



Nonlinear Tracking Control of Wheeled Mobile Robots with Input Constraints

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Sazgar H.¹,
Keymasi Khalaji A.^{2*}

How to cite this article

Sazgar H., Keymasi Khalaji A.,
Nonlinear tracking control of
wheeled mobile robots with input
constraints .Modares Mechanical
Engineering; 2024;24(10):621-630.

¹ Mechanical Engineering Research
Center, Iranian Research
Organization for Science and
Technology (IROST), Tehran, Iran.

² Department of Mechanical
Engineering, Faculty of
Engineering, Kharazmi University,
Tehran, Iran.

*Correspondence

Address: Department of Mechanical
Engineering, Faculty of
Engineering, Kharazmi University,
Tehran, Iran.

keymasi@khu.ac.ir

Article History

Received: January 1, 2025

Accepted: October 9, 2024

ePublished: December 2, 2024

ABSTRACT

In many wheeled robot applications, in addition to accurate position control, dimensional and weight limitations are also important. The limitation of weight and dimensions means that it is not possible to use arbitrarily large actuators. On the other hand, accurate and fast tracking usually requires high control gains and, as a result, large control inputs. If the control input exceeds the saturation limit of the operator, in addition to increasing the tracking error, it may lead to robot instability in some cases. Therefore, it will be precious to provide a control method that can simultaneously provide high control accuracy and guarantee the robot's stability, taking into account the saturation limit of the actuators (speed and torque) in a predetermined manner. This issue has been addressed in the present study. The proposed control includes two parts: a kinematic controller and a dynamic controller. The kinematic control design is based on the Lyapunov approach, which can adjust the speed saturation limit of the actuators. For dynamic control, the robot velocity components are considered as control reference values and the robot wheel torque is considered as control inputs. In the dynamic control design, the torque saturation limit of the actuators is included in a predetermined way. To evaluate the performance of the proposed nonlinear control, various analyses were performed on the wheeled robot. The results showed that the proposed control algorithm while guaranteeing stability and following the path with high accuracy, has also fully met the requirements of the actuators' saturation limits.

Keywords Wheeled Robot, Actuator Limits, Kinematic Control, Dynamic Control, Lyapunov Method, Feedback Linearization

CITATION LINKS

1- Omnidirectional mobile robots, mechanisms and navigation approaches. 2- Trajectory tracking control of a wheeled mobile robot by a ... 3- Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking. 4- A Survey of Machine Learning Approaches for Mobile Robot Control. 5- An Overview of Model-Free Adaptive Control for the Wheeled Mobile Robot. 6- Trajectory tracking and stabilization control of a wheeled robot using predictive algorithm. 7- Vision-Based Model Predictive Control of Wheeled Mobile Robot. 8- Control of a group of uncertain wheeled robots with global inputs in the presence of obstacles. 9- Adaptive Fuzzy Control of Wheeled Mobile Robots With Prescribed Trajectory Tracking Performance. 10- Nonlinear Disturbance Observer-Based Fuzzy Adaptive Finite-Time Dynamic Surface Formation Control of ... 11- Modeling and control of uncertain multibody wheeled robots. 12- Control of a wheeled robot in presence of sliding of wheels using adaptive backstepping method. 13- Control Synthesis of Nonholonomic Mobile Robots Under Time-Varying Delays and Input Saturation: Experimental Validation. 14- Adaptive fuzzy sliding mode control of uncertain nonholonomic wheeled mobile robot with external disturbance and actuator saturation. 15- Circular Path Following Control for 4 Wheeled Mobile Robots with Steering Angle Saturation. 16- A novel saturated PID-type observer-based controller for wheeled mobile robots with a guaranteed performance considering path curvature. 17- Adaptive tracking control of a nonholonomic wheeled mobile robot with multiple disturbances and input constraints. 18- Trajectory Tracking of Differential Wheeled Mobile Robots with Input Saturation and Mismatched Centers. 19- Simultaneous Tracking and Stabilization of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots under Constrained Velocity and Torque. 20- ADP-Based H_{∞} optimal decoupled control of single-wheel robots with physically coupling effects, input constraints, and disturbances 21- Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot.

کنترل غیرخطی تعقیب مسیر ربات‌های

متحرک چرخ دار با ورودی‌های مقید

هادی سازگار^۱، علی کیماسی خلجی^{۲*}^۱ پژوهشکده مهندسی مکانیک، سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران، تهران، ایران^۲ گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده

در بسیاری از کاربردهای ربات چرخ‌دار در کنار الزام کنترل دقیق موقعیت، محدودیت‌های ابعادی و وزن نیز حائز اهمیت می‌باشند. محدودیت وزن و ابعاد به این معناست که نمی‌توان از عملگرهای به دلخواه بزرگ استفاده نمود. از طرفی کنترل دقیق و سریع معمولاً نیازمند بهره‌های کنترلی بالا و در نتیجه ورودی‌های کنترلی بزرگ می‌باشد. چنانچه ورودی کنترلی از حد اشباع عملگر بیشتر باشد، علاوه بر افزایش خطای تعقیب، ممکن است در مواردی منجر به ناپایداری شود. بنابراین ارائه یک روش کنترلی که بتواند همزمان با تامین دقت کنترلی بالا و تضمین پایداری ربات، به صورت از پیش تعیین شده حد اشباع عملگرها (سرعت و گشتاور) را در نظر بگیرد، بسیار ارزشمند خواهد بود. کنترل پیشنهادی شامل دو بخش سینماتیکی و دینامیکی می‌باشد. کنترل سینماتیکی بر مبنای رویکرد لبایانوف بوده که قابلیت تنظیم حد اشباع سرعتی عملگرها را دارا می‌باشد. برای کنترل دینامیکی مولفه‌های سرعت به عنوان مقادیر مرجع کنترل و گشتاور چرخ‌های ربات نیز به عنوان ورودی‌های کنترلی در نظر گرفته شده‌اند. همچنین حد اشباع گشتاور عملگرها، به صورت از پیش تعیین شده لحاظ شده است. به منظور ارزیابی عملکرد کنترل پیشنهادی تحلیل‌های متنوعی بر روی ربات چرخ‌دار انجام و با روش خطی‌سازی فیدبک مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که در کنترل پیشنهادی، ماکزیمم ورودی کنترلی حدود ۲۵٪ ماکزیمم ورودی خطی‌سازی فیدبک می‌باشد. همچنین همگرایی پاسخ نیز سریع‌تر از روش خطی‌سازی فیدبک می‌باشد. بنابراین الگوریتم کنترلی پیشنهادی ضمن تضمین پایداری و تعقیب مسیر با دقت بالا، الزامات حد اشباع عملگرها را نیز به صورت کامل برآورده نموده است.

کلیدواژه‌ها: ربات چرخ‌دار، اشباع عملگرها، کنترل سینماتیکی، کنترل دینامیکی، روش لبایانوف، خطی‌سازی فیدبک

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۲

*نویسنده مسئول: keymasi@khu.ac.ir

۱- مقدمه

ربات‌های متحرک چرخ‌دار به دلیل سادگی نسبی، هزینه طراحی نسبتاً پایین و مصرف انرژی کمتر، در اکثر برنامه‌های جابجایی، حمل و نقل، تدارکات و ناوبری استفاده می‌شوند [1]. این ربات‌ها به سادگی می‌توانند به تناسب ماموریت تعریف شده به سنسورها و تجهیزات لازم تجهیز شده و به موقعیت هدف ارسال شوند.

