

Analytical Accuracy Assessment of Static Positioning Utilizing Star Sensor

Hadi Makarem* 

Shiraz University, School of Mechanical Engineering, Shiraz, Iran.

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Article History

Received: May 20, 2025

Revised: September 02, 2025

Accepted: September 07, 2025

ePublished: October 24, 2025

ABSTRACT

Positioning on Earth has consistently been a crucial and complex challenge. Inertial Navigation Systems (INS) serve as essential tools for determining the position of moving platforms but face two primary limitations: the accumulation of navigation errors over time and the dependence on accurate initial conditions. While GNSS satellites have revolutionized positioning on and near Earth, their effectiveness diminishes with distance from the planet, necessitating alternative methods. In such cases, celestial observation and star-based positioning become vital solutions. Star trackers—high-precision sensors capable of identifying and locating celestial star patterns—play a pivotal role in this context. When integrated with inclinometers and chronometers, they form a positioning system capable of calculating geographic latitude and longitude through sensor data processing. This study investigates the underlying mathematics of this approach, models various error sources (including star tracker accuracy, inclinometer and chronometer precision, sensor alignment, and gravitational modeling), and analytically evaluates their impact on positioning accuracy. The findings provide valuable insights for optimizing system configurations and error budgeting in the design of advanced positioning systems.

Keywords: Positioning, Star Sensor, Inertial Sensor, Inclinometer, Navigation System

How to cite this article

Makarem H, Analytical Accuracy Assessment of Static Positioning Utilizing Star Sensor. Modares Mechanical Engineering; 2025;25(08):481-491.

*Corresponding author's email: h.makarem@shirazu.ac.ir

*Corresponding ORCID ID: 0009-0001-2848-3695



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.



بررسی تحلیلی دقت تعیین موقعیت ایستا با بهره گیری از حسگر ستاره

هادی مکارم*

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده

موقعیت‌یابی بر روی زمین همواره یکی از مسائل پراهمیت و پرچالش بوده است. سامانه‌های ناوبری اینرسی یکی از ابزارهای کلیدی در تعیین موقعیت یک سکوی متحرک به شمار می‌روند که با دو چالش رشد خطای ناوبری با گذشت زمان و نیز ضرورت اطلاع دقیق از شرایط اولیه مواجه هستند. امروزه ماهواره‌های GNSS تعیین موقعیت را در زمین و اطراف آن به راحتی امکان‌پذیر کرده است. با این حال با دور شدن از زمین و مواجهه با محدودیت‌های سامانه‌های موقعیت‌یابی ماهواره‌ای، استفاده از ابزارهای جایگزین اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. در این شرایط مشاهده اجرام سماوی و مکان‌یابی مبتنی بر ستارگان یکی از مهمترین راهکارها برای تعیین موقعیت به شمار می‌رود. حسگر ستاره با قابلیت شناسایی و مکان‌یابی الگوی ستارگان آسمان، یکی از دقیق‌ترین حسگرهای سماوی است که می‌تواند نقش بسزایی در این راستا ایفا کند. استفاده از حسگر ستاره در کنار شیب‌سنج و زمان‌سنج، یک سامانه موقعیت‌یابی را تشکیل می‌دهد که می‌تواند طول و عرض جغرافیایی را با پردازش داده حسگرها تعیین نماید. ریاضیات حاکم بر مسئله در این پژوهش مورد مطالعه قرار گرفته و منابع مختلف خطا (شامل دقت حسگر ستاره، شیب‌سنجی، زمان‌سنجی، همراستایی حسگرها، و مدل جاذبه) معرفی و مدلسازی می‌شود و تاثیر هر یک بر دقت تعیین موقعیت به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد. نتایج حاصل از این پژوهش می‌تواند برای یافتن پیکره‌بندی بهینه و بودجه‌بندی خطا در طراحی سامانه‌های موقعیت‌یابی پیشرفته مورد بهره‌برداری قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: تعیین موقعیت - حسگر ستاره - حسگر اینرسی - شیب سنج - سامانه ناوبری

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۳۰

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۶/۱۱

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۱۶

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۸/۰۲

نحوه ارجاع به این مقاله

مکارم هادی، بررسی تحلیلی دقت تعیین موقعیت ایستا با بهره گیری از حسگر ستاره، مهندسی مکانیک مدرس. ۴۹۱-۴۸۱(۰۸):۲۵۰۴-۱۴۰۴.

