



Nonlinear Free Vibration Analysis of Composite Plate in Car Body of High Speed Trains

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Nezami R.¹ MSc,
Ghazanfari M.*¹ MSc

How to cite this article

Nezami R, Ghazanfari M. Nonlinear Free Vibration Analysis of Composite Plate in Car Body of High Speed Trains. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(12):2955-2964.

ABSTRACT

Vibration analysis of the plate is an important topic in high-speed train body design. Because of the dynamic loads on plates which are used in the wagon body of the train, vibration analysis and determination of the amount of deflection and bending of the structure is important in wagon design. A plate which is used in the high-speed train is composite plate. Composite plates are considered because of many advantages relative to the other plates, such as low weight, high strength and cost-effective. In this paper, the nonlinear free vibration analysis of the used plate in the wagon body of high-speed trains has been presented. First, a three layers sandwich plate used for car body of high-speed trains has been transformed into a single layer equivalent orthotropic plate. Von-Karman theory and the Galerkin method have been employed to solving the equations of motion of the equivalent orthotropic plate. The nonlinear natural frequencies of the first four modes of the system have been determined using the numerical and variational iteration methods (VIM). Then the effect of different parameters on the value of nonlinear frequencies of the first four modes has been studied. The Difference lower than 0.1% is observed between the determined natural frequencies by VIM, with initial condition limited to zero, and natural frequencies determined by linear vibration. The results show that natural frequency is increased by increasing elasticity modulus of the face, the thickness of the core and the thickness of the face of the sandwich plate. In addition, because of nonlinearity of plate vibration equations, natural frequencies of composite plate are increased by increasing initial condition.

Keywords Nonlinear Free Vibration; Car Body of High Speed Trains; Equivalent Orthotropic Plate; Variational Iteration Method (VIM)

CITATION LINKS

[1] Optimal stiffness design of composite laminates for a train carbody by an expert system and enumeration method [2] Nonlinear vibration of simply supported angle ply laminated plates [3] Non-linear flexural vibrations of orthotropic rectangular plates [4] Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model [5] Large-amplitude vibration of non-homogeneous orthotropic composite truncated conical shell [6] Nonlinear free vibration analysis of a plate-cavity system [7] Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory [8] Nonlinear vibrations of rectangular laminated composite plates with different boundary conditions [9] Application of Laplace Iteration method to Study of Nonlinear Vibration of laminated composite plates [10] Nonlinear forced vibration of hybrid composite rectangular plates [11] A light weight car body for high speed trains [12] A study on the low-velocity impact response of laminates for composite railway bodyshells [13] Numerical and experimental studies on the deformational behavior a composite train carbody of the Korean tilting train [14] Manufacturing and structural safety evaluation of a composite train carbody [15] Analysis of the composite structure of tilting train express (TTX) [16] Evaluation and optimization of orthotropic sandwich plate systems with regard to global deflection, Finite element simulation and analytical evaluation [17] Thin plates and shells: theory: analysis, and applications [18] Vibration of plates: DTIC Document [19] Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples [20] Partial differential equations and solitary waves theory: Berlin

¹Railway Rolling Stock Engineering Department, School of Railway Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: School of Railway Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran. Postal code: 1684613114
Phone: +98 (21) 77240545
Fax: +98 (21) 77491030
m.ghazanfari@rail.iust.ac.ir

Article History

Received: May 5, 2018

Accepted: May 26, 2019

ePublished: December 21, 2019

تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق کامپوزیت در بدنه قطارهای پرسرعت

رضا نظامی MSc

گروه مهندسی ماشین‌های ریلی، دانشکده مهندسی راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

محسن غضنفری* MSc

گروه مهندسی ماشین‌های ریلی، دانشکده مهندسی راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

تحلیل ارتعاشات ورق از موضوعات مهم در زمینه طراحی بدنه واگن قطار پرسرعت است. سازه مورد استفاده در بدنه واگن قطار تحت بارهای دینامیکی قرار می‌گیرند، به همین خاطر تحلیل ارتعاش آن و به دست آوردن میزان خیز و خمش سازه در طراحی آن مورد اهمیت است. ورق کامپوزیتی به خاطر مزایای زیاد نسبت به سایر ورق‌ها همچون وزن کم، استحکام بالا و چه از لحاظ صرفه اقتصادی مورد توجه هستند. در این مقاله به تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق بدنه واگن مورد استفاده در قطارهای پرسرعت پرداخته شده است. ابتدا ورق ساندویچی سه لایه مورد استفاده در بدنه واگن قطارهای پرسرعت را به یک ورق تک‌لایه ارتوتروپیک معادل تبدیل کرده و معادلات حرکت ورق ارتوتروپ معادل را با استفاده از تئوری ون-کارمن مدل و از روش گالرکین حل شده و فرکانس‌های غیرخطی چهار مود اول سیستم را با استفاده از روش‌های VIM و حل عددی به دست آمده است، در پایان نیز اثر پارامترهای مختلف ورودی مساله روی فرکانس‌های غیرخطی ۴ مود اول بررسی شده است. از مقایسه فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش VIM با شرایط اولیه نزدیک به صفر نسبت به ارتعاشات خطی اختلاف کمتر از ۰/۱٪ مشاهده می‌شود. از نتایج حاصل شده مشاهده می‌شود که با افزایش مدول الاستیسیته رویه و افزایش ضخامت رویه و هسته ورق ساندویچی فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. همچنین به دلیل غیرخطی‌بودن معادلات ارتعاشی ورق، با افزایش شرایط اولیه، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند.

کلیدواژه‌ها: ارتعاشات آزاد غیرخطی، بدنه واگن قطارهای پرسرعت، ورق ارتوتروپیک معادل، روش VIM

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۲/۱۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۳/۰۵

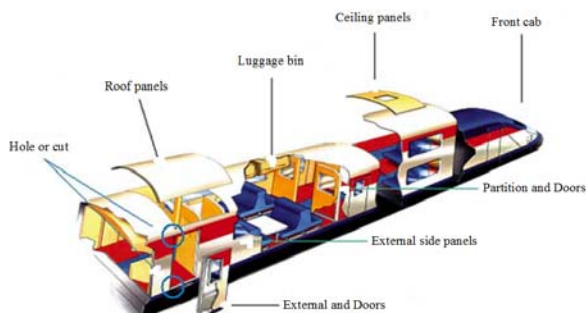
*نویسنده مسئول: m_ghazanfari@rail.iust.ac.ir

۱- مقدمه

از آنجایی که سازه‌های موجود در صنایع مختلف همانند هوافضا، راه‌آهن، خودرو و غیره همیشه تحت بارهای دینامیکی هستند، تحلیل و ارتعاشات این سازه‌ها و بررسی میزان خمش، خیز و تغییر شکل آن‌ها بسیار حائز اهمیت است و یکی از مهمترین مسائلی که در طراحی بدنه واگن قطار پرسرعت وجود دارد ارتعاشات بدنه واگن است. به منظور طراحی بهینه چه از لحاظ اقتصادی و چه از لحاظ دید مهندسی یعنی داشتن یک ماده با سختی بالا، افزایش عمر خستگی، افزایش تحمل نسبت به آسیب، خصوصیات حرارتی و مقاومت سایشی با داشتن وزن پایین استفاده از کامپوزیت‌ها بسیار مهم است. مطالعات زیادی در زمینه ارتعاشات ورق‌ها و همچنین استفاده از این ورق‌ها در صنایع مختلف و راه‌آهن در سال‌های اخیر انجام گرفته است و با توجه کاربرد زیاد کامپوزیت‌ها امروزه صنایع به این سمت در حرکت است. این موضوع در صنعت حمل و نقل ریلی حائز اهمیت است و کاربرد وسیعی در راه‌آهن دارد از جمله آن استفاده از کامپوزیت‌ها در بدنه واگن‌ها، سقف واگن‌ها، دماغه جلوی کابین، درهای داخل واگن و قسمت‌های جداکننده داخلی، درها و پنل‌های بیرونی، محفظه داخلی مخصوص وسایل مسافران و سایر قسمت‌های دیگر قطار مطابق شکل ۱ به کار می‌رود.

در این تحقیق به تحلیل ارتعاشات ورق مورد استفاده در قطارهای پرسرعت پرداخته شده است و تحلیل ارتعاشات ورق بدنه واگن قطار

در طراحی و ساخت بدنه واگن و همچنین از منظر راحتی سفر و کاهش نویز داخلی واگن و تحلیل اکوستیکی محفظه داخل واگن حائز اهمیت است. ارتعاش ورق در سال‌های اخیر هم به صورت تحلیلی و هم به صورت آزمایشگاهی و نرم‌افزاری روش اجزای محدود مدل‌شده و فرکانس‌ها و مدهای مختلف ورق به دست آمده است [1].



