



Matrix Reinforcement Coefficients Models for Fracture Investigation of Orthotropic Materials

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Manafi Farid H.¹ MSc,
Fakoor M.^{*1} PhD

How to cite this article

Manafi Farid H, Fakoor M. Matrix Reinforcement Coefficients Models for Fracture Investigation of Orthotropic Materials. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(11):2811-2822.

ABSTRACT

In this paper, the new theory is proposed to investigate the fracture behavior of cracked composite materials. Based on this theory, crack is created and distributes in the isotropic matrix. Therefore, contrary to the previous fracture theories of composite materials presuming that crack growth occurs in anisotropic homogenous material, the new theory assumes that crack growth occurs in the isotropic matrix. It states that the isotropic matrix is affected by fibers in the composite structure of the material. In this approach, fibers are considered as isotropic matrix reinforcements and the reinforcement effects are defined as coefficients in stress state of the isotropic matrix. The coefficients are called reinforcement factors and derived via three different approaches to study the arbitrary crack in 2D materials. The reinforcing effects of fibers are obtained when tension across and along fibers and shear loadings exerted on the body. The three methods demonstrate that the reinforcement factors depend on elastic properties, crack growth location and the crack and fiber orientations. However, the method, derived from the micro-mechanic approach, displays their dependence on the fiber volume fraction. Comparing the results of these coefficients with the existing fracture theories illustrates the efficiency and ability of the reinforcement factors in investigation and explanation of the fracture behavior of orthotropic materials.

Keywords Fracture Mechanics; Reinforced Isotropic Solid; Reinforcement Coefficients; Fiber Volum Ratio; Orthotropic Material

CITATION LINKS

[1] The past, present, and future of fracture mechanics [2] Application of Fracture Mechanics to Anisotropic Plates [3] G. 30060 Lockheed-Georgia Company, Marietta, Mixed-Mode fracture of unidirectional graphite/epoxy composites [4] Croager, Mode II fracture toughness of Wood measured by a mixed-mode test method [5] Shottafer, Criterion for mixed mode fracture in wood [6] Stanzl-Tschegg, Fracture characteristics of different wood species under mode I loading perpendicular to the grain [7] Leavell, Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids [8] Nobile, Maximum circumferential stress criterion applied to orthotropic materials [9] Viola, On the inclined crack problem in an orthotropic medium under biaxial loading [10] Mixed-mode crack growth media [11] On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear [12] Fracture of wood under mixed model loading I. Derivation of fracture criteria [13] Fracture of wood under mixed mode loading II. Experimental investigation of Picea abies [14] A normal stress criterion for crack extension direction in orthotropic composite materials [15] Extension of maximum tensile stress criterion to mixed mode fracture of orthotropic materials considering T-stress [16] Fakoor, General mixed mode I/II fracture criterion for wood considering T-stress effects [17] Mixed mode fracture criterion for wood based on a reinforcement microcrack damage model [18] A new mixed-mode fracture criterion for orthotropic materials, based on strength properties [19] Mixed mode I/II fracture criterion for orthotropic materials based on damage zone properties [20] van der Put, A new fracture mechanics theory for orthotropic materials like wood [21] Introduction to Composite Materials, Lancaster, Pennsylvania: Technomic Publishing AG [22] Sheikhsari, The influence of fiber-crack angle on the crack tip parameters in orthotropic materials [23] On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack [24] Irwin, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies [25] Micro and ultrastructural aspects of norway spruce tracheids: A review [26] Transition angle, a novel concept for predicting the failure mode in orthotropic materials

¹Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran
Phone: +98 (21) 86093052
Fax: +98 (21) 86093052
mfakoor@ut.ac.ir

Article History

Received: May 24, 2018

Accepted: May 21, 2019

ePublished: November 2, 2019

مدل‌های ضرایب تقویت کننده ماتریس برای بررسی شکست مواد ارتوتروپ

حنا نه منافی فرید MSc

دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

مهدی فکور* PhD

دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله تئوری جدیدی برای بررسی رفتار شکست مواد کامپوزیتی ترک‌دار ارائه شده است. طبق تئوری حاکم ترک داخل ماتریس ایزوتروپ ایجاد شده و رشد می‌کند. بنابراین بر خلاف تئوری‌های حاکم بر شکست این مواد که بستر رشد ترک را در ماده‌ی همگن غیرایزوتروپ فرض می‌کرد در این تئوری بستر رشد ترک ماده ایزوتروپ در نظر گرفته شده که در اثر قرار گرفتن در ساختار ماده کامپوزیتی تحت تأثیر الیاف رفتار آن تغییر کرده است. در این دیدگاه، الیاف در ساختار یک ماده ارتوتروپ به عنوان تقویت‌کننده‌های بستر ایزوتروپ ماتریس در نظر گرفته می‌شوند که اثرات آنها به صورت ضرایبی در میدان تنش ایزوتروپ تعریف می‌شوند. این ضرایب که ضرایب استحکام بخش نامیده شده‌اند به سه روش مختلف برای ترکی که در هر راستای دلخواهی نسبت به الیاف در یک صفحه قرار گرفته‌اند مطالعه و بررسی شده‌اند. کمی‌سازی اثرات استحکام‌بخشی الیاف با تعریف ضرایب استحکام بخش در موده‌های کششی در راستای الیاف و عمود بر آن و مود برشی صورت می‌پذیرد. ضرایب استحکام‌بخش حاصل از سه روش مطالعه شده به خواص الاستیک ماده، مسیر رشد ترک و نیز زاویه‌ای که ترک دلخواه با الیاف می‌سازد بستگی دارند. با این وجود در یکی از روش‌های ارائه شده از طریق رویکرد میکرو مکانیکی وابستگی این ضرایب به کسر حجمی الیاف نیز نشان داده شده است. مقایسه نتایج به دست آمده از این ضرایب و تئوری‌های موجود شکست مواد ارتوتروپ بیانگر کارایی و توانایی ضرایب استحکام بخش در بررسی و توجیه رفتار شکست این مواد است.

کلیدواژه‌ها: مکانیک شکست، ماده ایزوتروپ مقید شده، ضرایب استحکام‌بخش، کسر حجمی الیاف، ماده ارتوتروپ

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۳/۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۳/۵

*نویسنده مسئول: mfakoor@ut.ac.ir

۱- مقدمه

با توجه به مزایای مواد کامپوزیتی از جمله نسبت استحکام به وزن بالا، قابلیت حصول استحکام دلخواه در جهت‌های مختلف و خواص فیزیکی ویژه از جمله میرایی ارتعاشات، عایق حرارت و الکتریسته، کاربرد این مواد در صنایع مختلف در حال گسترش است. علی‌رغم مزایای فراوان مواد کامپوزیتی، به وجود آمدن نقص و ترک در ساختار این مواد در طی فرآیندهای ساخت و تولید یا در طی دوره کاری اجتناب‌ناپذیر است. بهبود خواص شکست مواد برای بالابردن قابلیت اطمینان قطعه‌ها یکی از دلایل اصلی توسعه مواد کامپوزیتی است^[1]. برای طراحی دقیق سازه‌ها، وجود نقص‌ها و ترک‌های موجود در مواد را نمی‌توان نادیده گرفت. از این رو بررسی رفتار شکست مواد همواره مورد توجه مهندسان بوده است.

مطالعات اولیه برای شناخت رفتار شکست مواد کامپوزیتی ارتوتروپیک بر اساس آزمایش‌های مختلف روی انواع چوب انجام گرفت^[2]. چوب یک ماده مرکب طبیعی، ناهمگن و ارتوتروپ است که مقاومت و سفتی بالایی نسب به وزنش دارد. هدف اصلی انجام این آزمایش‌ها ارائه معیارهای شکست تجربی بود تا بتوان رفتار شکست مواد کامپوزیتی را مطالعه کرد. این معیارهای شکست تجربی عموماً مرتبط با بارگذاری مود ترکیبی I و II بوده و با ۲ یا ۳ ثابت آزمایشگاهی که در میان آنها معمولاً چقرمگی شکست

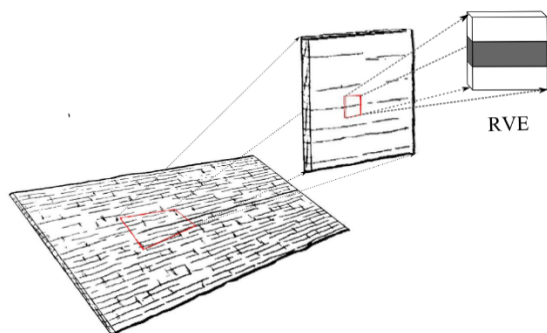
پارامتر اصلی ماده است، قابل به کارگیری است. وو با مطالعه بارگذاری مود ترکیبی روی چوب بالسا و اسکاچ پلای تپ ۱۰۰۲ یک معادله تعاملی را به عنوان معیاری برای رشد ترک در مود ترکیبی I و II ارائه نمود. منحنی حد شکست حاصل از این معیار ثابت کرد که در مود ترکیبی رشد ترک علاوه بر اینکه به مقادیر چقرمگی شکست مود I و II به طور مستقل وابسته است به شدت تحت اثر برهم‌کنش این دو مود نیز قرار می‌گیرد^[2]. همچنین مک‌کینی^[3]، هانت و کروگر^[4] و مال و همکاران^[5] با مطالعه مود ترکیبی I و II بر مواد چوبی و کامپوزیت‌های پایه پلیمری علاوه بر اینکه توانستند معیارهایی برای بررسی شکست مواد ارتوتروپ ارائه دهند، وابستگی شکست این مواد به ضرایب شدت تنش بحرانی مود I و II را نیز نشان دادند. همچنان که ریتزر و همکاران^[6] با بررسی مواد چوبی ویژگی‌های شکست این مواد را بررسی کردند. در ادامه تحقیقات صورت پذیرفته، معیارهایی برای مطالعه پدیده شکست مواد ارتوتروپ ارائه شد که ایده اصلی در آنها تعمیم معیارهای موجود و پرکاربرد برای مواد ایزوتروپ به مواد ارتوتروپ با در نظر گرفتن شرایط مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM) بود. برای مثال ساتوما و همکاران^[7] و کارلونی و نوبایل^[8,9] معیار ماکزیمم تنش مماسی (MTS) را به مواد کامپوزیتی تعمیم دادند. همچنین نوبایل و همکاران^[9] و گودوتوس و همکاران^[10] معیار کمترین چگالی انرژی کرنشی را که توسط اردوگان و سی^[11] برای مواد ایزوتروپ ارائه شده بود با در نظر گرفتن درجه ارتوتروپی ماده و نیز حالت تنش تکین نوک ترک به ماده ارتوتروپ گسترش دادند. جرنکوویست با در نظر گرفتن رشد ترک در امتداد الیاف و حالت تنش تکین نوک ترک ماده ارتوتروپ معیار بیشترین تنش اصلی را به عنوان جایگزین معیار بیشترین تنش مماسی برای مواد غیر ایزوتروپ توسعه داد. همچنین ایشان معیار بیشترین نرخ آزادسازی انرژی کرنشی (SER) که برای اولین بار توسط اردوگان و سی مطرح شده بود و معیار کمترین چگالی انرژی کرنشی را برای مواد ارتوتروپ توسعه داد. معیارهای انرژی مبنای ارائه‌شده توسط جرنکوویست بسیار محافظه‌کارانه بودند. همچنین ایشان معیار بیشترین تنش اصلی (MPS) را برای بررسی شکست مواد اورتوتروپیک توسعه داد. این معیار شکست مواد چوبی را زمانی که مود II، مود غالب بارگذاری است، به درستی پیش‌بینی نمی‌کند^[12]. همچنین نکته قابل توجه در معیارهای ایشان این بود که جرنکوویست از فرضیات مکانیک شکست الاستیک خطی برای ارائه معیارهای خود استفاده نمود. بوچک و هرکوویچ^[14] از معیار نسبت تنش قائم به استحکام ماده ارتوتروپیک در یک جهت خاص برای پیش‌بینی جهت رشد ترک استفاده نمودند. زارع حسین‌آبادی و همکاران با فرض گسترش ترک در راستای الیاف و همچنین با در نظر گرفتن اثرات ترم تنش T، معیار ماکزیمم تنش مماسی را به مواد ارتوتروپ تعمیم دادند^[15].

