



Development of Direct Linearization Method in Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies by Using NURBS Curves

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Haji Zahedi S.¹ MSc,
Moetakef-Imani B.*¹ PhD

How to cite this article

Haji Zahedi S, Moetakef-Imani B. Development of Direct Linearization Method in Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies by Using NURBS Curves. Modares Mechanical Engineering, 2020;20(3):751-759.

ABSTRACT

With the advancement of the manufacturing processes and the continuing need for increasingly precise assemblies, consideration of dimensional and geometric tolerances has been of great importance in tolerance analysis of mechanical assemblies. Therefore, in recent decades, several methods have been developed and implemented for calculating the influences of geometric errors of components on the final performance of the assembly. One of the proposed methods for tolerance analysis is the Direct Linearization Method (DLM). However, DLM has significant advantages in dimensional tolerance analysis, due to simplifications used in this technique, it does not have the ability to solve assemblies including free form profiles. In this research, a new method has been proposed to consider the complex profiles in the process of DLM. In the proposed combination method, rational Bezier curves have been used to define component profiles such as elliptical profiles, cams, edge joints, and non-circular profiles that have a complex error variation. Then, by using principles of DLM and rational Bezier equations, the developed algorithm is successfully accomplished. In this way, we can not only use significant advantages of DLM in dimensional tolerance analysis but also it is possible to solve assemblies including a component with complex profiles without any simplification. The developed hybrid approach has been presented in detail by solving an example of assembly tolerance analysis. Finally, validation has been performed and the accuracy of the proposed approach was confirmed using Monte Carlo simulation.

Keywords Tolerance Analysis; Direct Linearization Method; Geometric Tolerances; NURBS

CITATION LINKS

[1] Tolerancing: Managing uncertainty from conceptual design to ... [2] Tolerance analysis-key characteristics identification by sensitivity ... [3] Generalized 3-D tolerance analysis of mechanical assemblies with small kinematic ... [4] Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies Based on the Product of Exponentials ... [5] Geometric modeling of manufacturing processes variations for model-based tolerance ... [6] In: Polini W, editor. Geometric ... [7] A review of two models for tolerance analysis of an assembly: Jacobian and ... [8] Tolerance analysis of planar mechanisms based on a residual approach: A complementary ... [9] Including geometric feature variations in tolerance analysis of mechanical ... [10] Incorporating geometric feature variation with kinematic tolerance analysis of ... [11] The direct linearization method applied to position error in kinematic ... [12] Tolerance analysis of a trigger assembly in direct linearization ... [13] Tolerance analysis of flexible kinematic mechanism using DLM ... [14] NURBS-based variational modeling as a tool for the analysis of geometric ... [15] Statistical tolerance analysis of over constrained mechanical assemblies with form defects considering ... [16] Tolerance analysis-Form defects modeling and simulation by modal decomposition and ... [17] Skin Model Shapes: A new paradigm shift for geometric variations modelling in mechanical ... [18] Novel approaches for the assembly simulation of rigid skin model shapes in tolerance ... [19] 3D Tolerance Analysis with manufacturing signature and operating ... [20] Taking into account form variations in polyhedral approach in tolerancing ... [21] Statistical Tolerance Analysis with T-Maps for ... [22] Comparative Study of Tolerance Analysis Methods Applied to a Complex ... [23] A comprehensive study of three dimensional tolerance analysis ... [24] A comprehensive review of tolerance analysis ... [25] Nurbs-based profile reconstruction using constrained fitting ... [26] Development of machinable ellipses by NURBS ... [27] Direct manipulations of B-spline and NURBS ... [28] The method of tolerance analysis base on the Monte ... [29] Comparison of assembly tolerance analysis by the direct linearization and modified Monte Carlo simulation ... [30] Applied statistics and probability for ... [31] Review of statistical approaches to tolerance ... [32] Chi-square test and its application in hypothesis ...

¹Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*Correspondence

Address: Room 303, Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Azadi Square, Mashhad, Iran. Postal Code: 9177948944

Phone: +98 (51) 38815100

Fax: +98 (51) 38807185

imani@um.ac.ir

Article History

Received: April 7, 2019

Accepted: July 28, 2019

ePublished: March 01, 2020

ارتقای روش خطی‌سازی مستقیم در تحلیل تفرانسی مجموعه‌های مکانیکی با استفاده از منحنی نرژ

سعیده حاجی‌زاهدی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

بهنام معتکف‌ایمانی PhD*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

چکیده

با پیشرفت فرآیندهای ساخت و نیاز پیوسته به ساخت مجموعه‌های دقیق‌تر، در نظر گرفتن تفرانسی‌های ابعادی و هندسی در تحلیل تفرانسی مجموعه‌های مکانیکی اهمیت زیادی یافته است. از این رو در دهه‌های اخیر، روش‌های متعددی برای محاسبه تأثیر خطاهای هندسی اجزاء روی عملکرد نهایی مجموعه توسعه یافته و مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از بهترین روش‌های تحلیل تفرانسی، خطی‌سازی مستقیم است. با وجود مزایای ارزشمند روش خطی‌سازی مستقیم در تحلیل تفرانسی ابعادی، این روش به علت ساده‌سازی‌های مورد استفاده، توانایی حل مجموعه‌هایی که دارای پروفیل با فرم آزاد هستند را ندارد. در این تحقیق، یک راهکار نوین برای در نظر گرفتن پروفیل‌های پیچیده در روند حل روش خطی‌سازی مستقیم پیشنهاد شده است. در روش ترکیبی پیشنهاد شده، منحنی‌های بزیر (Bezier) کسری برای تعریف پروفیل اجزایی همچون پروفیل‌های بیضوی، بادامک‌ها، مفاصل لبه‌ای و پروفیل‌های غیردایروی که تغییرات خطای پیچیده‌ای دارند، استفاده شده است. سپس با استفاده از اصول روش خطی‌سازی مستقیم و در نظر گرفتن معادلات بزیر کسری، الگوریتم ارتقاده‌شده تکمیل شد. به این ترتیب نه تنها می‌توان از مزایای مهم روش خطی‌سازی مستقیم در تحلیل تفرانسی ابعادی استفاده کرد، بلکه مجموعه‌های دارای اجزاء با پروفیل‌های پیچیده را نیز می‌توان بدون ساده‌سازی حل کرد. رویکرد ترکیبی بهبود داده‌شده با جزییات و همراه با حل نمونه‌ای از تحلیل تفرانسی مجموعه مکانیکی ارائه شده است. در نهایت، اعتبارسنجی انجام شده است و صحت رویکرد ارائه‌شده با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو مورد تأیید قرار گرفت.

