



3-D Dynamic Modeling and Simulation of a Quadrotor Transporting Cable-Suspended Payload Generating Stochastic Forces

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Baha M.¹,
Saghafi F.^{1*},

How to cite this article

Baha M., Saghafi F. 3-D Dynamic Modeling and Simulation of a Quadrotor Transporting Cable-Suspended Payload Generating Stochastic Forces. Modares Mechanical Engineering. 2022; 22(07):429-439.

¹ Flight Dynamics and Control Group, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

*Correspondence

Address: Flight Dynamics and Control Group, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
saghafi@sharif.edu

Article History

Received: November 16, 2020
Accepted: December 21, 2021
ePublished: June 06, 2022

ABSTRACT

This paper focuses on 3-D dynamic modeling of a transport quadrotor with cable in the presence of load generating stochastic forces. In many practical cases, we are dealing with payloads that generate oscillating forces with random amplitude and frequency by their inherent dynamics or interacting with the environment. These forces can greatly affect the dynamics of the transport system. The innovation of the present study is to consider these forces and show their impact on quadrotor's dynamics. Furthermore, in order to make the model more compatible with the real system, it is assumed that the connection point of cable and quadrotor is not located on the center of gravity of flying vehicle and the cable's inertia is considered in the modeling process. To this end, the systems' equations of motion are derived based on both Euler-Lagrange and Newton-Euler methods. After obtaining equations of motion, the verification of the model is investigated in three steps. In the first step, by performing simulation, the validity of the nonlinear model is investigated and dynamical analysis is expressed. In the next step, by evaluating the structure of the model, it is shown that the equations of motion satisfy some structural features of a desirable dynamic model. Then, by setting some parameters and variables to zero, it is shown that simpler models provided in some references can be achieved from this comprehensive model. At the end, the conclusion of this work is presented.

Keywords Dynamic Modeling, Simulation, Transport Quadrotor, Cable-Suspended Payload, Stochastic Forces

CITATION LINKS

[1] Modeling and control of MM-UAV: Mobile manipulating unmanned aerial vehicle. [2] Avian-inspired grasping for quadrotor micro UAVs. [3] Simulation of the dynamics of helicopter slung load systems. [4] Dynamics and control of a helicopter carrying a payload using a cable-suspended robot. [5] Rapid swing-free transport of nonlinear payloads using dynamic programming. [6] Using constrained model predictive control to control two quadrotors transporting a cable-suspended payload. [7] Trajectory tracking for quadrotor UAV transporting cable-suspended payload in wind presence. [8] Dynamics, control and planning for cooperative manipulation of payloads suspended by cables from multiple quadrotor robots. [9] Passivity based control for a quadrotor UAV transporting a cable-suspended payload with minimum swing. [10] Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload. [11] Geometric stabilization of a quadrotor UAV with a payload connected by flexible cable. [12] Adaptive control of a quadrotor UAV transporting a cable-suspended load with unknown mass. [13] Dynamics and control of quadrotor UAVs transporting a rigid body connected via flexible cables. [14] Geometric control of quadrotor UAVs transporting a cable-suspended rigid body. [15] Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach. [16] IDA-PBC methodology for a quadrotor UAV transporting a cable-suspended payload. [17] 2-D Dynamic modeling and simulation of a quadrotor, transporting a cable-suspended payload with stochastic forces. [18] Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics. [19] Mathematical modelling and parameter identification of quadrotor (a survey). [20] Modelling and control of quadcopter. [21] Cable-suspended load lifting by a quadrotor UAV: hybrid model, trajectory generation, and control.

مدل سازی دینامیکی و شبیه سازی سه بعدی یک چهارپره به هنگام انتقال محموله آویزان به کابل با قابلیت تولید نیروهای تصادفی

میرشمس بهاء

گروه دینامیک پرواز و کنترل، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

فریبرز ثقفی*

گروه دینامیک پرواز و کنترل، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش، به مدلسازی دینامیکی سه بعدی یک چهارپره حامل با کابل در حضور بار مولد نیروهای تصادفی پرداخته می شود. در بسیاری موارد عملی با محموله هایی سروکار داریم که بر مبنای دینامیک ذاتی خود یا برهمکنش با محیط قادر به تولید نیروهای نوسانی با دامنه و فرکانس تصادفی هستند که این موضوع می تواند به شدت دینامیک سامانه حامل را تحت تاثیر قرار دهد. نوآوری پژوهش حاضر، در نظرگیری این نیروها و نمایش تاثیر آنها بر دینامیک چهارپره است. همچنین جهت انطباق بهتر مدل با سامانه واقعی، فرض می شود که نقطه اتصال کابل منطبق بر مرکز ثقل پرنده نبوده و اینرسی کابل در فرایند مدلسازی در نظر گرفته می شود. در این راستا، معادلات حرکت سامانه بر مبنای هر دو روش اولر-لاگرانژ و نیوتن-اولر استخراج خواهند گردید. پس از دستیابی به معادلات حرکت، صحت مدل دینامیکی در سه مرحله مورد بررسی قرار می گیرد. در گام نخست با انجام شبیه سازی، اعتبار مدل غیرخطی مورد سنجش قرار گرفته و تحلیل دینامیکی صورت می پذیرد. در گام بعد با ارزیابی ساختار مدل، نشان داده می شود که معادلات حرکت برخی ویژگی های ساختاری یک مدل دینامیکی مطلوب را برآورده می نماید. سپس، با برابر صفر قرار دادن برخی پارامترها و متغیرها، نشان داده می شود که مدل های ساده تر ارائه شده در برخی مراجع را می توان از مدل جامع مذکور بدست آورد. در آخر به بحث و نتیجه گیری حاصل از کار پرداخته خواهد شد.

کلیدواژه ها: مدلسازی دینامیکی، شبیه سازی، چهارپره حامل، محموله آویزان به کابل، نیروهای تصادفی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۳۰

* نویسنده مسئول: saghafi@sharif.edu

۱- مقدمه

امروزه توسعه ریزپرنده های هوشمند، بویژه چهارپره ها به دلیل چابکی، مکانیزم ساده و مانورپذیری بالا، بخش بزرگی از تحقیقات علمی در زمینه رباتیک هوایی را به خود اختصاص داده اند [1, 2]. عکس برداری و فیلم برداری هوایی، امداد رسانی در عملیات نجات و اکتشاف، جمع آوری اطلاعات از محیط های خطرناک و دور از دسترس از جمله کاربردهای این وسایل پرنده می باشند. یکی از مهمترین این کاربردها، انتقال محموله ای خاص از نقطه ای به نقطه دیگر است که از جمله موارد مورد استفاده آن می توان به استقرار تجهیزات در مأموریت های نظامی، حمل جعبه کمک های اولیه

برای مصدومان ناشی از حوادث غیرمترقبه همچون سیل، زلزله و آتش سوزی اشاره کرد.

بطور سنتی از ابتدای توسعه صنعت هوانوردی، هلیکوپترها متداولترین سامانه جهت حمل انواع بارها به حساب می آمده و از اینرو حمل محموله آویزان به کابل بطور سنتی برای این پرنده مورد مطالعه قرار گرفته است [3, 4]. در سالیان اخیر، تحقیقات گسترده ای بر روی حمل و استقرار محموله توسط یک یا تعدادی ریزپرنده خودگردان انجام شده است [5, 6]. به منظور توانا ساختن این پرنده ها برای انجام چنین مأموریت هایی، تحلیل دینامیکی سامانه بسیار حائز اهمیت خواهد بود که این خود نیازمند مدلی دقیق و در عین حال به دور از پیچیدگی های غیرضروری از سامانه است. در این راستا مطالعات زیادی جهت مدلسازی سامانه مذکور صورت گرفته است [7, 8]. امروزه ثابت شده است، یک مدل خوب، بخش اساسی در طراحی یک کنترل کننده مطلوب می باشد [9, 10].