گوهری/نارکی و فکور^[16] یک معیار شکست مود ترکیبی را با استفاده خواص الاستیک موثر جسم در اثر وجود ترک‌های ریز و پراکنده در اطراف نوک ترک ارائه دادند. در این معیار ناحیه فرآوری شکست (FPZ) در اطراف نوک ترک با پارامتر چگالی میکروتکر، کمی‌سازی شده بود. به این ترتیب با در نظر گرفتن مقدار انرژی تلف‌شده در تشکیل ناحیه فرآوری شکست معیار بیشترین نرخ آزادسازی انرژی کرنشی را برای ترک‌هایی که در هر راستای دلخواهی قرار دارند فرمول‌بندی کردند. گوهری/نارکی و فکور معیار دیگری بر پایه اثرات آسیب ناحیه فرآوری شکست برای پیش‌بینی رفتار ترکی که با زاویه دلخواه نسبت به الیاف در یک ماده ارتوتروپ

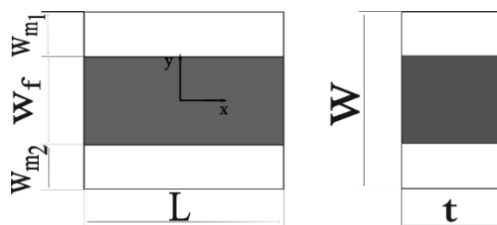
در مواد ارتوتروپ الیاف و ماتریس در کنار یکدیگر تنش‌های وارد شده به قطعه را تحمل می‌کنند. به طور مسلم ماده ایزوتروپ در حالتی که به عنوان ماتریس در کامپوزیت عمل می‌کند با حالتی که به عنوان یک جسم ایزوتروپ مستقل به کار می‌رود، تنش‌های متفاوتی را تحمل خواهد کرد. در تئوری جامد ایزوتروپ مقید شده مواد ارتوتروپ به عنوان مواد تقویت شده با الیاف در نظر گرفته می‌شوند که در آن ترک در بستر جامد ایزوتروپی است که توسط الیاف محصور شده و در این بستر رشد می‌نماید. در حقیقت الیاف جا داده شده در ماتریس مواد کامپوزیتی بخش قابل توجهی از نیروی وارد شده به قطعه را تحمل می‌نمایند. به این ترتیب الیاف نقش تقویت کنندگی ماتریس را بر عهده گرفته و سبب می‌شوند که ماتریس تنش کمتری را تحمل کند. از طرف دیگر، الیاف مواد با استحکام بالاتری نسبت به ماتریس هستند در نتیجه ترک ایجاد شده در ماتریس به هنگام برخورد با الیاف قادر به شکستن آنها نخواهد بود و با تغییر مسیر در درون ماتریس رشد خواهد کرد. بنابراین به نظر می‌رسد با برقرار کردن رابطه‌ای بین میدان تنش در ماده ارتوتروپیک و تنش ماتریس ایزوتروپ می‌توان مکانیزیم شکست این مواد را به خوبی توجیه نمود. ارتباط بین میدان تنش ماتریس ایزوتروپ و تکلایه ارتوتروپ را می‌توان با ضرایبی نشان داد که ضرایب استحکام بخش نامیده شده‌اند. در ادامه این ضرایب به ۳ روش اشاره شده مطالعه و بررسی می‌شود.

۳- روش میکرومکانیکی تنش کاهش یافته (رست)

اولین گام در این روش تعریف المان حجمی منتخب (RVE) است. شکل ۱، المان انتخابی برای جسم مورد مطالعه و شکل ۲، ابعاد مفروض این المان را نشان می‌دهد.



شکل ۱) المان حجمی انتخاب شده برای جسم مورد مطالعه



شکل ۲) ابعاد المان حجمی انتخاب شده

در مواد کامپوزیتی همواره بخشی از نیروی وارد شده به جسم توسط الیاف و بخش دیگر توسط ماتریس تحمل می‌شود. از این رو با استفاده از المان حجمی منتخب مناسب می‌توان تنش تحمل شده توسط الیاف، ماتریس و کامپوزیت را به دست آورد. بدین ترتیب بین تنشی که بر کل ماده کامپوزیتی وارد می‌شود و تنشی که توسط ماتریس ایزوتروپ تحمل می‌شود ارتباط برقرار می‌شود. از

مثل چوب قرار دارد، ارائه دادند^[17]. این معیار سیستم تقویت شده ترک‌های ریز نامیده شد و بر اساس مقاومت ماده در ناحیه فرآوری شکست به رشد ترک‌های ریز استوار بود. در همین سال گوهری /نارکی و فکور معیاری دیگری بر اساس رویکرد میکرومکانیک برای ترک ماکروسکوپی که با زاویه دلخواه نسبت به الیاف قرار گرفته و تحت بارگذاری مود ترکیبی است ارائه کردند. استفاده از این معیار نیازمند خواص استحکامی ماده در راستای الیاف و عمود بر آن است، لذا این معیار را معیار استحکامی نامیدند^[18]. فکور و خونساری در سال ۲۰۱۶ برای به دست آوردن خواص ناحیه آسیب در اطراف نوک ترک روش المان دایروی نماینده را ارائه کردند^[19]. در این رویکرد با صرف نظر کردن از جهت گیری میکروتُرک‌ها، ترک‌های ریز ناحیه آسیب نوک ترک به صورت المان‌های دایروی مدل شدند. تفاوت عمده این روش با روش‌های دیگر فکور در بررسی اثر تداخل میکروتُرک‌ها در داخل ناحیه فرآوری شکست است.

با مرور اجمالی بر معیارهای شکست ارائه شده برای مواد ارتوتروپیک می‌توان دریافت که در اکثر این معیارها میدان تنش در اطراف نوک ترک یک ماده ارتوتروپ در نظر گرفته شده است؛ در حالی که این فرض با مشاهدات آزمایشگاهی که در آن ترک در بستر الاستیک ماتریس ایزوتروپ ماده رشد می‌کند، متناقض است. به عبارت دیگر با توجه به اینکه پدیده شکست مواد ارتوتروپ در بستر ایزوتروپ ماتریس اتفاق می‌افتد، بنابراین تنش‌های اعمالی بر ماتریس ایزوتروپ و استحکام ماتریس در شکست این مواد باید مورد توجه قرار گیرد. این امر نیاز به توسعه یک مدل جدید ماده را در موضوع مکانیک شکست مواد ارتوتروپ آشکار می‌سازد. در سال ۲۰۰۷ ون‌درپوت نیز به این نکته اشاره می‌نماید که انرژی آزاد شده در اثر رشد ترک در ماده ارتوتروپ باید بر اساس استحکام ماتریس ایزوتروپ باشد؛ چرا که تابع تنش ایری ارتوتروپ قادر به توضیح رفتار واقعی شکست ماده نیست^[20]. هر چند رویکرد ون‌درپوت در توصیف پدیده شکست مواد ارتوتروپ درست به نظر می‌رسد، اما با توجه به اینکه در این تئوری کسر حجمی الیاف لحاظ نشده است، تاثیر الیاف بر کاهش نرخ رشد ترک قابل توجیه نیست.

در این مقاله ایده جامد ایزوتروپ مقید شده برای مدل مکانیک شکست مواد ارتوتروپیک ارائه می‌شود. در این مدل الیاف در نقش استحکام بخش برای ماتریس ایزوتروپ خواهند بود. اثر استحکام بخشی الیاف با ضرایبی کمی می‌شوند. برای محاسبه این ضرایب از ۳ رویکرد با نام‌های زیر استفاده شده است:

- روش میکرومکانیکی تنش کاهش یافته: رست (Reduced Stress; ReSt)

- روش تنش‌های متناظر: کاست (Corresponding Stresses; CoSt)

- روش رویکرد تنش ایری تعمیم یافته: ایست (Extended Airy Stress; EaSt)

در ادامه ضرایب استحکام بخش به دست آمده به قطعاتی ترک در راستای دلخواهی نسبت به الیاف قرار گرفته‌اند، توسعه داده شده و صحت سنجی نتایج با استفاده از مدل سازی مسئله در نرم افزار المان محدود صورت گرفته است.

۲- جامد ایزوتروپ مقید شده

با در نظر گرفتن مشاهدات آزمایشگاهی و ملاحظات صورت پذیرفته در رشد ترک در مواد ارتوتروپیک، یک مدل ماده جدید برای تحلیل قطعات ترک دار کامپوزیتی ارائه می‌شود. در این مدل بستر رشد ترک در مواد کامپوزیتی ماتریس ایزوتروپ ماده در نظر گرفته می‌شود که تحت اثرات تقویتی الیاف قرار دارد. باید توجه کرد که

با توجه به اینکه در المان حجمی منتخب مفروض، $E_m = E_{yy}$ ، بنابراین ضریب ξ_1 برابر خواهد بود با:

$$\xi_1 = \frac{E_{xx}}{E_{yy}} \quad (5)$$

رابطه (۵) همان مفهوم تنش کاهش یافته را در بر دارد. به این معنی که در اثر نیرویی که در امتداد الیاف به قطعه کامپوزیتی وارد می شود، میزان تنش وارد بر ماتریس با ضریب ξ_1 کاهش یافته است.