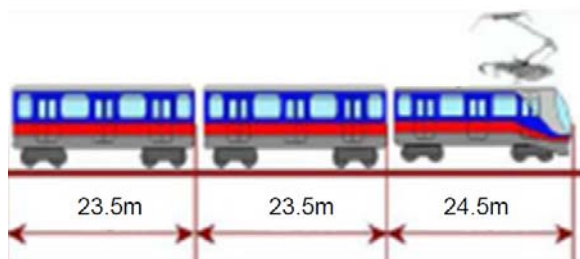
شکل ۱) قسمت‌های کامپوزیتی به کار رفته در قطار پرسرعت [1]

بنت [2] در سال ۱۹۷۱ به بررسی نوسانات با دامنه بزرگ در ورق‌ها با شرایط مرزی ساده پرداخت. او نشان داد که استفاده از تقریب برگر نتایج دقیقی را به دست نمی‌دهد و به جای آن باید از روابط مربوط به تئوری ون‌کارمن استفاده کرد. وی نشان داد که در حل تک‌مود سیستم در حالت خمش و کشش ترم‌های غیرخطی سیستم به صورت مستقیم بر دامنه فرکانس وارد نمی‌شود. اما در صورتی که فرکانس خطی سیستم را در معادلات تأثیر دهیم ترم‌های غیرخطی مؤثر واقع شده و بر درجات غیرخطی سیستم اثر می‌گذارند. پراهاکارا و چپا [3] به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مستطیل شکل ارتوتروپیک در شرایط مرزی مختلف ساده و گیردار پرداختند. آن‌ها در بررسی خود از معادلات ون‌کارمن استفاده کردند. به منظور حل سیستم در حالتی که شرایط مرزی را ارزا کند از سری دوتایی که ضرایب آن توابعی از زمان هستند استفاده کرد. معادلات مدهای مختلف سیستم را با استفاده از تابع فوریه کسینوسی بسط دادند و سپس فرکانس‌های غیرخطی سیستم را برای مدهای مختلف شیشه‌اپوکسی، بوراپوکسی و گرافیت‌اپوکسی به صورت عددی محاسبه کردند. آن‌ها موفق به دستیابی به نتایج بسیار دقیقی برای فرکانس‌های غیرخطی ورق‌های ارتوتروپیک خصوصاً ورق‌های با ضرایب بزرگ شدند.

دی‌سیو [4] با استفاده از تئوری ون‌کارمن معادلات حرکت ورق‌های ارتوتروپیک را استخراج کرد. وی با مقایسه نتایج به دست آمده در بررسی خود با نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته، تئوری کلاسیک ورقه‌ورقه‌شدن (کریشهف) و تئوری تغییر شکل برشی (تیموشنکو و میندلین) دقت عملکردی روش خود را نشان داد.

سوفیه [5] به مطالعه ارتعاش دامنه بلند لایه کامپوزیتی ارتوتروپیک غیرهمگن به شکل مخروط ناقص پرداخته است. در این مطالعه فرض شده است که مدول‌های یانگ و چگالی مواد ارتوتروپیک در طول جهت ضخامت به طور نمایی تغییر کنند. معادلات اولیه برای پوشش کامپوزیتی ارتوتروپیک غیرهمگن به شکل مخروط ناقص با استفاده از تئوری انحراف محدود با سینماتیک غیرخطی نوع ون‌کارمن-دائل به دست می‌آید. و سپس این معادلات با استفاده از اصل برهم‌نهی، گالرکین و روش‌های نیمه معکوس حل می‌گردند و روابط دامنه فرکانس به دست می‌آید. صدری و بونسیان [6] ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق را در یک سیستم دارای کوپلینگ سازه‌ای-اکوستیکی بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از تئوری ون‌کارمن و روش

طراحی اولیه بدنه قطار بدون قاب داخلی محافظ بود. با این حال در طول نتایج صحت‌سنجی تغییر شکل پوسته بدنه در طول بارگذاری عمودی بیش از حد فرض شده بود. به منظور تقویت سازه قاب‌های داخلی در طرفین، سقف و انتهای سازه بدنه قطار جا داده می‌شود. قطار TTX دارای ۴ واگن کشنده و ۲ واگن تریلر و سرعت ۲۰۰ کیلومتر بر ساعت است که در شکل ۲ به نمایش درآمده است. المان‌های ساختار ساندویچی شامل کربن اپوکسی برای رویه‌ها و هسته آلومینیوم لانه‌زنبوری برای هسته می‌باشد. کل بدنه از یک ساختار واحد تولید شده است. یعنی در یک مقیاس بزرگ سرهم‌بندی شده و بهم چسبیده شده است. ابتدا رویه بیرونی روی سطح پخش شده است، سپس فرم داخلی و هسته زنبوری روی پوسته بیرونی گذاشته شده است. هسته و پوسته به وسیله یک فیلم چسب بهم چسبیده‌اند. چسب بر رویه داخلی کشیده شده است. در نهایت کل سازه بعد از هواگیری توسط کیسه خلأ مناسب سر هم شده است. بدین وسیله با ساخت کل بدنه قطار به عنوان سازه، لینک‌های ضعیف بین پنل‌ها قابل صرف نظر است و تنها لینک ضعیف باقیمانده بین بدنه بالایی و قاب زیرین است. ساختار ساندویچی وزن بدنه بالایی قطار در مقایسه با بدنه فولاد ضد زنگ تا ۳۹ درصد کاهش داده است. وزن کل شامل قاب زیرین تا ۲۸ درصد کاهش داده است.[11]



شکل ۲) شماتیک قطار TTX [11]

۲-۲- ساختار ساندویچی TTX

ساختار ساندویچی قطار TTX شامل یک رویه داخلی و بیرونی رزین گرافیت اپوکسی و هسته داخلی لانه‌زنبوری آلومینیوم است که در جدول ۱ و شکل ۳ نشان داده شده است. خواص ماده برای اجزای مختلف سازه ساندویچی TTX در جدول ۲ نمایش داده شده است.[12-15]

۲-۳- تبدیل سازه ساندویچی

در این تحقیق برای تحلیل ارتعاشی سازه بدنه قطار پرسرعت، از بدنه ساندویچی استفاده می‌شود ما برای این کار بدنه ساندویچی ۳ لایه را به تک‌لایه ورق ارتوتروپیک معادل طبق شکل ۴ تبدیل می‌کنیم. برای تبدیل به ورق ارتوتروپیک معادل از دو روش استفاده می‌شود ۱- تبدیل بر اساس تغییر شکل بار محوری (Transformation based on Axial Load Deformation; TALD) ۲- تبدیل بر اساس صلبیت خمشی ثابت (Transformation based on Constant Flexural Rigidity; TCFR). این دو روش به طور کلی خیلی شبیه به هم هستند که در نحوه به‌دست‌آوردن ثابت‌های الاستیسیته با همدیگر متفاوت می‌باشند. روش اول بر اساس یک تعادل نیرو ساده و روش دوم محاسبه ثوابت الاستیک بر اساس تعادل خمشی است. صحت این فرض قبلاً از طریق روش المان محدود و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس برای مواد مختلف به کار رفته در رویه و هسته انجام گرفته است. شبیه‌سازی برای جسم و پوسته به صورت جداگانه در نظر گرفته شده و با محاسبه خم

گالرکین معادلات حرکت سیستم را به دست آوردند. برای حل معادلات غیرخطی از روش (Variational iteration VIM method) و تعادل هارمونیک استفاده کردند. یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی مشخصات دینامیکی سیستم‌های دارای کوپلینگ سازه‌ای- آکوستیکی ارائه کرده‌اند. در ابتدا مدل ریاضی در نظر گرفته شده برای سیستم مورد نظر، معرفی می‌شود. مدل مورد نظر از یک ورق انعطاف‌پذیر با طول a ، عرض b و ضخامت h تشکیل شده و این سازه با یک محفظه آکوستیکی به عمق c که دارای o دیواره صلب می‌باشد، در ارتباط است. برای مدل‌سازی ارتعاش پنل انعطاف‌پذیر، معادله ون‌کارمن به کار گرفته شده است. به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی و پاسخ سیستم موردنظر در ارتعاشات آزاد، از روش حل VIM استفاده شده است.

ردی و فان^[7] برای حل فرکانس‌های طبیعی ورق‌های لمینت، ایزوتروپیک و ارتوتروپیک از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده کردند. آمابیلی و همکاران^[8] با استفاده از روش پیزو ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیلی کامپوزیت با شرایط مرزی مختلف را مطالعه کردند. رفیعی‌پور و همکاران^[9] با استفاده از روش لاپلاس به مطالعه ارتعاش غیرخطی ورق‌های کامپوزیت لمینت پرداختند. آن‌ها در مدل خود از تئوری ون‌کارمن استفاده کردند. شوشتری و رضوی^[10] ارتعاشات اجباری ورق‌های مستطیلی کامپوزیت هیبریدی را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی استفاده کردند و از روش گالرکین برای به‌دست‌آوردن معادلات غیرخطی معمولی در ترم‌های زمانی مجهول استفاده کردند. در این مقاله ورق کامپوزیت را که در اینجا یک ورق ساندویچی ۳ لایه است، با یک ورق ارتوتروپیک معادل مدل شده است که این کار می‌تواند با ۲ روش تغییر شکل بار محوری و صلبیت خمشی ثابت انجام گیرد. سپس به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ارتوتروپ معادل پرداخته می‌شود و فرکانس‌های طبیعی غیرخطی ۴ مود اول سیستم به دست می‌آید، برای معادلات حرکت ورق از تئوری ون‌کارمن استفاده نموده و برای حل آن از روش گالرکین استفاده شده است. محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرخطی از روش حل تحلیلی تکرار تغییرات VIM و حل عددی رانژ کوتاه استفاده شده است. در انتها نیز به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی غیرخطی پرداخته شده است.