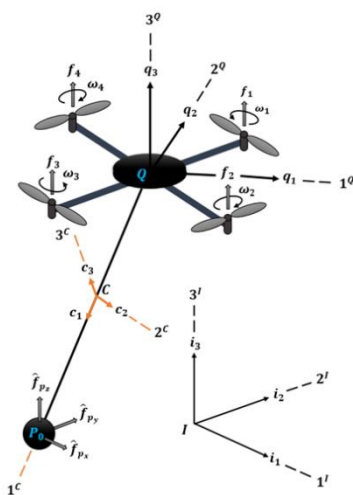
در سالیان اخیر برخی پژوهشگران تلاش نموده اند، سامانه را با جزئیات بیشتری مدل نمایند. در یکی از این پژوهش ها، لی و همکاران، جهت مدلسازی انعطاف پذیری کابل، این عنصر را به صورت زنجیره ای از میله های متصل به یکدیگر در نظر گرفتند. حاصل کارشان به مدل های پیچیده ای منتهی شده که طراحی کنترل کننده را بسیار دشوار می نماید [11-14]. این در حالی است که در بسیاری مأموریت ها، به دلیل سرعت پایین سامانه و طول کوتاه کابل، مدلسازی سامانه با فرض کابل به صورت یک لینک صلب را بسیار رضایت بخش نموده است. اما در این نوع مطالعات، معادلات حرکت با فرضیاتی همچون: کوچک بودن زوایای وضعیت سامانه، اتصال کابل به مرکز ثقل پرنده، محموله به صورت استاتیک با جرم ثابت و عدم در نظرگیری اینرسی کابل استخراج گردیده اند که سبب کاهش دقت مدل های بدست آمده شده است [15, 16]. موضوع مهمی که وجود دارد این است که چهارپره های حامل می توانند جهت انتقال بارهایی بکار گرفته شوند که علاوه بر انتقال مومنتوم شدید به پرنده بواسطه تغییرات ناگهانی اینرسی، قابلیت تولید نیروهای نوسانی با دامنه و فرکانس تصادفی را دارا باشند. از جمله این موارد می توان به انتقال موجودات زنده در معرض خطر، پدیده تلاطم سیال در تانک نیمه پر اشاره نمود. بدیهی است که این موضوع به شدت دینامیک سامانه های حامل را تحت تاثیر قرار داده و در غیاب سیستم کنترلی با عملکرد مطلوب، به ناپایداری و سقوط آنها منجر می شود. از اینرو تحلیل دینامیکی این سامانه ها، در حضور این دسته از بارها، بسیار حائز اهمیت بوده که موضوع تحقیق حاضر می باشد.

در پژوهش پیشین [17]، به مدلسازی سامانه در حرکت صفحه ای پرداخته شد. در پژوهش حاضر به تبیین فرایند استخراج معادلات غیرخطی حاکم بر سامانه در حرکت سه بعدی بر مبنای هر دو روش تحلیلی اولر-لاگرانژ و برداری نیوتن-اولر پرداخته می شود. در این راستا، علاوه بر در نظرگیری محموله با قابلیت تولید نیرو، محل

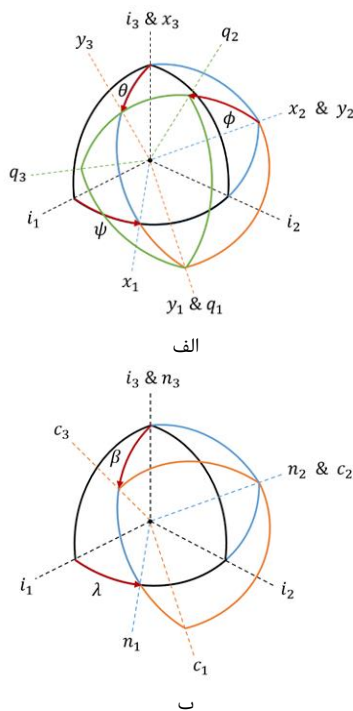
بنابراین متغیرهای مستقل سامانه هشت درجه آزادی فوق به صورت $q \in R^8, q = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \ \beta \ \lambda]^T$ می‌باشند.

جدول (۱) فرضیات حاکم جهت مدلسازی سامانه

شماره	فرضیات
۱	چهارپره به صورت متقارن با توزیع جرم یکنواخت و ساختار ضریبی فرض می‌شود.
۲	محل اتصال کابل به چهارپره روی محور تقارن پرنده و به فاصله d پایین‌تر از مرکز ثقل آن قرار دارد.
۳	کابل دارای اینرسی بوده اما با توجه به جرم ناچیز کابل نسبت به محموله و طول کوتاه آن، در طول حرکت دچار انعطاف نمی‌گردد.
۴	از پیچش کابل حول محور طولی آن صرف‌نظر می‌شود.



شکل (۱) چهارپره حامل محموله آویزان به کابل



شکل (۲) نمودار قاچ پرتقالی (الف) تبدیل مختصات بدنی چهارپره نسبت به اینرسی، (ب) تبدیل مختصات بدنی کابل نسبت به اینرسی

اتصال کابل خارج از مرکز ثقل پرنده در نظر گرفته شده و اینرسی کابل در فرایند مدلسازی لحاظ می‌گردد تا مدل بدست آمده هر چه بیشتر مبین فیزیک واقعی سامانه باشد. همچنین با توجه به اینکه در برخی ماموریت‌ها امکان تغییر جرم محموله وجود دارد، در شبیه‌سازی نتایج حاصل از در نظرگیری محموله با جرم ثابت و جرم متغیر نیز در کنار محموله با قابلیت تولید نیروهای تصادفی نمایش داده خواهد شد. بنابراین نوآوری‌های پژوهش حاضر عبارتند از:

ارائه مدلی جامع از چهارپره حامل بار آویزان به کابل با در نظرگیری محموله با قابلیت تولید نیرو.

تحلیل فیزیکی برهمکنش اجزای سامانه بر یکدیگر و اثر نیروهای تصادفی اعمالی از سوی محموله بر دینامیک سامانه.

در این پژوهش، در گام نخست، معادلات حرکت سامانه بر مبنای روش‌های اولر-لاگرانژ و نیوتن-اولر استخراج می‌گردند. در گام بعد، ساختار مدل دینامیکی مورد ارزیابی قرار گرفته و جهت تبیین جامعیت آن، نشان داده خواهد شد که می‌توان مدل‌های ساده‌تر را از درون آن، بدست آورد. در مرحله بعد با تعریف سناریوهایی شبیه‌سازی صورت گرفته و با تحلیل نمودارهای حاصله، اعتبار مدل دینامیکی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در گام آخر به بحث و نتیجه‌گیری حاصل از کار خواهیم پرداخت.

۲- مدلسازی دینامیکی سامانه

در این تحقیق، جهت دستیابی به مدلی مطلوب از سامانه، قاب‌های اینرسی، بدنی پرنده و کابل مطابق با شکل ۱ در نظر گرفته می‌شوند. قاب اینرسی با بردارهای یکه $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ تعریف می‌شود. بطور مشابه، قاب بدنی چهارپره با بردارهای یکه $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ تعریف گردیده که مرکز آن بر روی مرکز ثقل چهارپره قرار داشته و با توجه به ساختار ضریبی چهارپره، راستای بردار یکه نخست q_1 در جهت نیمساز روتورهای اول و دوم بوده و محور سوم آن منطبق بر محور تقارن پرنده و رو به بالا می‌باشد. برای کابل نیز قاب بدنی با بردارهای یکه $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ تبیین می‌شود که در آن بردار یکه نخست c_1 در راستای محور طولی کابل به سمت محموله در نظر گرفته شده، بردار یکه دوم عمود بر بردار نخست و در صفحه افق اینرسی قرار داشته و بردار یکه سوم از ضرب خارجی دو بردار c_1 و c_2 بدست می‌آید.

فرضیات حاکم جهت مدلسازی سامانه در جدول ۱ نمایش داده شده است.

مطابق با ترسیمه‌های قاچ پرتقالی نمایش داده شده در شکل ۲، می‌توان با سه دوران متوالی ψ ، θ و ϕ دو قاب اینرسی و بدنی چهارپره را بر روی یکدیگر منطبق نمود. همچنین با توجه به اینکه از پیچش کابل صرف‌نظر گردیده است، تنها با دو دوران با زوایای λ و β ، دستگاه اینرسی بر روی دستگاه بدنی کابل منطبق می‌شود [18].

