



Isogeometric Buckling Analysis of Stiffened Plates

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Saeedi A.¹ MSc,
Hassani B.*¹ PhD

How to cite this article

Saeedi A, Hassani B. Isogeometric Buckling Analysis of Stiffened Plates. Modares Mechanical Engineering. 2020;20(1):227-239.

¹Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Phone: -

Fax: -

b_hassani@um.ac.ir

Article History

Received: June 20, 2018

Accepted: May 14, 2019

ePublished: January 01, 2020

ABSTRACT

Isogeometric analysis is a new approach in computational mechanics where the geometry and computational modeling is carried out by using NURBS and B-spline functions. The main advantage of the isogeometric approach is in unifying the discretization and problem-solving processes that lead to saving of computational time and cost. In this research, the governing equations of buckling analysis of thin plates stiffened with stiffeners with various geometries are obtained by use of the variational accounting method and first-order shear deformation theory (FSDT). The geometry of stiffener and its position on arbitrarily plate are considered. The equation of buckling is derived by employing the total potential energy, and the obtained system of equations is solved by discretization with the isogeometric analysis method. One of the main advantages of this approach is that it does not need a fine mesh for unification of the connection between the plate and its stiffeners so that, it leads to more accurate answers in comparison with other numerical methods and commercial software with the same number of unknowns. Finally, In order to verification, a few examples are presented and the obtained results are compared with the available results of the analytical and numerical method.

Keywords Buckling; Stiffened Plate; Isogeometric; Finite Element

CITATION LINKS

[1] Theory of elastic ... [2] Buckling of eccentrically stiffened orthotropic ... [3] Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate ... [4] Finite element buckling analysis of stiffened ... [5] Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin ... [6] Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal ... [7] Effect of exponential stress resultant on buckling re-sponse of functionally graded ... [8] Elastic local buckling strength of stiffened plate considering plate/stiffener interaction ... [9] A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels ... [10] Buckling and vibration of stiffened plates subjected to partial edge ... [11] A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened ... [12] Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using the FSDT mesh-free ... [13] Buckling and ultimate capability of plates and stiffened panels in axial ... [14] Buckling and static analysis of curvilinearly stiffened plates using mesh-free ... [15] Chebyshev-ritz approach to buckling and vibration of curvilinearly stiffened ... [16] Vibration and buckling analysis of curvilinearly stiffened plates using ... [17] Finite element analysis of laminated composite stiffened plates using FSDT and ... [18] Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear ... [19] Thermal and mechanical buckling analysis of FG carbon nanotube reinforced ... [20] Size-dependent analysis of FG microplates with temperature-dependent material ... [21] A new efficient shear deformation theory for FG plates with ... [22] Size-dependent analysis of functionally graded nanoplates using ... [23] Free vibration analysis of FG nonoplates using quasi-3D hyperbolic refined plate ... [24] Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates ... [25] Precision closed-form solution for out-of-plane vibration of rectangular ... [26] Precision closed-form solution for out-of-plane vibration of ... [27] Electro-mechanical free vibrations analysis of composite rectangular ... [28] Optimization of static and dynamic parameters of stiffened ... [29] Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using ... [30] Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite ... [31] Buckling analysis of unitized curvilinearly stiffened composite ... [32] Static and dynamic analyses of isogeometric curvilinearly ... [33] Isogeometric buckling analysis of composite variable-stiffness ... [34] Isogeometric analysis: Toward integration of ... [35] The NURBS ... [36] Energy principles and variational methods in applied ... [37] Isogeometric methods for numerical ...

تحلیل کمانش ورق‌های تقویت‌شده به روش آیزوژنومتریک

علی سعیدی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

بهروز حسنی PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

روش آیزوژنومتریک رویکردی جدید در حوزه مکانیک محاسباتی محسوب می‌شود که در آن از توابع نریز و بی-اسپلاین برای مدل‌سازی هندسه و نیز تقریب‌سازی مساله استفاده می‌شود. مزیت روش آیزوژنومتریک در این است که فرآیند گسسته‌سازی و حل مسئله یکپارچه می‌شود که خود باعث صرفه‌جویی در زمان و هزینه محاسبات خواهد شد. در این پژوهش به کمک روش‌های حساب تغییراتی و نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم مربوط به کمانش ورق نازک مستطیلی تقویت‌شده با هندسه‌های متنوع برای تقویت‌کننده به دست آمده است. شکل تقویت‌کننده و محل قرارگیری آن روی ورق دلخواه در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از انرژی پتانسیل کل، رابطه کمانش ورق به دست آمده می‌شود و با گسسته‌سازی به روش آیزوژنومتریک، دستگاه معادلات مربوطه حل شده است. یکی از مزایای اصلی این روش، عدم نیاز به شبکه المان‌های خیلی ریز برای یکپارچه‌کردن اتصال ورق و تقویت‌کننده است که منجر به حصول جواب‌هایی دقیق‌تر در مقایسه با سایر روش‌های عددی و نیز نرم‌افزارهای تجاری با همان تعداد مجهولات می‌شود. در انتها نتایج به دست آمده از حل چند مثال ارائه شده و با مقایسه با نتایج روش‌های تحلیلی و عددی در دسترس اعتبارسنجی می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: کمانش، ورق تقویت‌شده، آیزوژنومتریک، اجزای محدود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۳/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۲۴

*نویسنده مسئول: b_hassani@um.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه با پیشرفت روزافزون فناوری و روش‌های ساخت و امکان تولید قطعات یکپارچه، بررسی و تحلیل سازه‌های ترکیبی و تقویت‌شده اهمیت ویژه‌ای یافته‌اند. سازه‌های تقویت‌شده (Stiffened) شامل تیرها، ورق‌ها و پوسته‌های تقویت‌شده کاربرد وسیعی در صنایع مختلفی نظیر خودروسازی، کشتی‌سازی، هوافضا و غیره دارند. این سازه‌ها با داشتن وزن نسبی کمتر، رفتار استاتیکی و دینامیکی بهتری از خود نشان می‌دهند. طراحی یک سازه تقویت‌شده و در نظر گرفتن ملاحظات عملکردی آن معمولاً نیازمند تحلیل‌های استاتیکی، کمانش (Buckling) و ارتعاشات آزاد (Free Vibration) می‌باشد.

با توجه به سابقه طولانی استفاده از ورق‌های تقویت‌شده، تاکنون پژوهش‌های بسیار متنوعی برای حصول روش‌های کارآمدتر و جواب‌هایی دقیق‌تر انجام شده است. تیموشنکو و گیر به تحلیل کمانش در ورق‌های تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های مستقیم و همچنین کمانش در تیرهای منحنی‌شکل پرداختند [1]. بلاک و

همکاران [2] با مدل‌سازی استوانه‌های تقویت‌شده با استفاده از نظریه کلاسیک ورق (CPT)، کمانش استوانه‌های همسانگرد و ارتوتروپیک را تحت بارهای محوری و شعاعی و با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده (Simply Supported) در لبه‌ها بررسی کردند. ردی و خدیر [3] با بررسی ورق‌های مستطیلی کامپوزیتی و دارای تقویت‌کننده‌های مستقیم و همچنین با فرض انواع شرایط مرزی ساده و گیردار (Clamped) به تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد مسئله پرداخته‌اند. آنها از تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه اول (FSDT) و نیز مراتب بالاتر (HSDT) بهره برده‌اند. نتیجه این پژوهش حاکی از دقت مناسب تئوری‌های برشی در مسائل محاسبه بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی است، در حالی که دقت مقادیر به‌دست‌آمده از تئوری کلاسیک کمتر بوده و مقادیر بزرگتری نتیجه می‌دهند. موکویادیای و موکرچی [4] به بررسی ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده توسط تقویت‌کننده‌های مستقیم و مایل به روش اجزای محدود پرداختند. در پژوهش آنها مدل‌سازی ورق توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شده و معادلات کمانش به روش اجزای محدود حل شده‌اند. مقالات دیگری نیز در زمینه کمانش ورق‌ها توسط سایر پژوهشگران ارائه شده‌اند [5-7].

هندسه قرارگیری تقویت‌کننده روی ورق و نوع اتصال آنها موضوع برخی پژوهش‌ها بوده‌اند. فوجیکویو و یائو [8] به بررسی کمانش موضعی (Local Buckling) در ورق‌های تقویت‌شده با اتصال جوش مبادرت کرده‌اند و با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حاصل از عملیات جوشکاری، معادلات حاکم کمانش را به روش تحلیلی حل کرده و با جواب‌های عددی مقایسه نمودند. بیکلوم و آمدل [9] با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ به بررسی کمانش در ورق‌های تقویت‌شده پرداختند. شرایط مختلف بارگذاری نیز موضوع بررسی برخی پژوهش‌ها قرار گرفته است. سریواستاوا و همکاران [10] با در نظر گرفتن بارگذاری‌های مختلف در لبه‌های ورق، کمانش ورق‌های تقویت‌شده را به روش اجزای محدود انجام داده‌اند. بیکلوم و همکاران [11] مسائل کمانش و پساکمانش (Post Buckling) در ورق‌های تقویت‌شده را به روش شبه تحلیلی حل کردند. پنگ و همکاران [12] به روش عددی و با بهره‌گیری از روش‌های بدون شبکه (Mesh Free) به بررسی کمانش در ورق‌های تقویت‌شده و با تئوری برشی مرتبه اول پرداخته‌اند. ژانگ و خان [13] به تحلیل پدیده کمانش توسط تئوری‌های غیرخطی و با استفاده از روش اجزای محدود مبادرت کرده و مقاومت ورق تقویت‌شده تحت بارگذاری فشاری را به روش‌های عددی و تحلیلی محاسبه نموده و با نتایج دیگر پژوهش‌ها مطابقت دادند.