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h.makarem@shirazu.ac.ir

*شناسه اُرکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ۳۶۹۵-۲۸۴۸-۰۰۰۱-۰۰۰۹



۱- مقدمه

تعیین موقعیت جغرافیایی از دیرباز مورد توجه بوده و از اهمیت زیادی برخوردار است. تعیین موقعیت در محیط‌های مختلف اعم از روی سطح زمین و بالای آن، سطح دریا و زیر آن، و نیز در فضای پیرامون زمین یا فراتر از آن حائز اهمیت بوده و هر یک ابزارها و چالش‌های مخصوص به خود را داراست. امروزه وجود ماهواره‌های ناوبری و دسترسی به داده‌های GNSS تعیین موقعیت را در محیط‌هایی که خط دید مستقیم و بدون مانع به ماهواره‌ها وجود دارد میسر کرده است. اما تعیین موقعیت در شرایط عدم دسترسی به داده GNSS یا در سایر کرات که کاوشگر به آنها ارسال می‌شود همچنان با چالش‌هایی روبروست.

به صورت سنتی، سامانه‌های ناوبری اینرسی که بر حسگرهای اینرسی استوار هستند، ابزار اصلی را برای تعیین موقعیت در محیط‌های مختلف تشکیل می‌دهند. عملکرد مستقل و غیر قابل اختلال این سامانه‌ها محبوبیت بسیار زیادی برای آنها فراهم کرده است. با این وجود، سامانه‌های ناوبری اینرسی با دو چالش جدی مواجه هستند: اولاً شروع به کار آنها مستلزم ارائه اطلاعات مکانی توسط کاربر یا سامانه‌های کمک ناوبری است و INS به تنهایی نمی‌تواند موقعیت اولیه خود را تعیین نماید. ثانیاً از آنجا که اصول عملکرد INS مبتنی بر انتگرال‌گیری از داده حسگرها است، لذا رشد خطای ناوبری و خطای تعیین موقعیت در آنها اجتناب‌ناپذیر است که البته نرخ رشد خطا وابسته به کیفیت حسگرهای اینرسی بوده و دستیابی به دقت‌های بالا مستلزم صرف هزینه زیاد برای تامین حسگرهای اینرسی و سامانه‌های اینرسی دقیق خواهد بود.

البته دستیابی به نتایج ناوبری و تعیین موقعیت با دقت بالا، بدون بهره‌گیری از حسگرهای اینرسی دقیق نیز امکان پذیر است. استفاده از گیرنده‌های GNSS که موقعیت مکانی را به کمک سیگنال ماهواره‌های ناوبری تعیین می‌کنند، رویکردی متداول برای تعیین موقعیت است. همچنین تلفیق داده این گیرنده‌ها با حسگرهای اینرسی ارزان قیمت و یا حسگرهای دیگر نظیر فشارسنج، سرعت‌سنج و مغناطیس‌سنج می‌تواند به شکل موثری در دستیابی به اطلاعات ناوبری با دقت مناسب راهگشا باشد [1]. همچنین داده مغناطیس‌سنج دقیق اگر با نقشه میدان مغناطیسی زمین تطبیق داده شود، در ترکیب با یک سامانه ناوبری اینرسی می‌تواند به تعیین موقعیت جغرافیایی منجر گردد. البته این رویکرد مستلزم تحلیل دقیق از مقادیر و تغییرات میدان مغناطیسی زمین و تولید نقشه مرجع مغناطیسی است [2].

مسئله تعیین موقعیت را بسته به سناریو می‌توان به دو دسته تعیین موقعیت در حال سکون و تعیین موقعیت در حرکت تقسیم کرد. تعیین موقعیت یک سکوی ساکن به خصوص برای شروع به کار سامانه‌های ناوبری اینرسی اهمیت دارد. همچنین در کاربردهایی نظیر نقشه برداری، ستاره شناسی، معدن یا زمین

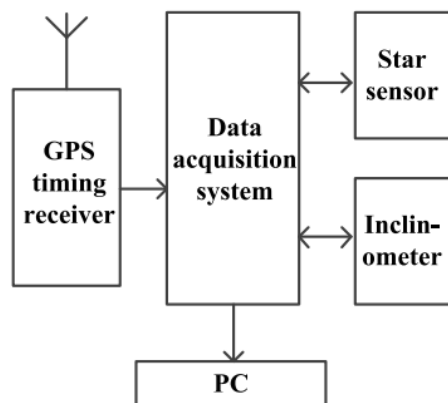
شناسی تعیین موقعیت در حال سکون حائز اهمیت است. در غیاب داده GNSS، ابزارهایی که امکان تعیین موقعیت جغرافیایی را فراهم کنند بسیار محدود بوده و پیچیدگی‌های خاص خود را دارند. بهره‌گیری از ستارگان یکی از کهن‌ترین و در عین حال از بهترین روش‌ها محسوب می‌شود.

