ISSN: 2476-6909; Modares Mechanical Engineering. 2021;21(3):183-194

Analytical Determination of Strain Components Distribution and Curvature in the Direct Extrusion Process of Symmetric Sections Based on Riemann Mapping and Upper Bound Method

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Sheikhpour M.[1] *MSc*,
Hosseinipour S.J.[2*] *PhD*,
Mirnia M. J.[1] *PhD*

How to cite this article
Sheikhpour M, Hosseinipour S J, Mirnia M J. Analytical Determination of Strain Components Distribution and Curvature in the Direct Extrusion Process of Symmetric Sections Based on Riemann Mapping and Upper Bound Method. Modares Mechanical Engineering. 2021; 21(3):183-194.

[1] Manufacturing Department, Faculty of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.
[2] Department of Materials Engineering, Faculty of Materials and Industrial Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

**Correspondence*
Address: Department of Materials Engineering, Faculty of Materials and Industrial Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran, Shariati Ave. P.O.Box 484.
Phone: +98 (11) 32367846
Fax: -
j.hosseini@nit.ac.ir

Article History
Received: November 28, 2020
Accepted: January 07, 2021
ePublished: March 17, 2021

ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze the strain components in the direct extrusion process to predict the curvature of the exit product. For this purpose, Riemann mapping theory is used to model the deformation zone and create a one-to-one correspondence between the input and output cross-sections of the die. With the help of the Bezier curves, flow lines are created between these points and then an upper bound solution is obtained for the velocity field. The process pressure and the distribution of the strain components are determined for the square, hexagonal, and rectangular sections using the obtained velocity field. A theoretical method based on the elastic-plastic bending of beams is presented for calculating the curvature of the exit product for the eccentric dies. In this theoretical method, the distribution of stress components and the bending moments is calculated using the specified strain components. In fact, the amount of bending moments indicates the curvature of the exit product. Finally, the presented theoretical model is validated through comparison with the results of the finite element simulation and the previous studies. The results show that Riemann conformal mapping theory and upper bound method can be used to determine the distribution of strain components and predict the curvature of the output product, in addition to estimate the process pressure.

Keywords Extrusion, Upper Bound, Riemann Mapping, Strain Distribution, Process Pressure, Product Curvature

CITATION LINKS

[1] An upper bound approach for the direct drawing of square section rod … [2] Extrusion of non-circular sections through shaped dies. [3] A generalised upper bound solution for three-dimensional extrusion … [4] Application of an upper bound method to off-centric extrusion of square sections … [5] A universal velocity field for the extrusion of non-axisymmetric rods … [6] Similar extrusion and mapping optimization of die cavity modeling for special-shaped … [7] Vertical curve analysis of extruding die cavity and conformal ... [8] Experimental and numerical study of energy consumption in forward … [9] Upper bound analysis for extrusion at various die land lengths and shaped ... [10] Minimization of the exit profile curvature in non-symmetric T-shaped sections … [11] Three-dimensional analysis of round-to-angle section extrusion … [12] A universal formulation for the extrusion of sections … [13] Minimizing distortion during extrusion using adaptable dies. [14] Theoretical and experimental analyses for the forward extrusion … [15] Forward Extrusion Bearing Design Using Upper Bound. [16] Formulation of a new generalized kinematically admissible velocity … [17] Development of a more realistic upper bound solution for … [18] Design and analysis of streamlined extrusion die for round to hexagon … [19] On the minimization of the exit profile curvature in extrusion … [20] Analytical modeling of the extrusion process using the electrostatics concept. [21]Die profile optimization of rectangular cross section extrusion in plane … [22] Mathematical analyses and numerical simulations for forward extrusion of circular … [23] Feasibility studies of a novel extrusion process for curved profiles … [24] An Applied Analytical Method for the Forward Extrusion of Metals. [25] Prediction of exit profile distortion in forward extrusion process … [26] Conformal mapping: methods and applications. [27] Bending of tube and section made of strain-hardening materials. [28] The relationship between constant friction factor and coefficient of friction …

Copyright© 2020, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

تعیین تحلیلی توزیع مولفه‌های کرنش و خمیدگی در فرآیند اکستروژن مستقیم مقاطع متقارن بر مبنای نگاشت ریمان و روش حدبالا

مجید شیخ‌پور MSc
کارشناسی ارشد، گروه مهندسی ساخت و تولید، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران.
سیدجمال حسینی‌پور PhD*
دکتری، گروه مهندسی مواد، دانشکده مهندسی مواد و صنایع، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران.
محمدجواد میرنیا PhD
دکتری، گروه مهندسی ساخت و تولید، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران.

چکیده
هدف از این مقاله تعیین تحلیلی مولفه‌های کرنش در فرآیند اکستروژن مستقیم برای پیش‌بینی خمیدگی محصول خروجی می‌باشد. برای این منظور از نظریه نگاشت همدیس ریمان جهت مدل‌سازی ناحیه تغییر شکل و ایجاد تناظری یک به یک بین نقاط مقطع ورودی و خروجی قالب استفاده می‌شود. به کمک منحنی بزیر، خطوط جریان بین این نقاط ایجاد شده و سپس یک حل حدبالا برای میدان سرعت به دست می‌آید. با استفاده از روابط به‌دست آمده، فشار فرآیند و توزیع مولفه‌های کرنش برای مقاطع متقارن مربعی، شش ضلعی منتظم و مستطیلی تعیین می‌گردد. همچنین یک روش نظری مبتنی بر خمش الاستیک-پلاستیک تیرها جهت محاسبه خمیدگی محصول خروجی برای قالب‌های خارج از مرکز ارائه می‌شود. در این روش نظری با استفاده از مولفه‌های کرنش تعیین شده، توزیع مولفه‌های تنش و گشتاور خمشی محاسبه می‌شود. در واقع مقدار گشتاور خمشی بیانگر میزان خمیدگی محصول خروجی است. مدل نظری ارائه شده از طریق مقایسه با نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود و پژوهش‌های پیشین صحت سنجی می‌گردد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که با بکارگیری نگاشت همدیس ریمان و روش حد بالا علاوه بر تخمین فشار فرآیند، می‌توان برای تعیین توزیع مولفه‌های کرنش و پیش بینی خمیدگی محصول خروجی استفاده نمود.

کلیدواژه‌ها: اکستروژن، حدبالا، نگاشت ریمان، توزیع کرنش، فشار فرآیند، خمیدگی محصول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۰۸
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۲۳
*نویسنده مسئول: j.hosseini@nit.ac.ir

۱- مقدمه
مدلسازی فرآیند اکستروژن مستقیم به دلیل پیچیدگی مباحث مرتبط با آن همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. تلاش پژوهشگران طی سالیان اخیر موجب گردیده تا با بکارگیری روش حد بالا و استفاده از مدل‌های ریاضی، پیش‌بینی فشار فرآیند اکستروژن میسر گردد. اما همچنان تعیین توزیع کرنش و کنترل خمیدگی محصول خروجی با استفاده از روش‌های نظری بخشی از مسایل حل نشده در فرآیند اکستروژن مستقیم می‌باشد. در واقع پژوهشگران توانستند با استفاده از فرضیات ساده کننده و مدل‌های ریاضی به پیش‌بینی حد بالای میدان سرعتی قابل قبول جهت تعیین فشار این فرآیند بپردازند. اما بدلیل خطای این روش‌ها امکان تعیین دقیق توزیع کرنش با استفاده از میدان‌های سرعت به دست آمده، فراهم نگردید. در اینجا برخی از پژوهش‌ها در این رابطه مرور خواهد شد.

بوئر و همکاران[1] روشی نظری بر مبنای انتقال دستگاه مختصات برای فرآیند کشش مستقیم میله با مقطع دایره‌ای به مربعی ارائه کردند. آنها صفحات بینابینی مقطع دایره‌ای شکل ورودی و مربعی شکل خروجی را به کمک تابعی ریاضی پیش‌بینی و الگوی جریان ماده در مقطع خروجی را بصورت اسکویرکل (Squircle) که شکلی مابین مربع و دایره است درنظر گرفتند. گوناسکرا و همکاران[2] یک حل حد بالا برای جریان ماده سه بعدی در اکستروژن مقطع دایره به مربع از طریق قالب‌های همگرا و خمیده ارائه نموده و با استفاده از آن فشار فرآیند را پیش‌بینی نمودند. هندسه قالب با استفاده از خطوط جریان بین مقطع ورودی و خروجی ایجاد گردید. چیتکارا و ابری نیا[3] یک حل عمومی حد بالا برای جریان سه بعدی ماده در فرآیند اکستروژن مستقیم مقاطع مختلف ارائه کردند. آنها میدان سرعتی ارائه دادند که صرف نظر از هندسه قالب یا ناحیه تغییر شکل، شرایط تراکم ناپذیری ماده را ارضا می‌کرد. کلیک و چیتکارا[4] روشی برای اکستروژن مستقیم مقطع مربع شکل خارج از مرکز بر اساس روش حد بالا ارائه دادند. آنها با بکارگیری روش تقسیم بندی مناطق که مبتنی بر فرضیات ساده کننده بوده به ایجاد تناظر یک به یک بین مقطع ورودی و خروجی پرداخته و یک حل حد بالا برای میدان سرعت به دست آوردند. وو و هسو[5] با استفاده از روشی مبتنی بر حد بالا به پیش بینی فشار فرآیند در اکستروژن مقطع مستطیلی و شش ضلعی و هشت ضلعی منتظم پرداختند و تاثیر پارامترهایی نظیر ضریب اصطکاک و درصد کاهش سطح مقطع را بر فشار فرآیند بررسی نمودند. کی و همکاران[6,7] با استفاده از نگاشت همدیس خارجی، سطح قالب را ایجاد و برای سه وضعیت قالب خطی، همگرا شونده و خمیده، فشار فرآیند را محاسبه و نتایج حاصل را با آزمایشات تجربی صحت سنجی نمودند. صبوری و همکاران[8] با استفاده از شبیه سازی اجزا محدود و نتایج آزمایشگاهی به بررسی فرآیند اکستروژن در دو نوع قالب با سطوح تخت و سطوح منحنی پرداختند. آنان نشان دادند که فشار فرآیند در سطوح منحنی با فرض برابر بودن سایر پارامترها، پایین‌تر از قالب با سطوح تخت است. آجیبویه و آدیمی[9] یک حل حدبالا برای میدان سرعت مقاطع نامتقارن ارائه و تلاش نمودند تا با طراحی بیرینگ به کنترل خمیدگی محصول خروجی بپردازند. عاصم پور و حسن نژاد اصل[10] روشي را براي حداقل كردن انحناي پروفيل خروجي در اكستروژن مقاطع T شكل ارائه كردند. آنها در اين تحقيق با استفاده از روش حد بالا و ميدان تغيير شكل، ميدان سرعت يكنواختي به دست آورده و با تغييرات ضرايب منحني بزير و موقعيت خارج از مركزي حفره قالب، مقدار انحناي پروفيل