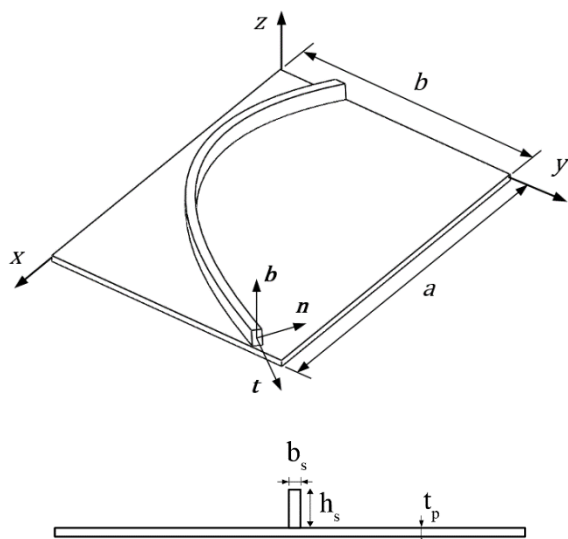
در تمام پژوهش‌های معرفی‌شده تا به اینجا، همواره تقویت‌کننده‌ها هندسه‌ای ساده و مستقیم دارند. از آنجا که استفاده از تقویت‌کننده‌های با هندسه‌های پیچیده و به شکل منحنی به‌صورت بالقوه می‌تواند منجر به طرح‌های بهتر و کاراتر شود، امکان اعمال آنها در تحلیل ورق‌های تقویت‌شده از اهمیت زیادی برخوردار است. ضمن اینکه با پیشرفت‌های به‌دست‌آمده در زمینه فناوری‌های

ساخت، تولید اینگونه محصولات با مشکل خاصی در عمل مواجه نیستند. محدودیت‌های مربوط به هندسه تقویت‌کننده‌ها و لزوم اشتراک گره‌ای در المان‌های تقویت‌کننده و ورق از مهم‌ترین مشکلات در تحلیل ورق‌های تقویت‌شده به روش اجزای محدود است. در برخی پژوهش‌ها روشی ارائه شده است که در آن، با تقریب موقعیت گره‌های تقویت‌کننده با استفاده از گره‌های المانی شبکه فیزیکی ورق که در آن واقع شده است، یکپارچه‌سازی درجات آزادی گره‌های تقویت‌کننده و ورق انجام می‌پذیرد [14, 15]. تمیجانی و کاپانیا کمانش ورق تقویت‌شده را به روش بدون شبکه [14] و روش چیشف-ریتز [15] حل کردند و نتیجه کار آنها مؤید بهبود رفتار کمانشی ورق در حضور تقویت‌کننده‌های منحنی شکل است. این روش توسط شی و همکاران نیز به کار گرفته شد و نتایج رضایت‌بخشی گزارش نمودند [16]. همزمان با تکامل تدریجی در مدل‌سازی و تحلیل ورق‌های تقویت‌شده، باهار و همکاران [17] با مدل‌سازی ورق‌های تقویت‌شده کامپوزیتی توسط تئوری‌های برشی مراتب بالاتر و در حضور تقویت‌کننده‌های مستقیم و منحنی، به حل معادلات کمانش به روش اجزای محدود پرداخته‌اند. در این پژوهش تأثیر افزایش ضخامت بر رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی ارائه شده است. در برخی پژوهش‌ها به جای استفاده از تئوری کلاسیک یا تئوری‌های برشی مرسوم، از تئوری‌های متفاوتی نظیر تئوری برشی نمایی (ESDT) استفاده شده است [18-27]. نورآبادی و همکاران [28] به روش اجزای محدود به تحلیل و بهینه‌سازی کمانش و فرکانس طبیعی ورق‌های تقویت‌شده با شبکه‌ای از تقویت‌کننده‌های مستقیم اقدام کرده و یک طرح بهینه از ساختار مشبک تقویت‌کننده‌ها ارائه نموده‌اند. روش پیشنهادی اینگویان و همکاران [29] برای تحلیل ورق‌های تقویت‌شده بر مبنای تکنیک هموارسازی کرنش (Strain Smoothing Technique) استوار است. همچنین گلمکانی و ضیغمی [30] به تحلیل کمانش در ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق پرداخته‌اند. آنها در این پژوهش با در نظر گرفتن تئوری تنش برشی مرتبه اول برای ورق و همچنین کرنش‌های غیرخطی فون کارمن معادلات حاکم را به دست آورده و به روش آزادسازی دینامیکی بار بحرانی کمانش ورق را محاسبه کرده‌اند.

ژائو و کاپانیا روشی برای تعریف هندسه تقویت‌کننده منحنی به کمک توابع نریز ارائه کرده و به روش اجزای محدود، کمانش را در ورق تقویت‌شده کامپوزیتی شبیه‌سازی کرده‌اند. مزیت روش پیشنهادی آنها این است که با تغییر در هندسه تقویت‌کننده، نیازی به شبکه‌بندی مجدد برای ورق نیست که مزیت مهمی در حل مسائل بهینه‌سازی به شمار می‌رود [31]. کین و همکاران [32] با استفاده از آنالیز آیزوژئومتریک (Isogeometric Analysis) به تحلیل استاتیکی، ارتعاشات آزاد و دینامیکی ورق‌های تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های منحنی پرداختند. در پژوهش ایشان با استفاده از تئوری تغییر شکل فون کارمن، تغییر شکل‌های بزرگ ورق محاسبه

۲- تعریف مسئله ورق تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های دلخواه

یک ورق تقویت‌شده مستطیلی به طول a ، عرض b و ضخامت t_p در ورق مختصات عمومی (x, y, z) ، در شکل ۱ مشخص شده است. این ورق با تقویت‌کننده‌ای که مقطعی مستطیلی با ارتفاع h_s و عرض b_s دارد، متصل و یکپارچه شده و مختصات محلی (t, n, b) در راستای مماس بر آن نصب شده است. لازم به توضیح است که در این پژوهش شکل تقویت‌کننده و محل قرارگیری آن روی ورق، دلخواه بوده و هیچ‌گونه محدودیتی ندارد.



شکل ۱ هندسه ورق تقویت‌شده در مختصات عمومی

۲-۱ مدل‌سازی ورق

با توجه به افزایش ضخامت ورق با وجود تقویت‌کننده‌ها، استفاده از نظریه کلاسیک برای مدل‌سازی مسئله مناسب نبوده و

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \xi_i < \xi_{i+1}, i = 1, \dots, n+p \quad (5)$$

که در آن ξ_i مقدار گره‌ای در نقطه i ام، p مرتبه تابع بی-اسپلاین و n تعداد توابع شکل بی-اسپلاین است. اگر نقاط گره‌ای با فواصل یکسان نسبت به یکدیگر قرار گرفته باشند، بردار گره‌ای یکنواخت (Uniform Knot Vector) نامیده می‌شود. اگر نقاط گره‌ای ابتدا و انتها $p+1$ بار تکرار شوند، بردار گره‌ای از نوع باز (Open Knot Vector) خواهد بود که به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود [35].

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{n-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (6)$$

در یک بردار گره‌ای با تکرار هر یک از نقاط گره‌ای، یک درجه از پیوستگی آن نقطه کاهش می‌یابد. با دراختیار داشتن یک بردار گره‌ای، توابع بی-اسپلاین $N_{i,p}(\xi)$ به کمک روابط بازگشتی (۷) محاسبه می‌شوند [35].

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

که در آن i تعداد توابع پایه و همچنین p درجه توابع پایه نریز می‌باشند.

۲-۳- منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نریز

یک منحنی بی-اسپلاین از درجه p به شکل رابطه (۸) تعریف می‌شود [35].

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad (8)$$

در این رابطه، $C(\xi)$ یک منحنی چندجمله‌ای قطعه‌ای است که در آن P_i مختصات نقاط کنترلی و $N_{i,p}$ توابع پایه بی-اسپلاین هستند. این منحنی روی یک بردار گره‌ای به فرم رابطه (۶) با مقادیر $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شود. یک سطح بی-اسپلاین به طور مشابه به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود [35].

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (9)$$

که در آن $P_{i,j}$ بردار مختصات شبکه نقاط کنترلی دوبعدی هستند. توابع پایه بی-اسپلاین از درجه‌های p و q هستند که روی بردارهای گره‌ای دوبعدی به فرم روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف می‌شوند.

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (10)$$

$$H = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+2}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\} \quad (11)$$

لازم به توضیح است که بردار گره‌ای Ξ دارای $r = n + p + 1$ گره و بردار H دارای $s = m + q + 1$ گره می‌باشد.