بنابراین ماتریس‌های تبدیل مختصات بدنی چهارپره و کابل نسبت به اینرسی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[T]^{OI} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi C_\theta & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[T]^{CI} = \begin{bmatrix} C_\beta C_\lambda & C_\beta S_\lambda & -S_\beta \\ -S_\lambda & C_\lambda & 0 \\ S_\beta C_\lambda & S_\beta S_\lambda & C_\beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن S_θ و C_θ به ترتیب مبین $\sin\theta$ و $\cos\theta$ می‌باشند. بردارهای سرعت زاویه‌ای چهارپره و کابل بر حسب نرخ تغییرات زوایای اولر عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} p_b \\ q_b \\ r_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱-۲- نیروها و گشتاورها

حرکت سامانه به کمک نیروی پیشرانی که هر یک از روتورهای پرند تولید می‌نمایند صورت می‌گیرد. بردار نیرو و گشتاورهای تولیدی توسط چهارپره بر حسب دور روتورها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_{q1} \\ \tau_{q2} \\ \tau_{q3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_T(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ k_T l_q((\omega_1^2 + \omega_4^2) - (\omega_2^2 + \omega_3^2)) \\ k_T l_q((\omega_3^2 + \omega_4^2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)) \\ k_D(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

جهت دستیابی به مدل دقیق‌تری از سامانه، بایستی تاثیر نیروی پسای هوا بر حرکت سامانه مدنظر قرار گیرد. در حالت کلی تحلیل نیروها و گشتاورهای ایرودینامیکی بر وسایل پرند بسیار پیچیده است اما با توجه به سرعت پروازی پایین چهارپره‌ها در مقایسه با هواپیماها و موشک‌ها، در مطالعات انجام گرفته، این نیروها به شکلی ساده، به صورت یک ماتریس قطری از ضرایب پسای ایرودینامیکی در سرعت‌های خطی پرند مدل گردیده و به نیروهای خارجی وارد بر سامانه، افزوده می‌شوند [19, 20].

$$[f_d]^I = -diag([C_{dx} \ C_{dy} \ C_{dz}])[v_0^I]^I \quad (6)$$

علاوه بر این، گشتاورهای دیگری نیز در اثر کوپلینگ دینامیکی بین چرخش روتورها و سرعت دورانی پرند به وجود می‌آیند که به گشتاورهای ژيروسکوپی موسوم‌اند [19, 20]. این گشتاورها در دستگاه‌های بدنی پرند عبارتند از:

$$[\tau_{gyr}]^Q = J_r \sum_{i=1}^4 [\omega^{OI}]^Q \times [(-1)^i \omega_i]^Q \quad (7)$$

موضوع بسیار مهم در این تحقیق، تبیین دقیق منشاء نیروهای تولیدی توسط محموله است. بسته به دینامیک محموله، این نیروها می‌توانند ناشی از دینامیک ذاتی خود بار و یا ناشی از برهمکنش اجزای متحرک آن با محیط باشند. در حالت نخست این نیروها ناشی از شتاب‌های نسبی اجزای مختلف محموله نسبت به نقطه انتهایی کابل، $\hat{a}_{pP_0}^I$ بوده و در قالب ترم‌های اینرسی در

معادلات حرکت ظاهر می‌گردند. از طرفی چنانچه این نیروها بر اثر برهمکنش اجزای محموله با محیط ایجاد شوند، این ترم‌ها بایستی به عنوان یک نیروی خارجی در معادلات حرکت در نظر گرفته شوند. بنابراین در حالت کلی نیروهای تولیدی توسط محموله به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\hat{f}_p = \hat{f}_{pin} + \hat{f}_{pext} = \sum_{i=1}^n m_{p_i} \hat{a}_{p_i P_0}^I + \sum_{i=1}^m \hat{f}_{p_{iext}} \quad (8)$$

با توجه به خصوصیات ذاتی کابل از جمله عدم تحمل گشتاور، نیروی فشاری و مقاومت پیچشی بسیار پایین، پرند کمتر تحت تاثیر دینامیک محموله قرار گرفته و از اینرو می‌توان با در نظرگیری آن به صورت نقطه مادی فرایند مدلسازی را تسهیل نمود.

۲-۲- مدلسازی بر مبنای روش اولر-لاگرانژ

روش اولر-لاگرانژ، در اکثر تحقیقاتی که با مدلسازی سامانه‌هایی با پارامترهای مجزا سروکار داشته‌اند، بکار گرفته شده است. این روش مبتنی بر ترم‌های انرژی جنبشی و پتانسیل سامانه بوده و از آنجایی که بدست آوردن و کار کردن با این توابع اسکالر جهت دستیابی به معادلات حرکت سامانه بسیار راحت‌تر از تحلیل برداری نیوتن-اولری است، از اینرو، روش بسیار محبوبی در بین محققین می‌باشد. ترم‌های مربوط به انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سامانه عبارتند از:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_i^I v_i^I + \frac{1}{2} \sum \bar{\omega}^I I_j^I \omega^I \quad (9)$$

$$U = g \sum m_i z_i \quad i = Q, E, C, P_0 \quad \& \quad j = Q, C \quad (10)$$

با توسعه روابط سینماتیک به صورت تنسوری بین مرکز ثقل چهارپره Q ، نقطه اتصال کابل به پرند E ، مراکز ثقل کابل C و محموله P خواهیم داشت [18]:

$$v_E^I = v_Q^I + \Omega^{OI} s_{EQ} \quad (11)$$

$$v_C^I = v_E^I + \Omega^{CI} s_{CE} \quad (12)$$

$$v_{P_0}^I = v_E^I + \Omega^{CI} s_{P_0E} \quad (13)$$

$$v_P^I = v_{P_0}^I + \hat{v}_{pP_0}^I \quad (14)$$

در رابطه (۱۴) $\hat{v}_{pP_0}^I$ مبین مجموع برداری تمام سرعت‌ها شامل سرعت نسبی v_{rel} و مماسی Ωr اجزای مختلف محرک محموله P_i نسبت نقطه P_0 (انتهایی کابل) می‌باشد که به صورت تصادفی در نظر گرفته می‌شود. حال با بیان روابط (۱۱) تا (۱۴) در دستگاه مختصات اینرسی خواهیم داشت:

$$[v_E^I]^I = [v_Q^I]^I + [\bar{T}]^{OI} ([\Omega^{OI}]^Q [s_{EQ}]^Q) \quad (15)$$

$$[v_C^I]^I = [v_E^I]^I + [\bar{T}]^{CI} ([\Omega^{CI}]^C [s_{CE}]^C) \quad (16)$$

$$[v_{P_0}^I]^I = [v_E^I]^I + [\bar{T}]^{CI} ([\Omega^{CI}]^C [s_{P_0E}]^C) \quad (17)$$

$$[v_P^I]^I = [v_{P_0}^I]^I + [\hat{v}_{pP_0}^I]^I \quad (18)$$

که در آن، $[s_{EQ}]^Q = [0 \ 0 \ -d]^T$ ، $[s_{CE}]^C = [l/2 \ 0 \ 0]^T$ ، $[s_{P_0E}]^C = [l \ 0 \ 0]^T$ می‌باشند. با جایگذاری روابط فوق در روابط (۷) و (۸)، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سامانه بدست می‌آیند. با تشکیل لاگرانژین $L = T - U$ و بکارگیری رابطه اولر-لاگرانژ:

$$\begin{bmatrix} S_\theta & 0 \\ C_\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau_{q_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -dC_\theta & dS_\theta \\ -lC_\alpha & lS_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_{p_x} \\ \hat{f}_{p_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{d\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{d\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

معادلات فوق، شکل مطلوب مدل دینامیکی حاکم بر سامانه در حرکت صفحه‌ای بوده که جهت تحلیل و طراحی کنترل کننده مناسب می‌باشد^[17]. در این بخش، جهت بیان مختصر معادلات حرکت، پارامترهای اینرسی به صورت جدول ۲ تعریف گردیده و در معادلات جایگذاری شده‌اند.

جدول ۲) نام گذاری پارامترهای اینرسی در معادلات حرکت به صورت سمبولیک

پارامتر	عبارت معادل	پارامتر	عبارت معادل
M	$m_Q + m_C + m_P$	M_{CP_1}	$(m_C + 4m_P)/4$
M_{CP}	$m_C + m_P$	I_θ	$I_{q_{22}} + M_{CP}d^2$
M_{CP_2}	$(m_C + 2m_P)/2$	I_α	$I_{c_{22}} + M_{CP}l^2$

۲-۳- مدلسازی بر مبنای روش نیوتن-اولر

روش نیوتن-اولر مبنای دینامیک برداری و تحلیل سینتیکی سامانه‌های گوناگون از یک تا چند درجه آزادی با عناصر مجزا و پیوسته می‌باشد. از آنجایی که جهت تحلیل دینامیکی و در برخی موارد طراحی کنترل کننده (بوژه سیستم‌های کنترل غیرخطی)، داشتن فهم بالا از فیزیک سامانه ضروری است، از اینرو با توجه به اتکای روش نیوتن-اولر بر تحلیل سینتیکی سامانه، علاوه بر مقایسه و اعتبارسنجی مدل بدست آمده در کنار روش اولر-لاگرانژ، می‌توان بینش فیزیکی خود را از دینامیک سامانه ارتقاء بخشید. در این راستا به منظور مدلسازی، سامانه به دو زیرسیستم: ۱. چهارپره و ۲. محموله آویزان به کابل مطابق با شکل ۳ تفکیک شده و دیگرام آزاد نیروها برای هر یک از آنها رسم می‌گردد. سپس با توجه به دیگرام‌های فوق، به تحلیل سینتیکی سامانه پرداخته شده و معادلات حرکت استخراج می‌شوند. در گام نخست تنها چهارپره را در نظر گرفته و از آنجایی که کابل در محل اتصال خود با پرده هیچگونه گشتاوری را تحمل نمی‌نماید، مطابق با شکل ۳ (الف) اثر آن بر روی چهارپره به صورت سه نیروی f_x ، f_y و f_z در راستای محوره‌های اینرسی نمایش داده خواهد شد.