یکی از چالش‌های مهم ربات‌های چرخ‌دار، مسئله کنترلی این ربات‌ها می‌باشد. این موضوع همواره مورد توجه محققین بوده و مطالعات زیادی در این حوزه انجام پذیرفته است [2-3]. در مرجع [4] مرور جامعی بر این روش‌ها صورت پذیرفته است. مرور

روش‌های کنترل تطبیقی مستقل از مدل ربات‌های چرخ دار نیز در [5] ارائه شده است.

کنترل حرکت ربات‌های چرخ‌دار با استفاده از روش پیش‌بین در [6] پیشنهاد شده است. در مرجع [8] کنترل ربات‌های چرخ دار نامعین با ورودی‌های فراگیر در حضور موانع بررسی شده است. مسئله تعقیب مسیر حرکت سریع و دقیق ربات چرخ‌دار با نامعینی‌های دینامیکی و اغتشاش خارجی نیز در [9-10] با استفاده از یک روش کنترل فازی تطبیقی مطالعه شده است. مرجع [11] مسئله کنترل ربات‌های چرخ‌دار نامعین دارای تریلر را مورد مطالعه قرار داده است. مدل‌سازی دینامیکی و تعقیب مسیر یک ربات تراکتور-تریلر با در نظر گرفتن لغزش چرخ‌ها نیز در [12] بررسی شده است.

هنگام انتخاب عملگرهای ربات علاوه بر الزامات فنی می‌بایست ملاحظات هزینه‌ای، ابعادی، وزنی و مصرف انرژی نیز در نظر گرفته شوند. لحاظ نمودن همزمان این موارد منجر به انتخاب یک عملگر با توان مشخص و محدود خواهد شد. با توجه به این موضوع در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها در طراحی الگوریتم کنترلی اجتناب ناپذیر می‌باشد.

در پژوهش [13]، کنترل ربات چرخ‌دار با در نظر گرفتن تاخیرهای متغیر با زمان و اشباع ورودی بررسی شده است. کنترل ربات چرخ‌دار نامعین در حضور اغتشاش خارجی و اشباع عملگر، با بهره‌گیری از رویکرد فازی-مود لغزشی تطبیقی در [14] انجام پذیرفته است. در [15]، برای تعقیب مسیر یک ربات چهار چرخ، یک روش کنترلی بر مبنای داده برداری با لحاظ نمودن اشباع زاویه فرمان پیشنهاد شده است.

در [16] نیز یک کنترل PID اشباع بر مبنای مشاهده‌گر، برای ربات‌های چرخ‌دار پیشنهاد شده که در مسیرهای منحنی عملکرد خوبی به نمایش می‌گذارد. مسئله کنترل تطبیقی ربات چرخ‌دار با محدودیت‌های ورودی کنترلی و اغتشاشات چندگانه نیز در [17] بررسی شده است. در مرجع [18]، تعقیب مسیر حرکت ربات‌های چرخ‌دار دیفرانسیلی با اشباع ورودی در مسیرهای منحنی مورد مطالعه قرار گرفته است.

تحلیل مسئله پایداری و تعقیب همزمان ربات‌های چرخ‌دار با در نظر گرفتن اشباع سرعت و گشتاور توسط آقای لی و همکاران انجام شده است [19]. در مرجع [20]، یک روش کنترل بهینه برای ربات چرخ‌دار در حضور جفت‌شدگی‌های فیزیکی نامعین، اشباع ورودی‌ها و اغتشاشات خارجی پیشنهاد شده است.

نوآوری پژوهش. با بررسی مراجع به نظر می‌رسد که مسئله در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها در کنترل ربات‌های چرخ‌دار به شدت مورد توجه محققان قرار داشته و نیازمند تحقیقات بیشتر می‌باشد. بویژه در نظر گرفتن همزمان حد اشباع سرعت و نیروی عملگرها، در طراحی کنترلر همچنان یک موضوع جدید و جذاب می‌باشد. در این پژوهش به مطالعه این موضوع پرداخته شده است. الگوریتم

$$S(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

مدل سینماتیکی ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی را می‌توان با رابطه (۵) بیان نمود.

$$\dot{\xi} = S(\xi)u \quad (۵)$$

که در آن $u = [u \ \omega]^T$ بردار سرعت‌های ورودی سیستم، u سرعت خطی نقطه P و ω سرعت زاویه‌ای ربات می‌باشد. سرعت‌های ورودی سیستم تابعی از سرعت‌های دورانی چرخ‌های دیفرانسیلی بوده و از رابطه (۶) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} u = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \\ \omega = \frac{r}{2b}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad (۶)$$

با بکارگیری روش لاگرانژ معادلات دینامیکی سیستم را می‌توان به فرم (۷) نوشت.

$$M(\xi)\ddot{\xi} + C(\xi, \dot{\xi}) = B(\xi)\tau + L^T(\xi)\lambda \quad (۷)$$

که در آن $M(\xi)$ ماتریس جرمی سیستم، $C(\xi, \dot{\xi})$ معرف نیروهای جانب مرکز و کوریولیس، $B(\xi)$ ماتریس تبدیل ورودی و λ بردار مضارب لاگرانژ سیستم است که به صورت رابطه (۸) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \begin{bmatrix} m & 0 & -am \sin \phi \\ 0 & m & am \cos \phi \\ -am \sin \phi & am \cos \phi & I_\theta \end{bmatrix} \\ C(\xi, \dot{\xi}) &= \begin{bmatrix} -am \cos \phi \dot{\phi}^2 \\ -am \sin \phi \dot{\phi}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ B(\xi) &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & \sin \phi \\ b & -b \end{bmatrix} \\ \tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۸)$$

معرفی پارامترهای ابعادی و جرمی رابطه (۸) نیز در جدول ۱ ارائه شده است [21].

جدول ۱) معرفی پارامترهای سیستم

عنوان پارمتر	نماد	مقدار	واحد
جرم ربات	m	۰/۹	kg
ممان اینرسی ربات	I_θ	۰/۰۰۳۵	kg.m ²
شعاع چرخ‌ها	r	۰/۰۲۶	m
فاصله بین چرخ‌های ربات	$2b$	۰/۱۱۹۰	m
طول PG	a	۰/۰۲۹	m

۳- الگوریتم کنترلی

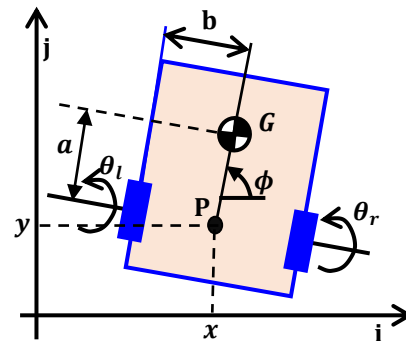
الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده در این پژوهش شامل دو بخش کنترل سینماتیکی و کنترل دینامیکی می‌باشد.

در طراحی کنترل سینماتیکی حد اشباع سرعت‌های ورودی و در طراحی کنترل دینامیکی حد اشباع نیرویی عملگرها لحاظ می‌گردد. طراحی روش کنترلی پیشنهادی بر اساس معیار لیاپانوف انجام شده است. مزیت روش کنترلی حاضر این است که حد اشباع عملگرها به صورت از پیش تعیین شده در طراحی الگوریتم کنترلی

کنترلی پیشنهادی به دو بخش کنترل سینماتیکی و کنترل دینامیکی تقسیم می‌شود. در طراحی کنترل سینماتیکی حد اشباع سرعتی عملگرها و در طراحی کنترل دینامیکی حد اشباع نیرویی عملگرها لحاظ می‌گردند. در مقایسه با بسیاری از مراجع، مزیت روش پیشنهادی این است که حد اشباع عملگرها به صورت از پیش تعیین شده در طراحی الگوریتم کنترلی در نظر گرفته شده است. همچنین بکارگیری رویکرد لیاپانوف در طراحی الگوریتم کنترلی، پایداری آن‌ها را تضمین نموده است.