با استفاده از توابع بی-اسپلاین و در نظر گرفتن مقادیر وزنی برای هریک از نقاط کنترلی، می‌توان منحنی و سطوح نریز را تولید کرد. یک منحنی نریز از درجه p به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود [35].

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) P_i \quad (12)$$

در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی ضروری است. از این رو در این تحقیق از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول میندلین-رایزنر استفاده شده است. ضریب تصحیح برشی $5/6$ در نظر گرفته می‌شود. در این تئوری، تغییر مکان ورق در مختصات عمومی (x, y, z) به صورت زیر تعریف می‌شود [4]:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \theta_x(x, y) \quad (الف-۱)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \theta_y(x, y) \quad (ب-۱)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (پ-۱)$$

که در آن u_0, v_0, w_0 متغیر تغییر مکان روی صفحه میانی و θ_x و θ_y متغیرهای دوران حول محورهای x و y هستند. بنابراین در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول هر نقطه از ورق در مختصات (x, y) دارای پنج درجه آزادی است که شامل سه تغییر مکان در سه راستای مختصات عمومی (x, y, z) و دو دوران حول محورهای x و y می‌باشد.

$$d_p = [u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y]^T \quad (2)$$

۲-۲- مدل‌سازی تقویت‌کننده

در مدل‌سازی تقویت‌کننده نیز به طریقی مشابه از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده می‌شود. مؤلفه‌های تغییر مکان در مختصات محلی برای نقاط متعلق به تقویت‌کننده بر حسب مختصات سراسری به صورت روابط (۳) نوشته می‌شود [4].

$$u_t(x, y, z) = u_{t0}(x, y) + z \theta_t(x, y) \quad (الف-۳)$$

$$v_n(x, y, z) = v_{n0}(x, y) + z \theta_n(x, y) \quad (ب-۳)$$

$$w_b(x, y, z) = w_{b0}(x, y) \quad (پ-۳)$$

که مشابه نقاط واقع روی ورق هر نقطه روی تقویت‌کننده مطابق رابطه (۴) دارای پنج درجه آزادی است.

$$d_s = [u_{t0}, v_{n0}, w_{b0}, \theta_t, \theta_n]^T \quad (4)$$

۳- روش تحلیل آیزوژئومتریک

روش آیزوژئومتریک در واقع از مفهوم هم‌پارامتری (Isoparametric) در روش اجزای محدود بهره می‌برد که به معنی به‌کارگرفتن توابع پایه یکسان برای تقریب هندسه و همچنین متغیرهای مجهول مسئله است [34]. در این روش از توابع پایه نریز برای ایجاد هندسه و نیز تقریب‌سازی مجهولات مسئله استفاده می‌شود. این توابع مشابه توابع بی-اسپلاین هستند که به صورت کسری بوده و به نقاط کنترلی آنها وزن اعمال می‌شود. با توجه به خواص منحصربه‌فرد توابع نریز، به کمک آنها می‌توان هندسه‌های پیچیده و به‌ویژه مقاطع مخروطی را با دقت زیاد تولید نموده و مدل‌سازی کرد [35]. لازم به توضیح است که در روش آیزوژئومتریک می‌توان به استفاده از توابع بی-اسپلاین اکتفا نمود که در واقع به معنی انتخاب وزن‌های مساوی برای تمامی نقاط کنترلی مسئله است.

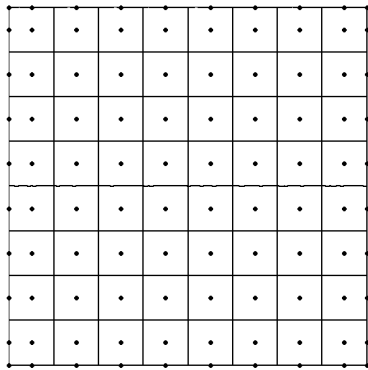
۱-۳- بردار گره‌ای و توابع پایه بی-اسپلاین

توابع بی-اسپلاین در یک فضای پارامتری تعریف می‌شوند. یک بردار گره‌ای (Knot Vector) در فضای پارامتری یک‌بعدی به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود [35].

در این رابطه مقادیر X_i و Y_i مختصات هرکدام از نقاط کنترلی مؤثر بر المان گره‌ای ورق می‌باشد. تابع پایه مربوط به نقطه کنترلی i ام در هر المان گره‌ای از ورق $N_i(\xi, \eta)$ است.

$$d_p = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) d_{pi} = N_p d_{pi} \quad (16)$$

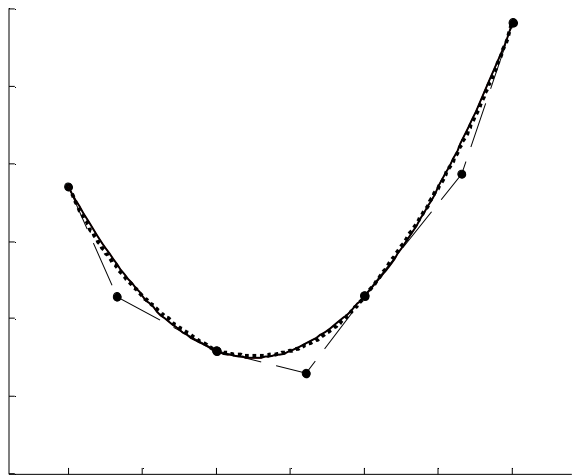
در مسئله هم‌پارامتری پیش رو، با استفاده از توابع پایه نریز مطابق رابطه (۱۶) اقدام به گسسته‌سازی تغییر مکان ورق می‌شود.



شکل ۳ گسسته‌سازی ورق به کمک توابع نریز

۲-۴- گسسته‌سازی هندسه و درجات آزادی تقویت‌کننده

هندسه تقویت‌کننده با استفاده از توابع پایه نریز درجه ۲ مطابق شکل ۴ گسسته‌سازی می‌شود. بنا بر رابطه (۱۷) هندسه تقویت‌کننده به شبکه‌ای از نقاط کنترلی تقسیم می‌شود. مختصات هر یک از نقاط کنترلی تقویت‌کننده با X_{si} و Y_{si} تعیین می‌شود. تابع پایه نریز درجه ۲ $N_i(\zeta)$ برحسب بردار گره‌ای ζ به دست می‌آید.



با استفاده از توابع پایه نریز و نقاط کنترلی تقویت‌کننده، هندسه تقویت‌کننده در مختصات عمومی (x, y, z) محاسبه می‌شود. توابع پایه نریز تقویت‌کننده‌های منحنی را با دقت بالایی تقریب می‌زنند.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_s = \sum_{i=1}^3 N_i(\zeta) \begin{Bmatrix} X_{si} \\ Y_{si} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

با بهره‌جستن از توابع نریز استفاده‌شده برای گسسته‌سازی هندسه تقویت‌کننده، نسبت به گسسته‌سازی مؤلفه‌های تغییر مکان

که در آن P_i بردار مختصات نقاط کنترلی و $N_{i,p}$ توابع پایه بی-اسپلاین از درجه p هستند که توسط مقادیر وزنی w_i شکل منحنی موردنظر را می‌سازند. به‌طور مشابه می‌توان یک سطح نریز را که در راستای ξ از درجه p و در راستای η از درجه q باشد، به‌صورت رابطه (۱۳) تعریف کرد.

$$S(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (13)$$

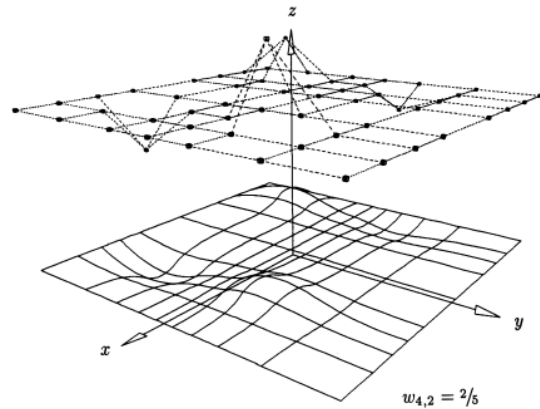
که در مشابهت با تقریب‌سازی توابع با استفاده از توابع شکل در روش اجزای محدود، اگر تابع $R_{i,j}$ را طبق رابطه (۱۴) تعریف کنیم، داریم:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (14)$$

در نهایت یک سطح نریز به‌صورت رابطه (۱۵) تولید می‌شود.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (15)$$

برای نمونه یک سطح نریز با توابع پایه درجه ۲ در شکل ۲ مشخص شده است.



شکل ۲ نمونه‌ای از شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز مربوط به آن [35]

۴- گسسته‌سازی هندسه و مؤلفه‌های تغییر مکان

همان‌گونه که در بخش قبلی اشاره شد، تولید شبکه نقاط کنترلی نقش گسسته‌سازی را در روش آیزوژئومتریک به عهده دارد. این کار هم در مورد مؤلفه‌های تغییر مکان و هم برای تعریف مسئله به‌طور یکسان انجام می‌پذیرد. در مورد مسئله ورق‌های دارای تقویت‌کننده سعی بر آن است که در شکل گسسته‌سازی‌شده تمامی روابط برحسب مقادیر نقاط کنترلی ورق نوشته شده و سپس با حل دستگاه معادلات ایجادشده بتوان مقادیر مجهول مربوط به درجات آزادی مختلف را در نقاط کنترلی محاسبه کرد.