کلیدواژه‌ها: تحلیل تفرانسی، روش خطی‌سازی مستقیم، تفرانسی‌های هندسی، نرژ

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۵/۶

*نویسنده مسئول: imani@ferdowsi.um.ac.ir

۱- مقدمه

ایجاد انواع خطا در کلیه فرآیندهای تولید، اجتناب‌ناپذیر است. با توجه به اینکه در طراحی، قطعه به صورت ایده‌آل هندسی در نظر گرفته می‌شود، برای تولید مجموعه، تفرانسی‌ها یعنی محدوده مجاز انحرافات ساخت، تعریف شده‌اند^[1]. تعاریف متعددی برای ویژگی کلیدی مجموعه‌های مونتاژی وجود دارد^[2]. در این مقاله منظور از ویژگی کلیدی، ویژگی‌هایی از محصول است که عملکرد نهایی محصول وابسته به آن است^[3]. تحلیل تأثیر انباشتگی تفرانسی اجزای یک مجموعه روی ویژگی کلیدی آن مجموعه را تحلیل تفرانسی می‌گویند. تخصیص مناسب تفرانسی‌ها در قطعات مجزای یک مجموعه می‌تواند سبب کاهش هزینه در هر مجموعه، افزایش احتمال تناسب قطعات، کاهش تعداد قطعات مردودی و حجم

دوباره‌کاری‌ها در ساخت اجزاء شود و برای تضمین صحت کارکرد ضروری است^[4].

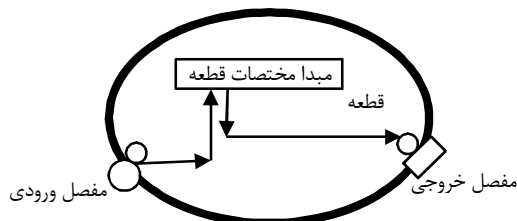
در دو دهه پیش، تلاش‌های زیادی برای ارائه روش‌هایی برای تحلیل تفرانسی که تغییرات هندسی را نیز پوشش دهد، صورت گرفته است. روش‌های رایج در تحلیل تفرانسی را می‌توان به دو دسته تحلیلی و مدل‌سازی تقسیم کرد^[5]. رویکردهای تحلیلی، یعنی استفاده از معادلات ابعادی در حل مساله که ویژگی کلیدی مجموعه را به تغییرات اجزاء مرتبط می‌کند. روش‌های برداری، ماتریسی، اکوبین و ترسور (Torsor) از جمله روش‌های رویکرد تحلیلی هستند. پویایی با مقایسه این چهار مدل نشان داده است که در میان این روش‌ها، روش برداری نسبت به سه روش دیگر مناسب‌تر است و برای در نظر گرفتن تفرانسی‌های هندسی نیز قابلیت‌های بیشتری دارد^[6, 7]. روش خطی‌سازی مستقیم یکی از روش‌های تحلیل تفرانسی برداری است که اولین بار ۱۹۸۸ ارائه شد^[8]. چپس و همکاران، قابلیت در نظر گرفتن تفرانسی‌های هندسی را نیز به آن اضافه نمودند^[9]. د/لینگ و همکاران، به بررسی چند روش برداری از جمله خطی‌سازی مستقیم برای در نظر گرفتن تفرانسی‌های هندسی در مدل‌های سه‌بعدی پرداخته‌اند^[10]. ویتور و همکاران، یک نمونه مکانیزم را به روش خطی‌سازی مستقیم تحلیل نموده‌اند^[11]. غلامی و موحدی، با حل مجموعه پیچیده چکاننده با روش خطی‌سازی مستقیم، قابلیت استفاده از این روش در مکانیزم‌های پیچیده‌تر را نشان داده است^[12]. ایمانی و پور، تفرانسی‌های یک مکانیزم سینماتیکی انعطاف‌پذیر را با استفاده از روش خطی‌سازی مستقیم تحلیل و ویرایش نموده است^[13].

از مهم‌ترین نقاط قوت روش خطی‌سازی مستقیم می‌توان به قابلیت در نظر گرفتن احتمالات آماری خطاهای ساخت و توانایی به‌دست آوردن یک رابطه صریح بین تغییرات اجزاء و تغییرات ویژگی کلیدی اشاره کرد؛ اما یک ضعف مهم این روش مربوط به ساده‌سازی بیش از حد برای در نظر گرفتن تفرانسی‌های هندسی است.

در رویکرد مدل‌سازی، مرز اجزاء مدل‌سازی شده و خطاهای ساخت به مدل نامی اعمال می‌شود. ونگ، به مطالعه روش‌های مختلف اعمال خطاهای هندسی به مدل مرزی پرداخته است^[5]. پیرس و همکاران، فرآیندی نظام‌مند را پیشنهاد کردند که در آن اجزاء با استفاده از سطوح نرژ (NURBS) با انحرافات واقعی که در ساخت به‌وجود می‌آیند، مدل‌سازی می‌شوند و سپس با تعریف یک تابع هزینه و بهینه‌سازی آن، موقعیت‌دهی این قطعات خارج از فرم نامی را در یک مجموعه مونتاژی یا مکانیزم شبیه‌سازی می‌کند^[14]. مهم‌ترین مزیت رویکرد بر پایه مدل، استفاده از اطلاعات ساخت در فرآیند تحلیل تفرانسی و همچنین توانایی مدل‌سازی گستره متنوعی از انحرافات ابعادی و هندسی است^[14]. از معایب این روش هزینه محاسباتی زیاد فرآیند و عدم استفاده از داده‌های آماری و احتمالات در ساخت است.

تلاش‌های متعددی برای ارتقای روش مدل‌سازی مرزی با تکیه بر شبیه‌سازی تفرانسی‌های فرم لبه‌ها و سطوح و نحوه تماس سطوح با

می‌دهند که در انباشتگی تیرانی در مجموعه مونتاژی نقش موثری دارند [3]. یک حلقه برداری، می‌بایست از قوانین مدل‌سازی مشخصی پیروی کند؛ یعنی باید برای عبور از هر قطعه، از یک مفصل وارد شود و تا مبدأ مختصات قطعه، از مسیر مختصات پیروی کند. سپس از مسیر مختصات دوم که به مفصلی دیگر هدایت می‌کند، پیروی کند و خروج آن به سوی قطعه نزدیک بعدی در مجموعه مونتاژی باشد. بردارهای رسم‌شده در شکل ۱، یک مسیر برداری را به صورت شماتیک نشان می‌دهند.



شکل ۱) مسیر برداری دوبعدی از میان یک قطعه [1]

می‌توان به ازای هر ویژگی کلیدی، یک حلقه باز در مدل تیرانی مونتاژ داشت، اما تعداد حلقه‌های بسته یک عدد مشخص است که از رابطه ۱ تعیین می‌شود [3]. در رابطه ۱، L تعداد حلقه‌های مورد نیاز، J تعداد مفصل‌ها و P تعداد قطعات است.

$$L = J - P + 1 \quad (۱)$$

پس از ساخت مدل تیرانی، اولین مرحله در تحلیل، تولید معادلات مونتاژ از حلقه‌های برداری است. این معادلات با جمع‌کردن مولفه‌های x و y هر بردار و مجموع زوایای بردارها در حرکت روی حلقه به دست می‌آیند. معادلات حلقه، مقادیر متغیرهای مونتاژ را بر حسب متغیرهای اجزاء به طور ضمنی تعریف می‌کند. برای به دست آوردن مقادیر نامی متغیرهای مونتاژی، دستگاه معادلات حلقه‌ها باید حل شود. از آنجایی که تغییرات مونتاژی فقط برای تغییرات کوچک بررسی می‌شود، می‌توان معادلات را با بسط مرتبه اول سری تیلور، خطی‌سازی کرد. یکی از مزایای روش خطی‌سازی مستقیم، امکان تعیین حساسیت‌های تیرانی است. حساسیت تیرانی نسبت به یک جزء، تغییر ویژگی کلیدی را به ازای یک واحد تغییر در اندازه آن جزء نشان می‌دهد. مقادیر حساسیت‌های تیرانی می‌توانند برای کمک به تصمیم‌گیری در اینکه کدام تیرانس‌ها بسته‌تر یا بازتر شوند، مورد استفاده قرار بگیرند. در رابطه ۲، ماتریس حساسیت تیرانی ویژگی‌های کلیدی، با $[S]$ نشان داده شده است.