خروجي را بهينه كردند. كومار و همكاران[11] با تركيب يک روش هندسی به منظور تناظر مقطع ورودی و خروجی با روش حدبالا به مدلسازی فرآیند اکستروژن مستقیم و پیش بینی فشار فرآیند پرداختند. ابری نیا و داورزني[12] با استفاده از روش حد بالا و روش تقسیم بندی مناطق بهبود یافته، میدان سرعتی برای فرآیند اکستروژن مقاطع نامتقارن ارائه نموده و اثرات اصطکاک و درصد کاهش سطح مقطع را بر روي فشار اکستروژن مورد بررسي قرار دادند. گوردون و همکاران[13] روشی ارائه کردند تا با طراحی قالب از طریق تغییر ناحیه تغییر شکل، خمیدگی محصول خروجی کاهش یابد. آنها برای این منظور چهار معیار ارائه کردند که شامل جابجایی محوری متوسط، کرنش برشی متوسط، کرنش موثر متوسط و انحراف نرخ کرنش موثر حجمی بود. قربانی و ابری‌نیا[14] روشی بهبود یافته بر مبنای تقسیم بندی مناطق برای ایجاد تناظر بین مقطع ورودی و خروجی ارائه کردند تا برای پیش بینی میدان سرعت در مقاطع نامتقارن به کار آید. شیخ پور[15] با بکارگیری نگاشت همدیس، یک حل حدبالا برای میدان سرعت به دست آورد و بکمک آن توانست طول بیرینگ مناسب را به منظور کنترل خمیدگی محصول خروجی، برای قالب‌های اکستروژن طراحی نماید. فرهمند و همکاران[16] با ارائه روشی صفحات انفصال سرعت را به صورت رویه فرض نموده و توانستند مولفه محوری سرعت را بصورت متغیر در مقطع خروجی به دست آورند. کرمی و ابری نیا[17] با استفاده از روش حدبالا و استفاده از رویه به جای صفحه انفصال سرعت ورودی و همچنین بهره گیری از روشی مشابه بوئر و همکاران[1]، و مدل‌سازی اجزا محدود میدان سرعت، به بررسی توزیع کرنش موثر در فرآیند اکستروژن پرداختند. ونکاتش و ونکاتسان[18] با بکارگیری روش نگاشت سطوح و روش حد بالا به مدلسازی فرآیند اکستروژن و تعیین سطوح قالب به منظور بهینه سازی فشار فرآیند برای مقطع خروجی شش ضلعی منتظم پرداختند. آنها با استفاده از این روش، با ایجاد تناظر بین صفحات ورودی و خروجی، یک میدان سرعت قابل قبول به دست آوردند. نظری و عاصم پور[19] روشی را برای کاهش خمیدگی محصول خروجی بر مبنای بهینه‌سازی موقعیت شعاعی حفره خروجی در قالب اکستروژن دو سوراخه با مقطع نامتقارن ارائه نمودند. برای این منظور آنها از حل حدبالا برای میدان سرعت استفاده نموده و از یک تابع انحرافی برای تعیین انحراف محصول خروجی بهره بردند. طباطبایی و ابری‌نیا[20] با بکارگیری مفهوم الکترواستاتیک بجای منحنی‌های بزیر در فرآیند اکستروژن، توانستند سطح قالب را پیش بینی نموده و فشار فرآیند را محاسبه نمایند. فرزاد و ابراهیمی[21] مدلی نظری با استفاده از روش حدبالا و الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده به منظور تجزیه و تحلیل فرآیند اکستروژن ارائه کردند. آنها ضمن طراحی پروفیل قالب، به پیش بینی اثرات درصد کاهش سطح مقطع، میزان کارسختی و ضریب اصطکاک بر پروفیل قالب پرداختند. حسین و کدهیم[22] به مدل‌سازی اکستروژن مقاطع دایره‌ای، مربعی و متوازی الاضلاع با استفاده از روش حدبالا پرداختند. آنها با بکارگیری منحنی چندجمله‌ای مرتبه ۳ و ۵ سطوح قالب اکستروژن را مدل‌سازی کردند. ژو و همکاران[23] اقدام به ارائه یک روش مبتکرانه برای اکسترود پروفیل‌های منحنی نموده و با تغییر پارامترهای فرآیند و قالب به کنترل و پیش‌بینی میزان انحنای پروفیل پرداختند که این روش بر مبنای گرادیان سرعت مواد در نقاط مختلف استوار بود. سید نصرتی و ابری نیا[24] با استفاده از روشی نظری بر مبنای تناظر سطوح ورودی و خروجی و روش حد بالا به مدل‌سازی فرآیند اکستروژن پرداختند. آنها ضمن محاسبه فشار فرآیند، توانستند توزیع کرنش موثر در مقطع خروجی را به دست آورند.

روش نگاشت همدیس خارجی بدلیل برخی محدودیت‌ها در روش‌های حل عددی تنها به منظور تعیین سطح قالب و کمینه نمودن فشار فرآیند استفاده شده است. از طرف دیگر روش‌های مبتنی بر تقسیم بندی مناطق به‌دلیل فرضیات ساده کننده، مدل دقیقی از ناحیه تغییر شکل و جریان ماده ارائه نمی‌دهند. هدف از این پژوهش تعیین تحلیلی توزیع مولفه‌های کرنش برای پیش‌بینی خمیدگی محصول خروجی ناشی از خارج از مرکزی قالب است. برای این منظور از نظریه نگاشت همدیس ریمان جهت مدل‌سازی دقیق‌تر ناحیه تغییر شکل و ایجاد تناظری یک به یک بین نقاط مقطع ورودی و خروجی قالب استفاده شده است. سپس از روش حد بالا به منظور تعیین مولفه‌های کرنش و همچنین یک روش نظری مبتنی بر خمش الاستیک-پلاستیک تیرها جهت محاسبه خمیدگی محصول خروجی استفاده گردید. در مقاله پیشین[25] نویسندگان با بکارگیری نگاشت همدیس ریمان، یک حل حدبالا برای میدان سرعت به دست آوردند که با استفاده از آن، انحنای محصول برای قالب مربعی با خارج از مرکزی ۰/۵ mm پیش‌بینی شد. در این پژوهش با توسعه مدل نظری ارائه شده و به منظور ارزیابي دقیق‌تر، توزیع مولفه‌های کرنش برای مقطع مربعی، مستطیلی و شش ضلعی منتظم تعیین گردید. علاوه بر این، انحنای محصول برای مقطع مربعی با خارج از مرکزی ۳/۲ mm پیش‌بینی شد و اثر اصطکاک، درصد کاهش سطح مقطع و طول قالب مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل با نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود و نتایج سایر محققان مقایسه گردید.

۲- روابط نظری

۲-۱- نگاشت همدیس ریمان

باتوجه به اینکه نگاشت همدیس ریمان به عنوان یک ابزار ریاضی در حوزه اعداد مختلط، امکان ایجاد تناظر دقیق یک به یک بین مناطقی از دو صفحه را ایجاد می‌کند، این روش قابلیت بکارگیری در مدل‌سازی ناحیه تغییر شکل در فرآیند اکستروژن از طریق

ایجاد تناظر میان مقطع ورودی دایره‌ای و مقطع دلخواه خروجی را دارد[25]. مطابق نظریه نگاشت ریمان، هر خم ساده بسته و ناحیه داخل آن را در صفحه مختلط می‌توان به دایره واحد و ناحیه داخل آن تبدیل نمود[26]. در شکل ۱ خم دلخواه B_z در صفحه مختلط Z و دایره واحد B_w در صفحه مختلط W نشان داده شده است. سری توانی $w=f(z)$ نگاشتی است که ناحیه D_z و مرز آن B_z را به ناحیه D_w و مرز آن B_w تبدیل می‌کند. ناحیه D_w یک دایره واحد است که مرکز آن در نقطه $w_0 = 0$ واقع شده است. تابع نگاشت $f(z)$ با حل یک مسئله از نوع تغییراتی که دو تابع زیر را کمینه نماید محاسبه خواهد شد.

$$\boldsymbol{I_A = \iint_{B_z} |f'(z)|^2\, dx\, dy \geq \pi} \qquad (۱\text{-الف})$$

$$I_B = \int_{B_z} |f'(z)|\,|dz| \geq 2\pi \qquad (۱\text{-ب})$$

اولین انتگرال (I_A) در معادله بالا اصل کمینه مساحت و دومین انتگرال (I_B) اصل کمینه محیط نامیده می‌شوند. از بین تمامی توابع $f(z)$ که در ناحیه D_z تحلیلی بوده و $f(0)=0$ و $\acute{f}(0) = 1$ باشد، تابعی که انتگرال I_A و I_B را کمینه سازد، ناحیه D_z را به دایره واحد تبدیل می‌کند.