۱-۴- گسسته‌سازی هندسه و درجات آزادی ورق

با بهره‌گرفتن از توابع نریز هندسه ورق به مجموعه‌ای از نقاط کنترلی مطابق شکل ۳ گسسته می‌شود. هندسه ورق به کمک توابع پایه نریز درجه ۲ به مجموعه‌ای از نقاط کنترلی طبق رابطه (۱۵) شبکه‌بندی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} X_{pi} \\ Y_{pi} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

با توجه به نکات مطرح شده و با استفاده از توابع نرینز، تغییر مکان تقویت کننده برحسب تغییر مکان ورق در مختصات عمومی به صورت زیر نوشته می شود [14].

$$d_{sj} = \frac{\sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) d_{pi}}{N_p d_{pi}}, \quad j = A, B, C \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) مقادیر (ξ_j, η_j) با حل یک دستگاه معادله غیرخطی و با استفاده از نقاط کنترلی ورق و تقویت کننده به دست می آیند. در این پژوهش مقادیر نقاط گره ای متوسط (ξ_j, η_j) توسط یک الگوریتم جستجو در المان گره ای مربوطه از شبکه فیزیکی ورق محاسبه شده است.

با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸)، تغییر مکان تقویت کننده برحسب تغییر مکان نقاط کنترلی ورق مطابق رابطه (۲۰) تقریب زده می شود. این معادله نگاشتی میان نقاط کنترلی ورق و تقویت کننده می سازد.

$$d_s = N_s N_p d_{pi} = N_{ps} d_{pi} \quad (20)$$

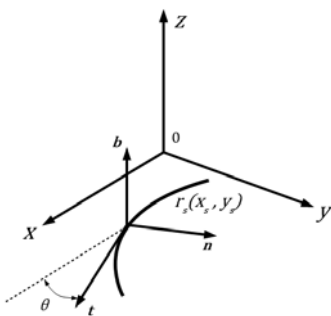
نقاط کنترلی تقویت کننده بایستی در مختصات عمومی تعریف شوند، لذا مطابق شکل ۷ با اعمال یک ماتریس دوران، نقاط کنترلی تقویت کننده از مختصات محلی (t, n, b) به مختصات عمومی منتقل شده و در نهایت به فرم رابطه (۲۱) نوشته می شوند.

$$d_s = Q N_{ps} d_{pi} \quad (21 \text{ الف})$$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (21 \text{ ب})$$

$$N_{ps} = \sum_{j=1}^3 N_j(\zeta) \left(\sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) \right) \quad (21 \text{ پ})$$

با اعمال رابطه (۲۱) در معادلات حاکم کلی، مسئله ای یکپارچه به دست می آید که تابعی از مؤلفه های تغییر مکان ورق است.



شکل ۷) مختصات محلی و زاویه دوران تقویت کننده

۵- استخراج معادلات حاکم

فرم ضعیف معادلات حاکم برای یک ورق تقویت شده به کمک معادله (۲۲) به دست می آید.

$$(\delta U + \delta T) - \delta W = 0 \quad (22)$$

انرژی کرنشی ذخیره شده در مسائل کماتش معادل است با مجموع انرژی کرنشی (ناشی از کرنش های خطی) و انرژی کرنشی هندسی (مربوط به کرنش های غیرخطی) [4]:

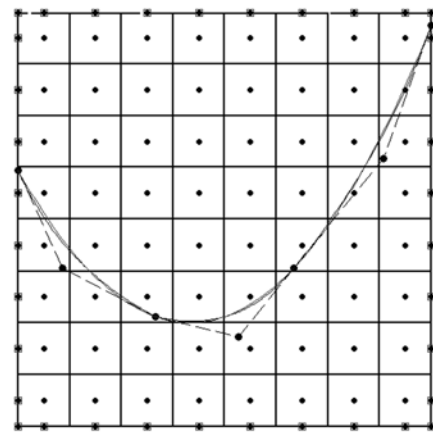
تقویت کننده اقدام می کنیم. گسسته سازی تقویت کننده مطابق رابطه (۱۸) صورت می پذیرد.

$$d_s = \sum_{j=1}^3 N_j(\zeta) d_{sj} = N_s d_{sj} \quad (18)$$

۳-۴ ترکیب ورق و تقویت کننده

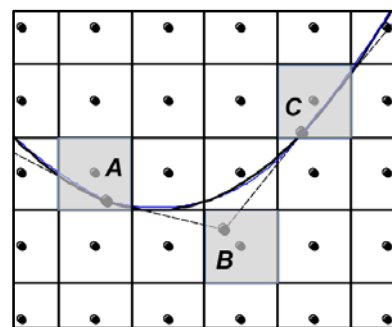
در این پژوهش مؤلفه های تغییر مکان تقویت کننده برحسب تغییر مکان ورق نوشته می شود. با این روش می توان در مسائل ورق های تقویت شده، از تقویت کننده های منحنی استفاده کرد. چرا که ضرورت اشتراک در نقاط کنترلی ورق و تقویت کننده از بین می رود. همچنین در صورت تغییر هندسه یا شبکه بندی تقویت کننده، نیازی به تغییر شبکه بندی ورق وجود ندارد که این مزیت در مسائل بهینه سازی بسیار پرکاربرد است [14].

برای یکپارچه سازی مسئله نیاز است تا ورق و تقویت کننده شبکه بندی شده باشند. موقعیت نقاط کنترلی مطابق شکل ۵ برای هردو جزء ورق و تقویت کننده مشخص است.



شکل ۵) شبکه نقاط کنترلی برای ورق تقویت شده یکپارچه

یک المان گره ای را از یک شبکه تقویت کننده مطابق شکل ۶ در نظر بگیرید. هرکدام از سه نقطه کنترلی این المان گره ای در محدوده تأثیر یکی از المان های ورق قرار دارد. نقاط کنترلی تقویت کننده به کمک نقاط کنترلی مربوطه از المان گره ای ورق مطابق رابطه (۱۹) تقریب زده می شوند. در واقع با این روش تأثیر سفتی تقویت کننده بر ورق اعمال شده و متغیرهای تغییر مکان تقویت کننده حذف می شوند.



شکل ۶) نمونه ارتباط بین موقعیت های نقاط کنترلی تقویت کننده و ورق

$$L_S^L = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \quad (۲۷-پ)$$

$$L_S^{NL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \quad (۲۷-ت)$$

با جایگذاری معادلات (۲۶-الف) تا (۲۶-ت) در معادله (۲۵) و گسسته‌سازی مؤلفه‌های تغییر مکان به کمک روابط (۱۶) و (۲۱)، معادله نهایی برای کمانش یک ورق تقویت‌شده مطابق رابطه (۲۸) به‌دست می‌آید.

$$[(K_p + K_s) + \sigma_{cr}(G_p + G_s)]d_{pi} = 0 \quad (۲۸)$$

ماتریس‌های سختی الاستیک و سختی هندسی برای ورق و تقویت‌کننده به شکل روابط زیر تعریف می‌شود.

$$K_p = \iint N_p^T L_p^{LT} D_p L_p^L N_p dA \quad (۲۹)$$

$$K_s = \int N_{ps}^T Q^T L_s^{LT} D_s L_s^L Q N_{ps} ds \quad (۳۰)$$

$$G_p = \iint N_p^T L_p^{NLT} \sigma_p L_p^{NL} N_p dA \quad (۳۱)$$

$$G_s = \int N_{ps}^T Q^T L_s^{NLT} \sigma_s L_s^{NL} Q N_{ps} ds \quad (۳۲)$$

ماتریس D واسط میان تنش و کرنش ماده آیزوتروپیک برای ورق و تقویت‌کننده است و توسط روابط (۳۳) و (۳۴) تعریف می‌شود.^[۱۴، ۱۵]

$$D_p = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_G \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{t^2}{12} & \frac{\nu t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_p t_p}{1-\nu^2} & & & & \frac{t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{(1-\nu)t^2}{24} & 0 & 0 \\ & & & & & & k_G \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & & & & & k_G \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

$$D_s = \begin{bmatrix} E_s A_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_G G_s A_s & 0 & 0 & 0 \\ & & k_G G_s A_s & 0 & 0 \\ & & & E_s I_n & 0 \\ & & & & G_s J_t \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

مقادیر انتگرالی به روش انتگرال‌گیری گوس (Gauss) محاسبه می‌شوند. در این روش یک فضای اصلی (Parent Domain) وجود دارد که برای هر المان گره‌ای، مقادیر انتگرالی در این ناحیه محاسبه می‌شوند. ارتباط میان فضای پارامتری، شبکه فیزیکی و المان پایه مطابق شکل ۸ توسط مقادیر ژاکوبین (Jacobian) برقرار می‌شود.^[۳۶، ۳۷] برای مطالعه بیشتر در این زمینه مراجعه به پژوهش‌های^[۳۰، ۳۳، ۳۴] توصیه می‌شود.