۲- تعریف مسئله

۲-۱- قطار پرسرعت کرهای TTX

خطوط قطار در کره به خاطر داشتن کوه‌های منطقه دارای منحنی‌های زیادی است. محدودیت سرعت بالا در قطارهای قدیمی و تعمیر و نگهداری آن باید در قطارهای پرسرعت روی خطوط قدیمی لحاظ شود. برای کاهش ریسک واژگون‌شدن در منحنی‌ها در قطار پرسرعت و کاهش عدم راحتی مسافران از نیروهای گریز از مرکز، قطار پرسرعت TTX توسعه یافته است. سازه به کار رفته در قطارهای پرسرعت پنل ساندویچی است که شامل دو رویه و یک هسته است. ساختار ساندویچی قطار شامل یک رویه داخلی و بیرونی رزین گرافیت اپوکسی و هسته داخلی لانه‌زنبوری آلومینیوم است. برای کاهش سایش و گسیختن روی خطوط، بالای بدنه قطار TTX از سازه ساندویچی همراه با قاب داخلی محافظ دور پنجره‌ها، درها و سایر جای خالی‌ها ساخته شده است. قاب زیرین از فولاد ضد زنگ ساخته شده که دارای مرکز جرم پایین به منظور داشتن پایداری در طول منحنی‌ها است. قاب زیرین فولادی همچنین باعث افزایش سختی در برابر خمش کلی می‌شود.

$$\begin{aligned} A_{11}^I &= H^I \cdot W \\ A_{11}^B &= H^B \cdot W \end{aligned} \quad (۳)$$

با جایگذاری نسبت‌های موجود در رابطه (۴) در معادله (۲) داریم:

$$\alpha_T = \frac{H^T}{H}, \quad \alpha_I = \frac{H^I}{H}, \quad \alpha_B = \frac{H^B}{H}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^T \cdot \alpha_T + \sigma_{11}^I \cdot \alpha_I + \sigma_{11}^B \cdot \alpha_B \quad (۴)$$

با تقسیم رابطه (۴) بر ε_{11} داریم:

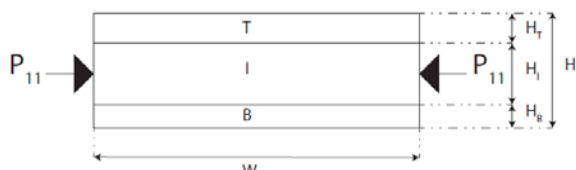
$$\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\sigma_{11}^T}{\varepsilon_{11}} \cdot \alpha_T + \frac{\sigma_{11}^I}{\varepsilon_{11}} \cdot \alpha_I + \frac{\sigma_{11}^B}{\varepsilon_{11}} \cdot \alpha_B \quad (۵)$$

تبدیل بر اساس تغییر شکل بار محوری برای مدول E_{11} داریم:

$$E_{11} = E_{11}^T \cdot \alpha_T + E_{11}^I \cdot \alpha_I + E_{11}^B \cdot \alpha_B \quad (۶)$$

و به طور مشابه برای E_{22} داریم:

$$E_{22} = E_{22}^T \cdot \alpha_T + E_{22}^I \cdot \alpha_I + E_{22}^B \cdot \alpha_B \quad (۷)$$



شکل (۴) تبدیل ورق ساندویچی به ورق تک‌لایه معادل بر اساس بار محوری [16]

۳- معادلات حاکم

در این قسمت به استخراج معادلات حاکم بر ورق‌های کامپوزیتی پرداخته می‌شود. طبق روابط موجود در قسمت ۲-۴ از معادله ورق ارتوروپیک معادل استفاده می‌گردد. کلیه محاسبات بر پایه معادله ون کارمن که معادله حاکم بر ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی می‌باشد انجام گرفته است. در این مدل، ضخامت ورق h ، عرض b و طول a می‌باشد. ضخامت رویه بالایی یا پایینی و هسته طبق جدول ۱، ۵ و ۳۷ میلی‌متر است و کلیه پارامترهای مکانیکی ورق معادل با توجه به فرمول‌های قسمت ۲-۴ در جدول ۳ آمده است. معادلات ارتعاشی حاکم بر ورق کامپوزیتی معادل به صورت زیر می‌باشد [17]:

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 W(x,y,t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial^4 W(x,y,t)}{\partial x^4 \partial y^4} + \\ D_y \frac{\partial^4 W(x,y,t)}{\partial y^4} = h \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\left[A_y \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + A_{xy} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_x \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right] = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (۹)$$

در معادله (۹) $A_x = \frac{1}{E_x}$ ، $A_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x}$ ، $A_y = \frac{1}{E_y}$ می‌باشد. با جایگذاری مقادیر در معادله (۹) داریم:

$$\left[E_x \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left(\frac{E_x E_y}{G_{xy}} - 2\nu_{xy} E_y \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right] = E_x E_y \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (۱۰)$$

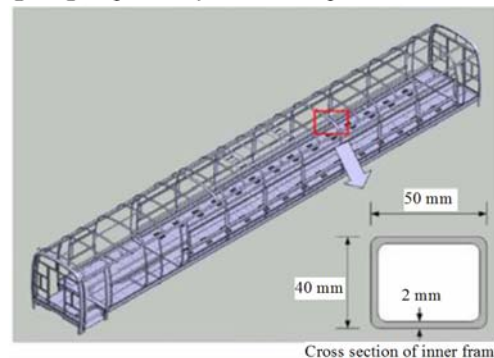
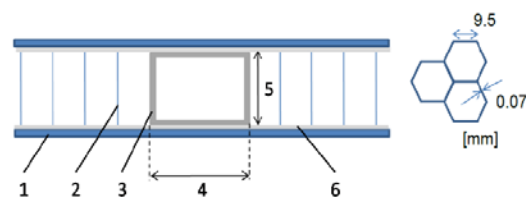
جدول (۳) پارامترهای ورق ارتوتروپ معادل [17]

$۳۸۳/۷۲ \text{ Kg/m}^3$	ρ	$۱۱/۸۵ \text{ GPa}$	E_x
۳ m	a	$۱۱/۳۵ \text{ GPa}$	E_y
$۲/۵ \text{ m}$	b	$۳/۰۸ \text{ GPa}$	G_{xy}
۴۷ mm	h	$۰/۷۹۹$	θ

ورق، صحت‌سنجی هر دو روش تبدیل ورق به ورق ارتوتروپ معادل نسبت به ورق مرجع برای المان جسم و پوسته به صورت جداگانه در نرم‌افزار آباکوس شبیه‌سازی شده است که در آن نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که نمودارهای حاصل از خمش بر حسب طول در هر دو روش به حالت مرجع اصلی نزدیک هستند که روش صلبیت خمشی دارای دقت بیشتری است [16]. در این مقاله از روش بار محوری برای تبدیل ورق چندلایه به یک ورق ارتوتروپ تک‌لایه معادل استفاده شده است.

جدول (۱) اجزاء تشکیل‌دهنده ورق ساندویچی [15]

شماره	اجزاء	جنس	ضخامت (میلی‌متر)
۱	رویه	گرافیت-اپوکسی	۵/۵-۳/۱
۲	هسته	لانه‌زنبوری آلومینیومی	۳۷
۳	فریم داخلی	فولاد	۲
۴ و ۵	فضای خالی	-	۴۰ و ۵۰
۶	چسب	-	-



شکل (۳) ساختار ورق ساندویچی به کار رفته در سازه واگن [12, 13]

جدول (۲) خصوصیات اجزاء تشکیل‌دهنده ورق ساندویچی [15]

خصوصیات ورق ساندویچی	رویه (گرافیت-اپوکسی)	هسته (لانه‌زنبوری)
$E_1 \text{ (GPa)}$	۵۵/۵	۰/۱۷
$E_2 \text{ (GPa)}$	۴۸/۳	۰/۱۷
ν_{12}	۰/۰۹۹	۰/۹۹۶
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	۱۶۰۰	۵۵

۴-۲ تبدیل به روش TALD

برای محاسبه مدول یانگ E_{11} و E_{22} ورق را همانند شکل ۴ بارگذاری می‌کنیم. محاسبه مدول معادل بر اساس روش کسی‌ژو در سال ۲۰۰۲ می‌باشد. بار فرضی در جهت x است و بار در همه لایه‌ها تقسیم شده است. در شکل ۴، T لایه بالایی و I لایه وسط و B لایه زیرین می‌باشد [16].

$$\sigma_{11} \cdot A_{11} = \sigma_{11}^T \cdot A_{11}^T + \sigma_{11}^I \cdot A_{11}^I + \sigma_{11}^B \cdot A_{11}^B \quad (۱)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^T \cdot \frac{A_{11}^T}{A_{11}} + \sigma_{11}^I \cdot \frac{A_{11}^I}{A_{11}} + \sigma_{11}^B \cdot \frac{A_{11}^B}{A_{11}} \quad (۲)$$

که

$$\begin{aligned} A_{11} &= H \cdot W \\ A_{11}^T &= H^T \cdot W \end{aligned}$$

$$E_y \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^2 \cos[\alpha_r] \cos[\beta_s] (\beta_s^2)^2 \phi_{r,s}[t] = E_x E_y \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \cos[\alpha_n] \cos[\beta_m] \alpha_n \beta_m W_{m,n}[t] \right)^2 - \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sin[\alpha_n] \sin[\beta_m] \alpha_n^2 W_{m,n}[t] \right) \times \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sin[\alpha_n] \sin[\beta_m] \beta_m^2 W_{m,n}[t] \quad (17)$$

$$(\Omega_{mn}^2 W_{m,n}[t] + \ddot{W}_{m,n}[t]) \sin[\alpha_n x] \sin[\beta_m y] = h \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (\sin[\alpha_n] \sin[\beta_m]) \beta_m^2 W_{m,n}[t] \right) \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^2 \cos[\alpha_r] \cos[\beta_s] \alpha_r^2 \phi_{r,s}[t] \right) - 2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \cos[\alpha_n] \cos[\beta_m] \alpha_n \beta_m W_{m,n}[t] \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^2 \sin[\alpha_r] \sin[\beta_s] \alpha_r \beta_s \phi_{r,s}[t] + \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 -(\sin[\alpha_n] \sin[\beta_m]) \alpha_n^2 W_{m,n}[t] \right) \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^2 -\cos[\alpha_r] \cos[\beta_s] \beta_s^2 \phi_{r,s}[t] \right) \quad (18)$$