به منظور به دست آوردن دو اصل کمینه محیط و کمینه مساحت، ابتدا باید پارامترهای L_z و L_w محاسبه شوند. L_z طول مرز B_z است که ناحیه D_z را در صفحه Z احاطه می‌کند، و L_w طول مرز B_w را در صفحه W احاطه می‌کند. مقدار L_w برابر با اندازه محیط دایره واحد $|w| = 1$ است

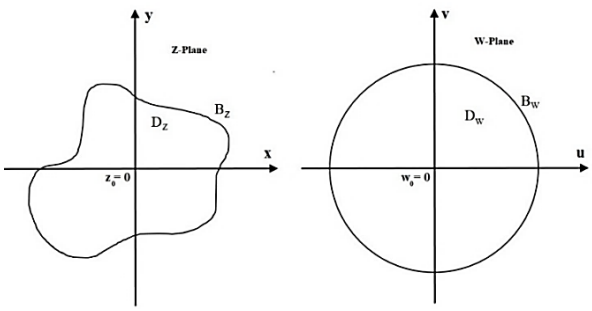
$$\boldsymbol{L_w = \int_{B_w} |dw| = \int_{B_z} |\acute{f}(z)|\,|dz| = 2\pi} \qquad (۲)$$

همچنین هر تابعی مانند $h(w)$ می‌تواند در یک نقطه مانند w_k در دایره واحد با استفاده از انتگرال کوشی زیر محاسبه شود.

$$\boldsymbol{h(w_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_w} \frac{h(w)}{w - w_k}\, dw} \qquad (۳)$$

حال به محاسبه h(w) در نقطه $w_k = w_0 = 0$ پرداخته می‌شود. ابتدا باید ساده‌سازی روی همه w ها بر روی مرز B_w از دایره واحد اعمال شود.

$$\boldsymbol{|w| = 1\,;\ w = \exp(i\theta)\ ;\ w_0 = 0\,; dw = i\exp(i\theta)\, d\theta\ ;} \qquad (۴\text{-الف})$$



شکل ۱) نگاشت خم بسته دلخواه به دایره با شعاع واحد

$$\boldsymbol{h(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_w} \frac{h(w)}{\exp(i\theta) - 0}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w)\, d\theta} \qquad (۴\text{-ب})$$

$$\int_{B_w} |h(w)|\,|dw| = \int_0^{2\pi} |h(w)|\, d\theta \geq 2\pi|h(0)| \qquad (۴\text{-ج})$$

که در رابطه فوق نامساوی تبدیل به یک تساوی می‌شود وقتی که $|h(w)| = |d(0)|$ باشد. حال به معادله (۲) رجوع می‌شود که سری $f(z)$ در دست نیست، در عوض توابعی مشتق پذیر بصورت زیر وجود دارند که $g(z)$ نامیده می‌شوند.

$$\boldsymbol{\int_{B_z} |g(z)|\,|dz| = \int_{B_w} |g(z)|\,|\acute{f}(z)|^{-1}|dw|} \qquad (۵)$$

تابع h(w) به صورت $|h(w)| = \left|\frac{g(z)}{\acute{f}(z)}\right|$ تعیین می‌شود. در ادامه معادلات (٤) و (٥) با هم ترکیب شده و همچنین مشخص می‌شود که $z=0$ به نقطه $w=0$ تبدیل می‌شود.

$$\boldsymbol{\int_0^{2\pi} \left|\frac{g(z)}{\acute{f}(z)}\right| d\theta \geq 2\pi \left|\frac{g(0)}{\acute{f}(0)}\right|} \qquad (۶)$$

تساوی‌های زیر نتیجه می‌شوند که شرط بهینه‌سازی نامیده می‌شوند.

$$\boldsymbol{\left|\frac{g(z)}{\acute{f}(z)}\right| = \left|\frac{g(0)}{\acute{f}(0)}\right|} \qquad (۷\text{-الف})$$

$$\left|\frac{g(z)}{g(0)}\right| = \left|\frac{\acute{f}(z)}{\acute{f}(0)}\right| \qquad (۷\text{-ب})$$

در این مرحله باید یک مسئله از نوع تغییراتی یعنی تعیین تابع g(z) که انتگرال در معادلات (۷) را کمینه سازد، محاسبه شود. همچنین می‌توان انتگرال مذکور را در ثابت $\left|\frac{\acute{f}(0)}{g(0)}\right|$ ضرب کرد که در روابط زیر آمده است.

$$I_B{}' = \int_{B_z} |g(z)|\,|dz| \geq 2\pi \left|\frac{g(0)}{\acute{f}(0)}\right| \qquad (۸\text{-الف})$$

$$I_B{}'' = \int_{B_z} |f'(z)|\,|dz| \geq 2\pi \qquad (۸\text{-ب})$$

دومین انتگرال در معادله بالا همان اصل کمینه محیط است و اصل کمینه مساحت نیز به روش مشابه به دست می‌آید. این مسئله با روش‌های مختلفی نظیر بکارگیری چند جمله‌ای‌های متعامد قابل حل بوده و در نهایت تابع تبدیل نگاشت که یک سری توانی است تقریب زده می‌شود[26]. فرم تابع نگاشت به ترتیب برای تبدیل مربع، مستطیل و شش ضلعی به دایره واحد بصورت روابط ۹ می‌باشد:

$$\boldsymbol{f(z) = az + bz^5 + cz^9 + \cdots} \qquad (۹\text{-الف})$$

$$f(z) = az + bz^3 + cz^5 + \cdots \qquad (۹\text{-ب})$$

$$f(z) = az + bz^6 + cz^{12} + \cdots \qquad (۹\text{-ج})$$

سری W=f(z) نگاشتی است که ناحیه D_z و مرز آن B_z را به ناحیه D_w و مرز آن B_w تبدیل می‌کند. ناحیه D_w یک دایره واحد است که مرکز آن در نقطه $W_0 = 0$ واقع شده است. لذا به کمک تناظر ایجاد شده به کمک نگاشت در صفحه مختلط Z و صفحه مختلطW ، مولفه‌های حقیقی و موهومی که همان مولفه‌های صفحه کارتزین می‌باشند، باتوجه به سری نگاشت، بر حسب

مولفه‌های حقیقی و موهومی صفحه ورودی به دست آمده و تناظر یک به یک زیر برقرار می‌گردد.

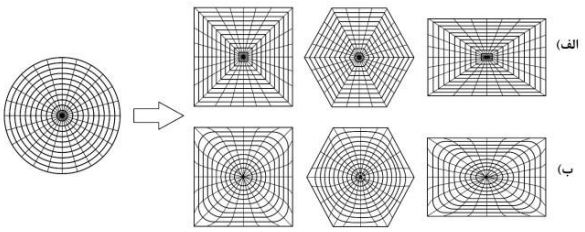
$$\mathbf{W} = \mathbf{u} + \mathbf{iv} = \mathbf{f(z)} = \mathbf{f(x+iy)}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{Re}\,[\,\mathbf{f(z)}\,]\,;\ \mathbf{v} = \mathbf{Im}\,[\,\mathbf{f(z)}\,] \qquad (۱۰)$$

در شکل ۲ نتایج حاصل از نقاط متناظر با دایره‌های هم مرکز و قطرهای مقطع دایره‌ای ورودی با مقطع خروجی مربعی، مستطیلي و شش ضلعی حاصل از روش نگاشت همدیس با روش تقسیم بندی مناطق مقایسه گردیده است. همانطور که مشاهده مي شود در روش تقسیم بندی مناطق، دایره‌های هم مرکز مقطع ورودی به شکل‌هاي یکسان هم مرکز در مقطع خروجی تبدیل شده است. بنابراین این روش قید شعاعی دارد، به این معنی که یک نقطه در مقطع خروجی فقط به صورت شعاعی از مرکز می‌تواند حرکت کند. در حالیکه در روش نگاشت همدیس نقاط به صورت شعاعی و زاویه‌ای می‌توانند حرکت کنند.

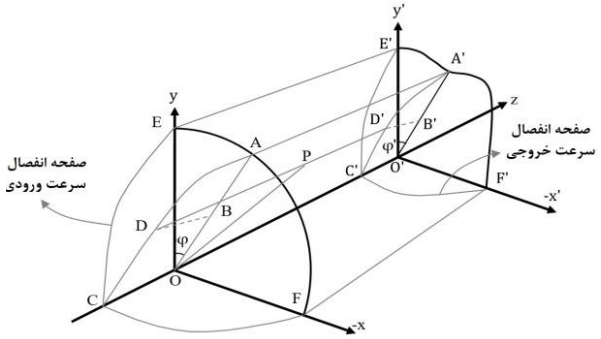
۲-۲- تعیین میدان سرعت

پس از ایجاد تناظر یک به یک میان مقطع ورودی و خروجی با استفاده از روش نگاشت همدیس ریمان، در تعریف میدان سرعت از روابط فرهمند و ابری نیا[16] استفاده شده است. در این روابط صفحه انفصال سرعت ورودی و خروجی به صورت صفحات خمیده در نظر گرفته شده است. در شکل ۳ یک چهارم میدان تغییر شکل سه بعدی براي فرایند اکستروژن دایره‌ای به مقطع دلخواه نشان داده شده است.