حالت دوم: در این حالت پیدا کردن رابطه بین تنش برشی کامپوزیت و ماتریس مورد نظر است. نیروی برشی که به المان حجمی منتخب اعمال می شود طبق شکل ۵ سبب تغییر شکل آن می گردد.

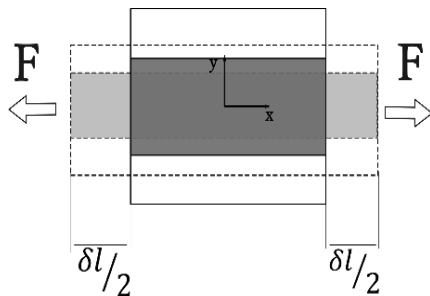
برای انجام محاسبات مربوط به این بخش فرض شده است که تمامی نیرویی که به ماتریس در سطح آن در صفحه A وارد می شود به صورت بلوک (ب) در شکل ۶ است و تمامی نیرویی که در این صفحه به فایبر وارد می شود در بلوک (پ) در این شکل نشان داده شده است. سطحی که هر کدام از این نیروها به آن وارد می شوند به ترتیب برابر با A_m و A_f است که مجموع آن ۲ برابر مساحت صفحه A است؛ یعنی $A = A_f + A_m$ است.

به این ترتیب تنش برشی المان حجمی منتخب در هر کدام از المان های (آ)، (ب) و (پ) به صورت زیر به دست می آیند:

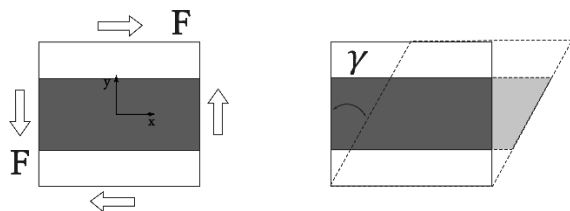
$$\tau = \frac{F}{A} = \gamma G_{12} \quad (6-الف)$$

$$\tau_m = \frac{F_m}{A_m} = \gamma_m G_m \quad (6-ب)$$

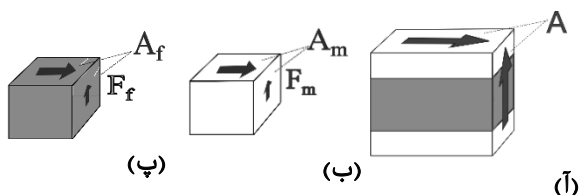
$$\tau_f = \frac{F_f}{A_f} = \gamma_f G_f \quad (6-پ)$$



شکل ۴ تغییر شکل المان حجمی منتخب زمانی که در راستای الیاف کشیده شده است

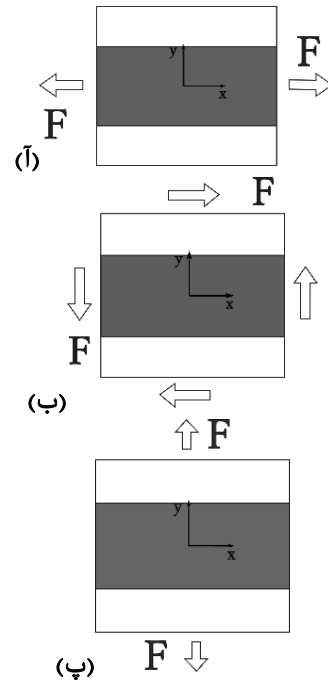


شکل ۵ تغییر شکل المان حجمی منتخب زمانی تحت نیروی برشی خالص



شکل ۶ بلوک دیاگرام نیروهای وارده بر فایبر و ماتریس در المان حجمی منتخب تحت نیروی برشی خالص

این رو می توان تنش واقعی که بر نوک ترک موجود در ماتریس اعمال می شود را به دست آورد که منجر به پیش بینی صحیح رفتار شکست در مواد کامپوزیتی می شود. برای این کار نیاز است که تنش در هر ۳ حالت بارگذاری صفحه ای که منجر به ایجاد تنش های نرمال و برشی می شود، مورد بررسی قرار گیرد. بنابراین مطابق شکل ۳ برای هر ۳ حالت مستقل ممکن برای بارگذاری صفحه ای به طور جداگانه المان حجمی منتخب انتخاب شده است. این ۳ حالت عبارتند از تنش نرمال در راستای الیاف، تنش نرمال عمود بر الیاف و تنش برشی که در ادامه به مطالعه هر ۳ پرداخته شده است.



شکل ۳ المان حجمی انتخاب شده. (آ) تحت کشش در راستای الیاف، (ب) تحت برش، (پ) تحت کشش در جهت عمود بر الیاف

حالت اول: شکل ۳-آ را در نظر بگیرید که در آن جسم کامپوزیتی تحت بار کششی در راستای الیاف قرار گرفته است. آنچه مسلم است این است که برای رعایت شرایط پیوستگی در این حالت المان حجمی منتخب کشیده شده در راستای فایبر جابجایی ثابتی در این راستا خواهد داشت و کرنش در ماتریس و فایبر برابر کرنش کل المان حجمی منتخب خواهد بود (شکل ۴). بنابراین می توان نوشت:

$$\epsilon = \epsilon_f = \epsilon_m \quad (1)$$

که در آن ϵ کرنش کل المان حجمی منتخب، ϵ_f کرنش فایبر و ϵ_m کرنش ماتریس است. با توجه به رابطه ساختاری می توان نوشت:

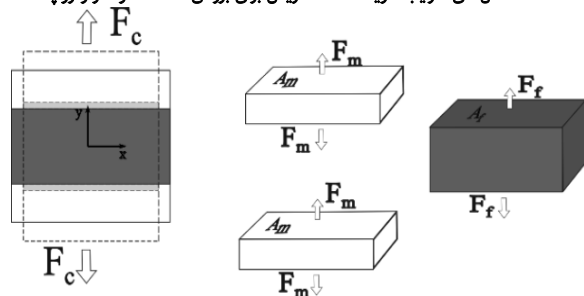
$$\frac{\sigma}{E_{11}} = \frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad (2)$$

که در آن σ تنش کل وارده بر کامپوزیت است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{E_m}{E_{xx}} \sigma = \sigma_m \quad (3)$$

بدین ترتیب ضریب استحکام بخش در راستای الیاف (ξ_1) از نسبت تنش اعمالی ماتریس (σ_m) به تنش کل قطعه (σ) قابل تعریف است:

$$\xi_1 = \frac{E_{xx}}{E_m} \quad (4)$$



شکل ۸) تغییر شکل المان حجمی منتخب زمانی که در راستای عمود بر الیاف کشیده شده است

رابطه (۱۲) بیان می‌کند که میزان تنش برشی که در کل کامپوزیت وجود دارد با ضریب ξ_3 به تنش موجود در ماتریس مرتبط می‌شود. با توجه به اینکه در المان حجمی منتخب مفروض $G_f = G_{12}$ و $G_m = G_{21}$ می‌باشد، ضریب ξ_3 برابر خواهد بود با:

$$\xi_3 = (1 - V_f) \left(1 + \frac{E_{11}(1 + \nu_{21})}{E_{22}(1 + \nu_{12})} \right) \quad (13)$$

حالت سوم: رابطه بین تنش کامپوزیت و ماتریس برای بارگذاری در راستای y یا عمود بر الیاف در این حالت مد نظر است. طبق شکل ۸ نیرویی که به ماتریس و فایبر وارد می‌شود با نیروی اعمالی به المان حجمی منتخب برابر است؛ در این صورت طبق رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) تنش در راستای y برای هر ۳ المان حجمی منتخب، ماتریس و الیاف یکسان است.

$$F = F_f = F_m \quad (14-الف)$$

$$A = A_f = A_m \quad (14-ب)$$

$$\sigma = \sigma_f = \sigma_m \quad (14-پ)$$

بنابراین:

$$\xi_2 = 1 \quad (15)$$

$\xi_2 = 1$ بیانگر این موضوع است که در اثر اعمال نیرویی عمود بر الیاف تنش در کامپوزیت و ماتریس با یکدیگر برابر است و الیاف نقشی در تحمل تنش ندارند.

به این ترتیب تنش در ماده ارتوتروپ (σ_{ij}) با ضرایب انتقال ξ_i به تنش ماده ایزوتروپ ماتریس (σ_{ij}) مربوط می‌شوند و خواهیم داشت:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}/\xi_1 \quad (16-الف)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}/\xi_2 \quad (16-ب)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}/\xi_3 \quad (16-پ)$$

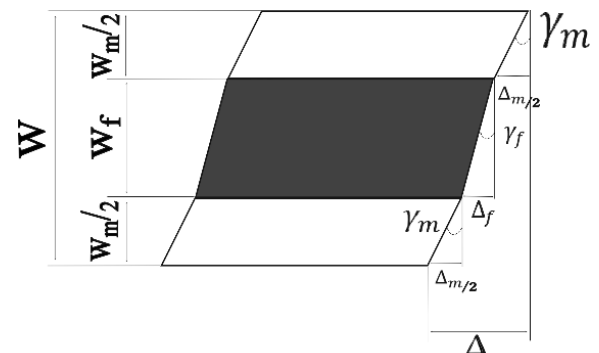
با توجه به المان حجمی منتخب مفروض در شکل ۲، ضرایب استحکام‌بخش ξ_i استخراج شده در این بخش در حالتی است که ترک با راستای الیاف یکسان است و دستگاه مختصات ترک بر دستگاه مختصات ماده منطبق است در اصطلاح در حالت روی محور (On-axis) است. اما برای حالت‌های دلخواه ترک که در این صورت دستگاه مختصات منطبق بر ترک با دستگاه مختصات ماده در یک راستا نیستند و در اصطلاح در حالت خارج از محور (Off-axis) است، این روابط نیاز به تعمیم دارد. در حقیقت فرمول‌های (۵)، (۱۳) و (۱۵) برای حالت روی محور صدق می‌کند و برای راستاهای دلخواه با توجه به اینکه خواص ماده متفاوت خواهد بود ضرایب ξ_i نیز تغییر خواهند کرد. بنابراین ضرایب ξ_i باید به صورت تابعی از زاویه الیاف (φ) بیان شود (شکل ۹).