با ضرب طرفین در $\sin[\alpha_n] \sin[\beta_m]$ و با توجه به قضیه تعامد و انتگرالگیری از طرفین پاسخ سیستم برای مودها به دست می‌آید.

$$\ddot{W}_{11}[t] + \Omega_{11}^2 W_{11}[t] + \mu_{11}^{11} W_{11}[t]^3 + \mu_{41}^{11} W_{11}[t] W_{12}[t]^2 + \mu_{51}^{11} W_{11}[t] W_{21}[t]^2 + \mu_{71}^{11} W_{12}[t] W_{21}[t] W_{22}[t] = 0$$

$$\ddot{W}_{12}[t] + \Omega_{12}^2 W_{12}[t] + \mu_{31}^{12} W_{12}[t]^3 + \mu_{41}^{12} W_{12}[t] W_{11}[t]^2 + \mu_{51}^{12} W_{12}[t] W_{21}[t]^2 + \mu_{61}^{12} W_{12}[t] W_{22}[t]^2 + \mu_{71}^{12} W_{11}[t] W_{21}[t] W_{22}[t] = 0$$

$$\ddot{W}_{21}[t] + \Omega_{21}^2 W_{21}[t] + \mu_{31}^{21} W_{21}[t]^3 + \mu_{41}^{21} W_{21}[t] W_{11}[t]^2 + \mu_{51}^{21} W_{21}[t] W_{12}[t]^2 + \mu_{61}^{21} W_{21}[t] W_{22}[t]^2 + \mu_{71}^{21} W_{11}[t] W_{12}[t] W_{22}[t] = 0$$

$$\ddot{W}_{22}[t] + \Omega_{22}^2 W_{22}[t] + \mu_{51}^{22} W_{22}[t] W_{12}[t]^2 + \mu_{61}^{22} W_{22}[t] W_{21}[t]^2 + \mu_{71}^{22} W_{11}[t] W_{12}[t] W_{21}[t] = 0 \quad (19)$$

۴- روش حل

۴-۱. حل معادلات غیرخطی ارتعاشاتی ورق کامپوزیتی با روش

VIM

به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی و پاسخ سیستم مورد نظر معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت یک سیستم به طور کلی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Lu + Nu = g(t) \quad (20)$$

که در این رابطه L اپراتور خطی و N اپراتور غیرخطی می‌باشد. $g(t)$ منبع غیرهمگن می‌باشد. حل معادله غیرخطی در رابطه (۲۰) با استفاده از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \{Lu_k(\tau) + N\tilde{u}_k(\tau) - g(\tau)\} d\tau \quad (21)$$

که در رابطه (۲۱)، λ ضریب لاگرانژ می‌باشد که با استفاده از حساب تغییرات به صورت بهینه می‌تواند تعیین گردد و یک تغییر محدود شده است که به معنی $\delta \tilde{u}_k = 0$ می‌باشد. اکنون کاملاً

که در معادله (۱۰)، $G_{xy} = \frac{E_x E_y}{E_x + E_y (1 + 2\sqrt{v_x v_y})} \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{v_x v_y})}$ می‌باشد. D_y, D_x, H ضرایب استحکام خمشی ورق‌های ارتوتروپیک هستند که در رابطه (۱۰)، E مدول الاستیسیته، ρ چگالی سطحی و ϕ تابع تنش ایری می‌باشد که با توجه به شکل و ساختار ورق مورد نظر مقداری متفاوت دارند.

$$D_x = E_x \frac{h^3}{12}, D_y = E_y \frac{h^3}{12}, D_{xy} = \frac{E_x \nu_y h^3}{12}, D_s = G_{xy} \frac{h^3}{12}$$

$$H = D_{xy} + 2D_s, E_e = \frac{E_x E_y}{G_{xy}} - 2\nu_x E_y \quad (11)$$

با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در تمام لبه‌های ورق، شرایط مرزی به شکل زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\begin{aligned} x = 0, a \Rightarrow & \begin{cases} W = 0, M_x = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0, \int_0^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = 0 \end{cases} \\ y = 0, b \Rightarrow & \begin{cases} W = 0, M_y = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0, \int_0^a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

با استفاده از روش گالرکین پاسخ جابه‌جایی ورق و همچنین تابع تنش ایری را می‌توان به صورت رابطه (۱۳) بسط داد:

$$W[x, y, t] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}[t] \sin[\alpha_n x] \sin[\beta_m y] \quad (13)$$

$$\alpha_n = n \frac{\pi}{a}; \quad \beta_m = m \frac{\pi}{b};$$

$$\phi[x, y, t] = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{rs}[t] \cos[\alpha_r x] \cos[\beta_s y] \quad (14)$$

$$\alpha_r = r \frac{\pi}{a}; \quad \beta_s = s \frac{\pi}{b}$$

برای به دست آوردن فرکانس طبیعی خطی ترم‌های غیرخطی بایستی برابر صفر قرار داده شود. با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۸) و استفاده از جدایی متغیرها، رابطه (۱۵) حاصل می‌گردد [18].

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 ((D_x \alpha^4 + 2H \alpha^2 \beta^2 + D_y \beta^4) W_{mn}[t] + \rho \ddot{W}) \sin[\alpha_n x] \sin[\beta_m y] = 0 \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 ((D_x \alpha^4 + 2H \alpha^2 \beta^2 + D_y \beta^4) W_{mn}[t] - \rho \Omega_{mn}^2 W_{mn}[t]) \sin[\alpha_n x] \sin[\beta_m y] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

مقدار فرکانس خطی ورق کامپوزیت به صورت رابطه (۱۶) است:

$$\Omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho}} \sqrt{D_x n^4 + 2H m^2 n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + D_y m^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4} \quad (16)$$

حال با جایگذاری مقادیر $m=2, n=1$, $m=1, n=2$, $m=n=1$ و $m=n=2$ مقادیر فرکانس طبیعی خطی ورق کامپوزیت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Omega_{11} = 46 \text{ و } \Omega_{12} = 81/9 \text{ و } \Omega_{21} = 120.34 \text{ و } \Omega_{22} = 183.96$$

با قراردادن رابطه (۱۳) و (۱۴) در رابطه (۸) و (۹) رابطه (۱۷) و (۱۸) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E_x \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^2 \cos[\alpha_r] \cos[\beta_s] (\alpha_r^2)^2 \phi_{r,s}[t] + E_e \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^2 \cos[\alpha_r] \cos[\beta_s] \alpha_r^2 \beta_s^2 \phi_{r,s}[t] + \end{aligned}$$

مشخص است که گام‌های اصلی روش تکرار متغیر در ابتدا نیازمند تعیین ضریب لاگرانژ $\lambda(\tau)$ است که می‌تواند به صورت بهینه تعیین گردد. انتگرال‌گیری جزئی معمولاً برای تعیین ضریب لاگرانژ کلی $\lambda(\tau)$ استفاده می‌شود به عبارت دیگر:

$$\int \lambda(\tau) u'_k(\tau) d\tau = \lambda(\tau) u_k(\tau) - \int \lambda'(\tau) u_k(\tau) d\tau$$

$$\int \lambda(\tau) u''_k(\tau) d\tau = \lambda(\tau) u'_k(\tau) - \lambda'(\tau) u_k(\tau) + \int \lambda''(\tau) u_k(\tau) d\tau \quad (۲۲)$$

رابطه (۲۲) می‌تواند با انتگرال‌گیری جزئی به دست آیند. با مشخص شدن ضریب لاگرانژ کلی $\lambda(\tau)$ تقریب‌های متوالی u_{k+1} , $k \geq 0$ برای جواب u با استفاده از هر تابعی انتخابی u_0 به دست می‌آیند. در نتیجه، جواب قابل تعیین است:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (۲۳)$$

به عبارت دیگر تصحیح تابعی رابطه (۲۱) چندین تقریب خواهد داد و در نتیجه جواب دقیق به عنوان تقریب‌های متوالی به دست خواهد آمد^[19, 20]. حال می‌توان از معادله بازگشتی روش VIM برای مود اول و به شکل زیر استفاده نمود:

$$(W_{11}(t))_{k+1} = (W_{11}(t))_k + \int_0^t \frac{1}{\Omega_{11}} \sin[\Omega_{11}(\tau - t)] \{ (W''_{11}(\tau))_k + \Omega_{11}^2 (W_{11}(\tau))_k + \mu_3^{11} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k^3 + \mu_4^{11} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k (\tilde{W}_{12}(\tau))_k^2 + \mu_5^{11} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k^2 + \mu_7^{11} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{22}(\tau))_k \} d\tau \quad (۲۴)$$

با در نظر گرفتن تغییرات دو طرف تساوی در معادله اخیر و همچنین با فرض تغییرات محدود (Restricted Variation) برای ترم‌های غیرخطی، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\delta(W_{11}(t))_{k+1} = \delta(W_{11}(t))_k + \lambda_{11} \delta(W'_{11}(\tau))_k|_{\tau=t} - \lambda'_{11} \delta(W_{11}(\tau))_k|_{\tau=t} + \int_0^t [\lambda_{11}] \delta(W_{11}(\tau))_k d\tau \quad (۲۵)$$