با حل معادله مقدار ویژه (۲۸) و محاسبه کوچکترین مقدار ویژه مثبت، مقادیر تنش کمانشی ورق به‌دست می‌آید. سپس می‌توان با

$$U = \iiint \bar{\sigma} \varepsilon dV = \iiint \bar{\sigma} (\varepsilon^L + \varepsilon^{NL}) dV = \frac{1}{2} \iiint \sigma \varepsilon^L dV + \iiint \bar{\sigma} \varepsilon^{NL} dV = P + G \quad (۲۳)$$

تعداد انرژی برای یک ورق تقویت‌شده در مسئله‌ای عمومی به فرم رابطه (۲۴) خواهد بود.^[۱۴، ۱۵] عبارتهای مربوط به ورق و تقویت‌کننده با اندیس‌های p و s مشخص شده است.

$$(\delta P_p + \delta P_s) + (\delta G_p + \delta G_s) + (\delta T_p + \delta T_s) - \delta W = 0 \quad (۲۴)$$

در مسائل کمانش، مقدار انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی صفر است. فرم ضعیف معادلات کمانش برای یک ورق تقویت‌شده به‌صورت رابطه (۲۵) نوشته می‌شود.

$$(\delta P_p + \delta P_s) + (\delta G_p + \delta G_s) = 0 \quad (۲۵)$$

با نوشتن مقادیر انرژی کرنشی و انرژی کرنشی هندسی به فرم ماتریسی، قابلیت بازتعریف در محیط برنامه‌نویسی متلب (Matlab) داریم. معادلات به شکل روابط (۲۶) به‌دست می‌آید.

$$P_p = \frac{1}{2} \iiint \sigma_p \varepsilon_p^L dV = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_p^{LT} D_p \varepsilon_p^L dA \quad (۲۶-الف)$$

$$P_s = \frac{1}{2} \iiint \sigma_s \varepsilon_s^L dV = \frac{1}{2} \int \varepsilon_s^{LT} D_s \varepsilon_s^L dL = \frac{1}{2} \int d_s^T L_s^{LT} D_s L_s^L d_s dL \quad (۲۶-ب)$$

$$G_p = \iiint \bar{\sigma}_p \varepsilon_p^{NL} dV = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_p^{NLT} \sigma_p \varepsilon_p^{NL} dA = \frac{1}{2} \int d_p^T L_p^{NLT} \sigma_p L_p^{NL} d_p dA \quad (۲۶-پ)$$

$$G_s = \iiint \bar{\sigma}_s \varepsilon_s^{NL} dV = \frac{1}{2} \int \varepsilon_s^{NLT} \sigma_s \varepsilon_s^{NL} dL = \frac{1}{2} \int d_s^T L_s^{NLT} \sigma_s L_s^{NL} d_s dL \quad (۲۶-ت)$$

ماتریس‌های کرنش توسط اپراتورهای روابط (۲۷) به بردارهای تغییر مکان ورق و تقویت‌کننده مرتبط می‌شود.

$$L_p^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۲۷-الف)$$

$$L_p^{NL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۲۷-ب)$$

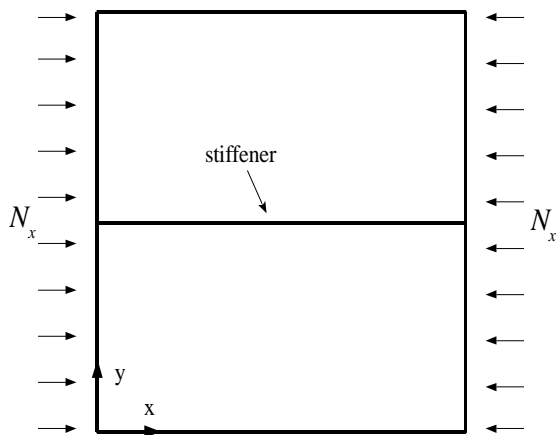
محاسبه بردار ویژه مربوطه (Eigen Vector)، مود کمانشی ورق را محاسبه کرد.

۷- ارائه و تحلیل نتایج

در این قسمت با ارائه چندین مثال با هندسه و پیکربندی متفاوت، به مقایسه و اعتبارسنجی نتایج پرداخته‌ایم.

۷-۱- ورق مستطیلی به‌همراه یک تقویت‌کننده مستقیم مرکزی

هندسه ورق و تقویت‌کننده به‌همراه بارگذاری آن در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. ورق به طول و عرض $a=b=۲۵/۴$ mm و ضخامت $t_p=۰/۲۵۴$ mm به‌همراه تقویت‌کننده‌ای با مقطع مستطیلی به ارتفاع $h_s=۲/۵۴$ mm و عرض $b_s=۰/۲۵۴$ mm هندسه یک ورق تقویت‌شده را تشکیل داده است. هر دو از ماده‌ای همسانگرد با ضریب پواسون $\nu=۰/۳$ و ضریب الاستیک $E=۶۹$ GPa ساخته شده‌اند. شرایط مرزی در چهار لبه ورق به‌صورت ساده است و بارهای فشاری صفحه‌ای در راستای X اعمال می‌شوند.



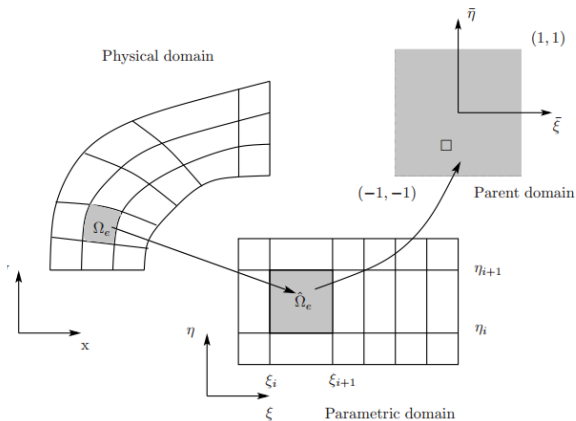
شکل ۱۰ ورق تقویت‌شده با یک تقویت‌کننده مستقیم مرکزی تحت بارگذاری فشاری تک‌محور

برای تحلیل نتایج در مسائل کمانش یک پارامتر بی‌بعد به نام پارامتر کمانش تعریف می‌شود که معیاری برای مقایسه نتایج خواهد بود. پارامتر کمانش به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$K = \frac{\sigma_{cr} a b t_p}{\pi^2 D} \quad (۳۷)$$

هرچه پارامتر کمانش بزرگتر باشد، استحکام ورق تقویت‌شده در برابر بارهای کمانشی بیشتر است. همچنین پارامتر بی‌بعد نسبت مساحت سطح مقاطع ورق و تقویت‌کننده به‌صورت $\delta = b_s h_s / a t_p$ و پارامتر بی‌بعد نسبت سختی خمشی ورق به تقویت‌کننده با رابطه $\gamma = E_s I_s / a D$ برای مقایسه هندسه و جنس ورق و تقویت‌کننده تعریف شده‌اند. شبکه‌بندی ورق تقویت‌شده در شکل ۱۱ مشخص شده است.

نتایج پارامتر کمانش با مقادیر بی‌بعد $\delta=۰/۱$ و $\gamma=۱۰$ با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه شده و در جدول ۱ ارائه شده است. در شکل ۱۲ مود کمانشی ورق تقویت‌شده مشاهده می‌شود. تأثیر حضور تقویت‌کننده در افزایش استحکام کمانشی ورق بر اثر اعمال بار تک‌محوری در شکل به‌خوبی نمایان است.



شکل ۸ دامنه‌های مورد استفاده در تحلیل آیزوتومتربیک برای انتگرال‌گیری [۳۷]

۶- بارگذاری و شرایط مرزی

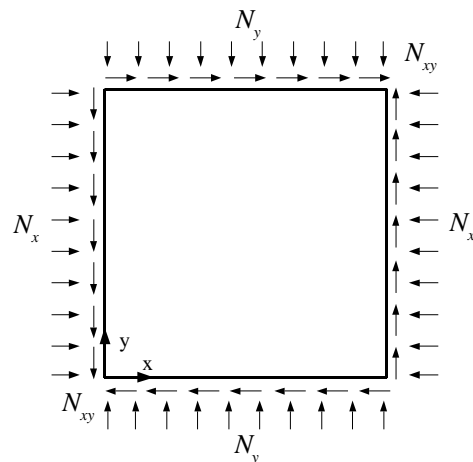
در این پژوهش برای وقوع کمانش در ورق، بارگذاری روی لبه‌های ورق انجام می‌شود. شکل بارگذاری مطابق شکل ۹ می‌تواند ترکیبی از تنش‌های صفحه‌ای محوری یا برشی باشد. بردار تنش صفحه‌ای به شکل رابطه (۳۵) تعریف می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \sigma_{cr} \quad (۳۵)$$

به کمک ضرایب ثابت (α, β, γ) در معادله (۳۵) می‌توان مؤلفه‌های نیرویی مسئله را مشخص نموده و بارگذاری موردنظر را اعمال کرد. با محاسبه کوچکترین مقدار ویژه، تنش‌های کمانشی به‌دست می‌آیند.