γ زاویه ایجادشده در اثر برش المان حجمی منتخب، γ_m زاویه ایجادشده در اثر برش ماتریس و γ_f زاویه ایجادشده در اثر برش فایبر است. این زوایا و تغییر شکل ماتریس و فایبر در المان حجمی منتخب در شکل ۷ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که می‌توان زاویه برش ماتریس، فایبر و در المان حجمی منتخب را طبق جابجایی آنها و عرض المان مربوط به شرح زیر به دست آورد. تغییرات Δ ، Δ_m و Δ_f در شکل ۷ نشان داده شده است.

$$\gamma = \frac{\Delta}{w} \quad (7-الف)$$

$$\gamma_m = \frac{\Delta_m}{w_m} \quad (7-ب)$$

$$\gamma_f = \frac{\Delta_f}{w_f} \quad (7-پ)$$



شکل ۷) تغییر شکل فایبر و ماتریس در المان منتخب تحت نیروی برشی خالص

با توجه به اینکه ضخامت المان تغییر نمی‌کند مساحت‌های فایبر و ماتریس کسری از مساحت المان خواهد بود، یعنی $A_m = V_m A$ و $A_f = V_f A$. به ترتیب کسر حجمی الیاف و ماتریس در کامپوزیت است طوری که $V_m + V_f = 1$ می‌باشد. به این ترتیب رابطه‌های (۶) بر اساس رابطه (۷) باز نویسی می‌شوند.

$$\tau = \frac{\Delta}{w} G_{12} \quad (8-الف)$$

$$\tau_m = \frac{\Delta_m}{w_m} G_m \quad (8-ب)$$

$$\tau_f = \frac{\Delta_f}{w_f} G_f \quad (8-پ)$$

از تقسیم دو رابطه (۸-الف) و (۸-ب) و با داشتن $w_m = V_m w$ و $w_f = V_f w$ ، رابطه بین تنش برشی المان حجمی منتخب و ماتریس به دست می‌آید که داریم:

$$\frac{\tau}{\tau_m} = \frac{\Delta w_m G_{12}}{\Delta_m w G_m} = \frac{\Delta G_{12}}{\Delta_m G_m} V_m \quad (9)$$

که در آن:

$$\frac{\Delta}{\Delta_m} = \frac{\Delta_m + \Delta_f}{\Delta_m} = 1 + \frac{\Delta_f}{\Delta_m} = 1 + \frac{F_f w_f A_m G_m}{A_f G_f F_m w_m} = 1 + \frac{F_f V_f w V_m A G_m}{V_f A G_f F_m V_m w} = 1 + \frac{G_m}{G_f} \quad (10)$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

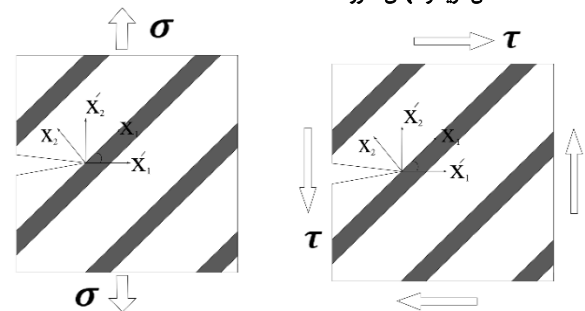
$$\tau = G_{12} (1 - V_f) \left(\frac{1}{G_m} + \frac{1}{G_f} \right) \tau_m \quad (11)$$

بنابراین ضریب کاهش تنش برشی ξ_3 که نشان‌دهنده اثر کاهندگی الیاف در تنش برشی وارده به ماتریس می‌باشد با رابطه زیر قابل ارائه است:

$$\xi_3 = G_{12} (1 - V_f) \left(\frac{1}{G_m} + \frac{1}{G_f} \right) \quad (12)$$

بنابراین زاویه الیاف با ترک در بازه بین صفر تا $\pi/20 < \varphi < \pi/20$ دارای ماکزیمم اثر الیاف در تحمل تنش برشی در مواد ارتوتروپ خواهد بود.

همان‌طور که نمودارها نشان می‌دهند بعد از زاویه ۴۵ درجه ($\varphi > 45$) که مقدار ξ_1 کمتر از یک است، الیاف دیگر اثر تقویت‌کنندگی برای ماتریس را نخواهند داشت و تمام بار توسط ماتریس تحمل خواهد شد. در مرجع [22] این زاویه به عنوان زاویه گذر باربرداری از الیاف به ماتریس یاد شده است که تعریف ضرایب استحکام‌بخش نیز این موضوع را تأیید می‌نماید. با افزایش زاویه بین الیاف و ترک و با فاصله گرفتن از زاویه ۴۵ درجه مطابق با تئوری رست ماتریس تنش بیشتری نسبت به کل کامپوزیت تحمل خواهد کرد که این امر ماده کامپوزیتی را مستعد واماندگی ترک خوردگی ماتریس (Matrix-Cracking) خواهد کرد.



شکل ۹) المان حجمی منتخب برای حالت خارج از محور

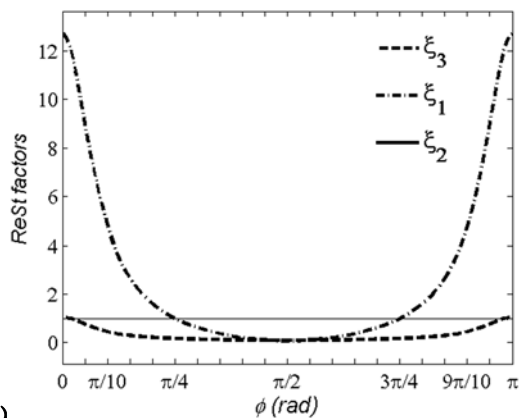
خواص الاستیک ماده ارتوتروپیک با توجه به تابع توان [21] در راستای مختلف φ به صورت زیر خواهد بود که در آن ضرایب $\hat{C}_{ij}$ نرمی قطعه کامپوزیت در حالت خارج از محور است [10].

$$\begin{aligned}\hat{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \varphi + C_{22} \sin^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (C_{16} \cos^2 \varphi + C_{26} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi \\ \hat{C}_{22} &= C_{11} \sin^4 \varphi + C_{22} \cos^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - (C_{16} \sin^2 \varphi + C_{26} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi \\ \hat{C}_{12} &= (C_{11} + C_{22} - C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + C_{12}(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \frac{1}{2}(C_{26} - C_{16}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi \\ \hat{C}_{66} &= C_{66} + 4(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 2(C_{26} - C_{16}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi \\ \hat{C}_{16} &= [C_{11} \cos^2 \varphi - C_{22} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}(2C_{12} + C_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi + C_{16} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \\ &\quad + C_{26} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ \hat{C}_{26} &= [C_{11} \sin^2 \varphi - C_{22} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}(2C_{12} + C_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi + C_{16} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ &\quad + C_{26} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)\end{aligned}\quad (17)$$

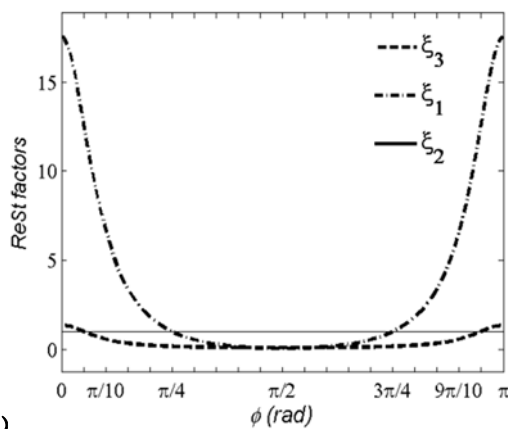
بنابراین ضرایب استحکام‌بخش ξ_i در حالت کلی برابر خواهد بود که نسبت به زاویه بین ترک و الیاف در نمودار ۱ رسم شده است:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\hat{C}_{22}}{\hat{C}_{11}} = \frac{C_{11} \sin^4 \varphi + C_{22} \cos^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{C_{11} \cos^4 \varphi + C_{22} \sin^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ \xi_3 &= (1 - V_f) \left(1 + \frac{\hat{C}_{22}(1 + \nu_{21})}{\hat{C}_{11}(1 + \nu_{12})} \right) = (1 - V_f) \left[1 + \frac{(1 + \nu_{21})}{(1 + \nu_{12})} \times \left(\frac{C_{11} \sin^4 \varphi + C_{22} \cos^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{C_{11} \cos^4 \varphi + C_{22} \sin^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \right) \right]\end{aligned}\quad (18)$$

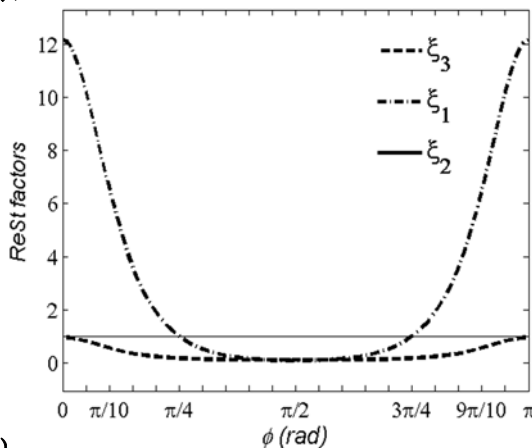
با توجه به اینکه هر ۳ نمونه ماده چوبی در نظر گرفته شده به شدت ارتوتروپ هستند لذا روند تغییرات ضرایب استحکام‌بخش در هر ۳ نمونه چوبی یکسان است. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌شود از زاویه $\pi/20$ به بعد با کاهش ضریب ξ_3 و کمتر شدن آن از مقدار واحد طبق تئوری رست، ماتریس تنش برشی بیشتری نسبت به کل کامپوزیت تحمل خواهد کرد. این نشان می‌دهد که ماتریس، تنش برشی بسیار زیادی را متحمل خواهد شد که در صورت نداشتن استحکام برشی کافی ماده کامپوزیتی از لحاظ برشی وامانده خواهد شد و ماتریس و الیاف از یکدیگر جدا خواهند شد. این موضوع نشان می‌دهد که اگر زاویه ترک ایجاد شده با الیاف در مواد کامپوزیتی بیش از ۹ درجه باشد ($\varphi > 9$)، ماده کامپوزیتی در اثر مولفه برشی ایجاد شده روی ماتریس مستعد جدایش ماتریس-الیاف (Fiber-Matrix Debonding) خواهد بود.