معادله نیوتن در فرم تنسوری برای حرکت مرکز ثقل چهارپره در صفحه $x-z$ عبارت است از^[18]:

$$m_Q D^1 v_Q^I = f + f_d + f_e + m_Q g \quad (26)$$

در رابطه فوق f برآیند نیروهای تولیدی توسط روتورهای پرده بوده و f_d ، f_e و g به ترتیب مبین نیروهای استهلاکی، نیروهای داخلی در محل اتصال و شتاب گرانش می‌باشند. معادله اولر برای زیرسیستم فوق عبارت است از:

$$D^1 I_Q^{QI} = D^1 (I_Q^{QI} \omega^{QI}) = \tau + \tau_d + S_{EQ} f_e + \tau_{gyr} \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (19)$$

دسته معادلات حرکت سامانه بدست می‌آیند. در رابطه فوق، Q_i نیروها و گشتاورهای تعمیم یافته نامیده می‌شوند.

در این بخش جهت تبیین دقیق‌تر نیروهای تصادفی تولیدی توسط محموله، حرکت سامانه را در صفحه در نظر می‌گیریم. در این راستا، با برابر صفر قرار دادن متغیرهای حالت ψ ، ϕ ، λ و مشتقات آنها و همچنین در نظرگیری $\beta = \pi/2 + \alpha$ ، معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سامانه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M\ddot{x} + m_P \hat{a}_{PP_0x}^I - M_{CP} d\ddot{\theta} C_\theta - M_{CP_2} l\ddot{\alpha} C_\alpha + M_{CP} d\dot{\theta}^2 S_\theta + M_{CP_2} l\dot{\alpha}^2 S_\alpha = f S_\theta + f_{d_x} + \hat{f}_{p_{extx}} \quad (20)$$

$$M\ddot{z} + m_P \hat{a}_{PP_0z}^I + M_{CP} d\ddot{\theta} S_\theta + M_{CP_2} l\ddot{\alpha} S_\alpha + M_{CP} d\dot{\theta}^2 C_\theta + M_{CP_2} l\dot{\alpha}^2 C_\alpha + Mg = f C_\theta + f_{d_z} + \hat{f}_{p_{extz}} \quad (21)$$

$$M_{CP} d\ddot{z} S_\theta - M_{CP} d\ddot{x} C_\theta + I_\theta \ddot{\theta} + M_{CP_2} dl\dot{\alpha} C_{\alpha-\theta} - M_{CP_2} dl\dot{\alpha}^2 S_{\alpha-\theta} + M_{CP} g dS_\theta + m_P d\hat{a}_{PP_0z}^I S_\theta - m_P d\hat{a}_{PP_0x}^I C_\theta + M_{CP} g dS_\theta = \tau_{q_2} + \tau_{d_\theta} - \hat{f}_{p_{extx}} dC_\theta + \hat{f}_{p_{extz}} dS_\theta \quad (22)$$

$$M_{CP_2} l\ddot{z} S_\alpha - M_{CP_2} l\ddot{x} C_\alpha + M_{CP_2} dl\dot{\theta} C_{\alpha-\theta} + I_\alpha \ddot{\alpha} + M_{CP_2} dl\dot{\theta}^2 S_{\alpha-\theta} + M_{CP_2} gl S_\alpha + m_P \hat{a}_{PP_0z}^I S_\alpha - m_P \hat{a}_{PP_0x}^I C_\alpha = \tau_{d_\alpha} - \hat{f}_{p_{extx}} lC_\alpha + \hat{f}_{p_{extz}} lS_\alpha \quad (23)$$

با توجه به آنچه تشریح گردید، ترم‌های شتاب $\hat{a}_{PP_0z}^I$ و $\hat{a}_{PP_0x}^I$ در واقع شامل شتاب‌های المان‌های متحرک محموله نسبت به نقطه P_0 بوده که در دستگاه اینرسی مولفه شده‌اند. با انتقال ترم‌های فوق به سمت راست معادلات حرکت و جایگذاری در رابطه (۸)، چنانچه معادلات حرکت سامانه به شکل ماتریسی زیر نوشته شود:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Bu + Ew + D\dot{q} \quad (24)$$

که در آن، $H(q) \in R^{n \times n}$ ماتریس اینرسی، $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ ماتریس گریز از مرکز و کریولیس و $E \in R^{n \times r}$ ، $B \in R^{n \times m}$ و $G(q) \in R^{n \times 1}$ به ترتیب معرف ماتریس‌های کنترل، اغتشاش و بردار گرانش بوده و $D \in R^{n \times n}$ مبین ماتریس ضرایب نیرو و گشتاورهای استهلاکی است، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} M & 0 & -M_{CP} dC_\theta & -M_{CP_2} lC_\alpha \\ 0 & M & M_{CP} dS_\theta & M_{CP_2} lS_\alpha \\ -M_{CP} dC_\theta & M_{CP} dS_\theta & I_\theta & M_{CP_2} dlC_{\alpha-\theta} \\ -M_{CP_2} lC_\alpha & M_{CP_2} lS_\alpha & M_{CP_2} dlC_{\alpha-\theta} & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_{CP} d\dot{\theta} S_\theta & M_{CP_2} l\dot{\alpha} S_\alpha \\ 0 & 0 & M_{CP} d\dot{\theta} C_\theta & M_{CP_2} l\dot{\alpha} C_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -M_{CP_2} dl\dot{\theta} S_{\alpha-\theta} \\ 0 & 0 & M_{CP_2} dl\dot{\theta} S_{\alpha-\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Mg \\ M_{CP} g dS_\theta \\ M_{CP_2} g l S_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f S_\theta + f_{d_x} + \hat{f}_{p_{extx}} \\ f C_\theta + f_{d_z} + \hat{f}_{p_{extz}} \\ \tau_{q_2} + \tau_{d_\theta} - \hat{f}_{p_{extx}} dC_\theta + \hat{f}_{p_{extz}} dS_\theta \\ \tau_{d_\alpha} - \hat{f}_{p_{extx}} lC_\alpha + \hat{f}_{p_{extz}} lS_\alpha \end{bmatrix} \quad (25)$$

و با بیان معادلات فوق به ترتیب در دستگاه اینرسی و بدنی کابل خواهیم داشت:

$$m_c \left[\frac{dv_c^I}{dt} \right]^I + m_p \left[\frac{dv_p^I}{dt} \right]^I = [f_e]^I + [f_d]^I + [f_p]^I + m_c [g]^I + m_p [g]^I \quad (32)$$

$$[I_c^C]^C \left[\frac{d\omega^{CI}}{dt} \right]^C + [\Omega^{CI}]^C [I_c^C]^C [\omega^{CI}]^C + m_c [S_{CE}]^C [T]^{CI} \left[\frac{dv_c^I}{dt} \right]^I + m_p [S_{PE}]^C [T]^{CI} \left[\frac{dv_p^I}{dt} \right]^I = [\tau_d]^C + [S_{PE}]^C [T]^{CI} [f_p]^I$$

$$+ m_c [S_{CE}]^C [T]^{CI} [g]^I + m_p [S_{PE}]^C [T]^{CI} [g]^I$$

بردار نیروی $[f_e]^I$ بر حسب سایر ترم‌ها از رابطه (۳۲) بدست آمده که با جایگذاری در روابط (۲۸) و (۲۹)، در کنار رابطه (۳۳) معادلات حرکت سامانه را تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه رابطه اولر-لاگرانژ معادلات حرکت سامانه را در مختصات تعمیم یافته بدست می‌دهد، جهت دستیابی به شکل ظاهری یکسان از معادلات حرکت بر مبنای دو روش تحلیلی و برداری، بایستی معادلات بدست آمده از روش نیوتن -اولر را به کمک ماتریس تبدیل در دستگاه متناظر با هر یک از مختصات تعمیم یافته بیان نمود. در این پژوهش، این کار بطور کامل انجام گرفته و از صحت عملیات جهت یکسان‌سازی ظاهر معادلات حرکت بدست آمده از دو روش اطمینان حاصل گردیده است.