اگرچه از دیرباز وسیله‌ای به نام ذات السدس برای تعیین سمت و ارتفاع ستارگان مورد استفاده قرار می‌گرفته، اما امروزه ابزاری به نام ردیاب ستاره یا حسگر ستاره می‌تواند الگوی ستارگان را در آسمان شناسایی کند. این حسگر با تصویربرداری اپتیکی از آسمان شب و تطبیق الگوی ستارگان ثبت شده در تصویر با کاتالوگ ستاره، جهت‌گیری خود را نسبت به کیهان مشخص می‌نماید [3]. بهره‌گیری از داده حسگر ستاره برای دستیابی به موقعیت جغرافیایی البته نیازمند اطلاع از زوایای تراز محلی و نیز زمان مطلق است که به ترتیب با استفاده از یک شیب‌سنج و یک ساعت حاصل می‌شود. این پژوهش پس از معرفی معادلات حاکم بر این مسئله و چگونگی محاسبه موقعیت جغرافیایی بر اساس داده‌های مذکور، بر تحلیل خطای تعیین موقعیت تمرکز کرده و سهم منابع مختلف خطا را در این مسئله ارزیابی می‌نماید. نتایج این پژوهش می‌تواند به منظور پیکربندی یک سامانه تعیین موقعیت مبتنی بر حسگر ستاره و برآورد دقت قابل انتظار از آن سامانه مورد بهره برداری قرار گیرد.

تا کنون پژوهش‌های مختلفی بر تعیین موقعیت ایستا با استفاده از حسگرهای سماوی و به خصوص حسگر ستاره انجام شده است. مرجع [4] یک سیستم مکان‌یابی مبتنی بر ردیاب ستاره برای مریخ‌نوردها ارائه می‌دهد. با ترکیب ردیاب ستاره، شیب‌سنج و GPS (برای زمان‌سنجی و مقایسه)، نویسندگان مقاله مدل‌هایی را برای کالیبراسیون و اصلاح خطاهای نصب، اثرات دما و انحرافات زمانی توسعه داده‌اند. نتایج آزمایش‌های ایشان خطای موقعیت‌یابی حدود ۴ کیلومتر را نشان می‌دهد. و البته تأکید می‌کنند که برای کاربردهای عملی، لازم است تکرارپذیری سنسورها و مقاومت در برابر عوامل محیطی بهبود یابد. طبق ادعای ایشان نویز ذاتی سامانه ۳۶۳ متر است و خطاهای چندکیلومتری حاصل از آزمایش‌ها با انجام کالیبراسیون بر روی سامانه قابل بهبود است. این مقاله البته در مورد دقت هر یک از اجزای سامانه شامل شیب‌سنج، حسگر ستاره و ساعت، اطلاعاتی ارائه نمی‌دهد.

مقاله دیگر [5] یک سیستم موقعیت‌یابی خودکار برای ماه‌نوردها ارائه می‌دهد که از ترکیب ردیاب ستاره با میدان دید وسیع و شیب‌سنج دقیق برای تعیین موقعیت استفاده می‌کند. با تصحیح داده‌های دریافت شده از ردیاب ستاره بر اساس داده‌های شیب‌سنج ماه‌نورد، سامانه می‌تواند از یک مشاهده ستاره برای تخمین عرض و طول جغرافیایی استفاده کند. دقت ردیاب ستاره استفاده شده در این پژوهش، ۵ ثانیه قوسی در محورهای نشانه‌روی و ۴۰ تا ۵۵ ثانیه قوسی در محور رول گزارش شده است. با این حال، به علت

الگوریتم QUEST، خطای سیستماتیک ناشی از ناهمترایی سنسورها به حداقل رسیده و دقت موقعیت‌یابی به ۲۰ تا ۷۰ متر می‌رسد. این مقاله البته تأکید می‌کند که دستیابی به این دقت با چندین دقیقه داده‌برداری به صورت پیوسته حاصل شده است. شکل ۱ نمای بلوکی سخت‌افزار و تبادل داده را در این پژوهش نشان می‌دهد.