با استفاده از تناظر برقرار شده میان نقاط B و B' که در صفحه دایره‌ای شکل ورودی و صفحه مربعی شکل خروجی قرار دارد،



شکل ۲) مقایسه تناظر ایجاد شده از روش الف) تقسیم بندی مناطق و ب) نگاشت همدیس توسط نویسندگان



شکل ۳) یک چهارم میدان تغییر شکل برای اکستروژن مقطع دایره به مقطع دلخواه

مختصات نقاط D و D' که بر روی صفحات انفصال سرعت قرار دارد به دست می‌آید. فرض می‌شود که ماده برروی یک خط جریان DD' سیلان مي‌یابد. یک نقطه عمومی از ماده مانند P روی این خط جریان حرکت خواهد کرد که این نقطه به بوسیله بردار مکان زیر مشخص می‌شود:

$$\vec{r}(u,q,t) = f(u,q,t)\vec{i} + g(u,q,t)\vec{j} + h(u,q,t)\vec{k} \qquad (۱۱)$$

که توابع f و g و h مختصات x و y و z نقطه P بر روی بردار مکان را مشخص کرده و پارامترهای u و q و t مقادیری بی بعد بین ۰ و ۱ هستند که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u = \frac{r}{R} \qquad q = \frac{\varphi}{2\pi} \qquad t = \frac{z}{L} \qquad (۱۲)$$

در این رابطه R شعاع بیلت ورودی، φ زاویه و L طول ناحیه تغییرشکل بین مرکز بیلت دایره‌ای در مقطع ورودی تا مرکز تقارن در مقطع خروجی است. پارامترهای u و q و t که بین ۰ و ۱ تغییر می‌کند بیانگر موقعیت شعاعی، زاویه‌ای و محوری نقطه عمومی P هستند. صفحات انفصال سرعت ورودی و خروجی که به صورت صفحات خمیده انتخاب شده با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$Z' = Z'(\acute{O}\acute{B},\acute{\varphi})Z = Z(OB,\varphi) \qquad (۱۳)$$

که Z صفحه انفصال سرعت ورودی و Z' صفحه انفصال سرعت خروجی می باشد. به منظور بیان معادله این صفحات از یک تابع مکعبی بزیر برحسب پارامتر u بصورت زیر استفاده می‌شود[17]:

$$Z_u = \sum_{i=0}^{3} B_{3,i}(u)P_i \qquad (۱۴\text{-الف})$$

$$B_{3,i}(u) = \frac{3!}{i!\,(3-i)!}u^i(1-u)^{3-i}\,, where\ i = 0\,,1,2,3 \qquad (۱۴\text{-ب})$$

مادامیکه مقطع ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل به صورت صفحه در t=0 و t=1 در نظر گرفته شود بردارهای r_1 و r_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{r_1} = OBsin\varphi\,\vec{i} + OBcos\varphi\,\vec{j} + Z(OB,\varphi)\vec{k} \qquad (۱۵\text{-الف})$$

$$\vec{r_2} = (\acute{O}\acute{B}sin\acute{\varphi} + x_{\acute{o}})\,\vec{i} + (\acute{O}\acute{B}cos\acute{\varphi} + y_{\acute{o}})\,\vec{j} + (L - Z'\,(\acute{O}\acute{B},\acute{\varphi}))\,\vec{k} \qquad (۱۵\text{-ب})$$

در نهایت بردار مکان r بصورت زیر تعیین می‌گردد.

$$\vec{r} = [1 \quad t]\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{r1}\\ \vec{r2}\end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

با استفاده از تناظر ایجاد شده از نگاشت همدیس و بکارگیری منحنی بزیر، با تغییر مقادیر پارامترهای بی بعد تعریف شده موقعیت هر ذره در ناحیه تغییرشکل به دست مي‌آید. در واقع، همانطورکه در شکل شماره ۳ مشاهده می‌شود به کمک نگاشت همدیس میتوان نقاط دلخواه B و B' را متناظر نموده و سپس به کمک منحنی بزیر خط جریان BB' را ایجاد نمود. حال با استفاده از میدان تغییر شکل تعریف شده میتوان میدان سرعت را به دست آورد. معادله (۱۶) یک خط جریان است که با استفاده از آن بردار سرعت درون میدان تغییرشکل که همواره در جهت مماس بردار خط جریان در هر نقطه دلخواه است بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{V_x}{T_1}=\frac{V_y}{T_2}=\frac{V_z}{T_3} \quad (۱۷)$$

بنابراین مولفه های سرعت هر نقطه دلخواه که دارای بردار موقعیت r است بصورت زیر خواهد بود:

$$V_y=\frac{g_t}{h_t}V_z\,,\quad V_x=\frac{f_t}{h_t}V_z,\quad V_z=\mathbf{M}(\mathbf{u},\mathbf{q},\mathbf{t}) \quad (۱۸)$$

که در آن f_t، g_t و h_t ، مشتقات جزئي توابع f , g و h نسبت به t مي باشند. تابع M(u,q,t) ، تابع مجهولي که متضمن سازگاري ميدان سرعت مطرح شده است. اين تابع بايد با استفاده از شرايط تراکم ناپذيري به دست آيد. مي‌دانيم که وضعيت تراکم ناپذيري در شرايط سه بعدي به صورت زير است.

$$\frac{\partial V_x}{\partial \mathbf{X}}+\frac{\partial V_y}{\partial \mathbf{Y}}+\frac{\partial V_z}{\partial \mathbf{Z}}=0 \quad (۱۹)$$

با استفاده از روش ابری نیا و داورزنی[12] و جایگذاری معادله (۱۸) در رابطه تراکم ناپذیری (۱۹)، تابع M به دست می‌آید:

$$\mathbf{M}=\frac{\mathbf{C}(\mathbf{u},\mathbf{q})}{(\mathbf{f_u g_q}-\mathbf{f_q g_u})+{\mathbf{h_q}}/{\mathbf{h_t}}(\mathbf{f_t g_u}-\mathbf{f_u g_t})+{\mathbf{h_u}}/{\mathbf{h_t}}(\mathbf{f_q g_t}-\mathbf{f} \quad (۲۰)$$

ثابت انتگرال‌گيري C(u,q) را مي‌توان از شرايط مرزي به دست آورد که بصورت زير خواهد بود:

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})=[(\boldsymbol{f_u g_q}-\boldsymbol{f_q g_u})+{\boldsymbol{h_q}}/{\boldsymbol{h_t}}(\boldsymbol{f_t g_u}-\boldsymbol{f_u g_t})+{\boldsymbol{h_u}}/{\boldsymbol{h_t}}(\boldsymbol{f_q g_t}-\boldsymbol{f_t g_q})]_{t=0} \quad (۲۱)$$

با به دست آوردن تابع M ميدان سرعت بر حسب رابطه (۱۷) به دست خواهد آمد. حال با استفاده از ميدان سرعت به دست آمده با استفاده از روش حدبالا ميتوان به پيش بيني فشار فرآيند پرداخت:

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{W_i}+\boldsymbol{W_e}+\boldsymbol{W_X}+\boldsymbol{W_f} \quad (۲۲)$$

که W_i بیانگر انرژی تغییر شکل داخلی است و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{W_i}=\boldsymbol{\sigma_m}\int_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{dV}=\frac{2\boldsymbol{\sigma_m}}{\sqrt{3}}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon_{xx}}^2+\boldsymbol{\varepsilon_{yy}}^2+\boldsymbol{\varepsilon_{zz}}^2}{2}\right)+\boldsymbol{\varepsilon_{xy}}^2+\boldsymbol{\varepsilon_{yz}}^2+\boldsymbol{\varepsilon_{zx}}^2\right)^{1/2}\ \det\boldsymbol{J}\,\partial\boldsymbol{u}\,\partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{t} \quad (۲۳)$$

و W_f بیانگر توان مصرفی ناشی از اصطکاک بین سطح قالب و قطعه کار بوده که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{W_f}=\boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{\sigma_m}}{\sqrt{3}}\iint_s \Delta\boldsymbol{V_f}\boldsymbol{dS_f} \quad (۲۴)$$

W_e و W_x توان مربوط به انفصال سرعت در صفحات ورودی و خروجی است. باتوجه به هندسه ناحیه تغییر شکل و اینکه سطوح انفصال سرعت در ورود و خروج بصورت صفحات خمیده در نظر گرفته شده است همچنین با توجه به هندسه خطوط جریان مقدار انرژی روی سطوح انفصال سرعت صفر خواهد بود[17]. در نهایت فشار متوسط اکستروژن به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\mathbf{P_{ave}}=\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{\pi R^2 V_0}} \quad (۲۵)$$

۲-۳- محاسبه نرخ کرنش و کرنش

رابطه بین مولفه‌های نرخ کرنش و سرعت از معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}=\frac{\partial V_x}{\partial x}\quad \dot{\varepsilon}_{yy}=\frac{\partial V_y}{\partial y}\quad \dot{\varepsilon}_{zz}=\frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (۲۶\text{-الف})$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\quad \dot{\varepsilon}_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\quad \dot{\varepsilon}_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right) \quad (۲۶\text{-ب})$$

بنابراین مولفه‌های نرخ کرنش با استفاده از مولفه‌های سرعت به دست می‌آید. توزیع کرنش با انتگرال‌گیری از نرخ کرنش در طول خط جریان نسبت به زمان به دست می‌آید[6]. مقدار کرنش در طول هر خط جریان با استفاده از معادله زیر محاسبه می‌شود که در این رابطه $\dot{\varepsilon}_{ef}$ نرخ کرنش موثر می‌باشد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\int_0^{\mathbf{T}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{ef}}\,\mathbf{dT}\quad ;\quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{ef}}=\left(\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{xx}}^2+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{yy}}^2+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{zz}}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{xy}}^2+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{yz}}^2+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{zx}}^2\right)\right)^{1/2} \quad (۲۷)$$

