررسی شده است. با افزایش میزان ضریب موثر عرضی پیزوالکتریک، مقدار فرکانس طبیعی بیشتر خواهد شد.



نمودار ۵) تغییرات فرکانس با زاویه الیاف

پس از بخش صحت‌سنجی و اطمینان از صحت نتایج کد نوشته‌شده در ادامه این پژوهش تاثیرات پارامترهای مختلف بر پاسخ‌های ارتعاشاتی شامل شکل موده‌ها و فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفته است. از پارامترهای اصلی که تغییرات آن مورد توجه است پارامترهای هندسی، خواص مادی تیر و ضرایب پیزوالکتریک است.

مشخصات تیر کامپوزیتی تیموشنکو با لایه پیزوالکتریک شامل مشخصات ماده و هندسه و ضرایب پیزوالکتریک که نتایج آن در این بخش ارائه خواهد شد در جدول ۴ آمده است. در صورت تغییر هر یک از این مقادیر در بررسی‌های صورت‌گرفته مقدار آن ذکر شده است، کامپوزیت مورد بررسی از نوع گرافیک اپوکسی می‌باشد [19].

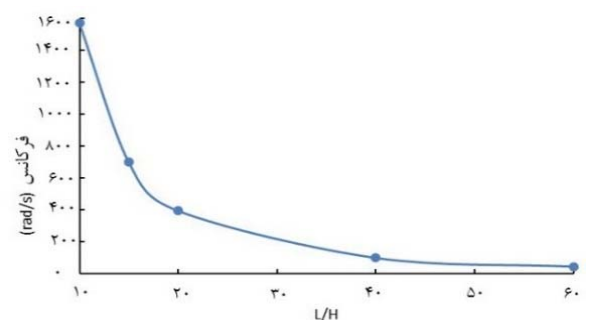
جدول ۴) مشخصات هندسی و خواص ماده تیر تیموشنکو

E_1 (Pa)	E_2 (Pa)	G_{12} (Pa)	ν_{12}	ν_{21}	L (m)	h (m)
$1/81 \times 10^{11}$	$1/03 \times 10^{11}$	$7/17 \times 10^9$	0/28	0/017	4	0/1
θ_1	θ_2	C_{11}	e_{31}	μ_3	Nplies	b (m)
90	0	$1/39 \times 10^{11}$	5/2	$5/6 \times 10^{-7}$	2	0/025

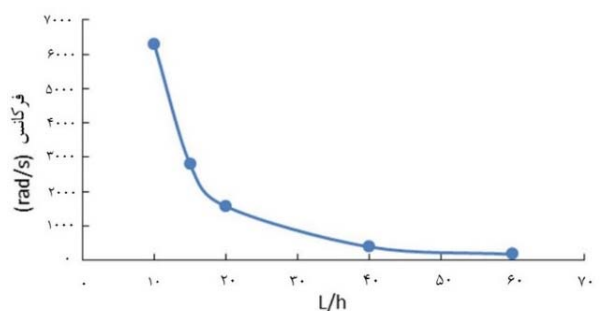
در نمودارهای ۱ تا ۴، تغییرات فرکانس‌های طبیعی برحسب تغییرات نسبت عرض به ارتفاع سطح مقطع تیر بررسی شده است. در این نمودارها مشاهده می‌شود که با افزایش طول تیر فرکانس طبیعی آن کاهش پیدا می‌کند. در واقع در این حالت با کاهش سفتی تیر دامنه جابجایی افزایش و فرکانس کاهش یافته است.

از موضوعات مهم در هر مسئله‌ای شرایط مرزی آن می‌باشد. در این مسئله پیش‌فرض شرایط مرزی به صورت یک‌سرگیردار است، اما بررسی تغییرات در سایر شرایط مرزی نیز می‌تواند مفید باشد. در نمودار ۴ تغییرات فرکانس در ۴ مود اول برای حالت‌های تکیه‌گاهی متفاوت تیر مشاهده می‌شود.