و در نتیجه برای شرایط بدون تغییر (Stationary) ضریب لاگرانژ عبارت خواهد بود از:

$$\begin{cases} \lambda''_{11}(\tau) + \Omega_{11}^2 \lambda_{11}(\tau) = 0 \\ 1 - \lambda'_{11}(\tau)|_{\tau=t} = 0 \\ \lambda_{11}(\tau)|_{\tau=t} = 0 \end{cases} \quad (۲۶)$$

روند مشابهی را همچنین می‌توان برای معادلات مربوط به موده‌های دیگر در نظر گرفت و نتایج زیر را استخراج نمود:

$$\lambda_{11}(\tau) = \frac{1}{\Omega_{11}} \sin[\Omega_{11}(\tau - t)]$$

$$\lambda_{12}(\tau) = \frac{1}{\Omega_{12}} \sin[\Omega_{12}(\tau - t)]$$

$$\lambda_{21}(\tau) = \frac{1}{\Omega_{21}} \sin[\Omega_{21}(\tau - t)]$$

$$\lambda_{22}(\tau) = \frac{1}{\Omega_{22}} \sin[\Omega_{22}(\tau - t)] \quad (۲۷)$$

حال با جایگذاری ضرایب لاگرانژ به دست آمده برای معادلات، در رابطه بازگشتی (۲۱) معادلات زیر قابل دستیابی هستند:

$$(W_{11}(t))_{k+1} = (W_{11}(t))_k + \int_0^t \frac{1}{\Omega_{11}} \sin[\Omega_{11}(\tau - t)] \{ (W''_{11}(\tau))_k + \Omega_{11}^2 (W_{11}(\tau))_k + \mu_3^{11} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k^3 + \mu_4^{11} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k (\tilde{W}_{12}(\tau))_k^2 + \mu_5^{11} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k^2 + \mu_7^{11} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{22}(\tau))_k \} d\tau$$

$$(W_{12}(t))_{k+1} = (W_{12}(t))_k + \int_0^t \frac{1}{\Omega_{12}} \sin[\Omega_{12}(\tau - t)] \{ (W''_{12}(\tau))_k + \Omega_{12}^2 (W_{12}(\tau))_k +$$

$$\mu_3^{12} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k^3 + \mu_4^{12} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{11}(\tau))_k^2 + \mu_5^{12} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k^2 + \mu_6^{12} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{22}(\tau))_k^2 + \mu_7^{12} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{22}(\tau))_k \} d\tau$$

$$(W_{21}(t))_{k+1} = (W_{21}(t))_k + \int_0^t \frac{1}{\Omega_{21}} \sin[\Omega_{21}(\tau - t)] \{ (W''_{21}(\tau))_k + \Omega_{21}^2 (W_{21}(\tau))_k + \mu_3^{21} (\tilde{W}_{21}(\tau))_k^3 + \mu_4^{21} (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{11}(\tau))_k^2 + \mu_5^{21} (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{12}(\tau))_k^2 + \mu_6^{21} (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{22}(\tau))_k^2 + \mu_7^{21} (\tilde{W}_{11}(\tau))_k (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{22}(\tau))_k \} d\tau$$

$$(W_{22}(t))_{k+1} = (W_{22}(t))_k + \int_0^t \frac{1}{\Omega_{22}} \sin[\Omega_{22}(\tau - t)] \{ (W''_{22}(\tau))_k + \Omega_{22}^2 (W_{22}(\tau))_k + \mu_5^{22} (\tilde{W}_{22}(\tau))_k (\tilde{W}_{12}(\tau))_k^2 + \mu_6^{22} (\tilde{W}_{22}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k^2 + \mu_7^{22} (\tilde{W}_{12}(\tau))_k (\tilde{W}_{21}(\tau))_k (\tilde{W}_{11}(\tau))_k \} d\tau \quad (۲۸)$$

به منظور استفاده از روابط بازگشتی (۲۸) برای معادلات حاکم بر سیستم، ابتدا باید یک تقریب اولیه برای پاسخ سیستم در نظر گرفته شود. در صورتی که شرایط اولیه برای مسأله به صورت زیر باشند:

$$\begin{cases} W_{11}(0) = A_{11}, & W'_{11}(0) = 0 \\ W_{12}(0) = A_{12}, & W'_{12}(0) = 0 \\ W_{21}(0) = A_{21}, & W'_{21}(0) = 0 \\ W_{22}(0) = A_{22}, & W'_{22}(0) = 0 \end{cases} \quad (۲۹)$$

می‌توان تقریب‌های اولیه زیر را که شرایط اولیه (۲۹) را ارضا نموده‌اند در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} (W_{11}(t))_0 &= A_{11} \cos \alpha_{11} t \\ (W_{12}(t))_0 &= A_{12} \cos \alpha_{12} t \\ (W_{21}(t))_0 &= A_{21} \cos \alpha_{21} t \\ (W_{22}(t))_0 &= A_{22} \cos \alpha_{22} t \end{aligned} \quad (۳۰)$$

بعد از جایگذاری معادلات (۳۰) در معادلات (۲۸) برای حل و به دست آوردن فرکانس‌های غیرخطی شرط لازم جهت جلوگیری از پدیده تشدید باید لحاظ گردد. پس در هر یک از ۴ معادله غیرخطی نیاز است ترم‌های وابسته برابر صفر قرار گیرند. بدین ترتیب برای هر یک از ۴ معادله غیرخطی (۲۸)، فرکانس‌های غیرخطی مربوطه حاصل می‌شوند.

۵- صحت‌سنجی و نتایج

بعد از حل معادلات ارتعاشی ورق ارتوتروپ معادل یعنی معادلات موده‌های ارتعاشی ورق موجود در رابطه (۲۸) و حذف ترم‌های وابسته آن و مقداردهی به معادلات و جایگذاری ضرایب از طریق مقداردهی به شرایط اولیه مقادیر فرکانس‌های غیرخطی به دست می‌آید. سپس پاسخ سیستم برای موده‌های اول تا چهارم ترسیم می‌گردد.

نتایج به دست آمده معادلات ODE ورق برای فرکانس‌های غیرخطی سیستم با استفاده از روش VIM در جدول ۴ ارائه شده است. نتایج مذکور برای شرایط اولیه مختلف (دامنه‌های مختلف ارتعاشات موده‌های سیستم) به دست آمده‌اند. همان‌طور که در جدول ۴ آمده است مشاهده می‌شود که در شرایط اولیه نزدیک به صفر پاسخ و مقدار فرکانس‌های غیرخطی به فرکانس‌های خطی نزدیک می‌شود. همچنین ملاحظه می‌گردد که مقدار فرکانس‌های غیرخطی ۴ مود بسیار وابسته به مقادیر شرایط اولیه هستند و در شرایط اولیه متفاوت پاسخ متفاوتی دارند که این نشان‌دهنده حساس بودن فرکانس‌ها به شرایط اولیه است.

۵-۱- تحلیل سیستم و تأثیر پارامترهای مختلف روی فرکانس طبیعی سیستم

در قسمت‌های قبل معادلات حرکت سیستم و پاسخ آن به دست آمده است. همچنین فرکانس‌های سیستم برای ۴ مود اول تعیین شده است. حال با توجه به روابط به‌دست‌آمده به تحلیل فرکانسی سیستم و تأثیر پارامترهای مختلف روی آن پرداخته می‌شود.

۵-۱-۱- تأثیر مدول الاستیسیته رویه ورق کامپوزیتی روی فرکانس طبیعی

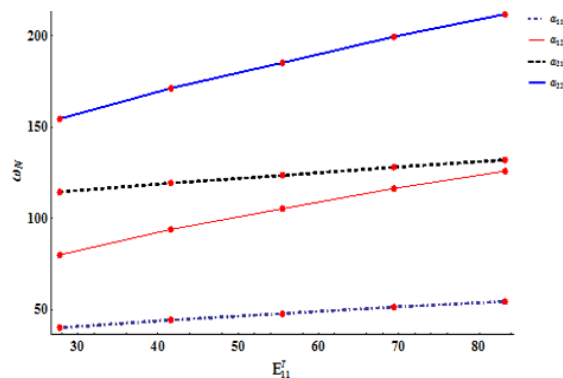
در این بخش به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های سیستم برای ۴ مود اول در دامنه‌های $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0.01$ پرداخته می‌شود.

تأثیر تغییر مدول الاستیسیته رویه در جهت X

در جدول ۵ مقادیر فرکانس مدهای مختلف به ازای مقادیر مختلف مدول رویه آمده است، همچنین در نمودار ۲ مشاهده می‌گردد، با افزایش مدول الاستیسیته رویه ورق کامپوزیت در جهت X فرکانس افزایش می‌یابد. علت این امر این است که با افزایش مدول الاستیسیته رویه، مدول معادل کل در جهت X افزایش یافته و باعث افزایش صلبیت خمشی سیستم و در نتیجه منجر به افزایش ضریب فنریت K سیستم شده و در نتیجه فرکانس سیستم برای مدهای اول تا چهارم افزایش می‌یابد.