۲- معرفی سیستم و مدل‌سازی

سیستم مورد نظر یک ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی است که در شکل ۱ نشان داده شده است. هر چرخ ربات مجهز به یک عملگر مجزا بوده و برای پایداری ربات از یک چرخ کروی نیز استفاده شده است. نقطه G بیانگر مرکز جرم ربات، θ_l و θ_r نیز به ترتیب بیانگر جابجایی زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ ربات می‌باشند. توصیف حرکت ربات با بردار مختصات تعمیم یافته $\xi = [x \ y \ \phi]^T$ بیان می‌شود که در آن (x, y) مختصات نقطه P و ϕ جهت‌گیری ربات نسبت به دستگاه مختصات اینرسی $X_E Y_E Z_E$ را نشان می‌دهد. در این مقاله حرکت ربات در صفحه افقی مورد مطالعه قرار گرفته و همچنین از لغزش چرخ‌ها در جهت جانبی و طولی صرف‌نظر شده است.



شکل ۱) ربات چرخ‌دار

با توجه به شرط عدم لغزش چرخ‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که قید سینماتیکی (۱) برقرار است.

$$\dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi = 0 \quad (۱)$$

معادله (۱) را می‌توان به فرم ماتریسی ذیل نوشت.

$$L^T(\xi)\dot{\xi} = 0 \quad (۲)$$

که $L(\xi)$ ماتریس قیدی سیستم است.

در این صورت ماتریس $S(\xi)$ وجود دارد که

$$S^T(\xi)L^T(\xi) = 0 \quad (۳)$$

ماتریس $S(\xi)$ برای ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی به صورت رابطه (۴) خواهد بود.

قضیه ۱. با در نظر گرفتن ورودی‌های کنترل سینماتیک به فرم (۱۴)، دینامیک خطای تعقیب سینماتیکی (۱۳) حول مبداء پایدار می‌گردد.

$$\begin{cases} u = u_d \cos \varepsilon_3 + \alpha \tanh(\varepsilon_1) \\ \omega = \omega_d + \frac{\varepsilon_2 u_d \sin(\varepsilon_3)}{\varepsilon_3 (1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2)} + \beta \tanh(\varepsilon_3) \end{cases} \quad (14)$$

اثبات.

تابع کاندیدای لیاپانوف را به فرم ذیل در نظر می‌گیریم:

$$V = \frac{1}{2} \tan(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_3^2 \quad (15)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۵) داریم:

$$\dot{V} = \frac{\varepsilon_1}{1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2} \dot{\varepsilon}_1 + \frac{\varepsilon_2}{1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2} \dot{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 \dot{\varepsilon}_3 \quad (16)$$

با جایگذاری مقادیر متناظر $\dot{\varepsilon}_1$ ، $\dot{\varepsilon}_2$ و $\dot{\varepsilon}_3$ از رابطه (۱۳) در رابطه (۱۶) و با ساده‌سازی، مشتق تابع لیاپانوف را می‌توان به فرم (۱۷) بیان نمود.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\varepsilon_1}{1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2} (u_d \cos \varepsilon_3 - v_d \sin \varepsilon_3 - u) \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2} (u_d \sin \varepsilon_3) + \varepsilon_3 (\omega_d - \omega) \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترل سینماتیک (۱۴) در مشتق تابع لیاپانوف (۱۷) داریم:

$$\dot{V} = -\alpha \frac{\varepsilon_1 \tanh(\varepsilon_1)}{1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2} - \beta \varepsilon_3 \tanh(\varepsilon_3) \quad (18)$$

با توجه به رابطه (۱۸)، با انتخاب مقادیر مثبت بهره‌های کنترلی α و β مشتق تابع لیاپانوف منفی معین بوده و لذا پایداری سیستم حلقه بسته کنترل سینماتیکی تضمین می‌گردد.

ورودی‌های سرعت طراحی شده u و ω (رابطه (۱۴)) در کنترل سینماتیکی به عنوان سیگنال‌های مرجع برای کنترل دینامیکی بکار گرفته خواهند شد، بنابراین در ادامه این مقادیر با اندیس c به صورت u_c و ω_c نشان داده خواهند شد.

برای در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها در طراحی کنترل سینماتیکی، بهره‌های کنترلی α و β باید به گونه‌ای محاسبه شوند که ورودی‌های سینماتیکی از محدوده مجاز فراتر نروند. محدوده‌های مجاز ورودی‌های سینماتیکی ربات زیرآبی به صورت ذیل تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} |u| \leq u_{max} \\ |\omega| \leq \omega_{max} \end{cases} \quad (19)$$

که در آن مقادیر u_{max} و ω_{max} حد اشباع سرعت عملگرها می‌باشند. با در نظر گرفتن حد اشباع سرعت عملگرها طبق روابط (۱۹) و ورودی‌های کنترلی سینماتیکی (۱۴)، می‌توان محدوده بهره‌های کنترل سینماتیکی را به صورت ذیل بیان کرد.

$$\begin{cases} \alpha \leq u_{max} - |u_d| \\ \beta \leq \omega_{max} - \left| \omega_d^{max} \frac{\varepsilon_2 u_d \sin(\varepsilon_3)}{\varepsilon_3 (1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2)} \right| \end{cases} \quad (20)$$

در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر اثبات پایداری روش کنترل ارائه شده با لحاظ نمودن حد اشباع عملگرها انجام پذیرفته است. در ادامه این بخش جزئیات روش طراحی کنترل سینماتیکی و دینامیکی به تفصیل ارائه خواهد شد.

۳-۱- طراحی کنترل سینماتیکی

هدف کنترل سینماتیکی تعقیب مسیر حرکت مرجع با طراحی ورودی‌های سرعتی (u, ω) سیستم می‌باشد. در ابتدا دینامیک خطای تعقیب محاسبه شده و سپس ورودی‌های کنترل سینماتیکی به منظور پایداری دینامیک خطای بدست آمده طراحی می‌شوند. روش طراحی کنترل یک روش بر مبنای رویکرد لیاپانوف است که قابلیت تنظیم حد اشباع سرعتی عملگرها را دارا می‌باشد. ورودی‌های سرعت طراحی شده در کنترل سینماتیکی به عنوان سیگنال‌های مرجع برای کنترل دینامیکی بکار گرفته خواهند شد.

خطای کنترل سینماتیکی را می‌توان به صورت رابطه (۹) بیان نمود.

$$e_\eta = \eta_d - \eta; \quad \eta \in \{x, y, \phi\} \quad (9)$$

که d زیرنویس معرف حالت مطلوب می‌باشد. بردار خطای نگاشت یافته سیستم به فرم رابطه (۱۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$[\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T = \mathcal{H} [e_x \quad e_y \quad e_\phi]^T \quad (10)$$

که ماتریس دوران $\mathcal{H}$ به صورت ذیل تعریف می‌شود.

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} R(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که $R(\phi)$ به شرح ذیل است.