۳- شبیه‌سازی

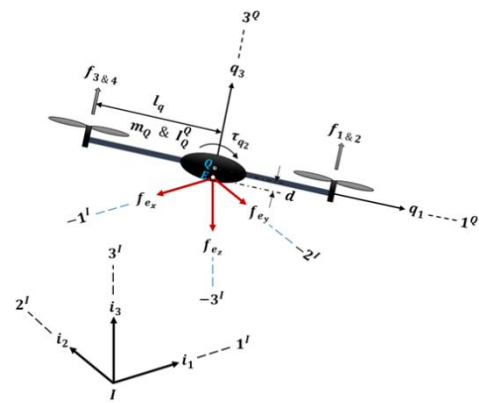
در این بخش، با در نظرگیری سه سناریو، به حل عددی معادلات غیرخطی حرکت سامانه پرداخته خواهد شد. به منظور نمایش رفتار پایدار از سامانه، در کلیه سناریوها فرض می‌گردد که پرند در فاز شناوری قرار داشته و در هر لحظه روتورها نیروی پیشرانی معادل با وزن سامانه را تولید می‌نمایند. همچنین از نیروهای استهلاکی وارد بر سامانه صرف نظر شده و با قرار دادن $d = 0$ در مدل دینامیکی، نقطه اتصال کابل منطبق بر مرکز ثقل چهارپره در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۳ مقادیر اختصاص داده شده به هر یک از پارامترهای سامانه قابل مشاهده است.

شرایط حاکم بر سه سناریوی در نظر گرفته شده، مطابق با جدول ۴ می‌باشد.

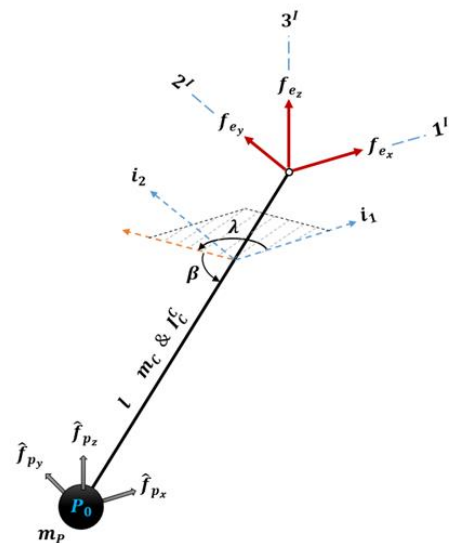
در سناریوی دوم جرم محموله به صورت غیرخطی مطابق با رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$m_p(t) = 0.2 - 0.002t + 0.001t^2 - 0.00025t^3 \quad (34)$$

در سناریوی سوم، تنها نیروهای تصادفی در راستاهای 1^I و 3^I اینرسی در نظر گرفته می‌شوند که با توجه به زوایای وضعیت در نظر گرفته شده برای کابل مطابق با جدول ۴ که مبین قرار گیری



الف



ب

شکل ۳) دیاگرام آزاد زیرسیستم (الف) چهارپره؛ (ب) محموله آویزان به کابل

که در آن، τ و τ_d به ترتیب بردار گشتاور تولیدی توسط روتورهای پرند و بردار گشتاورهای استهلاکی است. با بیان روابط فوق، به ترتیب در دستگاه اینرسی و بدنی چهارپره خواهیم داشت:

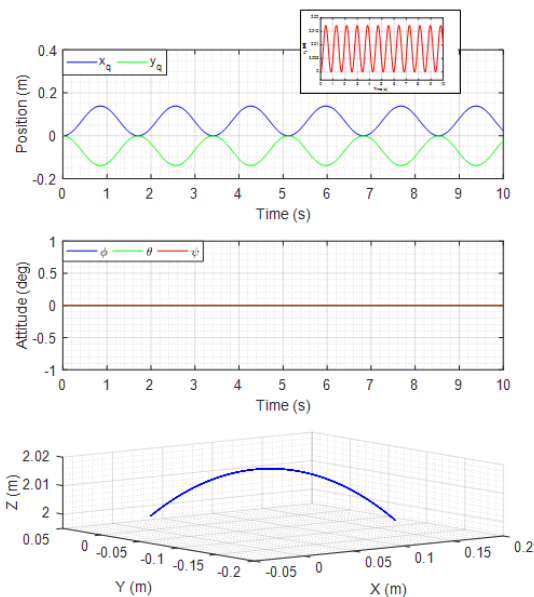
$$m_Q \left[\frac{dv_Q^I}{dt} \right]^I = [T]^{IQ} [f]^Q + [f_d]^I + [f_e]^I + m_Q [g]^I \quad (28)$$

$$[I_Q^Q]^Q \left[\frac{d\omega^{QI}}{dt} \right]^Q + [\Omega^{QI}]^Q [I_Q^Q]^Q [\omega^{QI}]^Q = [\tau]^Q + [\tau_g]^Q + [S_{EQ}]^Q [T]^{QI} [f_e]^I + [\tau_{gyr}]^Q \quad (29)$$

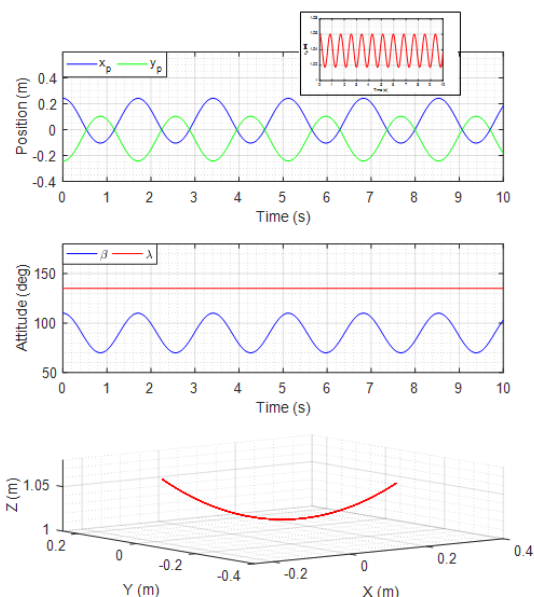
حال با توجه به شکل ۳ (ب) و بکارگیری قوانین نیوتن و اولر (در نقطه اتصال کابل به پرند) برای زیرسیستم محموله آویزان به کابل بدست می‌آوریم:

$$m_c D^I v_c^I + m_p D^I v_p^I = f_e + f_d + f_p + m_c g + m_p g \quad (30)$$

$$D^I (I_c^C \omega^{CI}) + m_c S_{CE} D^I v_c^I + m_p S_{PE} D^I v_p^I = \tau_d + S_{PE} f_p + m_c S_{CE} g + m_p S_{PE} g \quad (31)$$



الف



ب

شکل ۵) سناریوی ۱ (الف) نمودار تغییرات متغیرهای حالت چهارپره بر حسب زمان؛ (ب) نمودار تغییرات متغیرهای حالت محموله آویزان به کابل بر حسب زمان

در سناریوهای نخست که در آن محموله با جرم ثابت و بدون قابلیت تولید نیرو فرض گردید، رفتار محموله آویزان به کابل، همانند حرکت یک پاندول ساده بوده با این تفاوت که کابل بجای اتصال به یک نقطه ثابت، به مرکز ثقل یک جسم شناور در هوا متصل است که موجب می شود، مومنتوم ناشی از حرکت رفت و برگشتی محموله به پرده منتقل شده و شاهد حرکت نوسانی با دامنه ثابت چهارپره در راستاهای افقی و قائم باشیم. این موضوع کاملاً با آنچه از فیزیک سامانه انتظار می رود سازگار است. به منظور اثبات این مطلب، با توجه به اینکه بر مبنای فرضیات در نظر گرفته شده در سناریوی نخست، هیچگونه نیروی خارجی به سامانه در

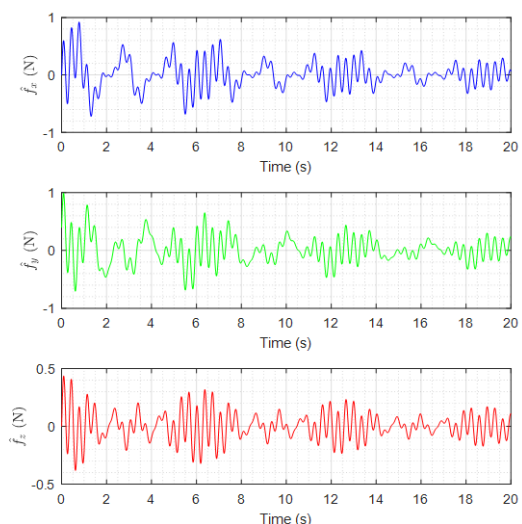
جدول ۳) مقادیر تخصیص داده شده به هر یک از پارامترهای سامانه [21]