که در آن T مدت زمانی است که یک ذره طول مسیر خط جریان را طی می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{T}=\int\frac{\partial\mathbf{s}}{\mathbf{V}} \quad (۲۸)$$

$$\partial s=(\partial f^2+\partial g^2+\partial h^2)^{1/2} \quad (۲۹\text{-الف})$$

$$V=(V_x^2+V_x^2+V_x^2)^{1/2} \quad (۲۹\text{-ب})$$

۲-۴- پیش‌بینی خمیدگی محصول خروجی

به منظور پیش بینی خمیدگی محصول که ناشی از توزیع نامتقارن کرنش در مقطع خروجی است، از یک روش مبتنی بر خمش الاستیک پلاستیک تیرها استفاده گردید. با فرض اینکه توزیع مولفه‌های کرنش و تنش در مقطع خروجی قالب با کمک روش نگاشت همدیس به دست آمده، پروفیل خروجی به صورت یک تیر الاستیک-پلاستیک در نظر گرفته می‌شود. در این روش با در نظر گرفتن این نکته که توزیع نامتقارن کرنش، عامل انحنای محصول خروجی است، با اعمال گشتاور خمشی به انتهای محصول خروجی، اثر توزیع نامتقارن کرنش که منجر به انحنا می‌گردد از بین رفته و با به دست آوردن مقادیر گشتاور متعادل کننده لازم، می‌توان انحنای پروفیل خروجی را بصورت خمش الاستیک-پلاستیک یک تیر تعیین نمود. گشتاورمتعادل کننده انحنای ناشی از فرآیند اکستروژن با استفاده از معادله تعادل زیر محاسبه می‌شود.

$$M_x=-\int_A y\,\sigma_{zz}\,dA \quad (۳۰\text{-الف})$$

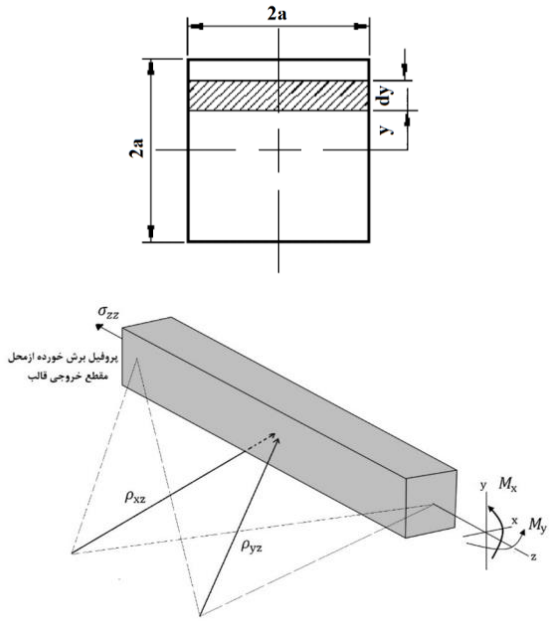
$$M_y=-\int_A x\,\sigma_{zz}\,dA \quad (۳۰\text{-ب})$$

در واقع مسئله تجزیه و تحلیل خمش الاستیک-پلاستیک یک تیر با مقطع مربعی مطابق شکل ۴ است که مقدار گشتاور خمشی مطابق رابطه زیر به دست می‌آید[27]:

$$M_x=4a\int_0^{y_e}E\frac{y}{\rho}y\,dy+4a\int_{y_e}^{a}K\left(\frac{y}{\rho}\right)^n y\,dy \quad (۳۱)$$

رابطه تنش کرنش به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}\quad \mathbf{for}\quad \boldsymbol{\varepsilon}\le\boldsymbol{\varepsilon_e}\quad ;\quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{n}}\quad \mathbf{for}\quad \boldsymbol{\varepsilon}\ge\boldsymbol{\varepsilon_e} \quad (۳۲)$$



شکل ۴) مقطع مربعی شکل و نمودار آزاد پروفیل خروجی

که ε_e کرنش در نقطه تسلیم و y_e فاصله نقطه‌ای از تارخنثی که در آن تسلیم رخ می‌دهد. با انتگرال‌گیری از رابطه (۳۱) گشتاور خمشی به صورت تابعی از شعاع انحنا به دست می‌آید.

$$\mathbf{M_x} = \frac{4a}{3}\mathbf{E}\varepsilon_e{}^3\rho_{yz}{}^2 + \frac{4a}{n+2}\mathbf{K}\left[\frac{a^{n+2}}{\rho_{yz}{}^n} - \varepsilon_e{}^{n+2}\rho_{yz}{}^2\right] \qquad (۳۳)$$

بطور مشابه گشتاور M_y نیز محاسبه می‌شود.

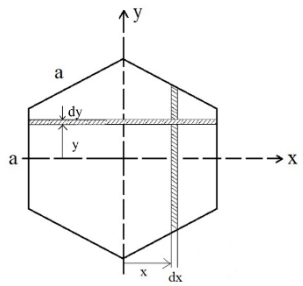
$$\mathbf{M_y} = \frac{4a}{3}\mathbf{E}\varepsilon_e{}^3\rho_{xz}{}^2 + \frac{4a}{n+2}\mathbf{K}\left[\frac{a^{n+2}}{\rho_{xz}{}^n} - \varepsilon_e{}^{n+2}\rho_{xz}{}^2\right] \qquad (۳۴)$$

که ρ_{xz} و ρ_{yz} شعاع انحنا در صفحات xz و yz بوده، لذا میتوان با به دست آوردن شعاع انحنا، میزان خمیدگی پروفیل محصول اکسترود شده را به صورت رابطه زیر پیش بینی نمود.

$$\mathbf{K_{xz}} = \frac{1}{\rho_{xz}} \quad ; \quad \mathbf{K_{yz}} = \frac{1}{\rho_{yz}} \qquad (۳۵)$$

بطور مشابه گشتاورهای M_x و M_y برای یک تیر با مقطع شش ضلعی منتظم مطابق شکل ۵، بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{M_y} = 2\int_0^{y_e}\left[\left(a\,\mathbf{E}\frac{x}{\rho}x\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,x\,\mathbf{E}\frac{x}{\rho}x\right)\right]dx + 2\int_{y_e}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\mathbf{K}\left[\left(a\left(\frac{x}{\rho}\right)^n x\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\left(\frac{x}{\rho}\right)^n x\right)\right]dx \qquad (۳۶)$$



شکل ۵) مقطع شش ضلعی منتظم

$$M_x = 2\,a\sqrt{3}\left[\int_0^{x_e} E\frac{y}{\rho}y\,dy + \int_{x_e}^{\frac{a}{2}} K\left(\frac{y}{\rho}\right)^n y\,dy\right] + 4\sqrt{3}\int_{\frac{a}{2}}^{a}(a-y)k\left(\frac{y}{\rho}\right)^n y\,dy \qquad (۳۷)$$

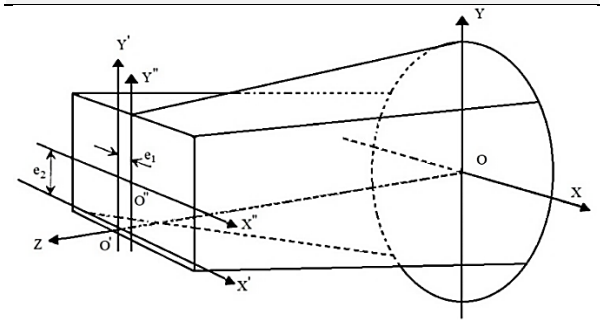
۳- شبیه سازی اجزا محدود

شبیه‌سازی اجزاي محدود سه قالب، مطابق جدول ۱ با میزان درصد کاهش سطح مقطع ۶۰ درصد برای اکستروژن پروفیل مقطع دایره به مربع انجام گردید. این قالب‌ها برای اکستروژن بیلت اولیه با شعاع ۱۲/۷ میلی متر و از جنس سرب توسط چیتکارا و کلیک[4] بصورت تجربي مورد بررسي قرار گرفته بود. علاوه براین شبیه‌سازی برای دو قالب با مقطع خروجی شش ضلعی منتظم و مستطیلی انجام گردید که مشخصات قالب ها در جدول ۱ ارائه شده است. در شکل ۶ تصویری از قالب خارج از مرکز نشان داده شده است. میزان خروج از مرکز برای قالب‌ها در جدول ۱ آورده شده است.

به منظور انجام شبیه سازی اجزای محدود از نرم افزار ABAQUS/Explicit استفاده گردید. از نمودار نیرو جابجایی به دست آمده از نتایج تجربی چیتکارا و کلیک[4] و همچنین مقایسه فشار فرآیند اکستروژن، به منظور صحت سنجی نتایج حاصل از شبیه سازی اجزای محدود و روش نظری ارائه شده استفاده گردید. در شبیه سازی مشابه آزمون‌های تجربی چیتکارا و کلیک[4] از خواص سرب بعنوان ماده بیلت اولیه استفاده شده که خواص مکانیکی آن مطابق جدول ۲ می‌باشد.