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

برای تولید دینامیک خطای تعقیب با مشتق‌گیری از (۱۰) و جایگذاری از روابط (۵) داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} &= \phi \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\phi \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

با استفاده از رابطه (۹) و جایگذاری از روابط (۵)، برای $\dot{e}_y$ و $\dot{e}_\phi$ مقادیر ذیل حاصل خواهند شد.

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \dot{x}_d - \dot{x} = u_d \cos \phi_d - u \cos \phi \\ \dot{e}_y &= \dot{y}_d - \dot{y} = u_d \sin \phi_d - u \sin \phi \\ \dot{e}_\phi &= \dot{\omega}_d - \dot{\omega} \end{aligned} \quad (12)$$

با ترکیب روابط (۱۱) و (۱۲) و انجام ساده‌سازی‌های لازم، دینامیک خطای کنترل سینماتیکی سیستم در دستگاه مختصات محلی را می‌توان به فرم ذیل نوشت.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \omega \varepsilon_2 + u_d \cos \varepsilon_3 - u \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\omega \varepsilon_1 + u_d \sin \varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{\omega}_d - \dot{\omega} \end{aligned} \quad (13)$$

در ادامه ورودی‌های کنترل سینماتیکی با پایداری دینامیک خطای تعقیب (۱۳)، بر مبنای تئوری لیاپانوف طراحی می‌گردد.

با جایگذاری τ_1 و τ_2 از (۳۱) در (۲۸) معادلات ذیل حاصل خواهد شد.

$$\begin{cases} \dot{u} - \dot{u}_c + K_1 \tanh(u - u_c) = 0 \\ \dot{\omega} - \dot{\omega}_c + K_2 \tanh(\omega - \omega_c) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

با تعریف خطاهای سرعت به صورت $e_u = u - u_c$ و $e_\omega = \omega - \omega_c$ معادله (۳۲) را می‌توان به فرم (۳۳) نوشت.

$$\begin{cases} \dot{e}_u + K_1 \tanh(e_u) = 0 \\ \dot{e}_\omega + K_2 \tanh(e_\omega) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

با انتخاب مقادیر مثبت بهره‌های کنترلی K_1 و K_2 ، دینامیک خطای (۳۳) پایدار بوده و لذا خطاهای سرعت e_u و e_ω به صفر میل خواهند نمود.

برای در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها در طراحی کنترل دینامیکی، بهره‌های کنترلی K_1 و K_2 باید به گونه‌ای محاسبه شوند که ورودی‌های دینامیکی از محدوده مجاز فراتر نروند. محدوده‌های مجاز ورودی‌های دینامیکی ربات چرخ‌دار به صورت ذیل تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} |\tau_1| \leq \tau_1^{max} \\ |\tau_2| \leq \tau_2^{max} \end{cases} \quad (34)$$

که در آن مقادیر τ_1^{max} و τ_2^{max} حد اشباع گشتاورهای عملگری می‌باشد.

با جایگذاری τ_1 و τ_2 در نامساوی‌های (۳۴) داریم:

$$\begin{cases} |P_1|(|E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 + \dot{u}_c| + K_1) + |P_2|(|E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 + \dot{\omega}_c| + K_2) \leq \tau_1^{max} \\ |P_3|(|E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 + \dot{u}_c| + K_1) + |P_4|(|E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 + \dot{\omega}_c| + K_2) \leq \tau_2^{max} \end{cases} \quad (35)$$

برای سادگی J_1 و J_2 را به فرم ذیل تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} J_1 = \tau_1^{max} - |P_1|(|E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 + \dot{u}_c| + |P_2|(|E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 + \dot{\omega}_c|) \\ J_2 = \tau_2^{max} - |P_3|(|E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 + \dot{u}_c| + |P_4|(|E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 + \dot{\omega}_c|) \end{cases} \quad (36)$$

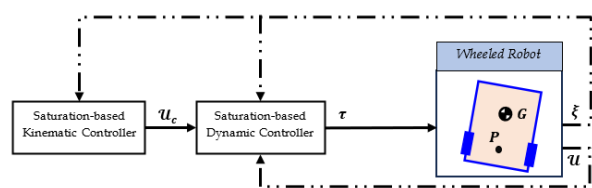
با توجه به معادلات (۳۶)، نامساوی (۳۵) را می‌توان به فرم ذیل نوشت.

$$\begin{cases} |P_1|K_1 + |P_2|K_2 \leq J_1 \\ |P_3|K_1 + |P_4|K_2 \leq J_2 \end{cases} \quad (37)$$

به بیان ماتریسی محدوده بهره‌های کنترل دینامیکی را می‌توان به صورت رابطه (۳۸) بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |P_1| & |P_2| \\ |P_3| & |P_4| \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

بلوک دیاگرام الگوریتم کنترلی پیشنهادی برای ربات چرخ‌دار در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲) بلوک دیاگرام کنترلی ربات

۳-۲- طراحی کنترل دینامیکی

هدف کنترل دینامیکی تعیین ورودی‌های گشتاوری $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ به نحوی است که مولفه‌های سرعت ربات (u, ω) به مقادیر مرجع (u_c, ω_c) خود همگرا شوند. مشابه کنترل سینماتیکی، روش کنترلی پیشنهاد شده دارای قابلیت تنظیم حد اشباع گشتاوری عملگرها می‌باشد.

قبل از شروع طراحی کنترل دینامیکی، لازم است مضارب لاگرانژ از مدل دینامیکی (۷) حذف شوند. با مشتق‌گیری از مدل سینماتیکی (۵) داریم:

$$\dot{\xi} = S^T v + S^T \dot{v} \quad (39)$$

با جایگذاری $\dot{\xi}$ در مدل دینامیکی (۷) رابطه (۲۲) حاصل خواهد شد.

$$M(S^T v + S^T \dot{v}) + C = B\tau + A^T \lambda \quad (40)$$

با ضرب طرفین (۲۲) در S^T داریم:

$$S^T M S^T v + S^T M S^T \dot{v} + S^T C = S^T B \tau$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $(S^T M S)^{-1}$ معادله ذیل حاصل خواهد شد.

$$\dot{v} + (S^T M S)^{-1} S^T M S^T v + (S^T M S)^{-1} S^T C = (S^T M S)^{-1} S^T B \tau \quad (41)$$

با تعریف $G = (S^T M S)^{-1} S^T B$ ، $E = (S^T M S)^{-1} S^T M S^T$ و $F = (S^T M S)^{-1} S^T C$ معادله (۴۱) را می‌توان به صورت (۲۴) نوشت.

$$\dot{v} + E v + G = F \tau \quad (42)$$

همچنین به جهت ساده‌سازی فرض می‌شود که

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

با توجه به روابط (۴۲) و (۴۳) داریم:

$$\begin{cases} \dot{u} + E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 = F_{11}\tau_1 + F_{12}\tau_2 \\ \dot{\omega} + E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 = F_{21}\tau_1 + F_{22}\tau_2 \end{cases} \quad (44)$$

برای پایداری سیستم حلقه بسته $\dot{u}$ و $\dot{\omega}$ به فرم در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{u}_c - K_1 \tanh(u - u_c) \\ \dot{\omega} = \dot{\omega}_c - K_2 \tanh(\omega - \omega_c) \end{cases} \quad (45)$$

با جایگذاری $\dot{u}$ و $\dot{\omega}$ از (۴۵) در (۴۴)، روابط (۲۸) حاصل خواهد شد.

$$\begin{cases} \dot{u} + E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 + \dot{u}_c - K_1 \tanh(u - u_c) = F_{11}\tau_1 + F_{12}\tau_2 \\ \dot{\omega} + E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 + \dot{\omega}_c - K_2 \tanh(\omega - \omega_c) = F_{21}\tau_1 + F_{22}\tau_2 \end{cases} \quad (46)$$