$$[S] = [C - E * B^{-1} * A] \quad (۲)$$

در رابطه ۲، $[A]$ ماتریس مشتقات جزئی معادلات حلقه‌های بسته نسبت به متغیرهای اجزاء، $[B]$ ماتریس مشتقات جزئی معادلات حلقه‌های بسته نسبت به متغیرهای مونتاژی، $[C]$ ماتریس مشتقات جزئی معادلات حلقه‌های باز نسبت به متغیرهای اجزاء و $[E]$ ماتریس مشتقات جزئی معادلات حلقه‌های باز نسبت به

یکدیگر انجام شده است [15, 16]. شلایک و همکاران، روش پوسته‌مبنا (Skin Based Method) را با تکیه بر مدل‌سازی سطوح به صورت ابر نقاط یا سطوح مش‌بندی‌شده ارائه دادند [17]. هرچند روش پوسته‌مبنا می‌تواند برای شبیه‌سازی بعضی مجموعه‌های مونتاژی واقعی به کار رود اما برای مدل‌سازی مجموعه‌های پیچیده‌تر، این روش همچنان نیازمند ارتقا است [18]. مدل‌هایی برای در نظر گرفتن اثر گرانش و اصطکاک مطرح شده‌اند؛ اما عیب همه آنها افزایش زمان شبیه‌سازی است [19].

از دیگر روش‌های تحلیل تیرانی که توانایی در نظر گرفتن انحرافات فرم را دارند، رویکرد استفاده از چندوجهی‌ها (Polyhedral Approach) [20] و روش نگاشت تیرانی (T-map) [21] است که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند. هر چند نتایج تحقیقات نشان می‌دهد که در رویکرد چندوجهی، تخمین تعداد وجوه و گوشه‌ها در حالت کلی بسیار پیچیده است [20] و روش نگاشت تیرانی نیز همچنان در مرحله آزمایشی است و در حال حاضر در هیچ بسته تجاری قابل استفاده نیست [22].

چن و همکاران، مقایسه‌ای جامع بین روش‌های رایج تحلیل تیرانی انجام داده‌اند. روش‌های نگاشت تیرانی، مدل ماتریسی، مدل اکوین-ترسر یکپارچه و روش خطی‌سازی مستقیم را مورد بررسی قرار داده‌اند. ایشان تاکید کرده‌اند که مدل‌های ریاضی تحلیل تیرانی برای پوشش‌دادن مناسب تیرانس‌های فرم و لنگی به تحقیقات بیشتری نیاز دارند [23]. روش خطی‌سازی مستقیم با وجود داشتن مزایای زیاد، توانایی پوشش‌دهی خوبی در تیرانس‌های پروفیل ندارد، در حالی که رویکرد مدل‌سازی با منحنی‌های نرینز، قابلیت خوبی در این زمینه دارد؛ اما از لحاظ محاسباتی بسیار پرهزینه است.

در این مقاله، با معرفی یک روند نوین، با ترکیب دو رویکرد تحلیلی و مدل‌سازی در تحلیل تیرانی، در قسمت‌هایی که تیرانس پروفیل اهمیت ویژه‌ای دارد (همچون بادامک‌ها، قطعات غیرتخت و مفاصل لبه‌ای)، از مدل‌سازی منحنی‌های نرینز برای وارد کردن مختصات پروفیل و خطاهای آن به معادلات حل به روش خطی‌سازی مستقیم استفاده شده است. به این ترتیب، قابلیت‌های روش خطی‌سازی ارتقا یافته و در تحلیل تیرانی پروفیل‌های پیچیده‌تر و همین طور پوشش‌دهی تیرانس‌های پروفیل‌ها، پیشرفت قابل توجهی صورت داده شده است. در همین راستا یک مثال به روش ترکیبی یعنی کمک‌گرفتن از مدل‌سازی منحنی‌های نرینز در حل به روش خطی‌سازی مستقیم مورد بررسی قرار گرفته است. این مثال مربوط به مجموعه قطعات با تیرانس انباشته است که یکی از کاربردهای رایج روش خطی‌سازی مستقیم است. صورت این مساله با تغییر پروفیل دایروی یکی از اجزاء به منحنی نرینز تغییر یافت تا روش خطی‌سازی مستقیم برای تحلیل پروفیل‌های پیچیده‌تر ارتقا یابد.

۲- روش خطی‌سازی مستقیم

در روش خطی‌سازی مستقیم، حلقه‌های برداری، قطعات مجموعه را نسبت به یکدیگر موقعیت‌دهی می‌کنند. بردارها ابعادی را نشان

۴- در نظر گرفتن تیرانس هندسی پروفیل در روش خطی‌سازی مستقیم به کمک منحنی نریز

در بسیاری از مجموعه‌های مکانیکی مثل مکانیزم‌های بادامکی، قطعات با پروفیل غیردایروی یا با شکل آزاد وجود دارند. علاوه بر این در بعضی موارد همچون مفاصل لبه‌ای که تیرانس‌های هندسی اجزاء اهمیت زیادی پیدا می‌کند، هر چند خود پروفیل سطح تخت است، اما توزیع خطای آن فرم تخت ندارد. در چنین مواردی بسته به پیچیدگی پروفیل تحلیل تیرانسی با روش‌های موجود بسیار سخت یا غیرممکن می‌نماید. در همین راستا در این مقاله پیشنهاد شده است تا برای اینکه بتوان چنین مجموعه‌هایی را تحلیل نمود، از منحنی نریز در روند حل به روش خطی‌سازی مستقیم استفاده شود. منحنی‌های نریز ویژگی‌های قابل توجهی دارند که از مهم‌ترین آنها می‌توان به قابلیت ویرایش محلی، قابلیت جابه‌جایی آسان منحنی، قابلیت مدل‌سازی گستره متنوعی از شکل‌های تغییر یافته و دامنه تغییرات نسبتاً وسیع نام برد. در روش ارایه شده، فقط اجزایی که پروفیل نامی یا توزیع خطای آنها اهمیت دارد، با منحنی نریز تعریف می‌شوند. سپس معادلات نریز در معادلات حلقه‌ها به جای بردار تعریف این اجزاء جایگزین می‌شود. از سویی پارامترهای تعریف‌کننده منحنی نریز (نقاط کنترل یا وزن‌ها) به عنوان اجزای مجموعه مکانیکی معرفی می‌شوند. بنابراین مشتقات معادلات نسبت به این پارامترها و تیرانس آنها نیز باید به مساله وارد شود. باید به یاد داشت که تیرانس نقاط کنترل/وزن‌ها بایست به گونه‌ای باشد که در نهایت بتواند خطای منحنی را تعریف کند. همچنین باید در نظر گرفت که به علت تعریف پیوسته منحنی نریز تیرانس نقاط کنترل به یکدیگر وابسته است. به این ترتیب با وارد کردن منحنی نریز مساله با اصول روش خطی‌سازی مستقیم حل می‌شود. برای توضیح بهتر چگونگی روش ارایه شده، نمونه‌ای با روش ترکیبی حل شد که در قسمت بعدی آورده شده است.