جدول ۱) مشخصات قالب‌ها

شماره قالب	هندسه مقطع خروجی	شعاع بیلت (mm)	کاهش سطح مقطع (%)	طول قالب (mm)	میزان خروج از مرکز در راستای محور x (mm)	میزان خروج از مرکز در راستای محور y (mm)
۱	مربع [4]	۱۲/۷	۶۰	۱۰	۰	۳/۲
۲	مربع [4]	۱۲/۷	۶۰	۱۲	۰	۳/۲
۳	مربع [4]	۱۲/۷	۶۰	۱۵/۶۵	۰	۳/۲
۴	شش ضلعی [5,17]	۱۲/۷	۶۰	۱۲/۷	۰	۰
۵	مستطیل [24] (نسبت اضلاع= ۲)	۱۲/۷	۶۰	۱۲/۷	۰	۰



شکل ۶) ناحیه تغییر شکل داخل قالب - e1 میزان خروج از مرکز در راستای محور X و e2 میزان خروج از مرکز در راستای محور Y

جدول ۲) مشخصات ماده سرب[4]

خواص ماده	مقدار
مدول یانگ (E)	14 GPa
نسبت پواسون (ϑ)	0.35
چگالی (ρ)	11.34 g/cm3
توان کارسختی (n)	0.2
ضریب استحکام (K)	32.1 MPa

همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، به علت عدم تقارن جریان ماده، قالب‌ها بصورت ۳ بعدی مدل شده است. قالب و سنبه بصورت جسم صلب و بیلت بصورت ماده شکل‌پذیر، و سرعت سنبه ۲ mm/min در نظر گرفته شده است. از المان چهارگرهی R3D4 برای مدل‌سازی قطعات صلب شامل قالب، محفظه و سنبه، و همچنین از المان هشت گرهی C3D8R با تعداد المان‌های ۱۴۸۱۹۱ عدد برای مدل‌سازی بیلت شکل‌پذیر استفاده شد. به منظور مدل‌سازی سطوح تماس از روش پنالتی با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک کولمب (μ) استفاده شد[20]. با توجه به اینکه در روش نظری از مدل اصطکاکی چسبنده (m) استفاده شده است، به منظور تطابق دو مدل اصطکاکی از رابطه زیر استفاده گردید[28]:

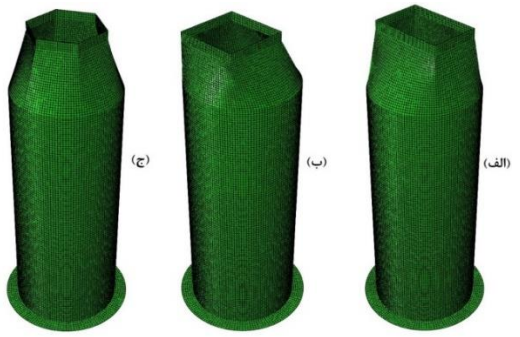
$$\mu = \frac{m^{0.9}}{2.72(1-m)^{0.11}} \qquad (۳۸)$$

همچنین مقیاس جرم و زمانی برای شبیه‌سازی صریح به گونه‌ای درنظر گرفته شدند تا نسبت انرژی جنبشی به انرژی کرنشی کمتر از ۵ درصد باشد. در شکل ۸ نمودار نیرو جابجایی حاصل از شبیه سازی و مقایسه آن با داده‌های آزمایشگاهی[4]، برای قالب شماره ۱ نشان داده شده است. درصد اختلاف نمودار نیرو جابجایی شبیه‌سازی با نتایج آزمایشگاهی در شرایط مشابه کمتر از ۱۰ درصد بوده که نزدیکی این نتایج نشان از کالیبره بودن شبیه‌سازی می‌باشد.

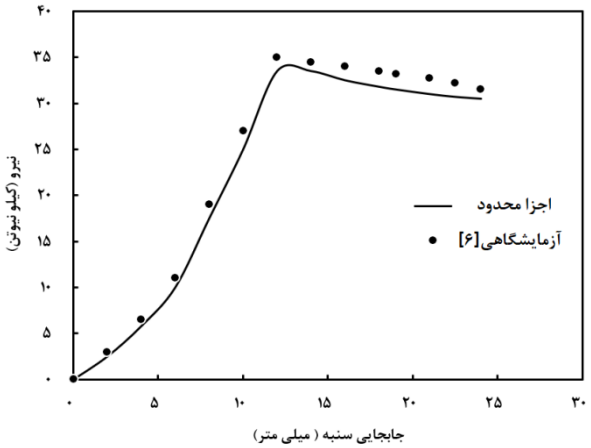
۴- نتایج و بحث

۴-۱- بررسی فشار فرآیند

در این بخش فشار فرآیند حاصل از روش نظری ارائه شده با پژوهش‌های پیشین مقایسه می‌شود. در شکل ۹ فشار فرآیند

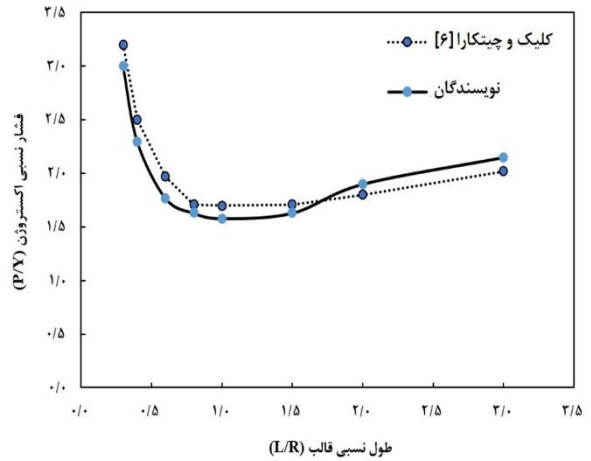


شکل ۷) مدل سه بعدی محفظه و قالب در فرآیند اکستروژن مستقیم مقطع مستطیلی (الف) ، مربعی خارج از مرکز (ب) ، شش ضلعی (ج)

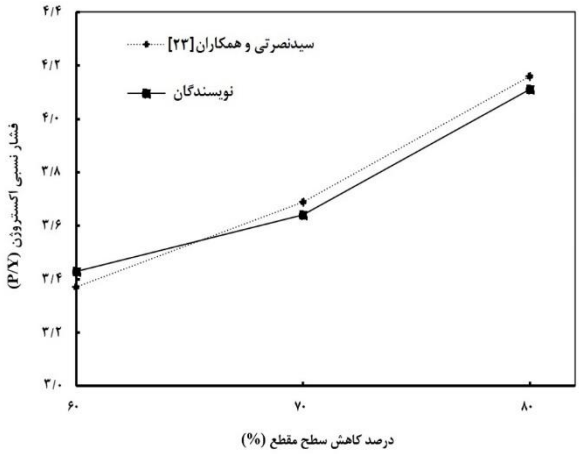


شکل ۸) نمودار نیرو-جابجایی حاصل از شبیه سازی نویسندگان و داده‌های آزمایشگاهی کلیک و چیتکارا[4] برای قالب شماره ۱

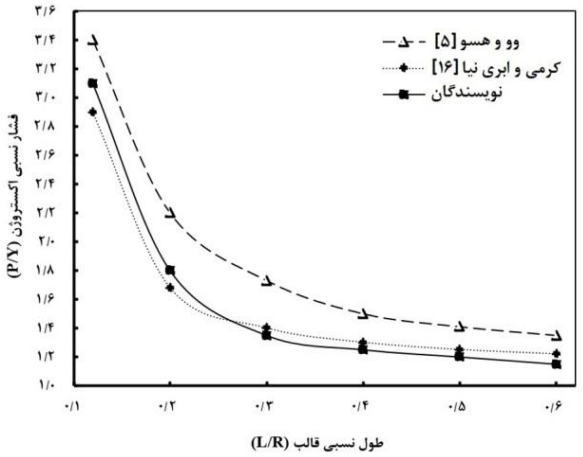
اکستروژن مقطع دایره‌ای به مقطع مربعی خارج از مرکز با درصد کاهش سطح مقطع ٦٠٪ و عامل اصطکاکی ۰/۲ =m با نتایج کلیک و چیتکارا[4] با طول نسبی قالب مختلف مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از دو روش تطابق خوبی بهم داشته و کمینه فشار فرآیند در طول نسبی قالب در محدوده ۰/۸ تا ۱/۲ قرار دارد. در شکل ۱۰ فشار فرآیند اکستروژن مقطع مستطیلی با نسبت طول به عرض ۲ و عامل اصطکاکی ۰/۲ =m با نتایج پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است. همانطور که از مشاهده می‌شود برای درصدهای مختلف کاهش سطح مقطع، روش نظري ارائه شده تطابق خوبی با نتایج سید نصرتی و ابری‌نیا[24] دارد. شکل ۱۱ فشار فرآیند اکستروژن مقطع شش ضلعی منتظم با درصد کاهش سطح مقطع ۶۰٪ و عامل اصطکاکی ۰/۲ =m را با نتایج پژوهش‌های پیشین مقایسه می‌کند. همانطور نشان داده شده است در طول نسبی قالب مختلف نتایج حاصل تطابق خوبی با نتایج کرمی و ابری‌نیا[17] داشته و نسبت به نتایج وو و هسو[5] مقادیر فشار کمتری را به دست می‌دهد.