شکل ۱ نمای بلوکی سخت‌افزار و تبادل داده [9]

Fig. 1 Hardware and data exchange block diagram [9]

استفاده از حسگر خورشید به جای حسگر ستاره از دیگر رویکردهایی است که می‌تواند برای تعیین موقعیت مورد توجه قرار گیرد [10]. البته با توجه به نوع و دقت داده حسگرهای خورشید، دستیابی به دقت‌های بالا در تعیین موقعیت با استفاده از آنها بدون چالش نخواهد بود. همچنین برخی دیگر از پژوهش‌ها مشخصاً بر عملکرد حسگر ستاره و ارتقای آن به منظور افزایش دقت تعیین موقعیت تمرکز کرده و از تأثیر سایر منابع خطا چشم‌پوشی کرده‌اند [12]. به علاوه برخی محققان بهره‌گیری از حسگر ستاره را در سامانه‌های ناوبری تلفیقی و در تلفیق با INS مورد مطالعه قرار داده‌اند که می‌تواند خطای ناوبری را در مقایسه با INS تنها تا حد زیادی کاهش دهد [13]. استفاده از سایر ابزارهای کمک ناوبری نظیر دوربین‌های اپتیک و LiDAR در کنار حسگر ستاره و شیب‌سنج نیز در پژوهش‌های دیگر مورد مطالعه قرار گرفته است [14].

پژوهش‌های ذکر شده که به مطالعه مسئله تعیین موقعیت ایستا با استفاده از حسگر ستاره پرداخته‌اند، مدل‌سازی تحلیلی، شبیه‌سازی عددی و ارائه نتایج آزمایش‌های میدانی را محور بحث خود قرار داده و کمتر به مطالعه تحلیلی دقت تعیین موقعیت و ارزیابی سهم خطای حسگرهای مختلف بر آن متمرکز شده‌اند. به عنوان مثال اگرچه اهمیت ناهمترایی بین حسگر ستاره و شیب‌سنج و ضرورت کالیبراسیون آن در بیشتر مطالعات مورد تأکید قرار گرفته، اما بررسی تحلیلی تأثیر این ناهمترایی بر دقت تعیین موقعیت و مقایسه آن با سایر منابع خطا چندان مورد توجه نبوده است. در پژوهش حاضر کوشیده شده است تا ضمن معرفی و ارزیابی منابع مختلف خطا، نقش هر یک از آنها در دقت تعیین

خطای بزرگتر شیب‌سنج‌ها که ± 180 ثانیه قوسی در نظر گرفته شده، دقت کلی سیستم تحت تأثیر خطای شیب‌سنج‌ها بوده است و با توجه به شعاع کره ماه، منجر به خطای موقعیت‌یابی $1/2$ کیلومتر در بدترین حالت می‌شود. اگر دقت شیب‌سنج‌ها به 40 ثانیه قوسی بهبود یابد، این خطا به 364 متر کاهش خواهد یافت. لازم به تأکید است که نتایج این مقاله بر اساس شبیه‌سازی استخراج شده است. مرجع [6] روشی نوین برای مکانیابی ایستای مریخ‌نوردها ارائه می‌دهد که در آن مشاهدات نجومی (ستارگان، خورشید و سیارات) را با اندازه‌گیری‌های گرانشی مبتنی بر ژئوئید تلفیق می‌کند. برخلاف روش‌های مرسوم که از مدل‌های بیضوی (مانند WGS84) بهره می‌برند، این پژوهش بر تصحیحات ژئوئیدی (EGM2008) برای زمین و MGM2011 برای مریخ) تأکید دارد تا اثرات ناهنجاری‌های جرمی را که موجب انحراف بردار گرانش محلی تا صدها ثانیه قوسی می‌شوند، لحاظ کند. نتایج نشان می‌دهد که عدم توجه به ژئوئید خطاهایی در حد کیلومتر (مثلاً تا حدود 21 کیلومتر در هیمالیا) ایجاد می‌کند، در حالی که تصحیح ژئوئیدی می‌تواند دقت را دو تا سه مرتبه بهبود داده و به متر برساند. در شبیه‌سازی‌های این پژوهش انحراف معیار خطای ردیاب ستاره 6 ثانیه قوسی در نشانه روی و 40 ثانیه قوسی در محور رول فرض شده و انحراف معیار نویز شیب‌سنج $0/1$ درجه در نظر گرفته شده است. این پژوهش شرایط خلأ را فرض می‌گیرد و از اثرات جوی صرف نظر می‌کند. همچنین برای یک ساعت اتمی، اثر دریافت و خطای ساعت را در تعیین موقعیت مورد بحث قرار می‌دهد.