۵- تحلیل تیرانسی مجموعه قطعات انباشته با پروفیل نریز ۱-۵ مدل‌سازی مساله

مجموعه مونتاژی دوبعدی قطعات انباشته یکی از رایج‌ترین مثال‌های مورد استفاده در تحلیل تیرانسی به روش خطی‌سازی است [3]. در این قسمت برای بسط قابلیت‌های روش خطی‌سازی، فرض شد در مثال قطعات انباشته به جای دایره، پروفیل پیچیده‌تری داشته باشیم. بنابراین از بیضی به جای دایره استفاده شد. همچنین برای اینکه انواع مختلفی از پروفیل‌ها پوشش داده شود، از تئوری منحنی نریز (در اینجا بزیر کسری) برای ایجاد بیضی پیشنهاد شده است. بنابراین روش حل در اینجا محدود به پروفیل بیضی نیست و برای هر پروفیل دیگر که با منحنی نریز ساخته شود، اعتبار دارد. مدل از دو قطعه قاب و یک پروفیل تشکیل شده است (شکل ۲). در شکل ۲، اندازه مهمی که عملکرد مجموعه را نشان می‌دهد، فاصله بین سطح بالایی پروفیل و قاب است. برای مقید کردن درجات آزادی موقعیت بیضی روی قاب، فرض شد مکانیزم به گونه‌ای است که قطر

متغیرهای مونتاژی است. با استفاده از مقادیر حساسیت‌های تیرانسی و روش‌های آماری، می‌توان تاثیر انباشتگی تیرانسی روی ویژگی کلیدی را محاسبه نمود [24]. در رابطه ۳، δV_i تیرانس تخمین زده شده برای ویژگی کلیدی i ام به روش مجذور مجموع مربعات (Root Sum Square)، S_{ij} حساسیت تیرانسی ویژگی کلیدی i ام نسبت به تغییرات جزء j ام و δx_j تیرانس جزء j ام است.

$$\delta V_i = \sqrt{\sum ((S_{ij} \delta x_j)^2)} \quad (3)$$

از رابطه ۴، درصد مشارکت تیرانس هر یک از اجزاء در تیرانس ویژگی کلیدی i ام محاسبه می‌شود. در رابطه زیر، V_i رابطه صریح تعریف‌کننده ویژگی کلیدی i ام در معادلات حلقه‌ها است. به عبارت دیگر، $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ مشتق جزئی رابطه به دست آوردن ویژگی کلیدی i ام نسبت به جزء j ام از مجموعه است.

$$\%Cont_i = \frac{(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \cdot \delta x_j)^2}{\sum (\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \cdot \delta x_j)^2} \quad (4)$$

۳- منحنی نریز

کلمه نریز، مخفف ترجمه عبارت بی‌اسپیلاین‌های غیریکنواخت کسری (Non Uniform Rational B-Splines) است. منحنی‌های نریز به صورت پارامتری تعریف می‌شوند و از رابطه ۵ به دست می‌آیند [25].

$$C(u) = \sum_{i=0}^n \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} P_i \quad (5)$$

در رابطه ۵، $\{P_i\}$ نقاط کنترل، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(u)\}$ توابع پایه منحنی بی‌اسپیلاین درجه p هستند که $N_{i,p}(u)$ تابع پایه i ام از درجه p به صورت بازگشتی با رابطه ۶ تعریف می‌شود.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (6)$$

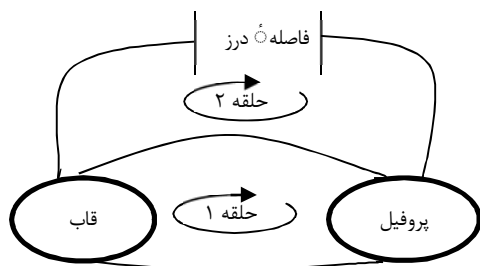
در رابطه ۶، u_i نقاط گرهی غیریکنواخت در برداری همچون U در رابطه ۷ هستند. در رابطه ۷، معمولاً a مساوی صفر، b مساوی یک و w_i بزرگ‌تر از صفر در نظر گرفته می‌شوند. m نیز تعداد نقاط گرهی است.

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (7)$$

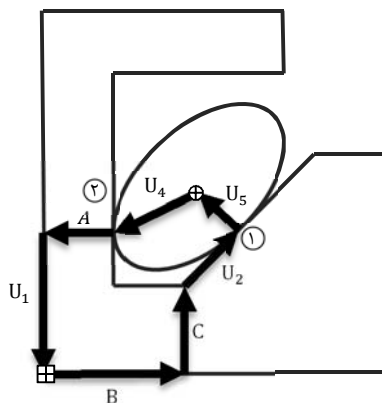
منحنی‌های بی‌اسپیلاین، بزیر کسری (Rational Bezier) و بزیر زیرمجموعه‌های کوچک‌تری از خانواده نریز به شمار می‌آیند [25]. اگر همه وزن‌ها باهم مساوی باشند، آنگاه منحنی نریز، یک منحنی بی‌اسپیلاین خواهد بود. همچنین اگر یک منحنی بی‌اسپیلاین درجه p را در نقاط گرهی به منحنی‌های کوچک‌تر تقسیم کنیم، هر کدام از این منحنی‌های کوچک‌تر، یک منحنی بزیر درجه p خواهد بود.

جدول ۱) ابعاد اجزاء مجموعه قطعات انباشته با پروفیل بیضی

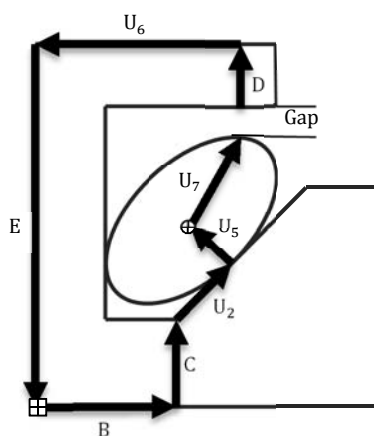
نام اندازه	تیرانس	اندازه اسمی
A	± 0.1 (میلی متر)	۱۵ (میلی متر)
B	± 0.1 (میلی متر)	۳۵ (میلی متر)
C	± 0.1 (میلی متر)	۲۸/۸۵ (میلی متر)
D	± 0.1 (میلی متر)	۱۵ (میلی متر)
E	± 0.1 (میلی متر)	۱۱۰ (میلی متر)
θ	± 5 (درجه)	۴۰ (درجه)
a	± 0.1 (میلی متر)	۳۵ (میلی متر)
b	± 0.1 (میلی متر)	۲۰ (میلی متر)
W_0	۰	۱
W_1	± 0.1	۱
W_2	۰	۲



شکل ۳) نمودار مونتاژی مجموعه پروفیل بیضی



شکل ۴) حلقه شماره ۱ (حلقه بسته)



شکل ۵) حلقه شماره ۲ (حلقه باز)

بزرگ بیضی همواره با سطح شیب دار قاب موازی است. در جدول ۱، اندازه ها و تیرانس اجزای مجموعه آمده است. برای حل مساله تحلیل تیرانسی این مجموعه به روش خطی سازی مستقیم، ابتدا ارتباط بین اجزاء با استفاده از نمودار مونتاژی مشخص شد [3]. بنابر نمودار مونتاژی رسم شده (شکل ۳)، به یک حلقه باز و یک حلقه بسته برای تحلیل نیاز است. مطابق قوانین روش خطی سازی مستقیم، بردارهای حلقه های بسته و باز به ترتیب در شکل های ۴ و ۵ رسم شده اند.