پارامتر	مقدار
جرم چهارپره (m_q)	۰/۵ کیلوگرم
جرم کابل (m_c)	۰/۰۰۲ کیلوگرم
جرم محموله (m_p)	۰/۲ کیلوگرم
ممان اینرسی اول و دوم چهارپره (I_{q11}/I_{q22})	۰/۰۰۳۶۵ کیلوگرم متر مربع
ممان اینرسی سوم چهارپره (I_{q33})	۰/۰۰۷۰۳ کیلوگرم متر مربع
ممان اینرسی اول کابل (I_{c11})	۰/۰۰۰۰۰۰۴ کیلوگرم متر مربع
ممان اینرسی دوم و سوم کابل (I_{c22}/I_{c33})	۰/۰۰۰۱۶۶۷ کیلوگرم متر مربع
شتاب گرانش (g)	۹/۸۰۶۶۵ متر بر مجذور ثانیه
فاصله مرکز ثقل چهارپره تا محور روتور (l_q)	۰/۱۷ متر
طول کابل (l)	۱/۰ متر

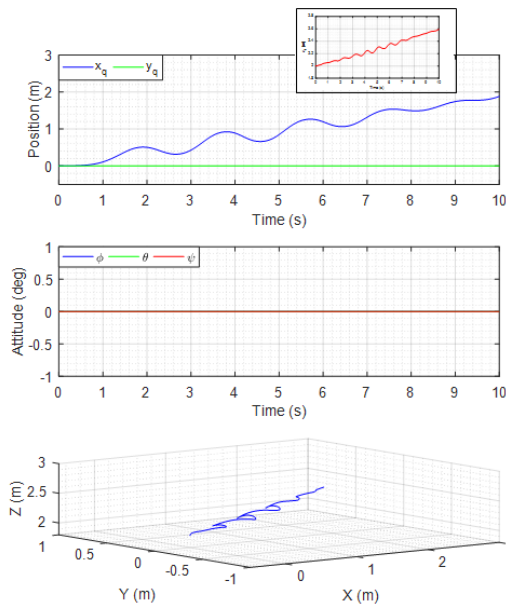
جدول ۴) شرایط حاکم بر هر یک از سناریوها

سناریو	متغیرهای وضعیت کابل	ارتفاع پرده	سایر متغیرها	نوع محموله
۱	$\lambda = 135^\circ$ $\beta = 110^\circ$	$z = 2$	$x_i = 0$	جرم ثابت
۲	$\lambda = 135^\circ$ $\beta = 110^\circ$	$z = 2$	$x_i = 0$	جرم متغیر
۳	$\lambda = 0^\circ$ $\beta = 90^\circ$	$z = 2$	$x_i = 0$	مولد نیرو

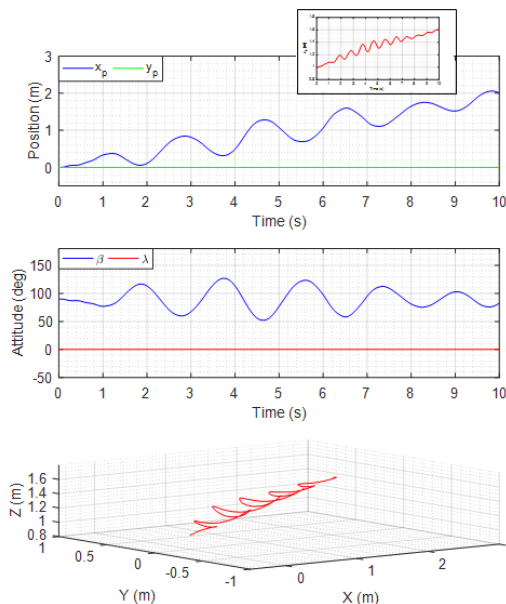
زیرسیستم کابل و محموله در نقطه تعادل پایدار خود در لحظه اولیه است، انتظار می رود تنها دینامیک پرده در صفحه $3' - 1'$ تحریک گردد. موضوع مهم در اینجا، تعیین الگوی نیروهای تصادفی تولیدی توسط محموله است. بطور کلی، الگوی نیروهای تولیدی وابسته به دینامیک محموله بوده و با تغییر دینامیک محموله این الگوها نیز تغییر می یابند. در این پژوهش سعی گردیده با الهام از طبیعت، با ترکیب توابع هارمونیک با دامنه و فرکانس متفاوت، الگویی شبه تصادفی از این نیروها مطابق با شکل ۴ ارائه گردد. در اینجا، حداکثر دامنه این نیروها در هر یک از راستاهای اینرسی برابر با ۱۵ درصد وزن سامانه در نظر گرفته می شوند. در اشکال (۵) تا (۷) نتایج شبیه سازی برای سه سناریوی تشریح شده نمایش داده شده اند.



شکل ۴) الگوی نیروهای نوسانی تصادفی تولیدی توسط محموله در راستای محوره های اینرسی



الف

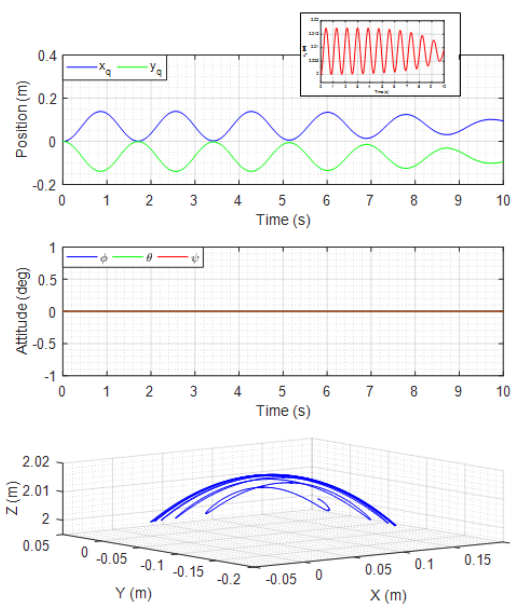


ب

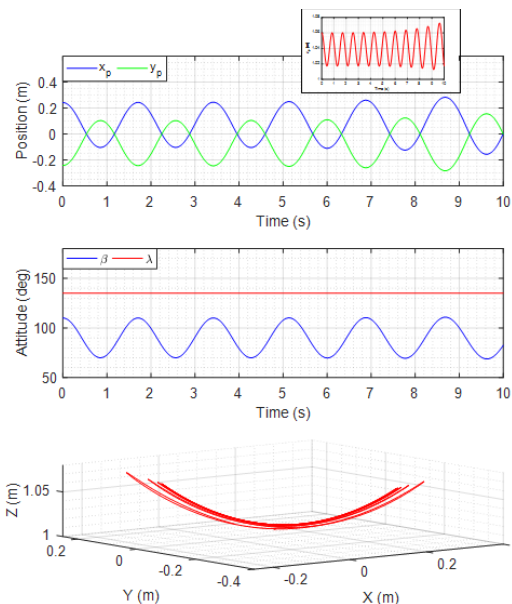
شکل ۷) سناریوی ۳ (الف) نمودار تغییرات متغیرهای حالت چهارپره بر حسب زمان؛ (ب) نمودار تغییرات متغیرهای حالت محموله آویزان به کابل بر حسب زمان

$$y = \frac{M_{CP2}}{M} l S_{\lambda} \int_{90^{\circ}+20^{\circ}}^{90^{\circ}-20^{\circ}} S_{\beta} d\beta = -0.1392 \text{ m}$$

که دقیقاً برابر با جابجایی پرند در راستاهای اول و دوم اینرسی مطابق با شکل ۵ است. با توجه به فرض مساله که در آن نیروی پیشران روتورها دقیقاً معادل با وزن سامانه در نظر گرفته شده است، در این حالت نیز می‌توان تحلیل مشابهی را بکار گرفت و علت نوسانات نامیرا چهارپره در راستای ۳^۱ اینرسی را توجیه نمود. با بررسی دقیق نمودارها در سناریوی دوم که در آن جرم محموله در طی فرایند کاهش می‌یابد، می‌توان ملاحظه نمود که مطابق با شکل ۶، دامنه نوسانات محموله به اندازه ناچیزی در طول



الف



ب

شکل ۶) سناریوی ۲ (الف) نمودار تغییرات متغیرهای حالت چهارپره بر حسب زمان؛ (ب) نمودار تغییرات متغیرهای حالت محموله آویزان به کابل بر حسب زمان