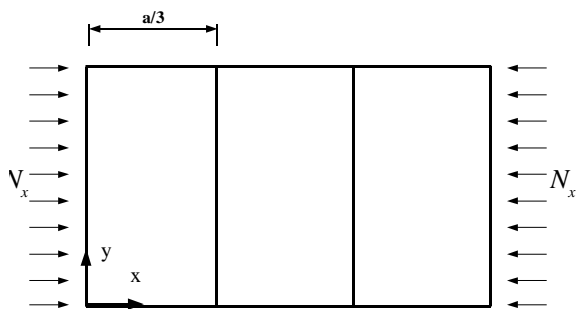
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_{cr} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} (\sigma_{cr})_{min} \quad (۳۶)$$

شرایط مرزی در لبه ورق‌ها می‌تواند ساده یا گیردار باشد.

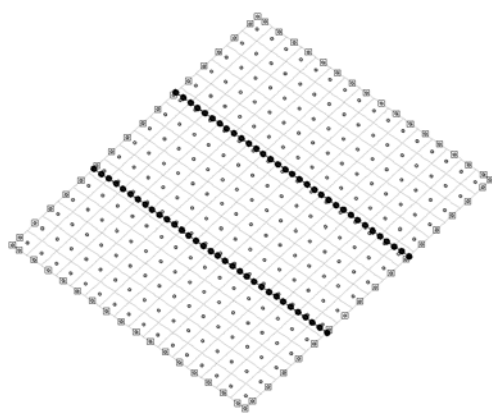


شکل ۹ نحوه اعمال بارگذاری روی لبه‌های ورق

تحلیل کمانش ورق‌های تقویت‌شده به روش آیزوژئومتریک ۲۳۵
 کمانشی ورق تقویت‌شده در شکل ۱۵ ترسیم شده است. تأثیر
 تقویت‌کننده‌ها در افزایش استحکام کمانشی ورق نمایان است.



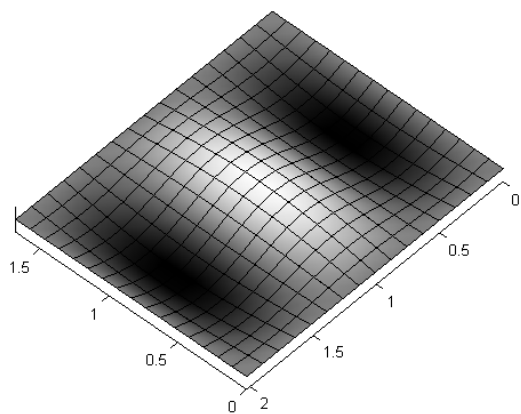
شکل ۱۳ ورق تقویت‌شده با دو تقویت‌کننده مستقیم تحت بار فشاری
 تک‌محور



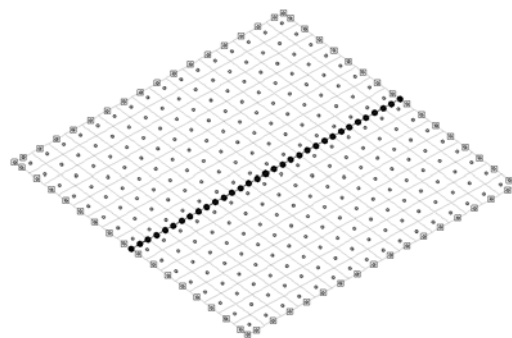
شکل ۱۴ شبکه نقاط کنترلی برای ورق تقویت‌شده با دو تقویت‌کننده مستقیم

جدول ۲ پارامتر کمانش برای ورق تقویت‌شده توسط دو تقویت‌کننده مستقیم
 مرکزی

پارامتر کمانش	روش حل
۱۱/۲۰	تحلیلی ^[۱]
۱۱/۱۰	اجزای محدود ^[۳۰]
۱۱/۰۶	آیزوژئومتریک (پژوهش فعلی)



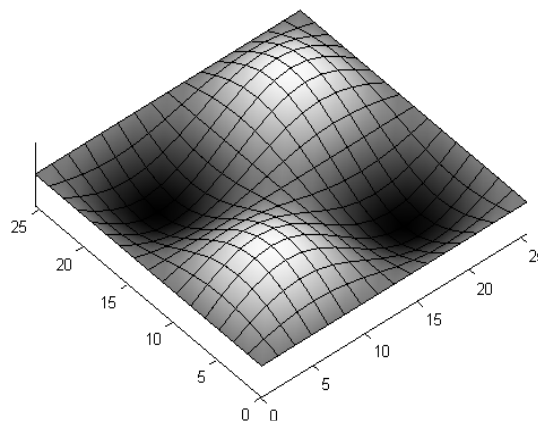
شکل ۱۵ مود کمانشی ورق استحکام‌یافته با دو تقویت‌کننده مستقیم



شکل ۱۱ شبکه نقاط کنترلی برای ورق تقویت‌شده با یک تقویت‌کننده مستقیم
 مرکزی

جدول ۱ پارامتر کمانش برای ورق تقویت‌شده توسط یک تقویت‌کننده مستقیم
 مرکزی

پارامتر کمانش	روش حل
۱۶	تحلیلی ^[۱]
۱۶	اجزای محدود ^[۴]
۱۵/۸۶	بدون شبکه ^[۱۴]
۱۵/۹۵	ریتز ^[۱۵]
۱۶/۱۳	آیزوژئومتریک (پژوهش فعلی)



شکل ۱۲ مود کمانشی ورق تقویت‌شده با تقویت‌کننده مستقیم

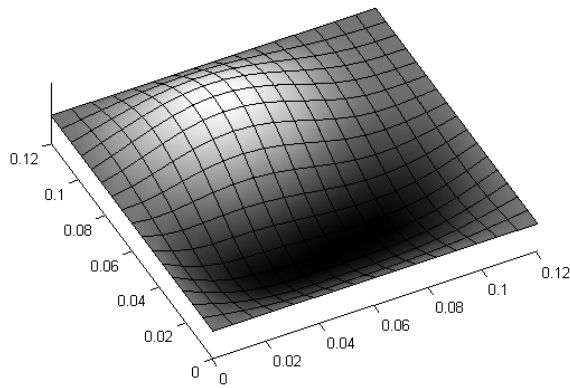
۲-۷- ورق مستطیلی به‌همراه دو تقویت‌کننده مستقیم مرکزی

در شکل ۱۳ هندسه مسئله و بارگذاری آن نمایش داده شده است. ورقی با طول و عرض $a=۲/۰۳۲\text{m}$ ، $b=۱/۶۷۶\text{m}$ و ضخامت $t_p=۱۴/۲۲\text{mm}$ به‌همراه دو تقویت‌کننده مستقیم با ارتفاع از ماده‌ای همسانگرد و یکسان با ضریب پواسون $\nu=۰/۳$ و ضریب الاستیک $E=۲۰۶/۸۴\text{GPa}$ ساخته شده‌اند. این ورق تحت بارگذاری محوری در راستای عمود بر تقویت‌کننده‌ها قرار گرفته است. شرایط مرزی در لبه‌های ورق از نوع ساده است. شبکه‌بندی ورق استحکام‌یافته در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود.

نتایج پارامتر کمانش حاصل از این پژوهش و مقایسه آن با نتایج روش‌های تحلیلی و اجزای محدود در جدول ۲ ارائه شده است. مود

۳-۷ ورق مستطیلی تقویت شده با یک تقویت کننده منحنی شکل

هندسه مسئله و بارگذاری آن در شکل ۱۶ نمایش داده شده است. در این مثال ورق با طول $a=120\text{mm}$ و عرض $b=120\text{mm}$ و ضخامت $t_p=1/2\text{mm}$ توسط یک تقویت کننده منحنی با تابع $y = 1.1(0.2 - 4x)^2 + 0.03$ و مقطعی با ارتفاع $h_s=12/58\text{mm}$ و عرض $b_s=1/14\text{mm}$ تقویت شده است. ورق و تقویت کننده هر دو از ماده‌ای همسانگرد و مشابه با ضریب پواسون $\nu=0/3$ و ضریب الاستیک $E=69\text{GPa}$ ساخته شده‌اند. این ورق تحت بارهای دوماحوری فشاری قرار می‌گیرد و شرایط مرزی به صورت ساده برای همه لبه‌ها می‌باشد. در شکل ۱۷ شبکه بندی ورق و در شکل ۱۸ مود کمانشی این ورق تقویت شده مشاهده می‌شود. نتایج به دست آمده از این روش مطابق جدول ۳ با دیگر نتایج مطابقت خوبی دارد. توابع نریز استفاده شده در این روش، عملکرد سازه‌ای ورق را در حضور تقویت کننده‌های منحنی با دقت بسیار خوبی مدل سازی می‌کند.