همان طور که گفته شد، برای تعریف پروفیل بیضی از منحنی بزیبر کسری استفاده شده است. یک منحنی بزیبر کسری درجه دو با رابطه ۸ تعریف می شود. در رابطه ۸، t پارامتر تعریف کننده منحنی است که از صفر تا یک تغییر می کند. همچنین b_0 ، b_1 و b_2 مختصات نقاط کنترل و W_0 ، W_1 و W_2 به ترتیب وزن آن نقاط کنترل هستند.

$$c(t) = \frac{w_0(1-t)^2 b_0 + w_1 2t(1-t)b_1 + w_2 t^2 b_2}{w_0(1-t)^2 + w_1 2t(1-t) + w_2 t^2} \quad (8)$$

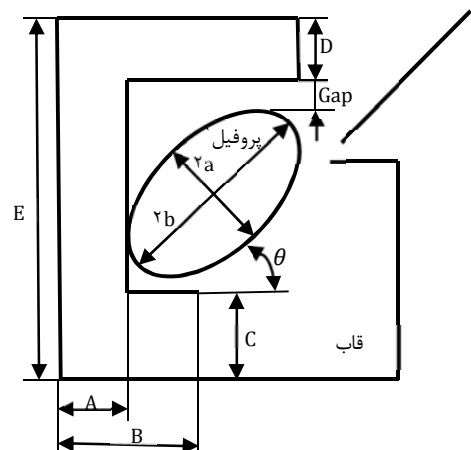
برای رسم قسمت ۱ در شکل ۶ از معادل قراردادن رابطه منحنی بزیبر کسری با معادله پارامتری بیضی نامی b_0 ، b_1 و b_2 به ترتیب $(a, 0)$ ، (a, b) و $(0, b)$ و وزن آنها برابر با ۱، ۱ و ۲ محاسبه شد [26].

به طور مشابه برای سه قسمت دیگر بیضی نیز منحنی بزیبر کسری مربوطه تعیین شد. همان طوری که در تئوری منحنی های نرینز یا بزیبر کسری بیان می شود، مقاطع مخروطی با این روش به صورت ایده آل و بدون تقریب ایجاد می شوند. در شکل ۶ می توان منحنی های بزیبر کسری و نقاط کنترل آنها را مشاهده نمود.

در صورتی که قطر بزرگ بیضی با محور X زاویه ϕ داشته باشد یا مرکز بیضی در نقطه ای با مختصات (X_c, Y_c) باشد، رابطه ۸ در یک ماتریس همگن انتقال و دوران ضرب شده است [27] و معادله عمومی آن به صورت رابطه ۹ نوشته می شود. $C_x(t)$ و $C_y(t)$ مختصات X و Y نقاط منحنی بزیبر کسری در موقعیت جدید است.

$$C_x(t) = X_c + c_x(t) \cos(\phi) - c_y(t) \sin(\phi) \quad (9-الف)$$

$$C_y(t) = Y_c + c_x(t) \sin(\phi) + c_y(t) \cos(\phi) \quad (9-ب)$$



شکل ۲) مجموعه قطعات انباشته با پروفیل بیضی

نوشتن روابط هندسی مونتاژی بین اجزاء به صورت تحلیلی، پنج معادله E_1 تا E_5 به دست آمد.

می‌دانیم که برای نوشتن معادلات تماس اجزاء، در نقطه تماس بیضی با بلوک معادله بیضی و معادله منحنی مماس در هم صدق می‌کنند. بنابراین معادله منحنی مماس شده را نوشته و به جای مقادیر x و y آن، معادله مختصات منحنی بزیر کسری در نقطه تماس جایگزین می‌شود. برای نقطه تماس ۱ در شکل ۴، از جایگزینی رابطه ۸ با پارامتر t_5 ، در رابطه ۱۴ که معادله خط ۱ است، رابطه ۱۵ به دست می‌آید.

$$y - x \cdot \tan(\theta) - C + B \cdot \tan(\theta) = 0 \quad (14)$$

$$E_1 = C_y(t_5) - C_x(t_5) \cdot \tan(\theta) - C + B \cdot \tan(\theta) = 0 \quad (15)$$

برای نقطه تماس شماره ۲ در شکل ۴، منحنی مماس شده خط $x = B$ است. بنابراین، با جایگزینی رابطه ۹ با پارامتر در آن رابطه ۱۶ به دست می‌آید.

$$E_2 = C_x(t_4) - B = 0 \quad (16)$$

همچنین، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه تماس، برابر با مشتق تابع منحنی در طول نقطه تماس است. بنابراین در نقاط تماس ۱ و ۲ می‌توان از منحنی بزیر کسری نسبت به x مشتق گرفته و معادل شیب خط مماس قرار داد. مشتق تابع پارامتری از رابطه ۱۷ به دست می‌آید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad (17)$$

در نقطه تماس ۱، شیب خط مماس برابر با $\tan \theta$ است. اگر مشتق $C_y(t)$ و $C_x(t)$ نسبت به پارامتر t به ترتیب با $\dot{C}_y(t)$ و $\dot{C}_x(t)$ نشان داده شود، معادله شیب‌ها در نقطه تماس ۱ به صورت رابطه ۱۸ است.

$$E_3 = \dot{C}_y(t_5) - \tan(\theta) \cdot \dot{C}_x(t_5) = 0 \quad (18)$$

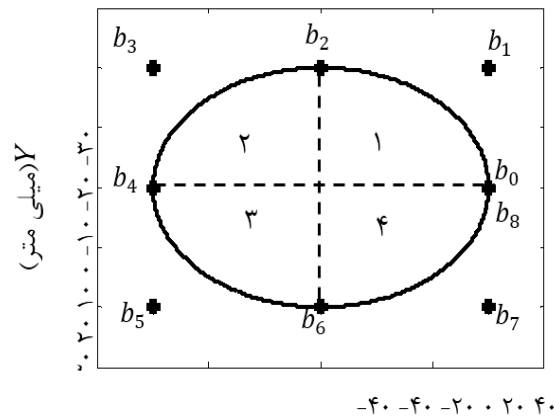
در نقطه تماس ۲، چون شیب بی‌نهایت است، از نرمال منحنی استفاده می‌شود. شیب خط نرمال بر منحنی در نقطه ۲، صفر است. بنابراین در نقطه تماس ۲، می‌توان رابطه ۱۹ را نوشت.