شکل ۹) مقایسه فشار فرآیند اکستروژن مقطع مربعی خارج از مرکز حاصل از روش نویسندگان با نتایج کلیک و چیتکارا[4]



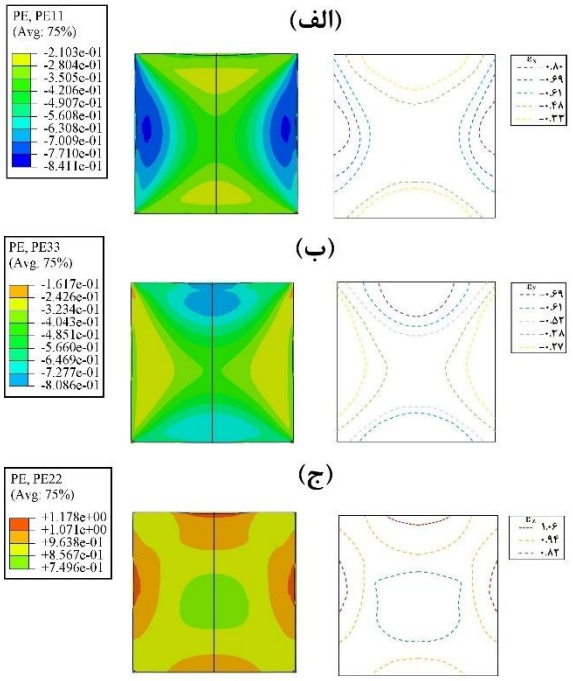
شکل ۱۰) مقایسه فشار فرآیند اکستروژن مقطع مستطیلی حاصل از روش نظری ارائه شده با پژوهش‌های پیشین



شکل ۱۱) مقایسه فشار فرآیند اکستروژن مقطع شش ضلعی حاصل از روش نویسندگان با پژوهش‌های پیشین

۴-۲- مقایسه توزیع کرنش

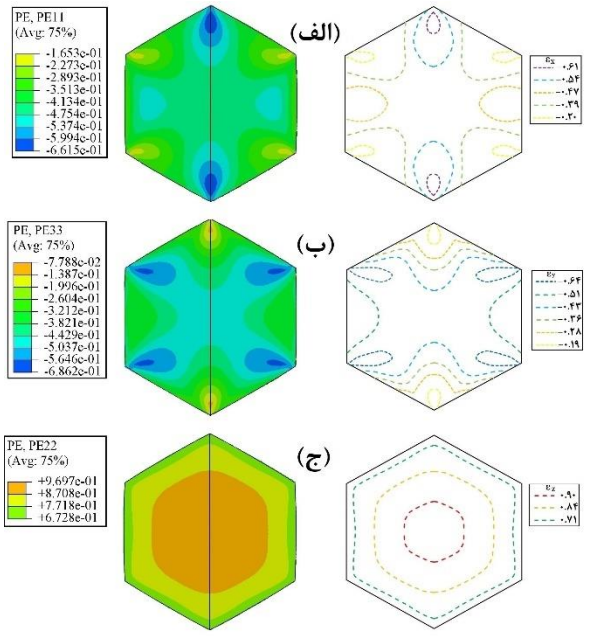
در این بخش توزیع مولفه های کرنش برای سه مقطع خروجی مربعی شکل، شش ضلعی منتظم و مستطیلی که با روش نظری به دست آمده است با نتایج حاصل از شبیه سازی اجزا محدود مقایسه می‌گردد. در شکل ۱۲ توزیع مولفه‌های کرنش حاصل از روش نظری و شبیه سازی اجزا محدود برای قالب شماره ۲ که به میزان ۳/۲ میلی متر در راستای محور y خارج از مرکز بوده، نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود بدلیل تقارن قالب نسبت به محور y توزیع مولفه‌های کرنش تنها نسبت به محور y متقارن است. بیشینه مقدار مولفه ε_x در روش نظری ۰/۸- و در روش اجزا محدود ۰/۸۴- و بیشینه مقدار مولفه ε_y به ترتیب ۰/۶۹- و ۰/۸- می‌باشد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که در نزدیکی لبه‌هایی که مولفه ε_x بیشینه است مولفه ε_y کمینه می‌باشد و بالعکس. این مقدار در نزدیکی مرکز مربع تقریبا برابر میانگین مقدار کرنش در نزدیکی لبه‌ها است. مقایسه نتایج



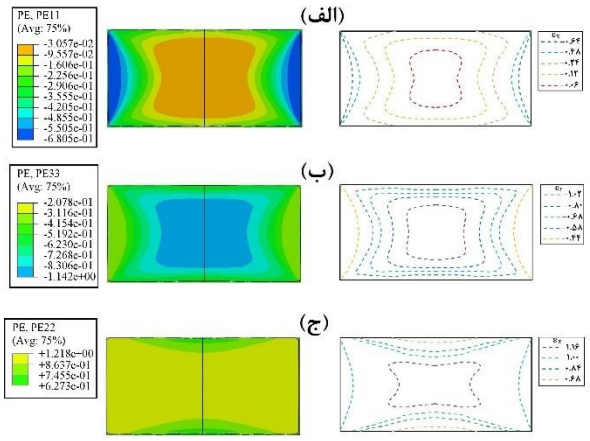
شکل ۱۲) توزیع کرنش حاصل از روش نظری و شبیه سازی اجزا محدود برای قالب شماره ۱، الف مولفه x ، ب مولفه y ، ج مولفه z

محاسبه مولفه ε_z نشان می‌دهد که مقدار بیشینه کرنش محوری در لبه‌ها اتفاق می‌افتد، و کمینه آن در نزدیکی مرکز می‌باشد.

در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توزیع مولفه‌های کرنش حاصل از روش نظری و شبیه‌سازی اجزا محدود برای مقاطع خروجی شش ضلعی منتظم و مستطیلی نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود بدلیل تقارن مقاطع نسبت به محورهای x و y توزیع مولفه های کرنش نیز نسبت به محور x و y متقارن است.



شکل ۱۳) توزیع کرنش حاصل از روش نظری و شبیه سازی اجزا محدود برای قالب شماره ۴، الف مولفه x ، ب مولفه y ، ج مولفه z

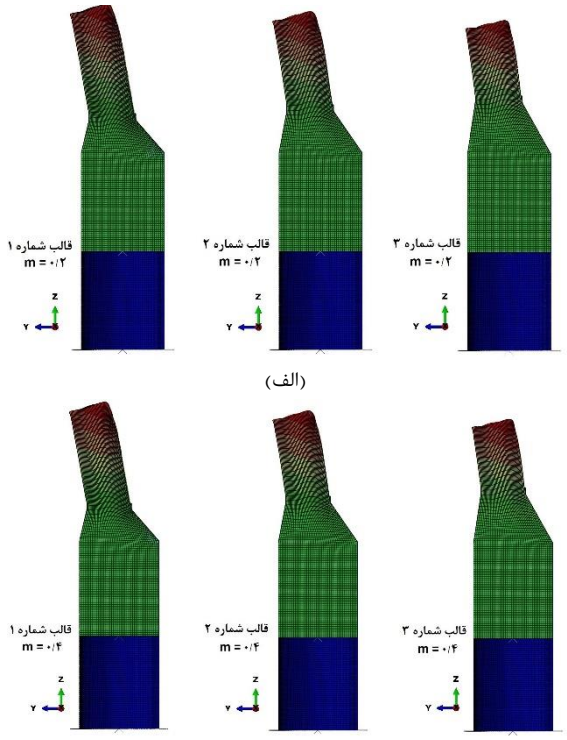


شکل ۱۴) توزیع کرنش حاصل از روش نظری و شبیه سازی اجزا محدود برای قالب شماره ۵، الف مولفه x ، ب مولفه y ، ج مولفه z

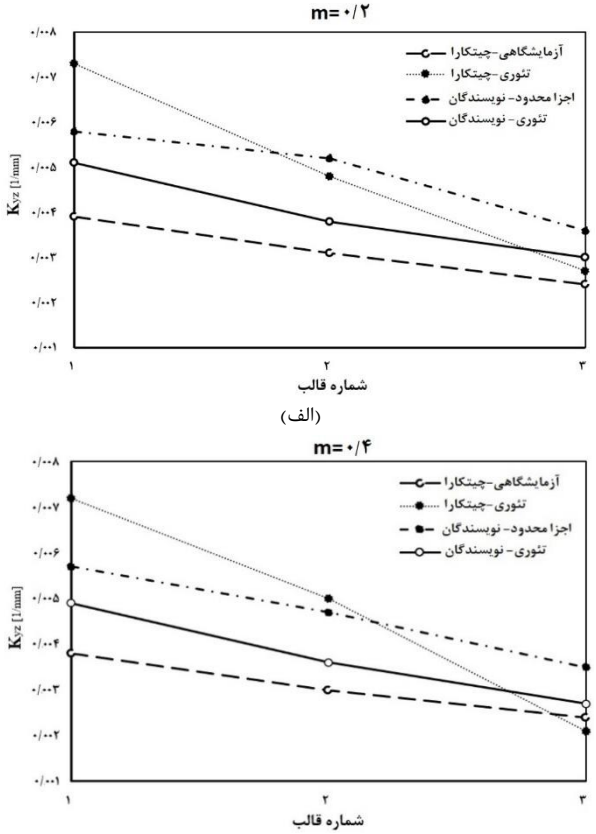
مقایسه تصاویر نشان می‌دهد که در نزدیکی گوشه‌هایی که مولفه ε_x مقدار بیشینه را دارد مولفه ε_y مقدار کمینه را دارد و بالعکس. مقایسه نتایج محاسبه مولفه ε_z نشان می‌دهد که بیشینه مقدار کرنش محوری در نزدیکی مرکز اتفاق می‌افتد. برای مقطع شش ضلعی این مقدار در روش نظری ۰/۹ و در روش اجزا محدود تقریبا ۰/۹۷ به دست آمده است. همچنین مقدار کمینه مولفه ε_z در نزدیکی لبه ها است که در روش نظری ۰/۷۱ و در روش اجزا محدود تقریبا ۰/۶۷ می‌باشد. مقایسه نتایج به دست آمده از روش نظری و اجزا محدود در این بخش نشان می‌دهد، هم خوانی نزدیکی میان این دو روش وجود دارد. توزیع کرنش برای هر سه مقطع بسیار مشابه هم بوده و اختلاف در حدود ۱۰ درصد است.