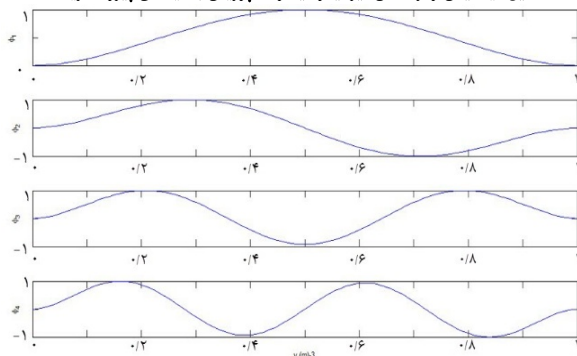
با توجه به نمودار، هرچه شرایط مرزی مقیدتر باشد، به دلیل افزایش سفتی سازه میزان فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود.



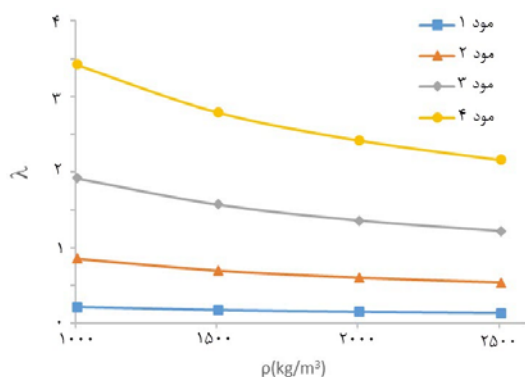
نمودار ۱) تغییرات اولین فرکانس طبیعی برحسب نسبت طول به ارتفاع



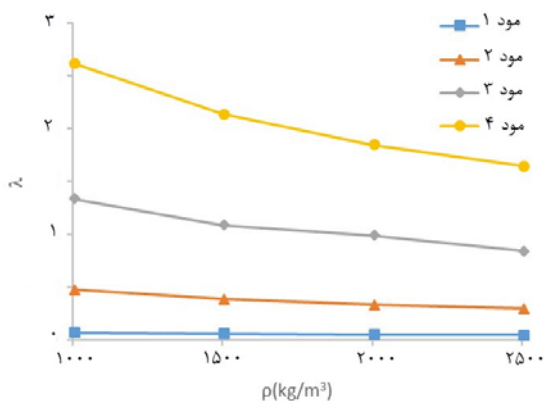
نمودار ۲) تغییرات دومین فرکانس طبیعی برحسب نسبت طول به ارتفاع



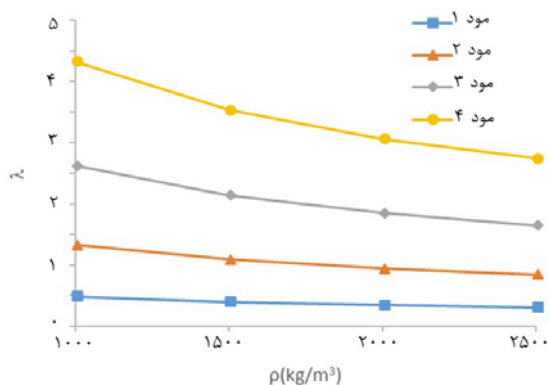
نمودار ۱۰) ۴مود اول تیر برای حالت تکیه‌گاه‌های دوسرگیردار C-C



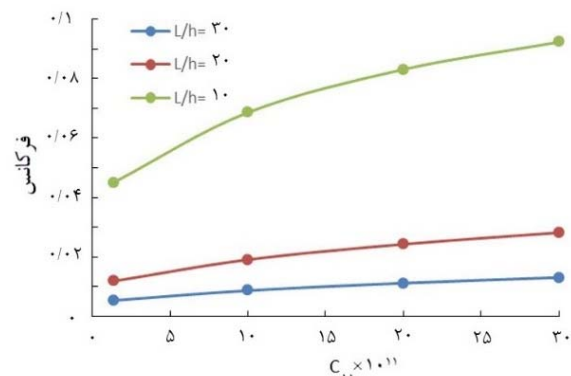
نمودار ۱۱) تغییرات فرکانس ۴مود بی‌بعد اول نسبت به چگالی برای حالت تکیه‌گاه‌های دو سر مفصل (ساده) S-S