$$E_4 = \dot{C}_x(t_4) = 0 \quad (19)$$

در حلقه باز، با پیدا کردن ماکزیمم منحنی، مقدار متغیر t_7 نیز معین می‌شود. شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ماکزیمم آن، صفر است. پس از رابطه منحنی بزیر کسری قسمت ۱ بیضی که در شکل ۷ نشان داده شده است، نسبت به t_7 مشتق گرفته شده و معادل با صفر قرار داده شد.

$$E_5 = \dot{C}_y(t_7) = 0 \quad (20)$$

به این صورت، با داشتن معادلات ۱ تا ۵ و مقادیر اندازه‌های اجزاء، مقادیر مونتاژی t_4, t_5, t_7, X_c و Y_c مجموعه به دست می‌آید. سایر مقادیر مونتاژی را نیز می‌توان از حل دستگاه معادلات حلقه‌ها به دست آورد.



شکل ۶ (چهار منحنی بزیر کسری رسم شده و نقاط کنترل آنها)

۲-۵ معادلات حلقه‌ها

برای تحلیل مدل تلرانسی در روش خطی‌سازی مستقیم، تصویر بردارهای حلقه‌های بسته و باز که در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است، در راستای محورهای x و y محاسبه شد. در روابط زیر، t_4 و t_5 ، پارامترهای متناظر U_4 و U_5 هستند. مقادیر U_1 ، U_2 و U_6 نیز جزء متغیرهای مونتاژی هستند. روابط ۱۰ و ۱۱، معادلات تصویر حلقه شماره ۱ و روابط ۱۲ و ۱۳ معادلات تصویر حلقه شماره ۲ را در راستای x و y نشان می‌دهد. لازم به ذکر است به علت متعامد بودن همه بردارها، در این مساله معادلات زاویه حذف می‌شود.

$$h_{1x} = B + U_2 \cos(\theta) - (C_x(t_5) - X_c) - (X_c - C_x(t_4)) - A = 0 \quad (10)$$

$$h_{1y} = C + U_2 \sin(\theta) + (Y_c - C_y(t_5)) - (Y_c - C_y(t_4)) - U_1 = 0 \quad (11)$$

$$h_{2x} = B + U_2 \cos(\theta) - (X_c - C_x(t_5)) + (C_x(t_7) - X_c) - U_6 = 0 \quad (12)$$

$$h_{2y} = C + U_2 \sin(\theta) + (Y_c - C_y(t_5)) + (C_y(t_7) - Y_c) + Gap + D - E = 0 \quad (13)$$

۳-۵ پیدا کردن مقادیر نامی متغیرهای مونتاژی

به طور کلی، مقادیر نامی متغیرهای مونتاژی از حل دستگاه معادلات ضمنی حلقه‌ها، به دست می‌آید. در این مساله h_{1x}, h_{1y}, h_{2x} و h_{2y} معادلات حلقه‌ها و $X_c, Y_c, U_1, U_2, U_6, t_4, t_5, t_7$ مجهولات مساله‌اند. از مقایسه تعداد مجهولات و معادله‌ها می‌توان گفت که با اضافه شدن متغیرهای مونتاژی ناشی از جایگزینی پروفیل بیضی به جای دایره، تعداد معادلات از تعداد مجهولات حلقه‌های موجود کمتر است. پس نمی‌توان مقادیر نامی متغیرهای مونتاژی را از حل دستگاه معادلات حلقه‌ها به دست آورد. از آنجایی که ادامه حل به روش خطی‌سازی مستقیم مستلزم داشتن این مقادیر مونتاژی است، با پیدا کردن نقاط تماس بیضی با بلوک و

۵-۵- مقایسه نتایج با روش مونت کارلو (Monte Carlo)

برای تایید صحت نتایج تحلیل انجام شده به روش خطی سازی مستقیم، نتایج آن با نتایج روش مونت کارلو مقایسه شد. در روش مونت کارلو در معادله به دست آوردن ویژگی کلیدی مجموعه، به جای مقادیر نامی اجزاء، مقداری اتفاقی در محدوده تیرانس آن جزء از مجموعه قرار داده می شود. سپس با توجه به مقادیر اتفاقی پیشنهاد شده، مقدار ویژگی کلیدی محاسبه می شود [28]. در اینجا برای مقادیر اتفاقی، توزیعی نرمال در نظر گرفته شده است که میانگین آن اندازه نامی جزء و انحراف معیار آن، تیرانس مجاز جزء است. این کار برای تعداد نقاط قابل توجهی انجام می شود تا بتوان رفتار کلی مجموعه را با تیرانس های موجود پیش بینی کرد. روش مونت کارلو روشی غیرخطی است. به این معنا که به طور مستقیم به محاسبه ویژگی کلیدی می پردازد. به همین علت برای اعتبارسنجی روش خطی سازی مستقیم که مشتقات را خطی در نظر می گیرد بسیار مناسب است [29]. برای تولید اعداد تصادفی از رابطه ۲۱ استفاده شد [30, 31].

$$x_i = \mu_i + r \cdot \sigma_i \quad (21)$$

در رابطه ۲۱، x_i مقدار متغیر جزء i ، μ_i مقدار میانگین جزء i ، r عددی تصادفی با انحراف معیار ۱ که توزیعی نرمال حول صفر دارد و σ_i انحراف معیار جزء i است. در جدول ۳، تیرانس فاصله کلیدی به دست آمده از روش خطی سازی مستقیم و شبیه سازی مونت کارلو با ۱۰۰۰ تکرار آمده است.

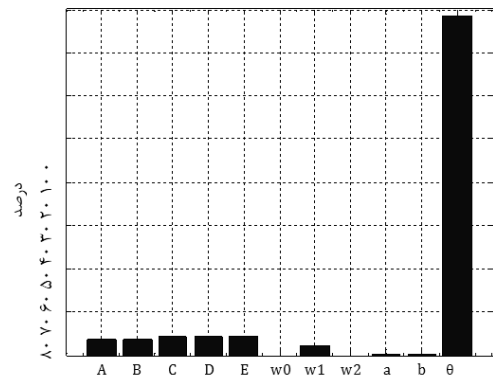
برای اطمینان از صحت نتایج، از آزمون فرض (Hypothesis Testing) برای انحراف معیار کل جمعیت استفاده شد. تیرانس ویژگی کلیدی معادل سه برابر σ در نظر گرفته شد [3]. در آزمون فرض، فرض اولیه بر این است که انحراف معیار جمعیت کل برابر با انحراف معیار پاسخ روش خطی سازی مستقیم است؛ سپس به رد یا تایید این فرض پرداخته می شود [30]. از آنجا که جمعیت کل دارای توزیع نرمال است از روش کای اسکور (Chi-Square) استفاده شد [32]. با این روش بازه انحراف معیار جمعیت کل با اطمینان ۹۹٪ درستی، بین ۱۴۷٪ تا ۱۶۵٪ به دست آمد. سطح معنی داری (P-Value) آزمون فرض انجام شده ۲۷۶٪ است که درستی فرض اولیه را تایید می کند. بنابراین با بیش از ۹۹٪ اطمینان می توان گفت که تیرانس به دست آمده از روش خطی سازی مستقیم، برابر با تیرانس جمعیت کل است.