(آ)



(ب)

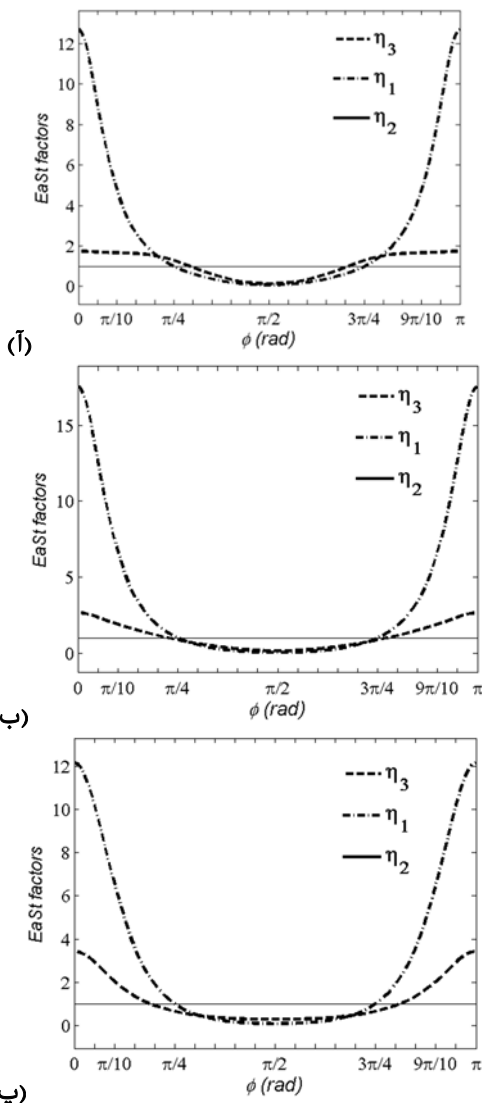


(پ)

نمودار ۱) تغییرات ضرایب استحکام‌بخش رست برحسب زاویه الیاف برای (آ) صنوبر نروژی (ب) صنوبر قرمز (پ) کاج اسکاتلندی

$$\left(\frac{C_{11} \sin^4 \varphi + C_{22} \cos^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{C_{66} + 4(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \right) \times [2 - \frac{(C_{11} + C_{22} - C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + C_{12} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)}{C_{11} \sin^4 \varphi + C_{22} \cos^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} - \frac{(sC_{11} + C_{22} - C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + C_{12} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)}{C_{11} \cos^4 \varphi + C_{22} \sin^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}] \quad (30)$$

با توجه به اینکه جنس هر ۳ نمونه چوبی بوده که ماده به شدت ارتوتروپ محسوب می‌شود باز هم روند تغییرات ضرایب استحکام‌بخش برای هر ۳ نمونه یکسان است. نمودار ۲ نشان می‌دهد بسته به جنس ماده در صورتی که زاویه بین الیاف و ترک نزدیک زاویه ۵ درجه باشد احتمال وامانده شدن ماده افزایش می‌یابد. چرا که از این زاویه به بعد میزان ضرایب استحکام‌بخش η_1 و η_3 از مقدار واحد کمتر می‌شود و همچون ضرایب رست سبب تضعیف ماده می‌گردد. تنها اختلاف ضرایب ایست با رست در ضریب استحکام‌بخش مربوط به تنش برشی است که واماندگی ماده در اثر تنش برشی را در زاویه‌های بیشتر از ۴۵ درجه پیش‌بینی می‌کند. این در حالی است که اثرات تنش برشی با استفاده از ضرایب استحکام‌بخش رست در انحراف‌های خیلی کم الیاف از ترک خود را نشان می‌دهند.



نمودار ۲) ایست برحسب زاویه بین ترک و الیاف برای (آ) صنوبر نروژی (ب) صنوبر قرمز (پ) کاج اسکاتلندی

۴- مطالعه ضرایب استحکام‌بخش با رویکرد تنش ایری تعمیم‌یافته (ایست)

ون‌درپوت [20] برای مقایسه میدان تنش در یک ماده ارتوتروپ و یک ماده ایزوتروپ از جنس ماتریس ماده ارتوتروپ مذکور از روابط اصلی سازگاری و ساختاری در تئوری الاستیسته بهره برد. همان‌طور که گفته شد برای حالتی که ترک صفحه‌ای در ماتریس یک ماده ارتوتروپ تحت بارگذاری مود ترکیبی قرار دارد، می‌توان تنش‌های کامپوزیت را به صورت ضریبی از تنش‌های ماده ایزوتروپ ماتریس بیان کرد:

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{n_1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (20-الف)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}}{n_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (20-ب)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{n_6} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (20-پ)$$

در این معادله σ_{ij} از روابط تنش ویلیامز [23] برای ماده ایزوتروپ به دست می‌آید. با جایگذاری تنش‌های تقویت‌شده در معادلات ساختاری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{n_1} \\ \frac{\sigma_{22}}{n_2} \\ \frac{\sigma_{12}}{n_6} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

با قراردادن مجموعه معادلات (۲۰) و (۲۱) در معادلات سازگاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n_2 C_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + (n_6 C_{66} + (1 + n_1) C_{12}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ n_1 C_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

رابطه (۲۲) با ساده‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + \frac{(n_6 C_{66} + (1 + n_1) C_{12})}{n_2 C_{22}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{n_1 C_{11}}{n_2 C_{22}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (23)$$

معادله (۲۳) معادله سازگاری مواد ارتوتروپ با فرض ماتریس ایزوتروپ تقویت شده است. در معادله (۲۴)، روابط سازگاری مواد ایزوتروپ آمده است:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (24)$$

در مقایسه این معادله با معادله (۲۳) مقادیر n_1 و n_6 به ترتیب زیر قابل استخراج است:

$$n_1 = \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{E_{11}}{E_{22}} \quad (25)$$

$$n_6 = \left(2 - \frac{C_{12}}{C_{22}} - \frac{C_{12}}{C_{11}} \right) \frac{C_{22}}{C_{66}} = (2 + \nu_{12} + \nu_{21}) \quad (26)$$

$$\nu_{21} \frac{C_{12}}{E_{22}} = \frac{E_{11}}{2E_{22}} \left(1 + \frac{(1 + \nu_{21})}{(1 + \nu_{12})} \right) \quad (27)$$

$$n_2 = 1 \quad (27)$$

روابط (۲۵) تا (۲۷) برای حالت روی محور استخراج شده است [20].

روابط حالت کلی و خارج از محور با توجه به روابط (۱۷) و با جایگزینی η_1, η_2, η_3 به جای n_1, n_2, n_6 طبق رابطه‌های (۲۸) تا (۳۰) به دست می‌آید که نمودار ۲ این ضرایب را برحسب زاویه ϕ بیان می‌کنند.

$$\eta_1 = \frac{\hat{C}_{22}}{\hat{C}_{11}} = \frac{C_{11} \sin^4 \varphi + C_{22} \cos^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{C_{11} \cos^4 \varphi + C_{22} \sin^4 \varphi + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \quad (28)$$

$$\eta_2 = 1 \quad (29)$$

$$\eta_3 = \left(2 - \frac{\hat{C}_{12}}{\hat{C}_{22}} - \frac{\hat{C}_{12}}{\hat{C}_{11}} \right) \frac{\hat{C}_{22}}{\hat{C}_{66}} =$$

۵- روش تنش‌های متناظر (کاست)

روش نسبت تنش‌های متناظر مستقیماً از مفهوم تقویت‌کنندگی الیاف به دست می‌آید. به این ترتیب که در بسط سری تنش ویلیامز، نسبت میدان تنش در ماده ایزوتروپ به میدان تنش متناظر در ماده ارتوتروپ، ضرایب استحکام‌بخش در جهات متناظر را خواهند داد. پس هدف به‌دست‌آوردن ضرایب α_i با استفاده از نسبت میدان تنش ماده ایزوتروپ به ماده ارتوتروپ است. در این رویکرد ضرایب α_i به صورت نسبت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_1 = \frac{\hat{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} \quad (۳۱-الف)$$

$$\alpha_2 = \frac{\hat{\sigma}_{22}}{\sigma_{22}} \quad (۳۱-ب)$$

$$\alpha_3 = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sigma_{12}} \quad (۳۱-پ)$$

که در آن $\hat{\sigma}_{ij}$ و σ_{ij} میدان تنش تکین در اطراف نوک ترک به ترتیب در ماده ایزوتروپ [23] و ارتوتروپ [24] می‌باشد. با جایگذاری آنها در روابط (۳۱) فرم کلی ضرایب استحکام‌بخش به دست خواهد آمد:

$$\alpha_1 = \frac{\hat{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{\hat{K}_I \hat{f}_{11}(\theta) + \hat{K}_{II} \hat{g}_{11}(\theta)}{\sigma_{11}} \quad (۳۲-الف)$$

$$\alpha_2 = \frac{\hat{\sigma}_{22}}{\sigma_{22}} = \frac{\hat{K}_I \hat{f}_{22}(\theta) + \hat{K}_{II} \hat{g}_{22}(\theta)}{\sigma_{22}} \quad (۳۲-ب)$$

$$\alpha_3 = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sigma_{12}} = \frac{\hat{K}_I \hat{f}_{12}(\theta) + \hat{K}_{II} \hat{g}_{12}(\theta)}{\sigma_{12}} \quad (۳۲-پ)$$

این روابط بیانگر این نکته هستند که ضرایب تقویت‌کنندگی الیاف به ضریب شدت تنش مود I و II ماتریس ایزوتروپ و ماده غیرایزوتروپ و نیز زاویه رشد ترک (θ) و نیز زاویه الیاف (φ) از محور اصلی بستگی دارد. با توجه به اینکه α_i تابعی از جنس ماده است و برای هر ماده از ویژگی آن به شمار می‌آید، پس برای هر نوع بارگذاری دلخواه مقدار ضرایب استحکام‌بخش باید ثابت باشد. از این رو برای ساده‌سازی حل مسئله، α_i ‌ها در بارگذاری‌های مود I و مود II خالص در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به اینکه مود I و II خالص به ترتیب قادر به توجیه رفتار ماده تحت کشش و برش است ضرایب α_1 و α_2 برای مود I خالص و ضریب α_3 برای مود II خالص از ضرایب کاست به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\alpha_1 = \frac{\hat{K}_I \hat{f}_{11}(\theta)}{K_I f_{11}(\theta)} \quad (۳۳-الف)$$

$$\alpha_2 = \frac{\hat{K}_I \hat{f}_{22}(\theta)}{K_I f_{22}(\theta)} \quad (۳۳-ب)$$

$$\alpha_3 = \frac{\hat{K}_{II} \hat{g}_{12}(\theta)}{K_{II} g_{12}(\theta)} \quad (۳۳-پ)$$

که در آن ضرایب $\hat{f}_{ij}$ و $\hat{g}_{ij}$ توابع زاویه‌ای در بسط میدان تنش مواد غیرایزوتروپ [24] و f_{ij} و g_{ij} برای مواد ایزوتروپ [23] هستند.