برای سادگی سمت راست روابط (۴۶) به فرم (۴۷) تعریف می‌گردد.

$$\begin{cases} Q_1 = E_{11}u + E_{12}\omega + G_1 + \dot{u}_c - K_1 \tanh(u - u_c) \\ Q_2 = E_{21}u + E_{22}\omega + G_2 + \dot{\omega}_c - K_2 \tanh(\omega - \omega_c) \end{cases} \quad (47)$$

معادلات (۴۸) را می‌توان به فرم ساده شده (۳۰) نوشت:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

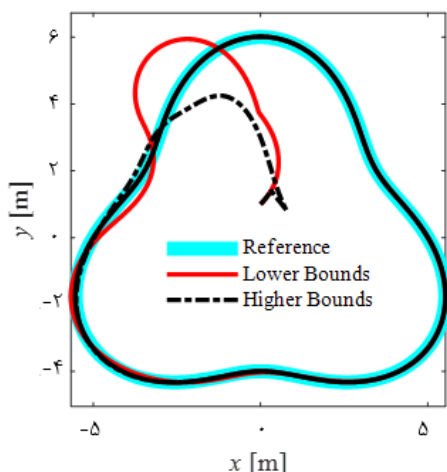
با ضرب طرفین معادله (۳۰) در F^{-1} و در نظر گرفتن $F^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \text{ معادله (۳۰) را می‌توان به صورت ذیل نوشت.}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

جدول ۲) حد اشباع عملگرها در الگوریتم کنترلی

حد اشباع عملگرها	نماد	حد اشباع پایین	حد اشباع بالا	واحد
کنترل سینماتیکی	u_1^{max}	۱/۶	۲/۴	(m/s)
	u_2^{max}	۰/۷	۱/۰۵	(m/s)
کنترل دینامیکی	τ_1^{max}	۰/۱۴	۰/۲۱	(N.m)
	τ_2^{max}	۰/۱۲	۰/۱۸	(N.m)



شکل ۳) مسیر حرکت ربات برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها

به جهت بررسی دقیق‌تر این موضوع، منحنی‌های خطای تعقیب در راستای طولی (e_x)، عرضی (e_y) و زاویه‌ای (e_ϕ) ربات در شکل ۴ نشان داده شده‌اند.

با توجه به شکل ۴ خطای تعقیب موقعیت طولی در شرایط حد اشباع بالا و پایین پس از ۲۲ ثانیه به صفر میل کرده است. همچنین خطاهای تعقیب موقعیت عرضی به ازاء حد اشباع بالا و پایین به ترتیب پس از ۲۸ و ۱۸ ثانیه صفر شده است. با این حال وضعیت خطای زاویه‌ای ربات متفاوت است. خطاهای تعقیب زاویه‌ای به ازاء حد اشباع بالا و پایین به ترتیب پس از ۳۵ و ۲۵ ثانیه صفر شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بهره‌های کنترلی بالا و در نتیجه بکارگیری عملگرهای با قابلیت سرعت بالاتر، سبب همگرایی سریع‌تر مسیر حرکت نخواهد شد.

علاوه بر خطای تعقیب مسیر حرکت، مسئله اساسی و مهمی که موضوع این پژوهش است، رعایت نمودن حد اشباع عملگرها توسط الگوریتم کنترلی می‌باشد. برای این منظور منحنی‌های سرعت مرجع ربات، منحنی‌های سرعت ربات و حد اشباع سرعت عملگرها در شکل ۵ و شکل ۶ ارائه شده است.

با دقت در منحنی‌های سرعت مشاهده می‌شود که در هر سه جهت کنترل سینماتیک توانسته به خوبی سرعت‌های مرجع را تعقیب نموده و خطای تعقیب در زمان کمتر از ۲۳ ثانیه، به صفر همگرا شود. نتیجه قابل توجه و ارزشمند این است که در حین حرکت ربات، سرعت‌ها از حد اشباع سرعت عملگر فراتر نرفته است. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که کنترل سینماتیکی هم از جنبه

۳- نتایج بدست آمده

به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی تحلیل‌های متنوعی بر روی ربات چرخ‌دار انجام شده که جزئیات و نتایج آن‌ها در این بخش ارائه خواهد شد.

مسیر حرکت مرجع استفاده شده در تحلیل‌ها، یک منحنی دایروی با موج سینوسی است که با معادله (۳۹) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} x_d &= \left[5 + \cos\left(\frac{3}{5}t\right) \right] \cos\left(\frac{t}{5} - \frac{\pi}{6}\right) \\ y_d &= \left[5 + \cos\left(\frac{3}{5}t\right) \right] \sin\left(\frac{t}{5} - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

در این صورت با فرض حرکت رو به جلو ربات از مدل سینماتیکی مرجع خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} u_d &= \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2} \\ \phi_d &= \text{atan2}(\dot{y}_d, \dot{x}_d) \\ u_d &= \phi_d = \frac{\dot{x}_d \ddot{y}_d - \ddot{x}_d \dot{y}_d}{u_d^2} \end{aligned} \quad (40)$$

در تمام تحلیل‌ها شرایط اولیه سرعت‌های ربات برابر صفر و شرایط اولیه موقعیتی به صورت ذیل در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \text{ (m)} \\ y(0) &= 1 \text{ (m)} \\ \phi(0) &= \frac{\pi}{4} \text{ (rad)} \end{aligned}$$

بهره‌های کنترل سینماتیکی بر اساس روابط (۲۰) به فرم ذیل انتخاب شده است.

$$\begin{cases} \alpha = u_{max} - |u_d| \\ \beta = \omega_{max} - \left| \omega_d^{max} \frac{\varepsilon_2 u_d \sin(\varepsilon_3)}{\varepsilon_3 (1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2)} \right| \end{cases} \quad (41)$$

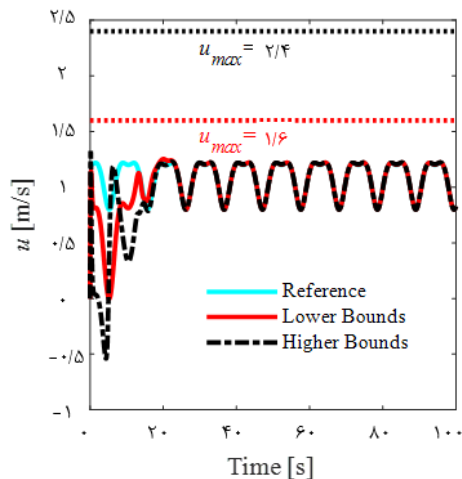
همچنین بهره‌های کنترل دینامیکی نیز بر اساس روابط (۳۸) به فرم ذیل انتخاب شده است.

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |P_1| & |P_2| \\ |P_3| & |P_4| \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

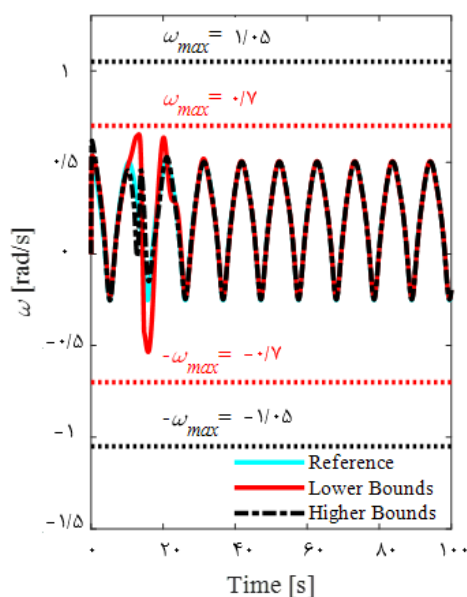
با توجه به اینکه در این پژوهش تمرکز اصلی در نظر گرفتن حد اشباع عملگر در طراحی الگوریتم کنترلی بوده است، سعی شده است که این موضوع در تعریف سناریوهای تحلیل به تفصیل مطرح و بررسی شود.