شکل ۱۸ مود کمانشی برای ورق تقویت شده با یک تقویت کننده منحنی تحت بارگذاری فشاری دوماحوری

جدول ۳ پارامتر کمانش برای ورق تقویت شده با تقویت کننده منحنی

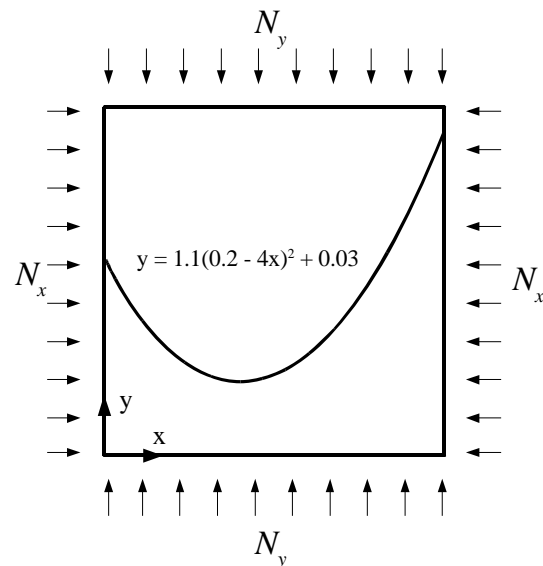
پارامتر کمانش	روش حل
۵/۱۰	بدون شبکه ^[14]
۵/۰۹	اجزای محدود ^[29]
۵/۰۱	نرم افزار اجزای محدود تجاری ^[14]
۵/۰۴	نرم افزار اجزای محدود تجاری ^[29]
۵/۱۲	آیزوژئومتریک (پژوهش فعلی)

۴-۷ ورق مستطیلی تقویت شده با دو تقویت کننده منحنی شکل

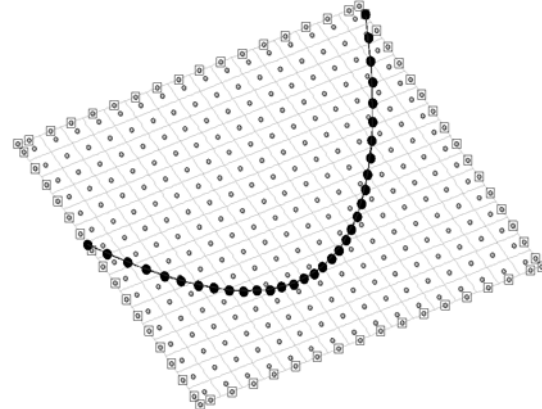
در انتها به تحلیل کمانش در یک ورق تقویت شده توسط دو تقویت کننده منحنی می‌پردازیم. هندسه ورق و تقویت کننده‌ها به همراه بارگذاری در شکل ۱۹ ملاحظه می‌شود. ابعاد ورق، تقویت کننده و جنس آنها مشابه مثال قبل است. مثال اخیر می‌تواند به عنوان یک هندسه عمومی در مسائل ورق‌های تقویت شده با تقویت کننده‌های منحنی، در نظر گرفته شود. در شکل ۲۰ شبکه بندی انجام شده روی ورق ترسیم شده است.

نتایج به دست آمده و مقایسه آن با نتایج روش بدون شبکه، در جدول ۴ گزارش شده است. نتایج ارائه شده مؤید بهبود استحکام کمانشی ورق با حضور تقویت کننده‌های منحنی است.

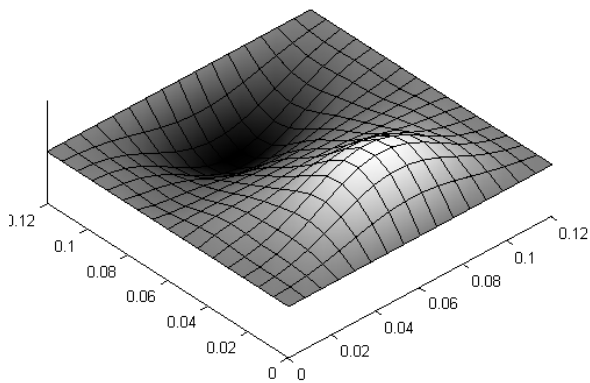
مود کمانشی حاصل از بارگذاری کمانشی ورق تقویت شده در شکل ۲۱ ملاحظه می‌شود. نتیجه گیری در این پژوهش تحلیل کمانش ورق‌های تقویت شده به روش آیزوژئومتریک انجام شد و با حل چند مثال با پیکربندی و بارگذاری‌های متنوع، صحت نتایج بررسی شد. همان‌طور که ملاحظه شد، استفاده از منحنی‌های نریز امکان تعریف دقیق هندسه در تقویت کننده‌های منحنی را به خوبی فراهم می‌نماید. به علاوه روش یکپارچه سازی استفاده شده در این پژوهش، امکان قرارگیری تقویت کننده‌های منحنی با شکل دلخواه را بدون هیچ گونه محدودیتی ارائه می‌کند. برای درک بهتر رفتار ورق در حضور تقویت کننده، مودهای کمانشی حاصل نیز ارائه شدند. نتایج به دست آمده حاکی از کیفیت و دقت خوب جواب‌ها در مقایسه با نتایج سایر روش‌ها است. همچنین در این پژوهش به بررسی تأثیر حضور تقویت کننده‌های مستقیم و منحنی در افزایش پارامتر



شکل ۱۶ ورق تقویت شده با یک تقویت کننده منحنی تحت بارگذاری فشاری دوماحوری



شکل ۱۷ شبکه نقاط کنترلی برای ورق تقویت شده با یک تقویت کننده منحنی



شکل ۲۱) مود کمانشی برای ورق تقویت‌شده با دو تقویت‌کننده منحنی تحت بارگذاری فشاری دوماحوری

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.
تاییدیه اخلاقی: نویسندگان با اعلام موافقت خود مبنی بر ارسال این مقاله به نشریه مهندسی مکانیک مدرس تعهد می‌نمایند که این مقاله در زمان ارسال برای این نشریه در هیچ نشریه ایرانی یا غیرایرانی در حال بررسی نبوده و تا تعیین تکلیف قطعی در این نشریه برای هیچ نشریه ایرانی یا غیرایرانی دیگری ارسال نشده است.
تعارض منافع: این مقاله از پایان‌نامه کارشناسی ارشد با عنوان "تحلیل استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد صفحات تقویت‌شده به روش آیزوژئومتریک" به نگارندگی **علی سعیدی** و به سرپرستی بهروز حسنی در دانشگاه فردوسی مشهد استخراج شده است.

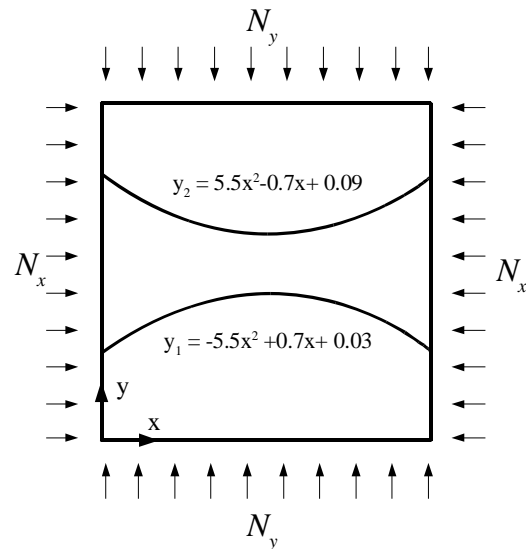
سهم نویسندگان: علی سعیدی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (%0۰): بهروز حسنی (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/روش‌شناسی/پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (%0۰)

منابع مالی: هزینه‌های این پژوهش از محل هزینه‌های پژوهشی گروه مکانیک دانشکده مهندسی در دانشگاه فردوسی مشهد تامین شده است.

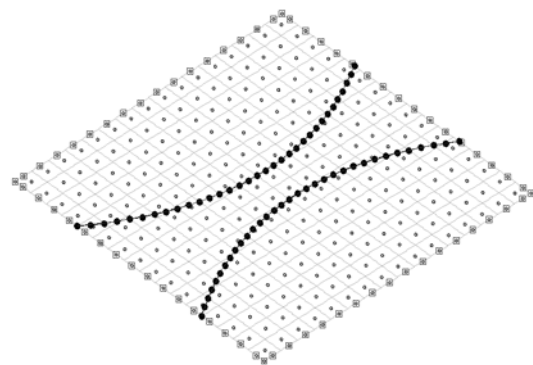
فهرست علائم و نشانه‌ها

A	سطح مقطع (m^2)
b	راستای عمود دوم در مختصات محلی
D	ماتریس تنش- کرنش همسانگرد
detJ	دترمینان ژاکوبین
e	خروج از مرکز (m)
E	مدول الاستیک (Pa)
f_b	نیروی حجمی (N/m^3)
G	مدول برشی (Pa)
h	ضخامت سطح مقطع (m)
I_n	گشتاور دوم سطح نسبت به محور n
K	ماتریس سختی الاستیک
K_G	ماتریس سختی هندسی
L	ماتریس کرنش- جابجایی
M	ماتریس جرم

کمانش یک ورق با ابعاد و جنس مشخص و مقایسه آنها پرداخته شده است. نتایج بیانگر آن است که تقویت‌کننده‌های منحنی مناسب تأثیر بهتری در افزایش بار کمانش در مقایسه با تقویت‌کننده‌های مستقیم دارند. تعداد، محل قرارگیری، شکل و جنس تقویت‌کننده‌ها می‌توانند به‌عنوان متغیرهای طراحی برای رسیدن به خواص مورد نظر در یک ورق تقویت‌شده استفاده شوند.