همچنین نسبت چقرمگی شکست مود I و II ماده ایزوتروپ به ارتوتروپ، $\hat{K}_{IIc}/K_{IIc}$ و $\hat{K}_{Ic}/K_{Ic}$ به طور مستقیم وابستگی ضرایب را به ماده نشان می‌دهد و تنها باعث انبساط تابع می‌شود. در واقع از لحاظ فیزیکی ضرایب شدت تنش بحرانی مواد ارتوتروپ بیشتر از مواد ایزوتروپ متناظر است بنابراین این نسبت‌ها همواره ضریبی بزرگتر از یک است. از این رو می‌توان وابستگی ضرایب α_i به θ را با حذف نسبت ضرایب شدت تنش بررسی کرد. در این صورت روابط کاست به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\alpha_1 = \frac{\hat{K}_I}{K_I} \alpha_1^\theta \quad (۳۴-الف)$$

$$\alpha_2 = \frac{\hat{K}_I}{K_I} \alpha_2^\theta \quad (۳۴-ب)$$

$$\alpha_3 = \frac{\hat{K}_{II}}{K_{II}} \alpha_3^\theta \quad (۳۴-پ)$$

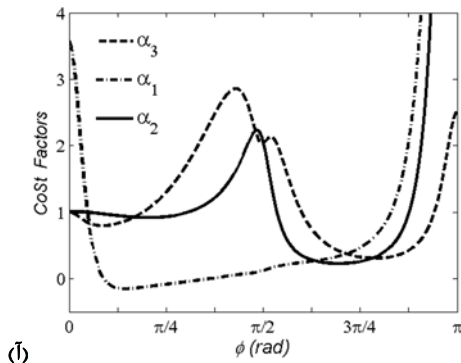
که در آن:

$$\alpha_1^\theta = \frac{\hat{f}_{11}(\theta)}{f_{11}(\theta)} = \frac{Re\left[\frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_2 F_2 - \mu_1 F_1)}{\mu_1 - \mu_2}\right]}{\cos\frac{\theta}{2} (1 + \sin^2\frac{\theta}{2})} \quad (۳۵-الف)$$

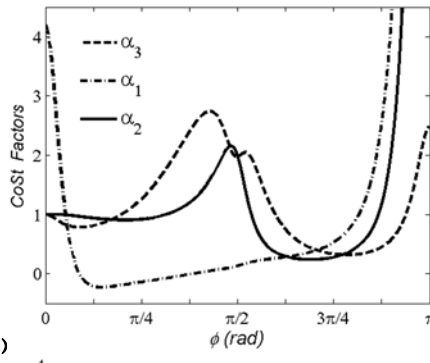
$$\alpha_2^\theta = \frac{\hat{f}_{22}(\theta)}{f_{22}(\theta)} = \frac{Re\left[\frac{\mu_1 F_2 - \mu_2 F_1}{\mu_1 - \mu_2}\right]}{\cos\frac{\theta}{2} (1 - \sin^2\frac{\theta}{2})} \quad (۳۵-ب)$$

$$\alpha_3^\theta = \frac{\hat{g}_{12}(\theta)}{g_{12}(\theta)} = \frac{Re\left[\frac{\mu_1 F_1 - \mu_2 F_2}{\mu_1 - \mu_2}\right]}{\frac{1}{4} \cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos\frac{3\theta}{2}} \quad (۳۵-پ)$$

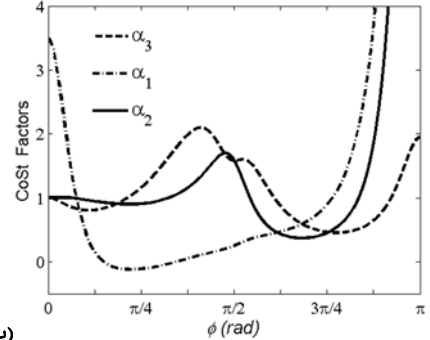
در روابط (۳۵) μ_1 و μ_2 پارامترهای مختلط و F_1 و F_2 توابع زاویه‌ای در میدان تنش ماده ارتوتروپ هستند [24]. ضرایب استحکام‌بخش α_i^θ به خواص ماده و نیز زاویه قرارگیری ترک نسب به الیاف ($\varphi = \theta$) بستگی دارد؛ چرا که همچنان که در به‌دست‌آوردن ضرایب قبل اشاره شد، خواص ماده در اثر تغییر زاویه الیاف و ترک تغییر می‌کنند. همچنین این ضرایب نشان می‌دهند که تقویت ماده در راستاهای مختلف متفاوت است. همچنان که در زاویه‌های مختلف منحنی تغییرات ضرایب شدت تنش α_i^θ برحسب زاویه θ در نمودار ۳ برای ۳ نوع چوب صنوبر نروژی، صنوبر قرمز و کاج اسکاتلندی رسم شده است.



(آ)



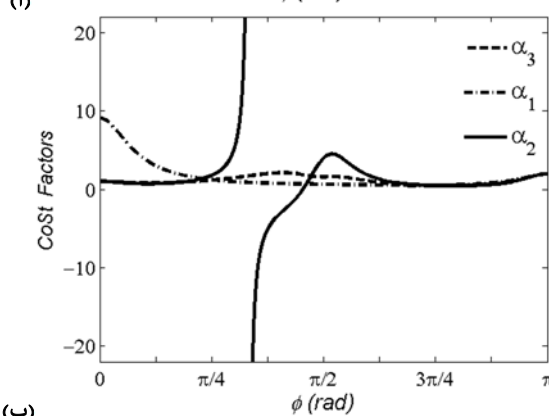
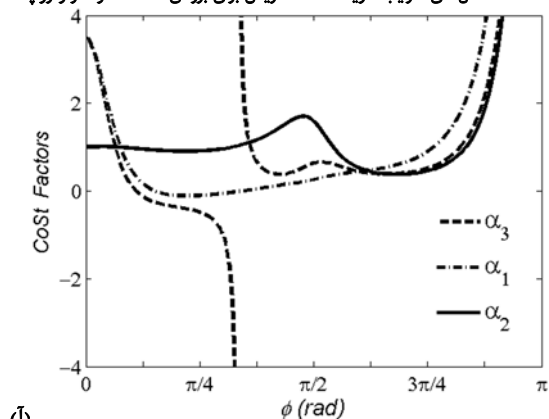
(ب)



(پ)

نمودار ۳) کاست برحسب زاویه بین ترک و الیاف برای (آ) صنوبر نروژی (ب) صنوبر قرمز (پ) کاج اسکاتلندی

در نمودارهای ۴ تا ۶ تغییرات این ضرایب در مود I و II خالص در زاویه‌های مختلف برای این ۳ نمونه نشان داده شده است که بیان

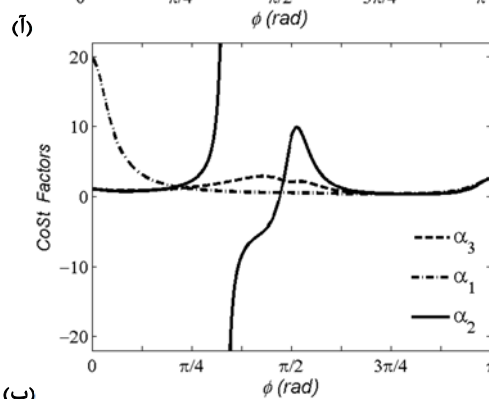
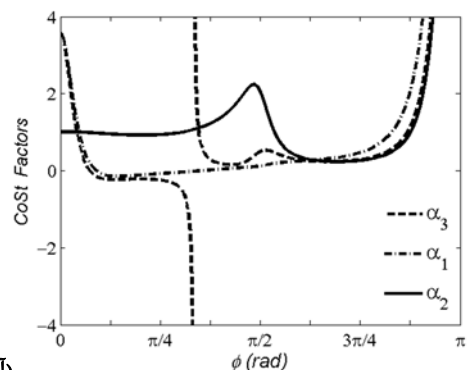


نمودار (۶) $\alpha_i^\theta - \varphi$ برای کاج اسکاتلندی در شرایط مود خالص (آ) I (ب) II

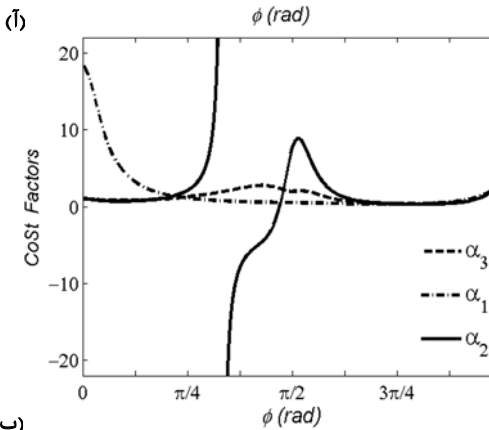
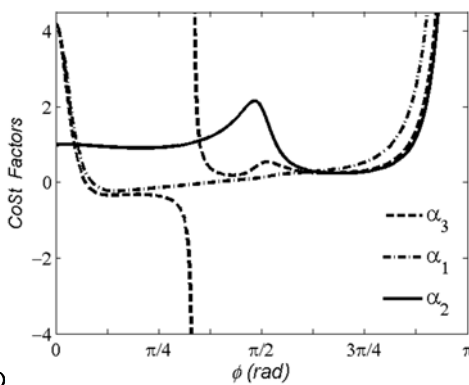
با توجه به ضرایب استحکام بخش به دست آمده از روش نسبت تنش‌های متناظر مشاهده می‌شود که ضرایب استحکام بخشی الیاف علاوه بر اینکه به جنس بستگی دارند در جهت‌گیری‌های مختلف ترک نسبت به الیاف متغیر خواهند بود. تغییر جنس نمونه‌ها در این نمودارها تنها سبب شیفت شدن نمودارها به مقدار خیلی کم در جهت عمودی و تغییر جزئی نمودارها شده است. نکته قابل توجه در تمامی نمودارهای مربوط به α_2^θ و α_3^θ در ثابت بودن آن (برابر با یک) برای تمامی حالت قرارگیری ترک نسبت به الیاف و جنس‌های مختلف در زاویه صفر درجه است که پیش‌تر از طریق تئوری‌های تقویت‌کننده رست نیز به دست آمده بود. علاوه بر این نمودارها بیانگر این نکته هستند که تغییرات ضرایب استحکام بخش نسبت به زاویه رشد ثابت نیست و در زاویه‌های مختلف این ضرایب تأثیر متفاوتی دارند.