برای این منظور دو تحلیل با حد اشباع بالا و پایین سینماتیکی و دینامیکی انجام و مقایسه نتایج صورت پذیرفته است. در یک تحلیل از عملگرهای با توان پایین (حد اشباع پایین) استفاده شده است. در تحلیل دوم فرض شده که از عملگرهای با توان بالا (حد اشباع بالا) بکار گرفته شود. مقادیر حد اشباع عملگرها در جدول ۲ ارائه شده است.

در ادامه این بخش نتایج مربوط به ارزیابی عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی ارائه شده است. مسیر حرکت ربات و مسیر حرکت مرجع برای هر دو شرایط باند اشباع بالا و پایین عملگرها در شکل ۳ نشان داده شده است. با دقت در این شکل مشاهده می‌شود که در هر دو حالت، الگوریتم کنترلی پیشنهادی توانسته است ربات را بر روی مسیر مرجع پایدار نماید.



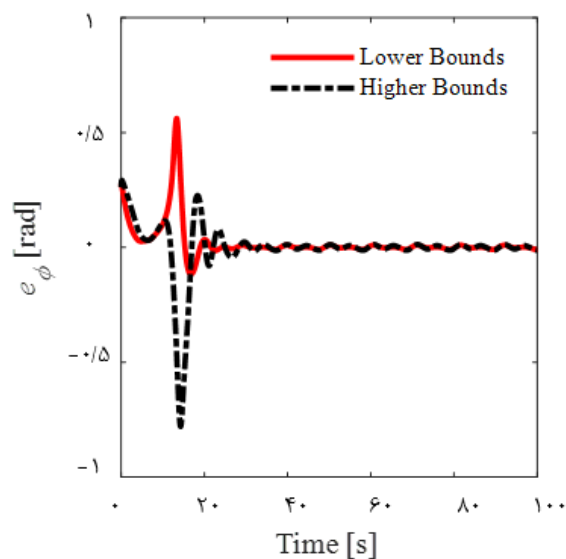
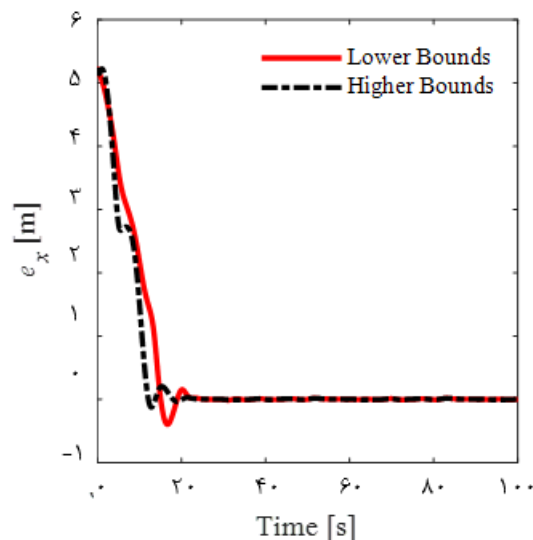
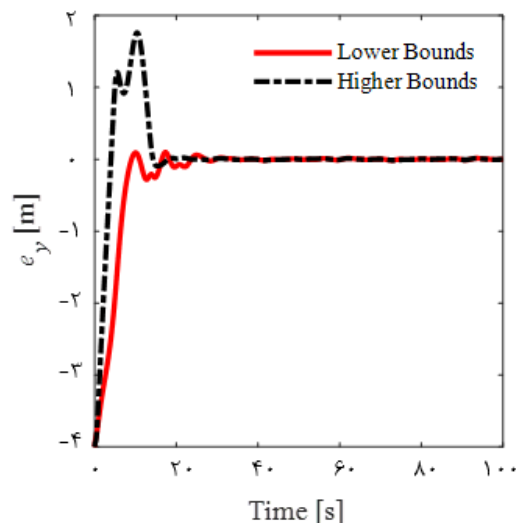
شکل ۵) سرعت طولی ربات برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها



شکل ۶) سرعت عرضی ربات برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها

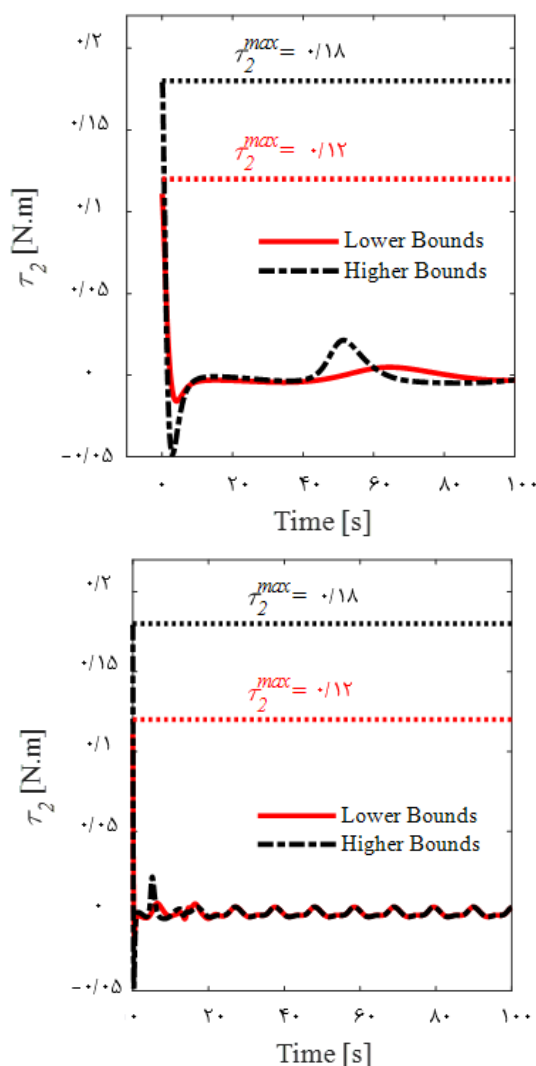
ورودی‌های کنترل دینامیکی نیز در شکل ۷ و شکل ۸ نشان داده شده‌اند. به جهت بررسی دقیق حد اشباع، ۱۰ ثانیه اول این منحنی-ها به صورت بزرگنمایی شده نیز ارائه شده است. با دقت در شکل ۷ مشاهده می‌شود که برای شرایط حد اشباع بالا ماکزیمم گشتاور τ_1 مورد نیاز ۰/۲۰ نیوتن‌متر بوده که کمتر از حد اشباع ۰/۲۱ نیوتن‌متر است. برای حد اشباع پایین نیز ماکزیمم گشتاور ۰/۱۲ نیوتن‌متر بوده که کمتر از حد اشباع ۰/۱۴ نیوتن‌متر است. با توجه به شکل ۸ شرایط مشابهی نیز برای گشتاور τ_2 برقرار است. برای حد اشباع بالا، ماکزیمم گشتاور مورد نیاز ۰/۱۱ نیوتن‌متر بوده که کمتر از حد اشباع ۰/۱۲ نیوتن‌متر است. همچنین برای حد اشباع پایین نیز ماکزیمم گشتاور مورد نیاز از حد اشباع ۰/۱۸ نیوتن‌متر فراتر رفته است. با توجه به نتایج حاصله شده می‌توان نتیجه گرفت که کنترل دینامیکی به خوبی الزامات حد اشباع عملگرها را تامین نموده است.