جدول ۵) فرکانس‌های سیستم بر حسب مدول الاستیسیته رویه در جهت X

۸۳/۲۵	۶۹/۳۸	۵۵/۵	۴۱/۶۲	۲۷/۷۵	E_{11}^f
۵۴/۴۲	۵۱/۳۰	۴۷/۷۳	۴۴/۲۰	۳۹/۹۸	α_{11}
۱۲۵/۹۰	۱۱۶/۳۲	۱۰۵/۲۵	۹۳/۸۹	۷۹/۹۴	α_{12}
۱۳۱/۹۹	۱۲۸	۱۲۳/۵۱	۱۱۹/۳۰	۱۱۴/۴۲	α_{21}
۲۱۱/۹۳	۱۹۹/۵۵	۱۸۵/۲۹	۱۷۱/۳۱	۱۵۴/۴۷	α_{22}



نمودار ۲) تأثیر تغییرات مدول الاستیسیته رویه در جهت X روی فرکانس

تأثیر تغییر مدول الاستیسیته رویه در جهت Y

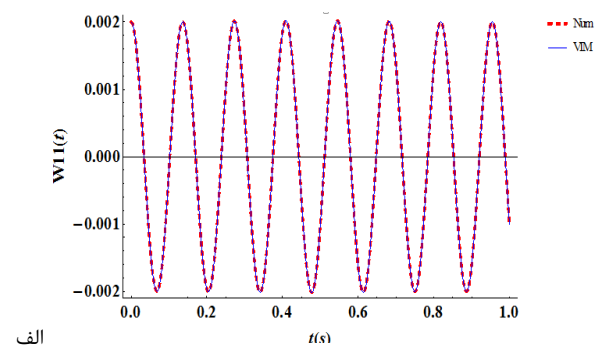
همان‌طور که در جدول ۶ و نمودار ۳ مشاهده می‌شود با افزایش مدول رویه در جهت Y، مدول معادل کل در جهت Y افزایش و در نتیجه باعث افزایش صلبیت خمشی سیستم شده و ضریب فنریت k سیستم افزایش می‌یابد و موجب افزایش فرکانس در هر ۴ مود می‌گردد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در نمودار ۲ فرکانس مود سوم یعنی α_{11} و در نمودار ۳ فرکانس مود دوم یعنی α_{12} تقریباً به صورت خطی هستند و با افزایش مدول الاستیسیته افزایش نسبی کمی دارند و این امر به خاطر شکل مدهای دوم و سوم ورق می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۵ ملاحظه می‌گردد مود دوم ($n=2, m=1$) شکل مود، تغییر شکل و خیز آن در جهت X و مود سوم ($n=1, m=2$) شکل

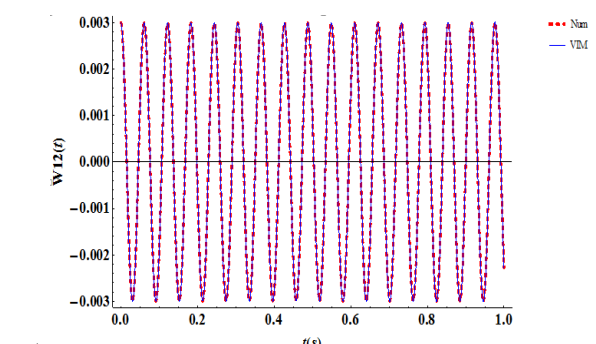
جدول ۴) فرکانس‌های غیرخطی سیستم از روش VIM

شرایط اولیه				روش VIM			
A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}
۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳
۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳

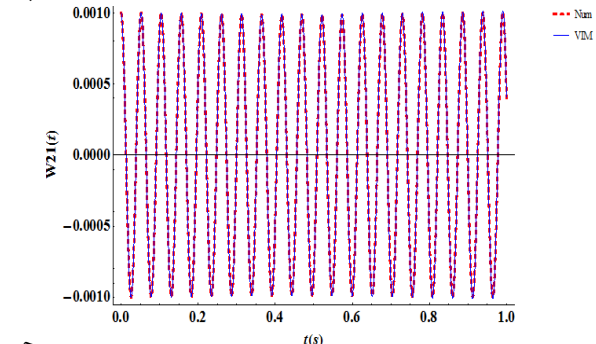
حال پاسخ سیستم بر حسب فرکانس نسبت به زمان در نمودار ۱ برای مدهای اول تا چهارم برای روش‌های VIM و رانژ کوتا ترسیم می‌گردد.



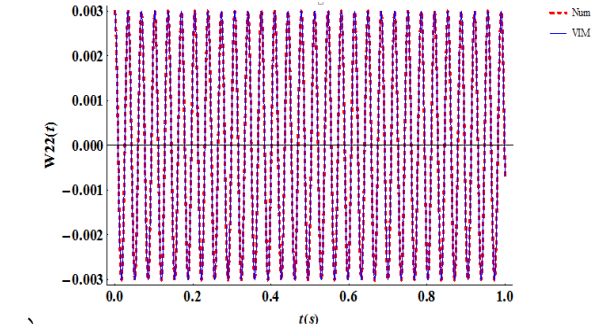
الف



ب

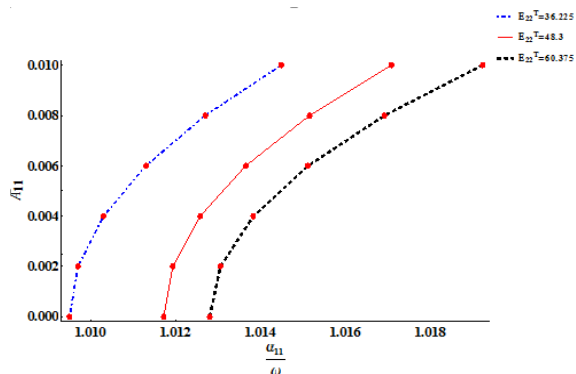


ج



د

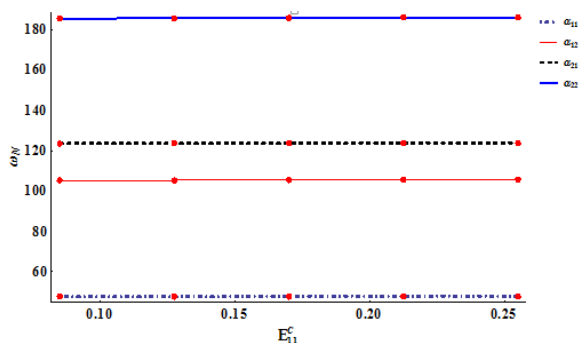
نمودار ۱) پاسخ به‌دست‌آمده سیستم با استفاده از روش VIM و روش رانژ کوتا (الف) مود اول، (ب) مود دوم، (ج) مود سوم، (د) مود چهارم



نمودار (۴) تأثیر تغییرات شرایط اولیه بر فرکانس در مدول الاستیسته مختلف

تأثیر مدول الاستیسته هسته ورق کامپوزیتی روی فرکانس طبیعی

در نمودار ۵ مشاهده می‌گردد با افزایش مدول الاستیسته هسته ورق کامپوزیت در جهت X به خاطر کوچک‌بودن مدول الاستیسته هسته، تغییرات آن نیز زیاد نیست به همین خاطر در مدول معادل کلی تأثیری ندارد و به همین دلیل فرکانس‌های سیستم دچار تغییرات نمی‌شود و تغییرات آن‌ها خطی است. از آنجایی که مدول الاستیسته هسته ورق در جهت‌های X و Y با هم برابر است بنابراین با تغییر مدول الاستیسته هسته چه در جهت X و چه در جهت Y تغییرات فرکانس خطی و تغییرات فرکانس بسیار کم است.



نمودار (۵) تأثیر تغییرات مدول هسته در جهت X بر فرکانس

۵-۱-۲- تأثیر تغییرات ضخامت رویه و هسته ورق کامپوزیت بر فرکانس طبیعی

همان‌طور که در نمودار ۶ مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت رویه که به نسب آن ضخامت هسته کم می‌شود و ضخامت کل ثابت می‌ماند، مدول الاستیسته معادل در هر دو جهت X و Y طبق فرمول گفته شده در فصل قبل، افزایش می‌یابد. بنابراین مدول خمشی در جهت‌های X و Y افزایش می‌یابد و با افزایش مدول الاستیسته سیستم در دو جهت، انتظار می‌رود که فرکانس‌ها به خاطر افزایش صلبیت خمشی و ضریب فنریت سیستم افزایش زیادی داشته باشند. ولی با تغییر ضخامت رویه، چگالی سیستم نیز تغییر می‌یابد که همین امر باعث کاهش فرکانس سیستم می‌شود. اما در مجموع اثر افزایش مدول الاستیسته معادل در دو جهت X و Y از اثر افزایش چگالی بیشتر است بنابراین فرکانس‌های سیستم در هر ۴ مود افزایش می‌یابد که اثر افزایشی آن در نمودار ۶ قابل مشاهده است.

۵-۱-۳- تأثیر تغییرات شرایط اولیه بر فرکانس طبیعی ضخامت‌های مختلف

بعد از بررسی تغییرات ضخامت بر فرکانس برای ۴ مود سیستم، حال اثر تغییرات دامنه بر فرکانس سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در

مود و تغییر شکل آن در جهت Y است به همین دلیل وقتی مدول در راستای X زیاد می‌شود، تغییرات مود دوم زیاد و مود سوم کم است (نمودار ۲). همچنین با تغییر مدول در جهت Y فرکانس سیستم در آن جهت دچار تغییرات شدیدتر می‌شود و مود دوم زیاد تغییر نمی‌کند (نمودار ۳).