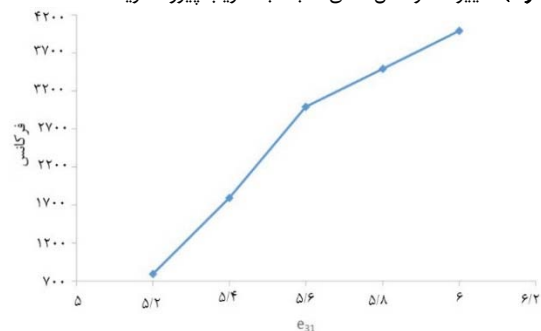
نمودار ۱۲) تغییرات فرکانس ۴مود بی‌بعد اول نسبت به چگالی برای حالت تکیه‌گاه‌های یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد C-F



نمودار ۱۳) تغییرات فرکانس ۴مود بی‌بعد اول نسبت به چگالی برای حالت تکیه‌گاه‌های دوسرگیردار C-C



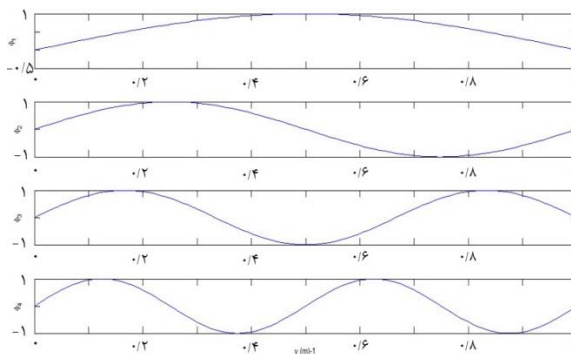
نمودار ۶) تغییرات فرکانس اصلی نسبت به ضریب پیزوالکتریک C11



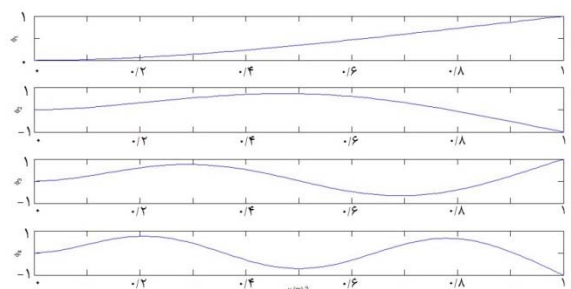
نمودار ۷) تاثیر ضریب پیزو الکتریک موثر عرضی بر فرکانس طبیعی

تغییرات فرکانس نسبت به سایر ضرایب پیزوالکتریک بسیار ناچیز بوده که از رسم نمودارهای آنها صرف نظر شده است.

نمودار ۴مود اول تیر برای ۳ حالت تکیه‌گاهی در نمودارهای ۸ تا ۱۱ رسم شده است. تا ضمن اطمینان از صحت شرایط مرزی و تکیه‌گاهی، تغییرات آنها مورد بررسی قرار گیرد و در نهایت تغییرات فرکانس بی‌بعد ۴مود اول نسبت به چگالی کامپوزیت در نمودارهای ۱۲ و ۱۳ آورده شده است. مطابق نمودارها، با افزایش چگالی کامپوزیت مقدار جرم تیر افزایش یافته و میزان فرکانس طبیعی آنها برای تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد.



نمودار ۸) ۴مود اول تیر برای حالت تکیه‌گاه‌های دو سر مفصل (ساده) S-S



نمودار ۹) ۴مود اول تیر برای حالت تکیه‌گاه‌های یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد C-F

در این مطالعه تاثیر پارامترهای هندسی در پاسخ ارتعاشاتی تیر تیموشنکوی کامپوزیتی با لایه‌های پیزو مورد بررسی قرار گرفت. تاثیرات پارامترهای هندسی از قبیل زاویه الیاف، تغییر ابعاد سطح مقطع و تغییر در تکیه‌گاه و همچنین تغییر ضرایب پیزو الکتریک بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که در میان پارامترهای پیزو الکتریک پارامتر C_{11} تاثیر کمتری نسبت به ضریب موثر عرضی e_{31} در پاسخ فرکانسی دارد. تاثیر سایر پارامترهای پیزو الکتریک نیز نسبت به این دو پارامتر در پاسخ فرکانسی ناچیز ارزیابی شده است. مقدار C_{11} با فرکانس طبیعی رابطه مستقیم دارد و همچنین هرچه نسبت طول به ضخامت تیر کمتر باشد، تاثیر C_{11} بر فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود. با افزایش میزان ضریب موثر عرضی پیزو الکتریک، مقدار فرکانس طبیعی بیشتر خواهد شد. با افزایش سفتی سازه در راستای طول تیر، میزان فرکانس طبیعی به خصوص در مودهای بالا بیشتر می‌شود. هرچه شرایط مرزی مقیدتر باشد، به دلیل افزایش سفتی سازه میزان فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود. همچنین با افزایش چگالی لایه‌های کامپوزیتی میزان فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

تشکر و قدردانی: نویسندگان مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را از سردبیر، داوران و ویراستاران محترم مجله مکانیک مدرس اعلام می‌نمایند.