تعقیب سرعت‌های مرجع و هم از جهت رعایت حد اشباع سرعت عملگرها ماموریت خود را به خوبی انجام داده است.

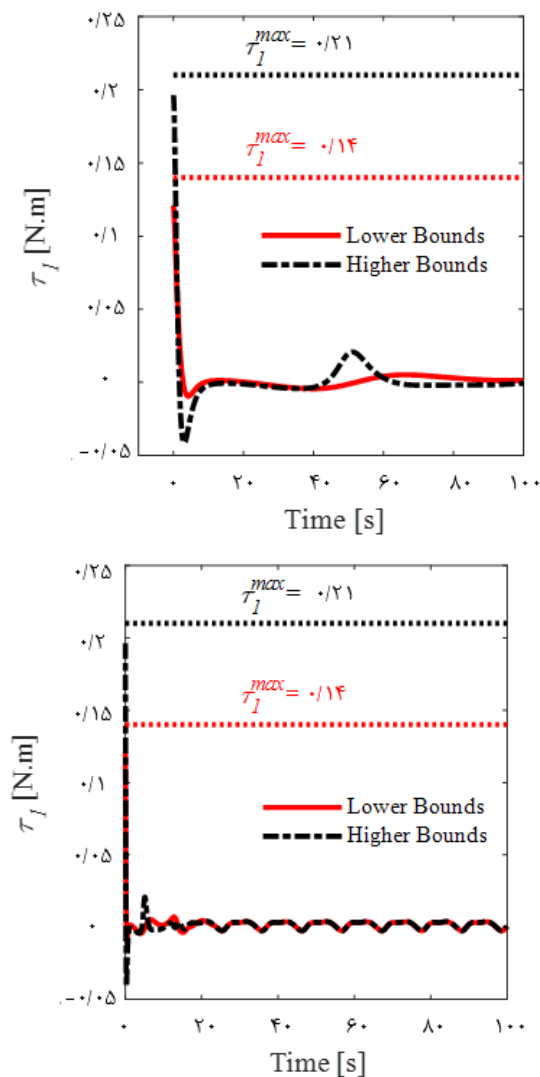
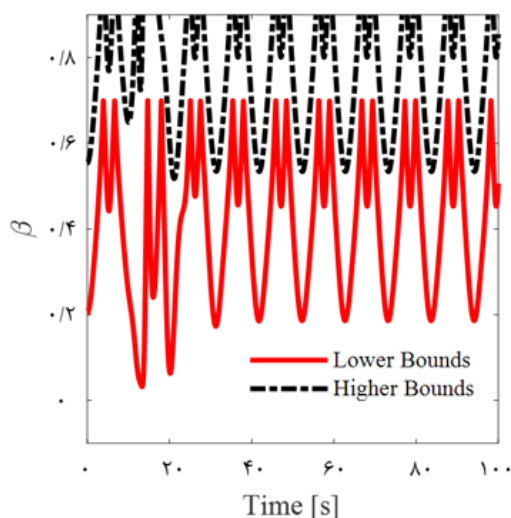


شکل ۴) خطاهای تعقیب موقعیت ربات برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها

پیشنهادی با داشتن قابلیت مهم امکان تنظیم حد اشباع عملگرها، همچنان خطای کنترلی کمتر و تلاش کنترلی پایین‌تری نسبت به روش خطی‌سازی فیدبک دارد.



شکل ۸) گشتاور کنترلی τ_2 برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها



شکل ۷) گشتاور کنترلی τ_1 برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها

به منظور بررسی تکمیلی عملکرد کنترل سینماتیکی و دینامیکی، منحنی‌های بهره کنترلی در شکل ۹ ارائه شده است. طبق انتظار در شرایط بکارگیری عملگرهای با حد اشباع بالا نسبت به حد اشباع پایین، بهره‌های کنترلی مقادیر بالاتری خواهند داشت.

در ادامه این بخش، مقایسه روش کنترلی پیشنهادی با روش خطی‌سازی فیدبک انجام خواهد شد. به منظور پرهیز از تکرار و شلوغ شدن نمودارها، تنها نتایج مربوط به حد پایین اشباع و روش خطی‌سازی فیدبک ارائه شده است. منحنی‌های خطا و گشتاورهای کنترلی در شکل ۱۰ نشان شده است. با دقت در این شکل مشاهده می‌شود که از منظر خطای کنترلی، روش پیشنهادی هم دارای فراجاهش کمتری بوده و هم سریع‌تر به مقدار مطلوب همگرا شده است. بررسی ورودی‌های کنترلی نیز نشان می‌دهد که گشتاورهای کنترلی τ_1 و τ_2 روش پیشنهادی به ترتیب از مقادیر مجاز ۰/۱۴ و ۰/۱۲ نیوتن‌متر فراتر نرفته است. اما در روش خطی‌سازی فیدبک، مقادیر τ_1 و τ_2 بیش از ۰/۴ نیوتن‌متر می‌باشند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم کنترلی