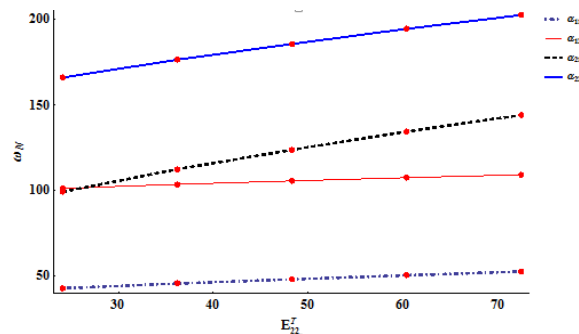
در نمودار ۳ مشاهده می‌شود که در مدول الاستیسته ۲۴/۱۵ Gpa فرکانس مود دوم α_{11} از فرکانس α_{21} بزرگتر است و این به این علت است که در این نقطه، مدول در جهت‌های X و Y برابر است ولی چون طول ورق بیشتر است، اثر طول خود را در شکل مود دوم نشان می‌دهد. چون مود $n=2, m=1$ تغییرات در جهت X است، به همین دلیل مود دوم بزرگتر از مود سوم می‌شود.

تأثیر تغییرات شرایط اولیه روی فرکانس طبیعی در مدول الاستیسته مختلف

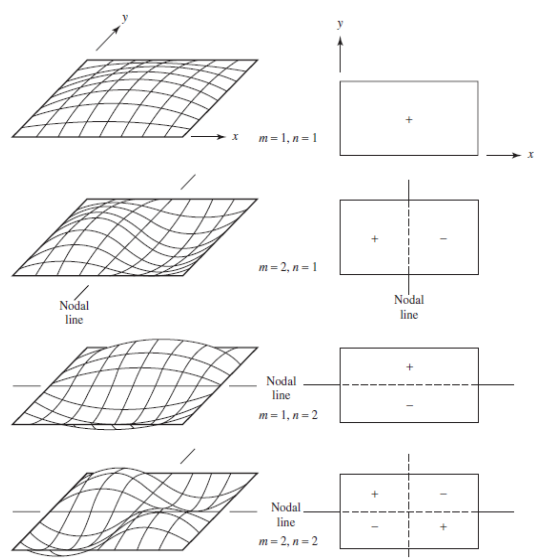
بعد از بررسی تغییرات مدول الاستیسته در جهت‌های X و Y بر فرکانس، حال تغییرات فرکانس در شرایط اولیه مختلف در مدول‌های متفاوت بررسی می‌شود. نمودار ۴ تغییرات فرکانس غیرخطی مود اول در شرایط مختلف دامنه A_{11} را نشان می‌دهد که با افزایش مدول الاستیسته فرکانس افزایش می‌یابد.

جدول (۶) فرکانس‌های سیستم بر حسب مدول الاستیسته رویه در جهت Y

E_{11}^E	۲۴/۱۵	۳۶/۲۲	۴۸/۳	۶۰/۳۸	۷۲/۴۵
α_{11}	۴۲/۵۵	۴۵/۳۶	۴۷/۸۲	۵۰/۱۷	۵۲/۳۳
α_{12}	۱۰۱/۰۸	۱۰۳/۴۲	۱۰۵/۴۳	۱۰۷/۳۳	۱۰۹/۰۵
α_{21}	۹۹/۱	۱۱۲/۳۱	۱۲۳/۶۶	۱۳۴/۴	۱۴۴/۰۵
α_{22}	۱۶۵/۹۸	۱۷۶/۴۸	۱۸۵/۶۸	۱۹۴/۵۳	۲۰۲/۶۱



نمودار (۳) تأثیر تغییرات مدول الاستیسته رویه در جهت Y روی فرکانس



شکل (۵) شکل مدهای یک ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده [18]

افزایش مدول الاستیسیته معادل و چگالی سیستم می‌شود که در نهایت افزایش فرکانس کلی سیستم حاصل شد یعنی به عبارتی اثر مثبت افزایش مدول الاستیسیته نسبت به اثر منفی افزایش چگالی سیستم بر فرکانس کلی سیستم غالب می‌شود. در بخش پایانی نیز تأثیر تغییرات شرایط اولیه روی فرکانس‌های سیستم مورد مطالعه قرار گرفت و ملاحظه می‌شود که با افزایش دامنه، فرکانس‌های سیستم افزایش می‌یابد. همچنین مشخص گردید که حساسیت فرکانس مود اول سیستم نسبت به سایر مدها با افزایش دامنه بیشتر است. طبق معادله ۱۰ و مرجع ۱۷ معادلات حاکم بر ورق ماهیتی غیرخطی دارد و فقط در شرایط اولیه (دامنه) نزدیک به صفر فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی نزدیک می‌شود و همچنین پاسخ سیستم (خیز) به شرایط اولیه حساس است.

در تحلیل خطی صرف نظر از این که مدل چه مقدار تغییر شکل داشته باشد یا اینکه بار به صورت مرحله‌ای یا ناگهانی اعمال گردد و یا این که تنش بسیار زیادی به علت بار وارده در اعضای سازه به وجود آید، مدل همواره سختی اولیه خود را در طول مراحل تحلیل حفظ خواهد کرد. این فرض به مقدار بسیار زیادی، فرمول‌ها و حل مسائل مربوطه را ساده می‌کند. ماتریس سختی (K) به شکل هندسی مدل، خواص فیزیکی مواد تشکیل‌دهنده مدل و مهارها و تکیه‌گاه‌های آن بستگی دارد. برای تحلیل خطی فرض می‌گردد که سختی مدل هرگز تغییر نمی‌کند، سپس این معادله‌ها با فرض ثابت بودن ماتریس سختی تشکیل داده می‌شوند و در حالی که مدل تغییر شکل می‌دهد، بدون نیاز به به‌روزرسانی و تغییر هیچ پارامتری تنها یک بار حل می‌گردند؛ بنابراین تحلیل خطی مسیری مستقیم از فرمول‌های مسئله و حل آن‌ها را دنبال می‌کند. طبق مرجع [17] المان‌ها، رفتار غیرخطی داشته و رفتار سیستم از معادله دیفرانسیلی غیرخطی پیروی می‌کند. عدم لحاظ نمودن آنالیز غیرخطی خطاهای جدی در طراحی منجر خواهد شد لذا مشخص می‌گردد که تحلیل غیرخطی چگونه به طراحی سازه‌های بهینه‌تر خواهد انجامید.

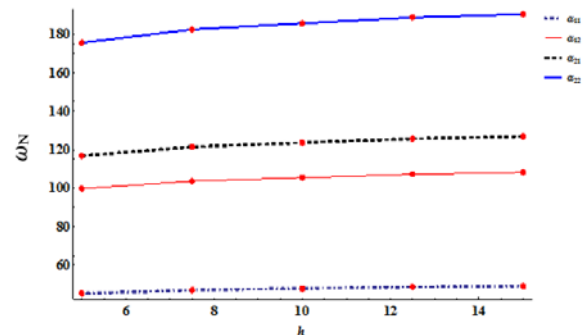
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا فرکانس‌های غیرخطی ۴ مود اول سیستم با روش تحلیلی VIM با شرایط اولیه‌های متفاوت به دست آمد، سپس پاسخ سیستم با حل عددی مورد صحت‌سنجی قرار گرفت. از نتایج حاصله مشاهده می‌گردد که در دامنه‌های پایین جواب فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی نزدیک می‌شود. همچنین در سایر دامنه‌ها مشاهده می‌شود که پاسخ سیستم و فرکانس‌های غیرخطی به شرایط اولیه سیستم حساس و روی مدهای سیستم اثرگذار هستند. بعد از آن به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس پرداخته شد. همان‌طوری که در جداول و نمودارها مشاهده می‌شود پارامترهای مختلف سیستم روی پاسخ سیستم اثرگذار است.

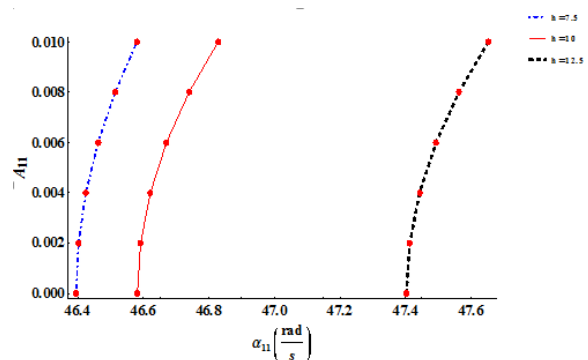
- در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی سیستم باعث بالا رفتن دقت محاسبات شده و حل را از حالت تقریبی خارج و به حل دقیق نزدیک می‌کند.

- با افزایش مدول الاستیسیته رویه در جهت x و y ضریب فنری سیستم افزایش یافته و باعث افزایش فرکانس می‌شود در صورتی که مدول الاستیسیته هسته تأثیر چندانی در فرکانس سیستم ندارد. - مدهای مختلف سیستم با افزایش مدول افزایش می‌یابند ولی افزایش مقدار فرکانس‌های مدهای مختلف تابع شکل مود آن‌ها است و اینکه تغییر در کدام راستا است روی مدها تأثیر گذار است. - افزایش ضخامت رویه (ضخامت کل ثابت) باعث افزایش مدول الاستیسیته معادل و افزایش فرکانس می‌شود ولی با افزایش

نمودار ۷ اثر تغییرات دامنه بر فرکانس در شرایط اولیه مختلف ملاحظه می‌شود که در آن تغییرات شرایط اولیه A_{11} برای فرکانس غیرخطی اول در ضخامت‌های مختلف رسم شده است که با افزایش ضخامت، فرکانس نیز افزایش می‌یابد. همان‌طور که در بخش قبل گفته شد تغییرات فرکانسی به دلیل اثر دوگانه تغییر ضخامت (افزایش سختی و افزایش چگالی) شدید نیست.