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تحت هیچ عنوانی در نشریه دیگری چاپ نشده است و برای بررسی و چاپ در نشریه دیگری نیز اقدامی صورت نگرفته است.

تعارض منافع: در این مقاله تعارض منافعی با هیچ شخصیت حقیقی و حقوقی وجود ندارد.

سهم نویسندگان: علی‌اصغر خارستانی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۲۵٪)؛ سیدعلی موسوی (نویسنده دوم)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی (۲۵٪)؛ محمود کفاش میرزا رحیمی (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی (۲۵٪)؛ سعید محبوب مقدس (نویسنده چهارم)، پژوهشگر کمکی (۲۵٪)

منابع مالی: تمامی منابع مالی این تحقیق توسط نویسندگان مقاله تامین شده است.

منابع

- 1- Kiang CH, Endo M, Ajayan PM, Dresselhaus G, Dresselhaus MS. Size effects in carbon nanotubes. *Phys Rev Lett*. 1998;81(9):1869-1872.
- 2- Abbaszadeh Bidokhti A, Sadough Vanini A, Eslami MR. Active control of piezo-fgm beams [Internet]. Dijon, France: MATERIAUX. 13-17 November; 2006 [cited 2018 July 06]. Available from: <https://bit.ly/311zrhG>
- 3- Kargarnovin MH, Najafzadeh MM, Viliani NS. Vibration control of functionally graded material plate patched with piezoelectric actuators and sensors under a constant electric charge. *Smart Mater Struct*. 2007;16(4):1252-1259.
- 4- Li SR, Su HD, Cheng CJ. Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment. *Appl Math Mech*. 2009;30(8):969-982.
- 5- Simsek M, Kocatürk T. Free and forced vibration of functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Compos Struct*. 2009;90(4):465-473.
- 6- Simsek M. Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load. *Compos Struct*. 2010;92(10):2532-2546.
- 7- Khalili SMR, Jafari AA, Eftekhari SA. A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. *Compos Struct*. 2010;92(10):2497-2511.
- 8- Jafari AA, Fathabadi M. Forced vibration of FGM Timoshenko beam with piezoelectric layers carrying moving load. *Aerospace Mech J*. 2013;9(2):69-77. [Persian]
- 9- Shahraeeni M, Shakeri R, Hasheminejad SM. An analytical solution for free and forced vibration of a piezoelectric laminated plate coupled with an acoustic enclosure. *Comput Math Appl*. 2015;69(11):1329-1341.
- 10- Hou H, He G. Static and dynamic analysis of two-layer Timoshenko composite beams by weak-form quadrature element method. *Appl Math Model*. 2018;55:466-483.
- 11- Hosseini SAH, Rahmani O. Bending and vibration analysis of curved FG nanobeams via nonlocal Timoshenko model. *Smart Construct Res*. 2018;2(2):1-17.
- 12- Kadoli R, Akhtar K, Ganesan N. Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Appl Math Model*. 2008;32(12):2509-2525.
- 13- Sina SA, Navazi HM, Haddadpour H. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Mater Des*. 2009;30(3):741-747.
- 14- Leissa AW, Qatu MS. *Vibrations of continuous systems*. New York: MacGraw Hill; 2011.
- 15- Tiersten HF. *Linear Piezoelectric Plate Vibration*. New York: Plenum press; 1969.
- 16- Qatu MS. *Vibration of laminated shells and plates*. 1st Edition. New York: Academic Press; 2004.
- 17- Majkut L. Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation. *J Theor Appl Mech*. 2009;47(1):193-210.
- 18- Aydogdu M. Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *Int J Mech Sci*. 2005;47(11):1740-1755.
- 19- Gdoutos EE, Marioli-Riga ZP, editors. *Recent advances in composite materials*. In Honor of SA Paipetis. Dordrecht: Springer Science & Business Media; 2013.