۳- نتیجه‌گیری

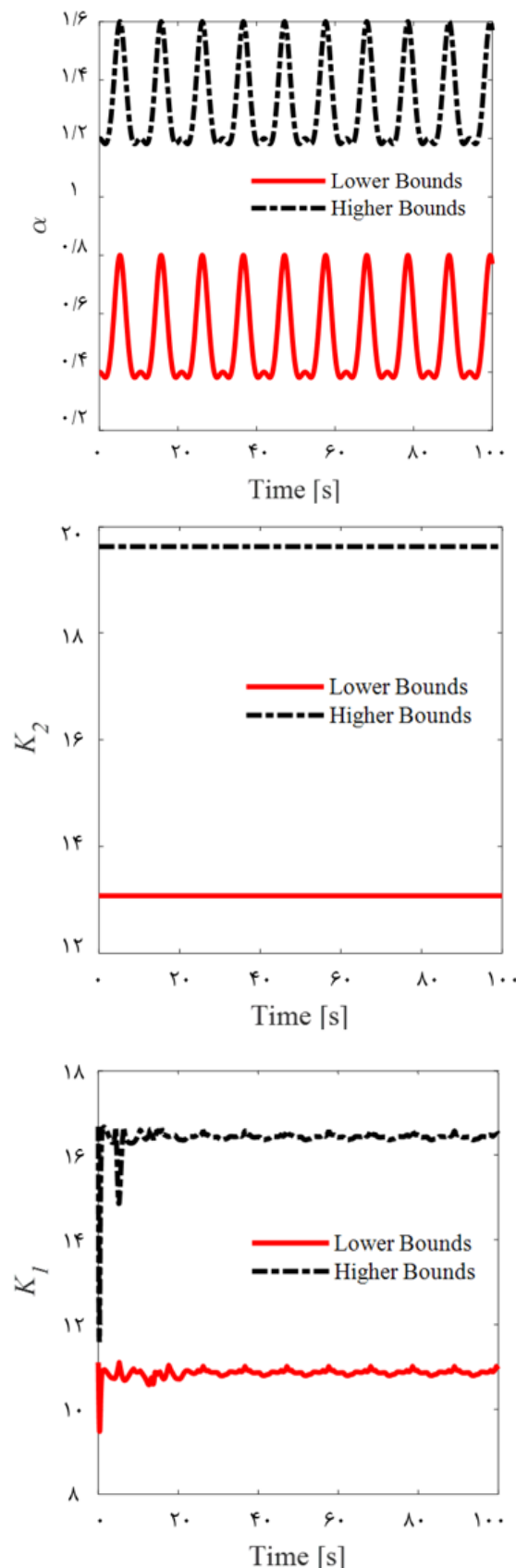
در این پژوهش یک الگوریتم کنترلی برای مساله تعقیب مسیر ربات‌های چرخ‌دار ارائه شد. مزیت مهم الگوریتم پیشنهادی این است که حد اشباع عملگرها به صورت از پیش تعیین شده در طراحی الگوریتم در نظر گرفته شود. الگوریتم کنترلی به دو بخش کنترل سینماتیکی و کنترل دینامیکی تقسیم می‌شود. کنترل سینماتیکی بر اساس حد اشباع سرعت عملگرها طراحی و پیاده‌سازی شد. در طراحی کنترل دینامیکی نیز حد اشباع نیرویی عملگرهای ربات در نظر گرفته شد. پایداری الگوریتم‌های کنترلی ارائه شده با استفاده از تئوری لیاپانوف تضمین گردید. در ادامه به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی، سناریوهای متنوعی مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل‌ها نشان داد که بکارگیری عملگرهای با حد اشباع بالاتر ممکن است در مواردی منجر به تعقیب سریع‌تر شود، اما تلاش کنترلی سینماتیکی و دینامیکی نیز به نسبت افزایش خواهند یافت. برای تکمیل ارزیابی، عملکرد روش پیشنهادی با روش خطی‌سازی فیدبک مقایسه گردید. نتایج نشان داد که روش پیشنهادی نسبت به خطی‌سازی فیدبک هم دارای فراجش کمتری بوده و هم سریع‌تر به مقدار مطلوب همگرا شده است. با توجه به اینکه روش پیشنهادی قابلیت تنظیم حد اشباع ماکزیمم را دارا می‌باشد، ماکزیمم ورودی کنترلی آن حدود ۲۵٪ روش خطی‌سازی فیدبک می‌باشد. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم کنترلی ضمن تعقیب مسیر حرکت با دقت بالا، الزامات حد اشباع عملگرها را نیز به صورت کامل تامین نموده است. دارا بودن همزمان این دو ویژگی نوید بخش این است که الگوریتم کنترل پیشنهادی در کاربردهای مختلف می‌تواند مفید و کارگشا باشد. به‌عنوان کارهای آینده، پیاده‌سازی روش ارائه شده در عمل می‌تواند به‌عنوان گام بعدی این پژوهش در نظر گرفته شود.

تاییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیر ایرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: در این مقاله هیچگونه تعارض منافی برای اظهار وجود ندارد.

منابع

- 1- Taheri H, Zhao CX. Omnidirectional mobile robots, mechanisms and navigation approaches. Mechanism and Machine Theory. 2020;153:103958.
- 2- Moosavian S A A, rahimi bidgoli M, keymasi khalaji A. Trajectory tracking control of a wheeled mobile robot by a non-model-based control algorithm using PD-action filtered errors. Modares Mechanical Engineering 2015; 14 (12) :171-178. (in Persian)
- 3- Keymasi Khalaji A. Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking. Modares Mechanical Engineering 2017; 16 (11) :103-112. (in Persian)



شکل ۹) بهره‌های کنترل سینماتیکی و دینامیکی برای باند پایین و بالای اشباع ورودی‌ها

- 19- Li Y, Cai Y, Wang Y, Li W, Wang G. Simultaneous Tracking and Stabilization of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots under Constrained Velocity and Torque. *Mathematics*. 2024;12(13):1985–5.
- 20- Luy Nguyen Tan, Duc Lam Gia. ADP-Based H_infty optimal decoupled control of single-wheel robots with physically coupling effects, input constraints, and disturbances. *IEEE transactions on industrial electronics*. 2023;1–10.
- 21- Keymasi Khalaji A, Moosavian SAA. Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2014;19(3):943–53.
- 4- Rybczak M, Popowniak N, Agnieszka Lazarowska. A Survey of Machine Learning Approaches for Mobile Robot Control. *Robotics*. 2024;13(1):12–2.
- 5- Zhang C, Cen C, Huang J. An Overview of Model-Free Adaptive Control for the Wheeled Mobile Robot. *World Electric Vehicle Journal*. 2024;15(9):396–6.
- 6- Zamanian M, Keymasi Khalaji A. Trajectory tracking and stabilization control of a wheeled robot using predictive algorithm. *Modares Mechanical Engineering* 2018; 17 (12) :167-175. (in Persian)
- 7- Khonsarian R, Farrokhi M. Vision-Based Model Predictive Control of Wheeled Mobile Robot. *Modares Mechanical Engineering* 2019; 19 (7) :1767-1777. (in Persian)
- 8- MohammadBagher Maghsoudi Mehrabani, Khalaji AK, Mahdi Ghane. Control of a group of uncertain wheeled robots with global inputs in the presence of obstacles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K Journal of Multi-body Dynamics*. 2022;237(1):146441932211404.
- 9- Ding W, Zhang JX, Shi P. Adaptive Fuzzy Control of Wheeled Mobile Robots With Prescribed Trajectory Tracking Performance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2024;PP(99):1–11.
- 10- Kazemipour M, Shojaei K. Nonlinear Disturbance Observer-Based Fuzzy Adaptive Finite-Time Dynamic Surface Formation Control of Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robots. *JoC* 2021; 15 (1) :93-112. (in Persian)
- 11- Keymasi Khalaji A. Modeling and control of uncertain multibody wheeled robots. *Multibody System Dynamics*. 2019;46(3):257–79.
- 12- Keymasi Khalaji A, Jalalnezhad M. Control of a wheeled robot in presence of sliding of wheels using adaptive backstepping method. *Modares Mechanical Engineering* 2018; 18 (4) :144-152. (in Persian)
- 13- Gonzalez-Sorribes A, Carbonell R, Cuenca A, Salt J. Control Synthesis of Nonholonomic Mobile Robots Under Time-Varying Delays and Input Saturation: Experimental Validation. *IEEE Access*. 2024;PP(99):1.
- 14- Zheng Y, Zheng J, Shao K, Zhao H, Man Z, Sun Z. Adaptive fuzzy sliding mode control of uncertain nonholonomic wheeled mobile robot with external disturbance and actuator saturation. *Information sciences*. 2024;663:120303–3.
- 15- Katayama H, Hayashi K. Circular Path Following Control for 4 Wheeled Mobile Robots with Steering Angle Saturation. *IFAC-PapersOnLine*. 2024;58(21):61–6.
- 16- Khoshnam Shojaei. A novel saturated PID-type observer-based controller for wheeled mobile robots with a guaranteed performance considering path curvature. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2023;34(6):3697–725.
- 17- Zhang Z, Liu X, Jiang W. Adaptive tracking control of a nonholonomic wheeled mobile robot with multiple disturbances and input constraints. *at - Automatisierungstechnik*. 2024;72(1):35–46.
- 18- Song NH, Kim H. Trajectory Tracking of Differential Wheeled Mobile Robots with Input Saturation and Mismatched Centers. *Journal of Electrical Engineering and Technology*. 2024;19(5):3463–70.