از دیگر مقالاتی که به تعیین موقعیت ایستا با استفاده از ترکیب داده‌های ردیاب ستاره، شیب‌سنج و ساعت پرداخته‌اند می‌توان به مرجع [7] اشاره کرد. این مقاله با تمرکز بر کالیبراسیون انحراف بین چارچوب حسگر ستاره و چارچوب شیب‌سنج، و نیز لحاظ اثر انکسار جوی، مسئله تعیین موقعیت را به صورت تجربی مورد مطالعه قرار می‌دهد و دقت‌های بهتر از 800 متر را در آزمایش‌های میدانی گزارش می‌دهد. حسگر ستاره مورد استفاده در این پژوهش دقتی در حدود $0/01$ درجه در نشانه روی و $0/1$ درجه در محور رول (با اعتماد 85 درصد) داشته است. همچنین دقت شیب‌سنج $0/02$ درجه گزارش شده است.

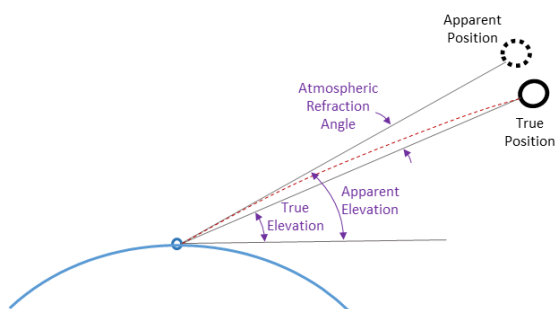
استفاده از شیب‌سنج بسیار دقیق (با رزولوشن $0/2$ ثانیه قوسی) در کنار ساعت اتمی و حسگر ستاره با دید وسیع در مقاله دیگر مورد توجه قرار گرفته است و نویسندگان آن موفق شده‌اند در تست‌های میدانی به دقتی بهتر از 40 متر (انحراف معیار) دست یابند [8]. جبران انکسار جوی و تخمین زاویه انحراف بین حسگرها در این پژوهش مورد توجه قرار گرفته است. همچنین در پژوهش دیگر [9] از ترکیب سنسور ستاره و شیب‌سنج دو محوره به ترتیب با دقت $2/2$ و $10/8$ ثانیه قوسی (35) به منظور تعیین موقعیت استفاده می‌کند. دقت زمان‌سنجی آن نیز در حد میلی‌ثانیه ذکر شده است. با طراحی یک مدل اندازه‌گیری یکپارچه و کالیبراسیون مبتنی بر

پردازشی، و خطاها و اعوجاجات اپتیکی داده خروجی حسگر ستاره با خطا همراه است. خطای رول (حول محور نوری یا محور z) حسگر ستاره عموماً بزرگتر از خطاهای نشانه‌روی (حول محورهای x و y) بوده و بر این اساس می‌توان خطای حسگر ستاره را مدل‌سازی کرد. اگر خطای زاویه‌ای حول محورهای x ، y و z را به ترتیب با $\delta\theta_{s,x}$ ، $\delta\theta_{s,y}$ و $\delta\theta_{s,z}$ نمایش دهیم و تعریف کنیم $\delta\theta = (\delta\theta_{s,x}, \delta\theta_{s,y}, \delta\theta_{s,z})^T$ و ماتریس دوران گزارش شده توسط حسگر ستاره را با C_s^i نمایش دهیم، با توجه به کوچک بودن اندازه خطاهای زاویه‌ای، مدل داده حسگر ستاره به صورت زیر خواهد بود که در آن منظور از $\delta\theta$ ماتریس پادمقارن نظیر بردار $\delta\theta$ است:

$$C_s^i = C_s^i \delta C_s, \quad \delta C_s \approx I + \delta\theta \quad (1)$$

انحراف معیار نظیر مولفه‌های اول و دوم این بردار خطا را با σ_c و انحراف معیار نظیر مولفه سوم را با σ_b نمایش می‌دهیم که به ترتیب نشان‌دهنده بزرگی خطای نشانه‌روی و بزرگی خطای رول حسگر است. لازم به تاکید است که با توجه به کاربرد حسگرهای ستاره در فضاپیماها و ماهواره‌ها، آنچه به عنوان دقت آنها گزارش می‌شود، مشروط به عملکرد آنها در خارج از جو زمین می‌باشد. هنگام استفاده از حسگر ستاره بر روی زمین، خطاهایی نظیر اثر شکست نور، آلودگی‌های نوری و اعوجاجات جوی بر عملکرد حسگر ستاره تاثیر می‌گذارد که برخی از آنها تا حدودی قابل مدل‌سازی و جبران هستند.