راستاهای افقی x و y وارد نمی‌گردد، از اینرو مومنتوم خطی سامانه در راستاهای مذکور بقا یافته و می‌توان نوشت:

$$\sum m_i D^I(v_i^t)_j = m_Q(v_Q^t)_j + m_C(v_C^t)_j + m_P(v_P^t)_j \quad (35)$$

$$= 0 \quad j = 1, 2$$

با بیان رابطه فوق در دستگاه مختصات ارجح اینرسی و مرتب‌سازی عبارات و انتگرال‌گیری (با توجه به اینکه متغیر $\lambda = 135^{\circ}$ ثابت است) خواهیم داشت:

$$x = \frac{M_{CP2}}{M} l C_{\lambda} \int_{90^{\circ}+20^{\circ}}^{90^{\circ}-20^{\circ}} S_{\beta} d\beta = 0.1392 \text{ m}; \quad (36)$$

بازه‌های زمانی، مقادیر منفی را نیز به خود بگیرد، اما درصد بسیار بالایی از تغییرات زمانی سرعت نامنفی بوده و از اینرو تغییر مکان نیز که انتگرال سرعت می‌باشد، در کل مثبت بوده و شاهد حرکت سامانه به سمت راست خواهیم بود. از طرفی، چنانچه در برهه‌ای از زمان، شتاب منفی با دامنه بسیار بالا به سامانه اعمال گردد، ممکن است حرکت سامانه عکس شده و جهت‌گیری سامانه به سمت چپ تغییر نماید.

چنانچه محل اتصال کابل منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نبود، نیروهای تولید شده در محل اتصال، گشتاوری را حول مرکز ثقل پرنده ایجاد می‌کردند که موجب تحریک زوایای وضعیت چهارپره می‌گردیدند و در نتیجه، نیروی پیشران در راستاهای افقی مولفه پیدا می‌کرد. با توجه به اینکه در این پژوهش هدف مدلسازی بوده و کنترل‌کننده‌ای برای سامانه طراحی نگردیده است، روشن است که این موضوع به سرعت سامانه را به سوی ناپایداری سوق می‌داد.

۴- صحت‌سنجی معادلات حرکت

حال در این بخش به ارزیابی صحت مدل دینامیکی پرداخته می‌شود. در ابتدا بایستی اشاره نمود که استخراج معادلات حرکت از دو روش تحلیلی و برداری، خود به نوعی بیان‌گر صحت مدل استخراج شده است. از سوی دیگر، با مشاهده ساختار مدل، به صورت شهودی و بر مبنای تحلیل هندسی و ماتریسی نیز می‌توان صحت معادلات حرکت را مورد ارزیابی قرار داد. چنانچه معادلات حرکت سامانه، به فرم ماتریسی (۲۴) نوشته شوند (همچون معادله (۲۵) برای حرکت در صفحه)، از آنجایی که در یک مدل دینامیکی صحیح، ماتریس اینرسی، $H(q)$ ، بایستی یک ماتریس متقارن مثبت معین باشد، ملاحظه می‌گردد، ماتریس فوق متقارن بوده که با محاسبه دترمینان ماینرهای اصلی آن، مثبت معین بودن آن به راحتی اثبات می‌گردد. همچنین با تحلیل هندسی ترم‌های شتاب زاویه‌ای، جانب به مرکز و گرانش که نسبت به ترم‌هایی همچون شتاب کریولیس قابل‌تصورتر هستند و دیگر ترم‌های مربوط به نیروها و ممان‌های خارجی وارد بر سامانه نیز می‌توان صحت مدل دینامیکی را تصدیق نمود.

همانگونه که پیش از این تشریح گردید، یکی از اهداف پژوهش حاضر مدلسازی سامانه به شکل جامع بوده، به نحوی که بتوان مدل‌های ساده‌تر را از درون مدل مذکور استخراج نمود. در این راستا، چنانچه در معادلات حرکت پارامتر $d = 0$ قرار داده شود، مدل سامانه متناظر با حالتی بدست خواهد آمد که نقطه اتصال کابل منطبق بر مرکز ثقل پرنده هست. همانگونه در بخش ۲.۲ نشان داده شد، می‌توان با صفر قرار دادن برخی متغیرها، معادلات حرکت سه بعدی را به شکل معادلات حرکت صفحه‌ای تبدیل نمود. حال چنانچه در معادلات حرکت فوق، علاوه بر قرار دادن پارامتر $d = 0$ ، از اینرسی کابل و نیروهای تصادفی تولیدی توسط محموله نیز صرف‌نظر گردد، معادلات حرکت مطابق با مرجع [16] بدست می‌آیند.

شبیه‌سازی افزایش یافته حال آنکه دامنه نوسانات چهارپره در حال کاهش می‌باشد. با توجه به اینکه هیچ نیروی ناپایستار خارجی در راستای افقی به سامانه اعمال نمی‌گردد و همچنین با توجه به برابر بودن نیروی روتورها با وزن سامانه در هر لحظه، در هر نیم سیکل نوسان محموله، جرم آن در ابتدای مسیر بیشتر از انتهای آن بوده که در هر دو نقطه فوق سرعت محموله برابر با صفر می‌باشد. حال بر مبنای رابطه انرژی پتانسیل: $U = m_p(t)gh$ روشن است که کاهش جرم محموله در طی مسیر در هر نیم سیکل بایستی با قرار گرفتن محموله در ارتفاع بالاتر در انتهای آن جبران گردد. از اینرو مشاهده می‌گردد دامنه نوسانات محموله در هر سیکل به مقدار ناچیزی افزایش می‌یابد. از طرفی، با توجه به اینکه نوسان چهارپره به دلیل انتقال مومنتوم ناشی از نوسان محموله آویزان به کابل صورت می‌گیرد، چنانچه انرژی محموله را در هر نیم سیکل در لحظه عبور از نقطه تعادل که در آن محموله تنها دارای انرژی جنبشی می‌باشد مورد کنکاش قرار دهیم، با توجه به ثابت بودن انرژی محموله که با مربع سرعت محموله متناسب است، بدیهی است، مومنتوم آن که با رابطه $P = m_p(t)v_p'$ بیان شده و با سرعت رابطه خطی دارد، در هر دوره کاهش یافته و از اینرو شاهد کاهش دامنه نوسانات چهارپره در هر یک از راستاها در طی فرایند شبیه‌سازی هستیم.

اما موضوع بسیار مهم در اینجا، تفسیر نمودارهای متناظر با حالتی است که محموله، نیروهایی را به صورت تصادفی به سامانه اعمال می‌نماید. از شکل ۷ مشاهده می‌گردد متغیرهای حالت x و z در اثر نیروهای وارده از سوی محموله به یک سمت حرکت نموده‌اند. جهت توجیه این موضوع، مطابق با سناریوی سوم، فرض می‌نماییم که سامانه در حالت سکون قرار داشته و بجای شتاب تصادفی، شتاب سینوسی $a = \sin(t)$ به آن اعمال می‌گردد. در نیم سیکل نخست از دوره تناوب آن شتاب مثبت بوده و سرعت سامانه بطور مداوم افزایش می‌یابد. بنابراین در انتهای نیم سیکل نخست، سامانه دارای اینرسی حرکتی می‌باشد و در نیم سیکل دوم، که شتاب منفی است، این شتاب موجب کاهش سرعت سامانه شده و در انتهای نیم سیکل دوم سرعت مجدد به صفر کاهش می‌یابد. این موضوع عیناً برای سیکل‌های بعد تکرار می‌شود. موضوع مهمی که وجود دارد این است که چه در نیم سیکل نخست (شتاب مثبت و سرعت افزایشی) و چه در نیم سیکل دوم (شتاب منفی و سرعت کاهششی) همواره حرکت سامانه به سمت راست بوده است. بنابراین با گذشت زمان همواره سامانه به سمت راست حرکت خواهد نمود. اگر شتاب اعمالی به صورت $a = -\sin(t)$ باشد، شاهد حرکت سامانه به سمت چپ خواهیم بود و بر مبنای استدلال صورت گرفته این موضوع را می‌توان به راحتی تفسیر نمود.