جدول ۳) مقایسه پاسخ روش خطی سازی مستقیم با پاسخ روش مونت کارلو

روش	تیرانس GAP (میلی متر)	میانگین GAP (میلی متر)
مونت کارلو	۰/۴۷۶۳	۴/۶۵۴۱
خطی سازی مستقیم	۰/۴۷۹۱	۴/۶۵۴۹

۶- نتیجه گیری و پیشنهادها

در این مقاله، روش جدیدی برای تحلیل تیرانی مجموعه هایی که اجزایی با پروفیل غیردایروی و یا با شکل آزاد دارند پیشنهاد شد. این



شکل ۷) درصد مشارکت اجزاء در تیرانس ویژگی کلیدی

۴-۵- تحلیل تیرانس ها به روش خطی سازی مستقیم

با مشتق گیری از دستگاه معادلاتی که متغیرهای مونتاژی از آنها محاسبه می شود، ماتریس حساسیت تیرانس به دست می آید. بنابراین مشتقات مرتبه اول دستگاه معادلات $H = [h_{1x} \ h_{1y} \ h_{2x} \ E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4 \ E_5]^T$ نسبت به متغیرهای مونتاژی محاسبه شد. حساسیت ویژگی کلیدی نسبت به تغییرات اجزاء که از رابطه ۲ محاسبه شد، در جدول ۲ آورده شده است. در رابطه ۲، A و B به ترتیب مشتقات مرتبه اول دستگاه معادلات H نسبت به متغیرهای اجزاء و مونتاژی است. C، مشتق معادله h_{2y} (رابطه ۱۲) نسبت به متغیرهای اجزاء و E مشتق معادله h_{2y} نسبت به متغیرهای مونتاژی است.

جدول ۲) حساسیت تیرانی اجزاء

A	B	C	D	E	W0	W1	W2	a	b	θ
-۰/۹	-۰/۹	-۱	-۱	۱	-۴۱/۹	-۷/۲	۱/۸	-۱/۲	-۲	-۴۲/۱ Gap

از ترکیب تاثیر تیرانس ها و حساسیت ها، با استفاده از رابطه ۳، درصد مشارکت ابعاد اصلی قطعات مجموعه در تیرانس ویژگی کلیدی محاسبه شد (شکل ۷). با استفاده از این نمودار و در نظر گرفتن هزینه های ساخت، می توان اولویت تغییر تیرانس ها را تعیین کرد. با توجه به شکل ۷، بیشترین تاثیر در ویژگی کلیدی، مربوط به زاویه گوه بلوک (θ) است. این میزان تاثیر ۷۷٪ است. پس از آن، با اختلاف بسیار زیاد، ابعاد بلوک با درصد تاثیر بین ۴ تا ۶٪، بیشترین اهمیت را در تغییرات ویژگی کلیدی دارند. بنابراین می توان گفت که در صورت کنترل بسته تر خطای زاویه ای بلوک در θ، بازه خطای ویژگی کلیدی تا حدود زیادی قابل کنترل است. همچنین مشاهده می شود که تغییرات اندازه قطر اصلی و فرعی بیضی یعنی مقادیر a و b تاثیر چندانی ندارد، ولی شیب پروفیل بیضی در نقطه تماس که موثر از مقدار w_1 است، تقریباً به اندازه ابعاد بلوک و کمتر از ۵٪ در خطای ویژگی کلیدی موثر است. مقدار نامی ویژگی کلیدی، از حل دستگاه معادلات حلقه ها، ۴/۶۵۵ میلی متر به دست آمد و با استفاده از رابطه ۴، انباشتگی تیرانی ویژگی کلیدی در روش مجذور مجموع مربعات ۴/۷۹۱ میلی متر محاسبه شد.

توسعه پیشنهاد می‌شود برای مجموعه‌های با بیش از یک پروفیل نیز روش حل بررسی شود.

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

تأییدیه اخلاقی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

تعارض منافع: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

سهم نویسندگان: سعیده حاجی‌زاهدی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۵۰٪)؛ بهنام معتکف‌ایمانی (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی (۵۰٪)

منابع مالی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

منابع

- 1- Morse E, Dantan JY, Anwer N, Söderberg R, Moroni G, Qureshi A, et al. Tolerancing: Managing uncertainty from conceptual design to final product. *CIRP Annals*. 2018;67(2):695-717.
- 2- Idrissa D, Beaurepaire P, Homrib L, Gayton N. Tolerance analysis-key characteristics identification by sensitivity method. *Procedia CIRP*. 2018;75:33-38.
- 3- Gao J, Chase KW, Magleby SP. Generalized 3-D tolerance analysis of mechanical assemblies with small kinematic adjustments. *IIE Transactions*. 1998;30(4):367-377.
- 4- Yu J, Zhao Y, Wang H, Lai X. Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies Based on the Product of Exponentials Formula. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 2018;232(14):2616-2626.
- 5- Ong JB. Geometric modeling of manufacturing processes variations for model-based tolerance analysis [Dissertation]. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University; 1994.
- 6- Polini W, Bianca M, Colosimo NS, editors. Geometric tolerance analysis. In: Polini W, editor. *Geometric tolerances*. London: Springer; 2011. pp. 39-68.
- 7- Marziale M, Polini W. A review of two models for tolerance analysis of an assembly: Jacobian and Torsor. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*. 2011;24(1):74-86.
- 8- Tinoco HA, Durango S. Tolerance analysis of planar mechanisms based on a residual approach: A complementary method to DLM. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019;Article ID:9067624.
- 9- Chase KW, Jinsong G, Magleby SP, Sorensen CD. Including geometric feature variations in tolerance analysis of mechanical assemblies. *IIE Transactions*. 2016;28(10):795-807.
- 10- Dabling JG, Parkinson R, Adams BL, Chabries DM. Incorporating geometric feature variation with kinematic tolerance analysis of 3D assemblies [Dissertation]. Utah: Brigham Young University; 2001.
- 11- Wittwer JW, Chase KW, Howell LL. The direct linearization method applied to position error in kinematic linkages. *Mechanism and Machine*. 2004;39(7):681-963.
- 12- Gholami M, Movahhedy MR. Tolerance analysis of a trigger assembly in direct linearization method. *Journal of Simulation and Analysis of Novel Technologies in Mechanical Engineering*. 2009;2(2):1-10. [Persian]
- 13- Motakef Imani B, Pour M. Tolerance analysis of flexible kinematic mechanism using DLM method. *Mechanism and Machine Theory*. 2009; 44(2):445-456.

روش همچنین برای اجزاء با پروفیل ساده که توزیع خطای آنها غیرثابت است، کاربرد دارد. در روش ارائه‌شده، منحنی‌های نرئز با اصول کلی روش تحلیل تoleransi خطی‌سازی مستقیم ترکیب شد. به این ترتیب، قابلیت‌های روش خطی‌سازی ارتقا یافته و در پوشش‌دهی تoleransi‌های پروفیل پیشرفت قابل توجهی صورت داده شده است. در همین راستا یک مساله با روش ترکیبی جدید حل شد.