نمودار ۶) تأثیر تغییرات ضخامت رویه و هسته بر فرکانس



نمودار ۷) تأثیر تغییرات شرایط اولیه بر فرکانس در ضخامت‌های مختلف

به صورت کلی در این مقاله ابتدا با کمک مقادیر معلوم فرکانس‌های غیرخطی و پاسخ سیستم به دست آورده شده است. برای صحت‌سنجی روابط از دو روش VIM و رانژ کوتا استفاده شده که فرکانس‌های غیرخطی سیستم حاصل می‌شود. همان‌گونه که در مقاله نشان داده شده است در شرایط اولیه نزدیک به صفر، پاسخ سیستم و مقدار فرکانس‌های غیرخطی به فرکانس‌های خطی نزدیک شدند. همچنین ملاحظه گردید که مقدار فرکانس‌های غیرخطی ۴ مود بسیار وابسته به مقادیر شرایط اولیه هستند و در شرایط اولیه متفاوت پاسخ متفاوتی دارند که این نشان‌دهنده حساس بودن فرکانس‌ها به شرایط اولیه است و پاسخ سیستم ما بسیار وابسته به دامنه سیستم است. سپس با توجه به روابط به‌دست‌آمده به تحلیل فرکانسی سیستم و تأثیر پارامترهای مختلف روی آن پرداخته شد. همچنین اثر مدول الاستیسیته رویه ورق کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی بررسی شد و مشخص گردید با افزایش مدول الاستیسیته رویه ورق کامپوزیت فرکانس افزایش می‌یابد. علت این موضوع این است که با افزایش مدول الاستیسیته رویه، مدول معادل کل افزایش یافته و باعث افزایش صلبیت خمشی سیستم و در نتیجه منجر به افزایش ضریب فنری K سیستم شده و در نتیجه فرکانس سیستم برای مدهای اول تا چهارم افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است بر اساس نتایج مدول الاستیسیته هسته بر خلاف مدول الاستیسیته رویه ورق کامپوزیتی تأثیر چندانی در فرکانس سیستم ندارد. در ادامه اثر تغییرات ضخامت رویه و هسته بر فرکانس مطالعه گردید که مشخص شد افزایش ضخامت رویه (ضخامت کل ثابت) باعث

- composite laminates for a train carbody by an expert system and enumeration method. *Composite Structures*. 2005;68(2):147-156.
- 2- Bennett JA. Nonlinear vibration of simply supported angle ply laminated plates. *AIAA Journal*. 1971;9(10):1997-2003.
- 3- Prabhakara MK, Chia CY. Non-linear flexural vibrations of orthotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1977(4);52:511-518.
- 4- Di Sciuva M. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*. 1986;105(3):425-442.
- 5- Sofiyev A. Large-amplitude vibration of non-homogeneous orthotropic composite truncated conical shell. *Composites Part B: Engineering*. 2014;61:365-374.
- 6- Sadri M, Younesian D. Nonlinear free vibration analysis of a plate-cavity system. *Thin-Walled Structures*. 2014;74:191-200.
- 7- Reddy JN, Phan ND. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*. 1985;98(2):157-170.
- 8- Amabili M, Karazis K, Khorshidi K. Nonlinear vibrations of rectangular laminated composite plates with different boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2011;11(4):673-695.
- 9- Rafieipour H, Lotfavar A, Masroori A, Mahmoodi E. Application of Laplace Iteration method to Study of Nonlinear Vibration of laminated composite plates. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013;10(4):781-795.
- 10- Shooshtari A, Razavi S. Nonlinear forced vibration of hybrid composite rectangular plates. *Engineering Solid Mechanics*. 2014;2(3):209-228.
- 11- Wennberg D. A light weight car body for high speed trains. *Vinnova Centre for ECO² Vehicle Design*. 2010.
- 12- Kim JS, Chung SK. A study on the low-velocity impact response of laminates for composite railway bodyshells. *Composite Structures*. 2007;77(4):484-492.
- 13- Kim JS, Jeong JC, Lee SJ. Numerical and experimental studies on the deformational behavior a composite train carbody of the Korean tilting train. *Composite Structures*. 2007;81(2):168-175.
- 14- Kim JS, Lee SJ, Shin KB. Manufacturing and structural safety evaluation of a composite train carbody. *Composite Structures*. 2007;78(4):468-476.
- 15- Kim SH, Kang SG, Kim CG, Shin KB. Anaysis of the composite struture of tilting train eapress (TTX). 2005.
- 16- Anderberg V, Björhag I. Evaluation and optimization of orthotropic sandwich plate systems with regard to global deflection, Finite element simulation and analytical evaluation [Dissertation]. Göteborg, Sweden: Chalmers University of Technology; 2012.
- 17- Ventsel E, Krauthammer T. Thin plates and shells: theory: analysis, and applications. 1st Edition. New York: CRC Press; 2001.
- 18- Leissa AW. Vibration of plates: DTIC Document. Washington DC: NASA Headquarters; 1969 Jun 1. Report No.: NASA-SP-160.
- 19- He JH. Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*. 1999;34(4):699-708.
- 20- Wazwaz AM. Partial differential equations and solitary waves theory: Berlin: Springer; 2010.

ضخامت رویه چگالی سیستم نیز افزایش می‌یافت و باعث کاهش فرکانس می‌شود و این اثرهای معکوس روی فرکانس دارد که در نهایت با افزایش فرکانس کلی سیستم همراه است.

- در نهایت تأثیر تغییرات شرایط اولیه روی فرکانس‌های سیستم بررسی می‌شود و مشاهده می‌شود که حساسیت فرکانس مود اول سیستم نسبت به سایر مودها با افزایش دامنه بیشتر است.

تشکر و قدردانی: نویسندگان این مقاله از کلیه اساتید گروه مهندسی ماشین‌های ریلی، دانشکده مهندسی راه آهن دانشگاه علم و صنعت ایران به دلیل همکاری در انجام بهتر این تحقیق کمال تشکر و قدردانی را دارند.

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج برعهده نویسندگان است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ‌گونه تعارض منافعی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: رضا نظامی (نویسنده اول)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری (۵۰٪)، محسن غضنفری (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)

منابع مالی: این تحقیق هیچ‌گونه منابع مالی دریافت نکرده است.

۷- پیوست

$$\begin{aligned}\mu_{11}^{11} &= \frac{h\pi^4(b^4E_x + a^4E_y)}{16a^4b^4\rho} \\ \mu_{11}^{11} &= \frac{h\pi^4(16a^2b^6E_eE_x + 4b^8E_x^2 + 8a^6b^2E_eE_y + 147a^4b^4E_xE_y + 32a^8E_y^2)}{16a^4b^4\rho(4a^2b^2E_e + b^4E_x + 16a^4E_y)} \\ \mu_{11}^{11} &= \frac{h\pi^4(8a^2b^6E_eE_x + 32b^8E_x^2 + 16a^6b^2E_eE_y + 147a^4b^4E_xE_y + 4a^8E_y^2)}{16a^4b^4\rho(4a^2b^2E_e + 16b^4E_x + a^4E_y)} \\ \mu_{11}^{11} &= \frac{h\pi^4(b^4E_x + a^4E_y)}{2a^4b^4\rho} \\ \mu_{11}^{12} &= \frac{h\pi^4E_x}{a^4\rho} \\ \mu_{11}^{12} &= \frac{h\pi^4(16a^2b^6E_eE_x + 4b^8E_x^2 + 8a^6b^2E_eE_y + 147a^4b^4E_xE_y + 32a^8E_y^2)}{16a^4b^4\rho(4a^2b^2E_e + b^4E_x + 16a^4E_y)} \\ \mu_{11}^{12} &= \frac{81h\pi^4E_xE_y}{16\rho(a^2b^2E_e + b^4E_x + a^4E_y)} \\ \mu_{11}^{12} &= \frac{2h\pi^4E_x}{a^4\rho} \\ \mu_{11}^{12} &= \frac{h\pi^4(b^4E_x + a^4E_y)}{2a^4b^4\rho} \\ \mu_{11}^{21} &= \frac{h\pi^4E_y}{b^4\rho} \\ \mu_{11}^{21} &= \frac{h\pi^4(8a^2b^6E_eE_x + 32b^8E_x^2 + 16a^6b^2E_eE_y + 147a^4b^4E_xE_y + 4a^8E_y^2)}{16a^4b^4\rho(4a^2b^2E_e + 16b^4E_x + a^4E_y)} \\ \mu_{11}^{21} &= \frac{81h\pi^4E_xE_y}{16\rho(a^2b^2E_e + b^4E_x + a^4E_y)} \\ \mu_{11}^{21} &= \frac{2h\pi^4E_y}{b^4\rho} \\ \mu_{11}^{21} &= \frac{h\pi^4(b^4E_x + a^4E_y)}{2a^4b^4\rho} \\ \mu_{11}^{22} &= \frac{2h\pi^4E_x}{a^4\rho} \\ \mu_{11}^{22} &= \frac{2h\pi^4E_y}{b^4\rho} \\ \mu_{11}^{22} &= \frac{h\pi^4(b^4E_x + a^4E_y)}{2a^4b^4\rho}\end{aligned}$$

منابع

- 1- Kim JS, Kim NP, Han SH. Optimal stiffness design of