نمودارهای $\alpha_3 - \theta$ برای مود I خالص و $\alpha_2 - \theta$ برای مود II خالص را می‌توان شبیه به یکدیگر دانست. چنانچه در مود I خالص مقدار α_3 در زاویه ۴۵ درجه به یک مقدار بی‌نهایت می‌رسد و در مود II خالص مقدار α_2 . این نمودارها بیانگر این موضوع است با توجه به اینکه کدام مود بارگذاری غالب است، مقدار α_2 یا α_3 در این زاویه بی‌نهایت خواهد بود؛ یعنی حتی در صورت مود ترکیبی نیز انتظار می‌رود که ضرایب استحکام بخش بی‌نهایت یا یک مقدار زیادی باشد. همچنین مشاهده می‌شود که در زاویه‌های بین ۳۰ تا ۶۰ درجه مقدار ضرایب استحکام بخش به طور قابل توجهی افزایش پیدا کرده است یعنی در این محدوده ماده سفت‌تر می‌شود طوری که در زاویه ۴۵ درجه نوک ترک بیشترین تنش برشی و نرمال در راستای عمود بر الیاف را تحمل می‌کند که اگر این مقدار تنش از استحکام نهایی الیاف بیشتر باشد قادر به شکستن الیاف خواهد

می‌کنند می‌توان نوع و میزان بارگذاری را بر اساس زاویه‌ای که در آن تقویت ماتریس توسط الیاف به بیشترین مقدار خود رسیده است، کنترل کرد. همچنین توسط روابط α_i^θ و چقرمگی شکست مود I و مود II یک ماده ایزوتروپ می‌توان چقرمگی شکست مود I و مود II ماده ارتوتروپی را به دست آورد که در آن همان ماده ایزوتروپ به عنوان ماتریس استفاده شده است.



نمودار (۴) $\alpha_i^\theta - \varphi$ برای صنوبر نروژی در شرایط مود خالص (آ) I (ب) II



نمودار (۵) $\alpha_i^\theta - \varphi$ برای صنوبر قرمز در شرایط مود خالص (آ) I (ب) II

بود و در غیر این صورت انرژی لازم برای تغییر صفحات رشد در داخل ماتریس خواهد بود که باعث چرخش ترک و رشد در جهت الیاف می‌گردد.

۶- مطالعه ضرایب استحکام‌بخش با روش المان محدود

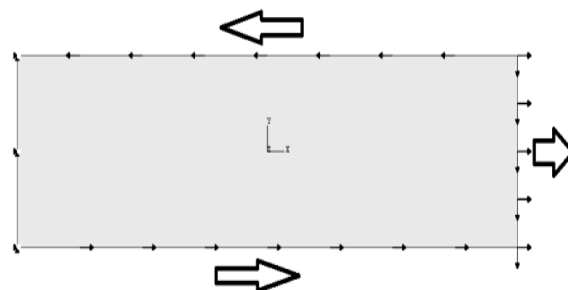
در این مطالعه دو جسم با ابعاد یکسان و تحت بارگذاری یکسان در نرم‌افزار تجاری المان محدود مدل شده‌اند. تنها تفاوت ۲ جسم در جنس آنها است طوری که قطعه اول از جنس کامپوزیت که به صورت تک‌لایه و قطعه دوم از جنس ماتریس کامپوزیت قطعه اول و به صورت ایزوتروپ مدل می‌شوند. از آنجا که در تئوری مکانیک شکست فرض اصلی بر پایه همگن و پیوسته بودن جسم است، به هنگام مدل‌سازی در نرم‌افزار هم این فرض رعایت شده است. همچنین ۲ جسم در حالت کرنش صفحه‌ای مدل شده‌اند. با توجه به اینکه هدف محاسبه توزیع تنش با توجه به جنس مواد مورد مطالعه می‌باشد، لذا قطعات در شرایط کنترل جابجایی مدل شده‌اند.

بدین منظور جابجایی ثابتی به ۲ نمونه اعمال می‌شود و مقدار هر ۳ تنش در راستای الیاف، عمود بر الیاف و تنش برشی در این قطعات گزارش می‌شود که نسبت این ۲ همان ضرایب استحکام‌بخش خواهد بود.

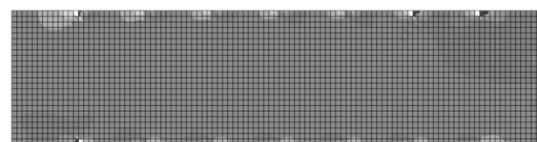
در ادامه مدل هندسی و بارگذاری دو نمونه شرح داده خواهد شد.

مدل هندسی

از آنجا که محاسبات به‌دست‌آمده در حالت کرنش صفحه‌ای بود، در مدل‌سازی المان محدود نیز این ویژگی رعایت شده و یک نمونه مستطیلی با ابعاد $8 \times 25 \times 100$ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. شکل ۱۰ قطعه مورد نظر و نحوه بارگذاری و شکل ۱۱ مش‌بندی قطعه در نرم‌افزار آباکوس (Abaqus) را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰) نحوه بارگذاری



شکل ۱۱) مش‌بندی جسم

جنس قطعه‌ها

برای مطالعه ضرایب استحکام‌بخش از مواد چوبی که به شدت ارتوتروپ هستند، با خواص داده شده در مراجع [12, 13] که شامل صنوبر نروژی، صنوبر قرمز و کاج اسکاتلندی است، استفاده می‌شود. در مدل المان محدود ساخته شده برای قطعات چوبی، مدول یانگ در حالت ایزوتروپ ضریب الاستیسیته در جهت عمود بر الیاف فرض شده و ضریب پواسون از میانگین ضرایب پواسون در جهت

الیاف و عمود بر الیاف به دست آمده است. وجود الیاف در راستای ۱ باعث شده وقتی جسم در راستای ۲، یا عمود بر الیاف، کشیده می‌شود قطعه در راستای ۱ کرنش قابل توجهی نداشته باشد. همچنین با توجه به اینکه جسم حالت شبه ترد دارد پس باید ضریب پواسون آن بین ضریب پواسون مواد نرم و ترد باشد، بنابراین در نظر گرفتن ضریب پواسون حالت ایزوتروپ چوب به صورت میانگین ν_{12} و ν_{21} می‌تواند فرض درستی تلقی گردد. به این ترتیب ویژگی تمامی مواد به کار رفته به عنوان ماده ایزوتروپ در جدول ۱ ذکر می‌گردد.

بعد از مدل‌سازی و اعمال جابجایی به اندازه ۱۰ میلی‌متر در راستای ۱ و ۲ برای ۳ نمونه چوبی، نتایج ضرایب استحکام‌بخش در جدول ۲ گزارش شده است.

جدول ۱) خواص مکانیکی نمونه‌های چوبی به عنوان ماده ایزوتروپ

نمونه‌ها	$E (GPa)$	$\nu = (\nu_{12} + \nu_{21})/2$
صنوبر نروژی	۰/۸۱	۰/۲۰۳
صنوبر قرمز	۰/۶۳	۰/۲۲۰
کاج اسکاتلندی	۱/۱۰	۰/۲۵۱

جدول ۲) ضرایب استحکام‌بخش حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار المان محدود

نمونه‌ها	(...) _۱	(...) _۲	(...) _۳
صنوبر نروژی	۱۱/۴۷۸	۱/۰۰۶	۰/۹۳۳
صنوبر قرمز	۱۵/۹۴۸	۱/۰۰۹	۰/۹۰۴
کاج اسکاتلندی	۷/۷۹۰	۱/۰۱۱	۰/۸۸۷

۷- بررسی نتایج

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از روش‌های رست و ایست برای مدل‌سازی مفهوم جامد ایزوتروپ تقویت‌شده می‌پردازیم. از آنجا که در مدل کاست نیاز است که ضرایب شدت تنش بحرانی در حالت ایزوتروپ به دست آید و برای مواد چوبی این مکان وجود ندارد که ماتریس به طور جداگانه بررسی گردد، تنها ضرایب استحکام‌بخش ارائه‌شده از روش‌های رست و ایست در جدول برای مقایسه گردآوری شده است. رابطه‌های ضریب استحکام‌بخش در راستای الیاف، ξ_1 یا η_1 و عمود بر الیاف، ξ_2 یا η_2 ، در روش‌های ایست و رست با یکدیگر برابرند. تنها اختلاف ۲ روش در روابط مربوط به تنش برشی است که بارزترین اختلاف ξ_3 یا η_3 در وجود کسر حجمی الیاف یا مقدار حجم ماتریس است که در اثر نیروی برشی اعمال می‌شود.

مقادیر ضرایب استحکام‌بخش محاسبه شده از روش‌های رست و ایست برای ۳ نمونه چوب صنوبر نروژی، صنوبر قرمز و کاج اسکاتلندی با مقادیر به‌دست‌آمده از روش المان محدود برای حالتی که الیاف و ترک در یک راستا قرار دارند در جدول ۴ مقایسه شده‌اند. در این محاسبات مقدار کسر حجمی الیاف برای نمونه‌های چوبی از مرجع [25] استخراج شده است.

اختلاف بین ضریب استحکام‌بخش عمود بر الیاف حاصل از روش المان محدود و روش ایست و رست کمتر از یک درصد و ضریب ξ_1 یا η_1 کمتر از ۱۰٪ است. این مقادیر نشان‌دهنده صحیح بودن این روابط است گرچه مشاهده می‌شود که ضرایب استحکام‌بخش در راستای الیاف نیاز به اصلاح دارند. اختلاف ضرایب ξ_3 یا η_3 محاسبه شده با روش‌های تئوری با آنچه از المان محدود به دست آمده بسیار زیاد است. مقادیر به‌دست‌آمده از روش ایست بیش‌تر از ۵۰٪ با ضریب حاصل از المان محدود اختلاف دارد. این در حالی است که این اختلاف با استفاده از روش رست در چوب‌های صنوبر

ترتیب که در نظر گرفته شد ترک در بستر ماتریس ایزوتروپی رشد می‌کند که تحت اثر الیاف مقدار تنش کمتری را تحمل می‌کند. بنابراین با استفاده از نگرش میکرو در انتخاب المان حجمی منتخب بین تنش‌های ماده ارتوتروپ و ماتریس ایزوتروپ مقید شده با الیاف ارتباط برقرار شد که روش حاصل، رست نامیده شد. در این روش علاوه بر اینکه خواص ماده در تقویت ماده ماتریس تأثیر دارند اثبات شد که میزان الیاف موجود در کامپوزیت در تحمل بار برشی اثر قابل توجهی دارد. سپس با استفاده از روش ایست که تعمیم یافته روش تقویت سفتی ون درپوت بود و ضرایب استحکام بخش در حالتی که ترک و الیاف در یک راستا نیستند، به دست آمد که نتایج مشابهی با ضرایب رست داشت. در واقع تنها اختلاف موجود در ضریب استحکام بخش برشی بود. در ادامه با بررسی قطعه ایزوتروپ و ارتوتروپ در المان محدود و مقایسه مقادیر به دست آمده نتیجه گرفته شد که ضرایب رست بیشترین نزدیکی را با فیزیک مسئله دارند.