در حالت کلی با در نظرگیری نیروهای اعمالی از سوی محموله به صورت نوسانی تصادفی مطابق شکل ۴، اگرچه سرعت (با فرض شتاب اولیه مثبت) همواره نامنفی نبوده و ممکن است در برخی

U	انرژی پتانسیل
v_B^A	بردار سرعت نقطه B نسبت به قاب A ($m.s^{-1}$)
$[T]^{AB}$	ماتریس تبدیل مختصات A نسبت به B
$[\bar{r}]^A, \bar{s}_{BA}$	ترانهاده بردار یا ماتریس *

علائم یونانی

ω^{BA}	بردار سرعت زاویه‌ای قاب B نسبت به قاب A ($rad.s^{-1}$)
Ω^{BA}	ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاویه‌ای ω^{BA}
τ_i	بردار ممان تولیدی توسط عضو i ($N.m$)

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون به هیچ نشریه دیگری ارسال نگردیده و به چاپ نرسیده است. این پژوهش حاصل ترکیبی از نتایج پایان‌نامه کارشناسی ارشد و مراحل اولیه تحقیق اینجانب (میرشمس بهاء) در راستای رساله دکتری تحت راهنمایی دکتر فریبرز ثقفی می‌باشد.

تعارض منافع: تمامی مطالب مذکور توسط نویسندگان انجام شده و هیچ فرد یا نهادی در تهیه آن نقش نداشته است.

سهم نویسندگان: میرشمس بهاء (نویسنده اول)، دانشجوی دکتری؛ فریبرز ثقفی (نویسنده دوم)، استاد راهنما.

منابع مالی: در راستای انجام پژوهش از هیچ منبعی جهت تامین هزینه‌های پژوهش بهره گرفته نشده است.

منابع

- 1- Orsag M, Korpela C, Oh P. Modeling and control of MM-UAV: Mobile manipulating unmanned aerial vehicle. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2013;69(1):227-40.
- 2-Thomas J, Polin J, Sreenath K, Kumar V. Avian-inspired grasping for quadrotor micro UAVs. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference 2013* (Vol. 55935, p. V06AT07A014). American Society of Mechanical Engineers.
- 3- Nicolani LS, Kanning G, Synnvestedt R. Simulation of the dynamics of helicopter slung load systems. *Journal of the American Helicopter Society*. 1995;40(4):44-61.
- 4- Oh SR, Ryu JC, Agrawal SK. Dynamics and control of a helicopter carrying a payload using a cable-suspended robot. 2006:1113-1121.
- 5- Zamoski D, Starr G, Wood J, Lumia R. Rapid swing-free transport of nonlinear payloads using dynamic programming. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2008;130(4).
- 6- Alothman Y, Gu D. Using constrained model predictive control to control two quadrotors transporting a cable-suspended payload. In *2018 13th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA) 2018* (pp. 228-233). IEEE.
- 7- Barikbin B, Fakharian A. Trajectory tracking for quadrotor UAV transporting cable-suspended payload in wind presence. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2019;41(5):1243-55.
- 8- Sreenath K, Kumar V. Dynamics, control and planning for cooperative manipulation of payloads suspended by cables from multiple quadrotor robots. *rn*. 2013;1(r2):r3.

همچنین چنانچه در دسته معادلات حرکت، زوایای وضعیت سامانه کوچک در نظر گرفته شوند به طوری که بتوان $\cos\theta \approx 1$ و $\sin\theta \approx \theta$ و از ترم‌های مرتبه بالا همچون $\theta\dot{\theta}$ صرف‌نظر نمود، معادلات حرکت متناظر با حالتی که زوایای وضعیت چهارپره و کابل کوچک هستند، استخراج خواهند شد. این موضوع جامعیت و صحت مدل بدست آمده را نشان می‌دهد.

پس از استخراج معادلات حرکت، در گام بعد، جهت صحت‌سنجی دقیق‌تر مدل بدست آمده، بر مبنای سناریوهای قابل تصور، شبیه‌سازی عددی انجام گرفت و نتایج حاصله در قالب نمودارهایی ارائه گردیدند. کلیه تحلیل‌های صورت گرفته، تطابق رفتار شبیه‌سازی شده با فیزیک مورد انتظار از سامانه واقعی را نشان می‌دهند که این خود به نوعی صحت مدل دینامیکی بدست آمده را تأیید می‌نماید.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، به مدلسازی دینامیکی یک چهارپره در هنگام انتقال بار آویزان به کابل با قابلیت تولید نیروهای تصادفی به دو روش تحلیلی و برداری پرداخته شد و معادلات حرکت سامانه به صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی بدست آمدند. به منظور ارتقاء مدل، اینرسی کابل در تحلیل دینامیکی لحاظ گردید و نقطه اتصال کابل در نقطه‌ای غیر از مرکز ثقل پرنده در نظر گرفته شد. صحت‌سنجی معادلات حرکت بر مبنای ساختار مدل دینامیکی و شبیه‌سازی انجام گرفت. از نتایج شبیه‌سازی می‌توان مشاهده نمود که تاثیر نیروهای تصادفی ناشی از دینامیک محموله بر روی پرنده قابل توجه بوده و از اینرو، به منظور توانا ساختن پرنده جهت حمل چنین محموله‌هایی بر روی یک مسیر نامی، طراحی کنترل‌کننده‌ای با عملکرد مطلوب اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. در پژوهش‌های پیشرو، به طراحی یک استراتژی کنترلی بر مبنای مدل غیرخطی بدست آمده پرداخته خواهد شد بطوری که علاوه بر پایداری، پرنده را قادر سازد، به هنگام انتقال بار مولد نیروی آویزان به کابل، مسیر نامی موردنظر را به شکل مطلوب تعقیب نماید.

۶- فهرست علائم

a_B^A	شتاب (تنسور مرتبه اول) نقطه B نسبت به قاب A
$D^A(*)$	مشتق زمانی دورانی بردار یا تنسور * نسبت به قاب A
$d(*)/dt$	مشتق زمانی عادی
f_i	بردار نیروی تولیدی توسط عضو i (N)
I_C^B	تنسور اینرسی (تنسور مرتبه دوم) جسم B حول نقطه C ($kg.m^2$)
I_C^{BA}	اندازه حرکت زاویه‌ای (تنسور مرتبه اول) جسم B نسبت به قاب A حول نقطه C ($kg.m^2.s^{-1}$)
m_B	جرم (تنسور مرتبه صفر یا اسکالر) جسم B (kg)
s_{BA}	بردار جابجایی نقطه B نسبت به نقطه A (m)
S_{BA}	ماتریس پادمتقارن بردار جابجایی s_{BA}
T	انرژی جنبشی

- 9- Guerrero ME, Mercado DA, Lozano R, García CD. Passivity based control for a quadrotor UAV transporting a cable-suspended payload with minimum swing. In 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2015 (pp. 6718-6723). IEEE.
- 10- Guerrero-Sánchez ME, Mercado-Ravell DA, Lozano R, García-Beltrán CD. Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload. ISA transactions. 2017;68:433-49.
- 11- Goodarzi FA, Lee D, Lee T. Geometric stabilization of a quadrotor UAV with a payload connected by flexible cable. In 2014 American Control Conference 2014 (pp. 4925-4930). IEEE.
- 12- Dai S, Lee T, Bernstein DS. Adaptive control of a quadrotor UAV transporting a cable-suspended load with unknown mass. In 53rd IEEE Conference on Decision and Control 2014 (pp. 6149-6154). IEEE.
- 13- Goodarzi FA, Lee T. Dynamics and control of quadrotor UAVs transporting a rigid body connected via flexible cables. In 2015 American control conference (ACC) 2015 (pp. 4677-4682). IEEE.
- 14- Lee T. Geometric control of quadrotor UAVs transporting a cable-suspended rigid body. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2017;26(1):255-64.
- 15- Palunko I, Fierro R, Cruz P. Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach. In 2012 IEEE international conference on robotics and automation 2012 (pp. 2691-2697). IEEE.
- 16- Guerrero ME, Mercado DA, Lozano R, García CD. IDA-PBC methodology for a quadrotor UAV transporting a cable-suspended payload. In 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) 2015 (pp. 470-476). IEEE.
- 17- Baha M, Saghafi F. 2-D Dynamic modeling and simulation of a quadrotor, transporting a cable-suspended payload with stochastic forces. The 28th Iranian Society of Mechanical Engineering (ISME2020), AmirKabir University of Technology, Tehran, Iran. 2020.
- 18- Zipfel PH. Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics. Aiaa; 2000.
- 19- Chovancová A, Fico T, Chovanec L, Hubinsk P. Mathematical modelling and parameter identification of quadrotor (a survey). Procedia Engineering. 2014;96:172-81.
- 20- Luukkonen T. Modelling and control of quadcopter. Independent research project in applied mathematics, Espoo. 2011;22:22.
- 21- Cruz PJ, Fierro R. Cable-suspended load lifting by a quadrotor UAV: hybrid model, trajectory generation, and control. Autonomous Robots. 2017;41(8):1629-43.