مساله بررسی‌شده مجموعه قطعات انباشته است که یکی از مثال‌های رایج در حل به روش خطی‌سازی مستقیم است. صورت این مساله با تغییر پروفیل یکی از اجزاء به یک پروفیل بیضی که از منحنی نرئز تشکیل شده است، تغییر یافت تا روش خطی‌سازی مستقیم در پروفیل‌های پیچیده‌تر بررسی شود. ابتدا پروفیل بیضی با منحنی زیر کسری رسم شد و معادلات پارامتری زیر کسری در معادلات حلقه‌ها نیز وارد شد. در این مثال، به علت اضافه‌شدن متغیرهای مونتاژی ناشی از جایگزینی پروفیل بیضی به جای دایره، تعداد معادلات از تعداد مجهولات حلقه‌های موجود کمتر است. برای حل این مشکل، با مونتاژ مدل‌های نامی اجزاء و پیدا کردن نقاط تماس قطعات با یکدیگر به صورت تحلیلی، مقادیر متغیرهای مونتاژی به دست آمد. بعد از این مرحله با داشتن معادلات حلقه‌ها و مقادیر تoleransi اجزاء، بقیه مساله با مشتق‌گیری از معادلات به روش خطی‌سازی مستقیم حل شد. درصد مشارکت اجزاء، مقادیر حساسیت‌های تoleransi و ویژگی کلیدی، مقادیر نامی ویژگی کلیدی و تoleransi آن ارائه شد. در نهایت نتایج به دست آمده با پاسخ روش مونتاژ کارلو مقایسه شده و درستی نتایج تأیید شد.

خلاصه راهکار ارائه‌شده برای روش ترکیب به شرح زیر است:

- ۱- تعریف پروفیل جزئی از مجموعه با منحنی نرئز؛
 - ۲- تعریف تoleransi برای نقاط کنترل و وزن‌ها؛
 - ۳- وارد کردن معادله منحنی نرئز به جای اندازه ویژگی‌های پروفیل در معادلات حلقه‌ها؛
 - ۴- اضافه کردن معادلات تماس اجزاء و روابط مونتاژی به معادلات حلقه‌ها (در صورت نیاز)؛
 - ۵- معرفی پارامترهای منحنی (نقاط کنترل یا وزن‌ها) به عنوان متغیرهای اجزای مجموعه؛
 - ۶- محاسبه مشتقات حلقه‌ها نسبت به متغیرهای اجزاء و متغیرهای مونتاژی، در ماتریس‌های حساسیت تoleransi؛
 - ۷- محاسبه تoleransi ویژگی کلیدی از حاصل ضرب حساسیت‌های تoleransi در تoleransi متغیرهای اجزاء.
- از مهم‌ترین مزایای روش ترکیبی ارائه‌شده می‌توان به قابلیت در نظر گرفتن پروفیل‌های با شکل آزاد، قابلیت تoleransi‌دهی آماری به پروفیل‌ها، تoleransi‌دهی موضعی به اجزاء و امکان بررسی تأثیر خطای پروفیل در خطای ویژگی کلیدی با استفاده از ماتریس حساسیت تoleransi اشاره کرد. همچنین به علت طولانی بودن معادله تعریف منحنی نرئز، در محاسبه معادلات حلقه‌های مونتاژی و محاسبه مشتقات ممکن است خطای گرد کردن اهمیت یابد. برای

- 23- Chen H, Jin S, Li Zh, Lai X. A comprehensive study of three dimensional tolerance analysis methods. *Computer-Aided Design*. 2014;53:1-13.
- 24- Cao Y, Liu T, Yang J. A comprehensive review of tolerance analysis models. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2018;97:3055-3085.
- 25- Imani BM, Hashemian SA. Nurbs-based profile reconstruction using constrained fitting techniques. *Journal of Mechanics*. 2012;28(3):407-412.
- 26- Lai YL, Chen JH, Hung JP. Development of machinable ellipses by NURBS curves. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2008;2(2):162-169.
- 27- Pourazady M, Xu X. Direct manipulations of B-spline and NURBS curves. *Advances in Engineering Software*. 2000;31(2):107-118.
- 28- Zhang HR, Zhan GW, Li W, Wei QY, Li M, Tian YZ. The method of tolerance analysis base on the Monte Carlo. *Advanced Materials Research*. 2014;1039:140-145.
- 29- Gao J, Chase KW, Magleby SP. Comparison of assembly tolerance analysis by the direct linearization and modified Monte Carlo simulation methods. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1995 Sep 17-20, Massachusetts, Boston. New York: ASME; 1995.
- 30- Montgomery DC, Runger GC. *Applied statistics and probability for engineers*. 6th Edition. Washington: Wiley; 2003.
- 31- Nigam SW, Turner JU. Review of statistical approaches to tolerance analysis. *Computer-Aided Design*. 1995;27(1):6-15.
- 32- Rana R, Singhal R. Chi-square test and its application in hypothesis testing. *Journal of Practice of Cardiovascular Sciences*. 2015;1(1):69-71.
- 14- Pierce SJ, Woodruff GW, Rosen DW. NURBS-based variational modeling as a tool for the analysis of geometric tolerances. *Proceedings of DETC97: The 1997 ASME Design Engineering Technical Conference*, September 14-17, Sacramento. New York: ASME; 1997.
- 15- Goka E, Homri L, Beaurepaire P, Dantan JY. Statistical tolerance analysis of over constrained mechanical assemblies with form defects considering contact types. *Journal of computing and information science in engineering*. 2019;19(2):021010.
- 16- Homri L, Goka E, Levasseur G, Dantan JY. Tolerance analysis-Form defects modeling and simulation by modal decomposition and optimization. *Computer-Aided Design*. 2017;91:46-59.
- 17- Schleich B, Anwer N, Mathiru L, Wartzack S. Skin Model Shapes: A new paradigm shift for geometric variations modelling in mechanical engineering. *Computer-Aided Design*. 2014;50:1-15.
- 18- Schleich B, Wartzack S. Novel approaches for the assembly simulation of rigid skin model shapes in tolerance analysis. *Computer-Aided Design*. 2018;101:1-11.
- 19- Corrado A, Polinia W, Moronib G, Petrò S. 3D Tolerance Analysis with manufacturing signature and operating conditions. *Procedia CIRP*. 2016;43:130-135.
- 20- Teissandier D, Delos V, Arroyave-Tobon S, Ledoux Y. Taking into account form variations in polyhedral approach in tolerancing analysis. *Procedia CIRP*. 2018;75:202-207.
- 21- Ameta G, Davidson JK, Shah JJ. Statistical Tolerance Analysis with T-Maps for Assemblies. *Procedia CIRP* 2018;75:220-225.
- 22- Ramnath S, Haghighi P, Chitale A, Davidson JK, Shah JJ. Comparative Study of Tolerance Analysis Methods Applied to a Complex Assembly. *Procedia CIRP*. 2018;75:208-213.