شکل ۱۹) ورق تقویت‌شده با دو تقویت‌کننده منحنی تحت بارگذاری فشاری دوماحوری



شکل ۲۰) شبکه‌بندی برای ورق تقویت‌شده با یک تقویت‌کننده منحنی

جدول ۴) پارامتر کمانش برای ورق تقویت‌شده با دو تقویت‌کننده منحنی

پارامتر کمانش		نوع تقویت‌کننده
بدون شبکه ^[14]	آیزوژئومتریک	
۱/۹۸	۱/۹۹	بدون تقویت‌کننده
۵/۰۷	۵/۰۶	یک تقویت‌کننده مستقیم: $y = b/2$
۵/۱۰	۵/۱۲	یک تقویت‌کننده منحنی: $y = 1.1(0.2 - 4x)^2 + 0.03$
۹/۶۳	۹/۷۲	دو تقویت‌کننده منحنی: $y_1 = -5.5x^2 + 0.7x + 0.03$ $y_2 = +5.5x^2 - 0.7x + 0.09$

- laminated composite plates using various plate theories. AIAA Journal. 1989;27(12):1808-1817.
- 4- Mukhopadhyay M, Mukherjee A. Finite element buckling analysis of stiffened plates. Computers & Structures. 1990;34(6):795-803.
- 5- Hosseini-Hashemi Sh, Khorshidi K, Amabili M. Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. Journal of Sound and Vibration. 2008;315(1-2):318-342.
- 6- Khorshidi K, Fallah A. Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory. International Journal of Mechanical Sciences. 2016;113:94-104.
- 7- Khorshidi K, Fallah A. Effect of exponential stress resultant on buckling re-sponse of functionally graded rectangular plates. Journal of Stress Analysis. 2017;2(1):27-33.
- 8- Fujikubo M, Yao T. Elastic local buckling strength of stiffened plate considering plate/stiffener interaction and welding residual stress. Marine Structures. 1999;12(9-10):543-564.
- 9- Byklum E, Amdahl J. A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling. Thin-Walled Structures. 2002;40(11):925-953.
- 10- Srivastava AKL, Datta PK, Sheikh AH. Buckling and vibration of stiffened plates subjected to partial edge loading. International Journal of Mechanical Sciences. 2003;45(1):73-93.
- 11- Byklum E, Steen E, Amdahl J. A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened panels. Thin Walled Structures. 2004;42(5):701-717.
- 12- Peng LX, Liew KM, Kitipornchai S. Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using the FSDT mesh-free method. Journal of Sound and Vibration. 2006;289(3):421-449.
- 13- Zhang Sh, Khan I. Buckling and ultimate capability of plates and stiffened panels in axial compression. Marine Structures. 2009;22(4):791-808.
- 14- Yeilaghi Tamijani A, Kapania RK. Buckling and static analysis of curvilinearly stiffened plates using mesh-free method. AIAA Journal. 2010;48(12):2739-2751.
- 15- Yeilaghi Tamijani A, Kapania RK. Chebyshev-ritz approach to buckling and vibration of curvilinearly stiffened plate. AIAA Journal. 2012;50(5):1007-1018.
- 16- Shi P, Kapania RK, Dong CY. Vibration and buckling analysis of curvilinearly stiffened plates using finite element method. AIAA Journal. 2015;53(5):1319-1335.
- 17- Bhar A, Phoenix SS, Satsangi SK. Finite element analysis of laminated composite stiffened plates using FSDT and HSDT: A comparative perspective. Composite Structures. 2010;92(2):312-321.
- 18- Farzam-Rad SA, Hassani B, Karamodin A. Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface. Composites Part B: Engineering. 2017;108:174-189.
- 19- Farzam A, Hassani B. Thermal and mechanical buckling analysis of FG carbon nanotube reinforced composite plates using modified couple stress theory and isogeometric approach. Composite Structures. 2018;206:774-790.
- 20- Farzam A, Hassani B. Size-dependent analysis of FG microplates with temperature-dependent material properties using modified strain gradient theory and isogeometric approach. Composites Part B: Engineering. 2019;161:150-168.

m	جرم (kg)
$N_{i,p}$	تابع نریز N ام با درجه p
n	راستای عمود اول در مختصات محلی
q	نیروی گسترده (N/m^2)
$\frac{1}{R}$	شعاع انحنای تقویت کننده ($1/m$)
T	انرژی جنبشی ($N.m$)
t	راستای مماسی در مختصات محلی
U	انرژی کرنشی ($N.m$)
u	مختصه جابجایی در راستای محور x (m)
v	مختصه جابجایی در راستای محور y (m)
V	سرعت (m/s)
W	پتانسیل نیروهای خارجی ($N.m$)
w	مختصه جابجایی در راستای محور z (m)
X	مختصه اول نقاط کنترلی
x	مختصه اول در مختصات کارتزین عمومی
Y	مختصه دوم نقاط کنترلی
y	مختصه دوم در مختصات کارتزین عمومی
z	مختصه سوم در مختصات کارتزین عمومی

علائم یونانی

α	ضریب تنش در راستای محور x
β	ضریب تنش در راستای محور y
\mathcal{E}	کرنش
ζ	بردار گرگی تقویت کننده
η	بردار گرگی دوم صفحه
θ	درجه آزادی دورانی
λ	پارامتر کمانش
ν	ضریب پواسون
ξ	بردار گرگی اول صفحه
ρ	چگالی
σ	تنش محوری
τ	تنش برشی
χ	ضریب تنش در راستای محور z
ω	فرکانس طبیعی

بالانویسها

G	هندسی (در مسائل کمانش)
L	خطی
NL	غیرخطی
T	ترانهاده

زیرنویسها

b	راستای محور عمود دوم در مختصات محلی
n	راستای محور عمود اول در مختصات محلی
p	صفحه
s	تقویت کننده
t	راستای مماسی در مختصات محلی

منابع

- 1- Timoshenko SP, Gere JM. Theory of elastic stability. 2nd Edition. New York: Dover Publications; 2012.
- 2- Block DL, Card MF, Mikulas MM. Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders [Report]. Washington, D.C.: NASA; 1965 Aug. Report No.: NASA-TN-D-2960.
- 3- Reddy JN, Khdeir AA. Buckling and vibration of

- Optimization of static and dynamic parameters of stiffened plates. 14th Marine Industrials Conference, 2012 December 26-27, Tehran, Iran. Iranian Association of Naval Architecture and Marine Engineering; 2012. [Persian]
- 29- Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Ngo-Thanh P. Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements. *Computers & Structures*. 2013;125:100-113.
- 30- Golmakani ME, Zeighami V. Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using incremental loading and dynamic relaxation methods. *Numerical Methods in Engineering*. 2016;35(1):43-63. [Persian]
- 31- Zhao W, Kapania RK. Buckling analysis of unitized curvilinearly stiffened composite panels. *Composite Structures*. 2016;135:365-382.
- 32- Qin XC, Dong CY, Wang F, Qu XY. Static and dynamic analyses of isogeometric curvilinearly stiffened plates. *Applied Mathematical Modelling*. 2017;45:336-364.
- 33- Hao P, Yuan X, Liu H, Wang B, Liu Ch, Yang D, et al. Isogeometric buckling analysis of composite variable-stiffness panels. *Composite Structures*. 2017;165:192-208.
- 34- Austin Cottrell J, Hughes TJR, Bazilevs Y. *Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2009.
- 35- Piegl L, Tiller W. *The NURBS book*. 2nd Edition. Berlin: Springer; 1997.
- 36- Reddy JN. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. 3rd Edition. Hoboken: John Wiley & Sons; 2017.
- 37- Beer G, Bordas S, editors. *Isogeometric methods for numerical simulation*. Berlin: Springer; 2015.
- 21- Farzam A, Hassani B. A new efficient shear deformation theory for FG plates with in-plane and through-thickness stiffness variations using isogeometric approach. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019;26(6):512-525.
- 22- Farzam A, Hassani B, Karamodin A. Size-dependent analysis of functionally graded nanoplates using refined plate theory and isogeometric approach. 11th International Congress on Civil Engineering, 2018 May 8-10, Tehran, Iran. Tehran: University of Tehran; 2018.
- 23- Farzam A, Hassani B, Karamodin A. Free vibration analysis of FG nanoplates using quasi-3D hyperbolic refined plate theory and the isogeometric approach. International Congress on Science and Engineering, 2018 March 12, Hamburg, Germany. Unknown city: Unknown Publisher; 2018.
- 24- Khorshidi K, Asgari T, Fallah A. Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2015;2(2):79-93.
- 25- Khorshidi K, Khodadadi M. Precision closed-form solution for out-of-plane vibration of rectangular plates via trigonometric shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2016;3(1):31-43.
- 26- Khorshidi K, Khodadadi M. Precision closed-form solution for out-of-plane vibration of rectangular plates via trigonometric shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2017;4(2):127-137.
- 27- Khorshidi K, Siahpush A, Fallah A. Electro-mechanical free vibrations analysis of composite rectangular piezoelectric nanoplate using modified shear deformation theories. *Journal of Science and Technology of Composites*. 2017;4(2):151-160. [Persian]
- 28- Noorabadi M, Najafi M, Nobakhti A, Eskandarijam J.