۴-۳- پیش بینی خمیدگی محصول خروجی

میزان انحنای محصول خروجی، برای مقطع مربعی خارج از مرکز برای قالب‌های شماره ۱ و ۲ و ۳ با طول قالب متفاوت با دو روش نظری و شبیه سازی اجزا محدود محاسبه شده و با نتایج نظری و آزمایشگاهی کلیک و چیتکارا[4] برای هر سه قالب مقایسه گردید. در شکل ۱۵ انحنای محصول خروجی با روش شبیه‌سازی اجزا محدود در دو عامل اصطکاکی (m) مختلف نشان داده شده است. در هر سه قالب بدلیل تقارن قالب نسبت به محور y تنها در صفحه yz محصول خروجی دچار خمیدگی می‌گردد. در شکل ۱۶ انحنای محصول خروجی از قالب‌ها حاصل از روش نظری و اجزا محدود با نتایج کلیک و چیتکارا[4] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش طول قالب میزان انحنای محصول خروجی کاهش می‌یابد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که اصطکاک قالب تاثیر قابل توجه‌ای بر روی خمیدگی محصول خروجی ندارد. همچنین همانطور که مشاهده می‌شود نتایج نظری حاصل از نگاشت همدیس همخوانی بهتری با نتایج آزمایشگاهی دارد.



شکل ۱۵) مقایسه انحنای محصول خروجی در صفحه yz در قالبهای شماره ۱ و ۲ و ۳ در الف) m=۰/۲ و ب) m=۰/۴



شکل ۱۶) مقایسه انحنای محصول خروجی از قالبها درصفحه yz حاصل از روش نظری و اجزا محدود نویسندگان با نتایج آزمایشگاهی و نظری کلیک و چیتکارا [4] در الف) m=۰/۲ و ب) m=۰/۴

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله از یک روش ترکیبی مبتنی بر نظریه نگاشت همدیس ریمان و روش حد بالا جهت مدل‌سازی دقیق‌تر ناحیه تغییر شکل و جریان ماده بین مقطع ورودی دایره‌ای و مقاطع خروجی مربعی، مستطیلی و شش ضلعی در فرآیند اکستروژن مستقیم استفاده و نتایج ذیل به دست آمد:

- با توجه به اینکه تناظر یک به یک دقیق‌تری نسبت به روش تقسیم بندی مناطق میان مقطع ورودی و خروجی ایجاد گردید، میدان سرعت حاصله می‌تواند علاوه بر پیش‌بینی فشار فرآیند در تعیین توزیع مولفه‌های کرنش مقاطع مختلف نیز بکار آید.
- با استفاده از توزیع مولفه‌های کرنش به دست آمده و با بکارگیری یک روش نظری، خمیدگی محصول خروجی در فرآیند اکستروژن پیش‌بینی شد که با نتایج شبیه سازی و آزمایشگاهی همخوانی مناسبی داشت.
- عواملی نظیر طول قالب، تناظر یک به یک مقطع ورودی و خروجی، و درصد کاهش سطح مقطع که بر هندسه ناحیه تغییر شکل و توزیع کرنش در مقطع خروجی موثر هستند، در خمیدگی محصول خروجی برای مقاطع نامتقارن تاثیر خواهند گذاشت. همچنین با توجه به نتایج، روانکاری قالب تاثیر قابل توجه‌ای در خمیدگی محصول خروجی ندارد.

تشکر و قدردانی: بدینوسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل که امکان انجام این پژوهش را فراهم نمود، تشکر و قدردانی می‌شود.

تاییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده و همچنین برای بررسی و چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. محتویات علمی مقاله، حاصل پژوهش نویسندگان بوده و صحت نتایج آن نیز بر عهده آنها است.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که این اثر حاصل پژوهشی مستقل بوده، و هیچ گونه تضاد منافعی با اشخاص یا سازمان‌های دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: مجید شیخ پور (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۵۰٪) ؛ سید جمال حسینی پور (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی، روش شناس، (۳۰٪)؛ محمدجواد میرنیا (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی، روش شناس (۲۰٪).

منابع مالی: تمامی هزینه‌ها از اعتبار پژوهشی پروژه‌های دکتری دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل تامین شده است.

منابع

1- Boer CR, Schneider WR, Eliasson B, Avitzur B. An upper bound approach for the direct drawing of square section rod from round bar. InProceedings of the Twentieth International Machine Tool Design and Research Conference 1980 (pp. 149-156). Palgrave Macmillan, London.
2- Gunasekera JS, Hoshino S, Brown RH. Extrusion of non-circular sections through shaped dies. CIRP Annals. 1980;29(1):141-5.
3- Chitkara NR, Abrinia K. A generalised upper bound solution for three-dimensional extrusion of shaped sections using Cad-Cam bilinear surface dies. InProceedings of the Twenty-eighth International 1990 (pp. 417-424). Palgrave, London.
4- Celik KF, Chitkara NR. Application of an upper bound method to off-centric extrusion of square sections, analysis and experiments. International journal of mechanical sciences. 2000;42(2):321-45.
5- Wu CW, Hsu RQ. A universal velocity field for the extrusion of non-axisymmetric rods with non-uniform velocity distribution in the extrusion direction. Journal of Materials Processing Technology. 2000;97(1-3):180-5.
6- Qi HY, Wang SX, Zhu HJ. Similar extrusion and mapping optimization of die cavity modeling for special-shaped products. Transactions of Nonferrous Metals Society of China. 2006;16(3):587-92.
7- Hongyuan Q, Keshan C, Wanhua S, Hengjun Z. Vertical curve analysis of extruding die cavity and conformal mapping. Journal of Rare Earths. 2007;25:375-8.
8- Saboori M, Bakhshi-Jooybari M, Noorani-Azad M, Gorji A. Experimental and numerical study of energy consumption in forward and backward rod extrusion. Journal of materials processing technology. 2006;177(1-3):612-6.
9- Ajiboye JS, Adeyemi MB. Upper bound analysis for extrusion at various die land lengths and shaped profiles. International journal of mechanical sciences. 2007;49(3):335-51.
10- Assempour A, Hassannejadasl A. Minimization of the exit profile curvature in non-symmetric T-shaped sections in the extrusion process. Materials & Design. 2009;30(4):1350-5.
11- Sahoo SK, Sahoo B, Patra LN, Paltasingh UC, Samantaray PR. Three-dimensional analysis of round-to-angle section extrusion through straight converging die. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2010;49(5-8):505-12.
12- Abrinia K, Davarzani H. A universal formulation for the extrusion of sections with no axis of symmetry. Journal of Materials Processing Technology. 2012;212(6):1355-66.
13- Gordon WA, Van Tyne CJ, Moon YH. Minimizing distortion during extrusion using adaptable dies. International Journal of Mechanical Sciences. 2012;62(1):1-7.
14- Abrinia K, Ghorbani M. Theoretical and experimental analyses for the forward extrusion of nonsymmetric sections. Materials and Manufacturing Processes. 2012;27(4):420-9.

15- Sheikhpour, M., Forward Extrusion Bearing Design Using Upper Bound Master's thesis, University of Tehran, 2012, [in Persian].
16- Abrinia K, Farahmand P, Parchami-Sarghin M. Formulation of a new generalized kinematically admissible velocity field with a variable axial component for the forward extrusion of shaped sections. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2014;70(5-8):1427-35.
17- Karami P, Abrinia K. Development of a more realistic upper bound solution for the three-dimensional problems in the forward extrusion process. International Journal of Mechanical Sciences. 2013;74:112-9.
18- Venkatesh C, Venkatesan R. Design and analysis of streamlined extrusion die for round to hexagon using area mapping technique, upper bound technique and finite element method. Journal of Mechanical Science and Technology. 2014;28(5):1867-74.
19- Onlaghi SN, Assempour A. On the minimization of the exit profile curvature in extrusion through multi-hole dies: a methodology and some verifications. Meccanica. 2015;50(5):1249-61.
20- Tabatabaei SA, Abrinia K, Tabatabaei SM, Shahabadi M, Besharati MK. Analytical modeling of the extrusion process using the electrostatics concept. Mechanics of Materials. 2015;88:87-102.
21- Farzad H, Ebrahimi R. Die profile optimization of rectangular cross section extrusion in plane strain condition using upper bound analysis method and simulated annealing algorithm. Journal of Manufacturing Science and Engineering. 2017;139(2).
22- Hussein AW, Kadhim AJ. Mathematical analyses and numerical simulations for forward extrusion of circular, square, and rhomboidal sections from round billets through streamlined dies. Journal of Manufacturing Science and Engineering. 2017;139(6).
23- Zhou W, Lin J, Dean TA, Wang L. Feasibility studies of a novel extrusion process for curved profiles: experimentation and modelling. International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2018;126:27-43.
24- Nosrati AS, Abrinia K, Parvizi A. An Applied Analytical Method for the Forward Extrusion of Metals. Journal of Materials Engineering and Performance. 2020;29(2):1296-310.
25- Sheikhpour M, Hosseinipour SJ, Mirnia MJ. Prediction of exit profile distortion in forward extrusion process using Riemann mapping theorem and upper bound method. Meccanica. 2020;55(5):1099-118.
26- Schinzinger R, Laura PA. Conformal mapping: methods and applications. Courier Corporation; 2012.
27- El Megharbel A, El Nasser GA, El Domiaty A. Bending of tube and section made of strain-hardening materials. Journal of Materials Processing Technology. 2008;203(1-3):372-80.
28- Molaei SH, Shahbaz M, Ebrahimi R. The relationship between constant friction factor and coefficient of friction in metal forming using finite element analysis. Iranian Journal of Materials Forming. 2019;1(2):14-22.