همچنین برای بررسی بیشتر ضرایب استحکام بخش از ایده نسبت تنش‌های متناظر ماتریس ایزوتروپ و ماده ارتوتروپ نیز استفاده شد (روش کاست). در ادامه با بررسی قطعات در حالت خارج از محور نتیجه گرفته شد که ضرایب استحکام بخش در زاویه‌های مختلف نسبت به نوک ترک متفاوت است. همچنین اشاره شد که با استفاده از این روش تغییرات چقرمگی ماده در زاویه‌های مختلف را می‌توان به دست آورد. علاوه بر این ثابت کردیم که با داشتن چقرمگی شکست مود I و II ماتریس ایزوتروپ می‌توان چقرمگی شکست مود I و II ماده ارتوتروپ با همان ماتریس را در زاویه‌های مختلف قرارگیری ترک نسبت به الیاف به دست آورد.

تشکر و قدردانی: نویسندگان مراتب تقدیر و تشکر خود را از دانشگاه تهران بخاطر حمایت مالی در انجام این تحقیق اعلام می‌دارند.

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: حنا منافی فرید (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ مهدی فکور (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)

منابع مالی: این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه تهران و با گرنت شماره ۲۸۶۸۶/۰۱/۰۱ صورت پذیرفته است.

پی‌نوشت فهرست علائم

A	مساحت المان منتخب (m^2)
C	مولفه‌های نرمی ماده ارتوتروپ (m^2/N)
E	مدول کششی الاستیک (N/m^2)
F	نیروی وارد بر المان منتخب (N)
f, g	تابع زاویه‌ای میدان تنش ماده ایزوتروپ مربوط به مود I و II بارگذاری
G	مدول برشی الاستیک (N/m^2)
n	ضریب استحکام بخش ون درپوت
K	ضریب شدت تنش ($Pa\sqrt{m}$)

نروژی و قرمز به ۲۰٪ رسیده است. اگرچه این اختلاف قابل توجه است اما نسبت به ضرایب حاصل از سفتی اختلاف بسیار کمتری دارند که انتظار می‌رود نتایج بهتری نیز داشته باشد.

جدول ۳) مقایسه ضرایب استحکام بخش روش رست و ایست برای ترکی که در راستای الیاف قرار دارد

ضرایب استحکام بخش	$(\dots)_1$	$(\dots)_2$	$(\dots)_3$
رست	$\frac{E_{11}}{E_{22}}$	۱	$(1 - V_f) \left(1 + \frac{E_{11}(1 + \nu_{21})}{E_{22}(1 + \nu_{12})} \right)$
ایست	$\frac{E_{11}}{E_{22}}$	۱	$\frac{E_{11}}{2E_{22}} \left(1 + \frac{(1 + \nu_{21})}{(1 + \nu_{12})} \right)$

جدول ۴) مقایسه عددی ضرایب استحکام بخش

	ξ_1 یا η_1	ξ_2 یا η_2	ξ_3 یا η_3
صنوبر نروژی			
المان محدود	۱۱/۴۷۸	۱/۰۰۶	۰/۹۳۳
ایست	۱۲/۶۹۴	۱	۱/۷۴۴
رست	۱۲/۶۹۴	۱	۱/۱۸۷
صنوبر قرمز			
المان محدود	۱۵/۹۸۴	۱/۰۰۹	۰/۹۰۴
ایست	۱۷/۵۲۲	۱	۲/۶۶۰
رست	۱۷/۵۲۲	۱	۱/۵۴۹
کاج اسکاتلندی			
المان محدود	۷/۷۸۶	۱/۰۱۱	۰/۸۸۷
ایست	۱۲/۱۵۶	۱	۳/۴۳۳
رست	۱۲/۱۵۶	۱	۱/۱۴

با توجه به مطالعات انجام گرفته شده می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر ضرایب استحکام بخش به خواص مکانیکی مسیری که ترک در آن رشد می‌کند و مقدار الیاف بستگی دارند. همچنین با مقایسه مقادیر به دست آمده از روش‌های ایست و رست و المان محدود در جدول ۴ نتیجه گرفته می‌شود که ضرایب استحکام بخش از روش رست قادر هستند که میزان تنش تحمل شده توسط ماتریس ایزوتروپ نسبت به ماده ارتوتروپ را با دقت بالاتری بیان کنند. با توجه به داده‌های حاصل از ضرایب استحکام بخش به دست آمده از روش رست و ایست مقدار ξ_1 و ξ_3 با فاصله گرفتن از زاویه صفر درجه مقدارشان به صورت نزولی کمتر می‌شود؛ چرا که به طور مستقیم خواص ماده در حالت خارج از محور کمتر از حالت روی محور است. طبق تعریف و ایده اصلی روش رست که نسبت تنش اعمالی به ماتریس را نشان می‌دهد، از کاهش مقادیر ضرایب استحکام بخش به دست آمده از روش رست نتیجه گرفته می‌شود که ماتریس رفته رفته تنش بیشتری را تحمل می‌کند. این روند در رویکرد ایست نیز مشاهده می‌شود. البته طبق کارهای انجام گرفته توسط فکور و همکاران [22, 26] و همچنین ضرایب استحکام بخش حاصل از روش نسبت تنش‌های متناظر (نمودارهای ۴ تا ۶) مشخص می‌شود که افزایش تنش وارد شده به ماتریس در زوایای بین ۳۰ تا ۶۰ درجه به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در حقیقت علاوه بر اینکه باید خواص الاستیک ماده و میزان الیاف در تعیین ضرایب استحکام بخش مورد توجه قرار گیرد، باید در نظر گرفته شود که این ضرایب در زوایای مختلف متفاوت هستند و در مسیرهای مختلفی که ترک در آنها رشد می‌کند اثرات متفاوتی خواهند داشت.

۸- جمع‌بندی

در این مقاله با توجه به مفهوم جامد ایزوتروپ تقویت شده برای بررسی رفتار شکست مواد ارتوتروپ تئوری جدید ارائه شد. به این

mode crack growth in anisotropic media. Engineering Fracture Mechanics. 1989;34(2):337-346.

11- Erdogan F, Sih GC. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. Journal of Basic Engineering. 1963;85(4):519-525.

12- Jernkvist LO. Fracture of wood under mixed mode loading: I. Derivation of fracture criteria. Engineering Fracture Mechanics. 2001;68(5):549-563.

13- Jernkvist LO. Fracture of wood under mixed mode loading; II. Experimental investigation of Picea abies. Engineering Fracture Mechanics. 2001;68(5):565-576.

14- Buczek MB, Herakovitch CT. A normal stress criterion for crack extension direction in orthotropic composite materials. Journal of Composite Materials. 1985;19(6):544-553.

15- Zare Hosseinabadi S, Fakoor M, Rafiee R. Extension of maximum tensile stress criterion to mixed mode fracture of orthotropic materials considering T-stress. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(10):292-300. [Persian]

16- Gowhari Anaraki AR, Fakoor M. General mixed mode I/II fracture criterion for wood considering T-stress effects. Material & Design. 2010;31(9):4461-4469.

17- Gowhari Anaraki AR, Fakoor M. Mixed mode fracture criterion for wood based on a reinforcement microcrack damage model. Materials Science and Engineering: A. 2010;527(27-28):7184-7191.

18- Gowhari Anaraki AG, Fakoor M. A new mixed-mode fracture criterion for orthotropic materials, based on strength properties. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2011;46(1):33-44.

19- Fakoor M, Khansari NM. Mixed mode I/II fracture criterion for orthotropic materials based on damage zone properties. Engineering Fracture Mechanics. 2016;153:407-420.

20- van der Put TACM. A new fracture mechanics theory for orthotropic materials like wood. Engineering Fracture Mechanics. 2007;74(5):771-781.

21- Tsai SW, Hahn HT. Introduction to Composite Materials. Lancaster, Pennsylvania: Technomic Publishing Company; 1980. p. 65-77.

22- Fakoor M, Rafiee R, Sheikhsari M. The influence of fiber-crack angle on the crack tip parameters in orthotropic materials. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2017;231(3):418-431.

23- Williams ML. On the stress distribution at the base of a stationary crack. Journal of Applied Mechanics. 1956;24(1):109-114.

24- Sih GC, Paris PC, Irwin GR. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. International Journal of Fracture Mechanics. 1965;1(3):189-203.

25- Brundstrom J. Micro and ultrastructural aspects of Norway spruce tracheids: a review. IAWA Journal. 2001;22(4):333-353.

26- Fakoor M, Rafiee R. Transition angle, a novel concept for predicting the failure mode in orthotropic materials. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2013;227(10):2157-2164.

V	کسر حجمی
w	عرض المان منتخب (m)
علامه یونانی	
σ, τ	تنش (N/m^2)
α	ضریب استحکام بخش کاست
γ	زاویه برش
Δ	تغییر طول المان منتخب در اثر نیروی برشی (m)
ε	کرنش
η	ضریب استحکام بخش ایست
θ	زاویه قطبی
μ	پارامتر مختلط
ν	ضریب پواسون ماده
ξ	ضریب استحکام بخش رست
φ	زاویه بین ترک و الیاف
بالانویسها	
...	خواص مربوط به ماده ارتوتروپ
زیرنویسها	
f	فایبر
I, II	مود ۱ و ۲ بارگذاری
Ic, IIc	مود ۱ و ۲ خالص یا بحرانی بارگذاری
ij	جهت‌های ۱ و ۲ در مواد کامپوزیتی
m	ماتریس

منابع

- 1- Cotterell B. The past, present, and future of fracture mechanics. Engineering Fracture Mechanics. 2002;69(5):533-553.
- 2- Wu EM. Application of fracture mechanics to anisotropic plates. Journal of Applied Mechanics. 1967;34(4):967-974.
- 3- McKinney JM. Mixed-mode fracture of unidirectional graphite/epoxy composites. Journal of Composite Materials. 1972;6(1):164-166.
- 4- Hunt DG, Croager WP. Mode II fracture toughness of wood measured by a mixed-mode test method. Journal of Material Science Letters. 1982;1(2):77-79.
- 5- Mall S, Murphy JF, ASCE M, Shottafer JE. Criterion for mixed mode fracture in wood. Journal of Engineering Mechanics. 1983;109(3):680-690.
- 6- Reiterer A, Sinn G, Stanzl-Tschegg SE. Fracture characteristics of different wood species under mode I loading perpendicular to the grain. Material Science and Engineering A. 2002;332(1-2):29-36.
- 7- Saouma VE, Ayari ML, Leavell DA. Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids. Engineering Fracture Mechanics. 1987;27(2):171-184.
- 8- Carloni C, Nobile L. Maximum circumferential stress criterion applied to orthotropic materials. Fatigue & amp: Fracture of Engineering Materials and Structures. 2005;28(9):825-833.
- 9- Nobile L, Piva A, Viola E. On the inclined crack problem in an orthotropic medium under biaxial loading. Engineering Fracture Mechanics. 2004;71(4-6):529-546.
- 10- Gdoutos EE, Zacharopoulos DA, Meletis EI. Mixed-