شکست نور در جو زمین، موجب می‌شود که امتداد ظاهری ستارگان با امتداد واقعی آنها متفاوت باشد. به بیان دقیق‌تر، اگر امتداد موقعیت هر ستاره را از دید ناظر زمینی در دستگاه تراز محلی با دو زاویه سمت و ارتفاع بیان کنیم، زاویه ارتفاع ظاهری ستارگان بزرگتر از زاویه ارتفاع واقعی آنها خواهد بود و اختلاف بین این دو زاویه به طور عمده به خود زاویه ارتفاع وابسته است. اگر زاویه سمت واقعی یک ستاره را با az و زاویه ارتفاع آن را با el نمایش دهیم، و مقادیر ظاهری متناظر را به ترتیب با az' و el' بیان کنیم خواهیم داشت $az' = az$ و $el' = el + R$ که در آن R نشان دهنده جابجایی زاویه‌ای ظاهری ستاره است (شکل ۳).

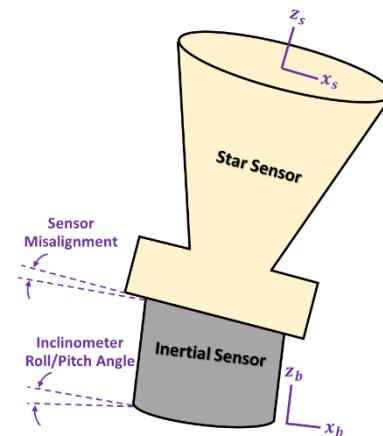


شکل ۳ موقعیت ظاهری ستارگان در اثر انکسار جوی
Fig. 3 The apparent position of stars due to atmospheric refraction

موقعیت استخراج و به بیانی ساده ارائه گردد به گونه‌ای که بتواند به طراحان برای انتخاب حسگرها و بودجه‌بندی خطا کمک نماید. در ادامه ابتدا مدل ریاضی سیستم و اجزای آن معرفی می‌شود. سپس الگوریتم تعیین موقعیت با استفاده از داده حسگرها ارائه گردیده و تاثیر هر یک از منابع خطا به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود. آنگاه چگونگی بهره‌برداری و میانگین‌گیری از داده حسگرها در یک بازه زمانی به منظور کاهش اثر نویز و افزایش دقت مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۲- مدل‌سازی سیستم

سامانه تعیین موقعیت مورد بحث، از سه المان اصلی تشکیل شده است که عبارتند از حسگر ستاره، شیب‌سنج، و زمان‌سنج. نمایی دوبعدی از جهت‌گیری نسبی حسگر ستاره و شیب‌سنج در شکل ۲ نشان داده شده است. در ادامه ابتدا داده هر یک از این سه المان معرفی گردیده و سپس نحوه ترکیب آنها با یکدیگر برای تعیین موقعیت جغرافیایی شرح داده می‌شود.



شکل ۲ نمای دوبعدی قرارگیری نسبی حسگرها

Fig. 2 2D view of relative placement of sensors

۲-۱- حسگر ستاره

در دستگاه اینرسی، موقعیت (امتداد) ستارگان آسمان معلوم و تقریباً ثابت است که در پایگاه‌های داده گردآوری شده است. چنانچه تصویر یک ناحیه از آسمان مشتمل بر تعدادی از ستارگان توسط یک دوربین تصویربرداری با کیفیت مناسب ثبت شود، با تطبیق الگوی ستارگان در تصویر با پایگاه‌های داده، می‌توان جهت‌گیری سه‌بعدی حسگر ستاره را نسبت به دستگاه مختصات مرجع، یعنی همان دستگاه اینرسی استخراج کرد. اگر دستگاه اینرسی را با نماد i و دستگاه بدنی حسگر ستاره را با s نمایش دهیم، اندازه‌گیری حسگر ستاره معادل خواهد بود با ماتریس دوران از دستگاه s به دستگاه i که با C_s^i نمایش داده می‌شود.

البته اندازه‌گیری حسگر ستاره بدون خطا نبوده و به دلایل مختلف اعم از نویزهای حرارتی، رزولوشن تصویربرداری، دقت الگوریتم

$$g^n = -C_b^n A^b \quad (۳)$$

و البته ماتریس C_b^n تابعی است از زوایای تراز و زاویه سمت. اگر زوایای رول، پیچ و یاو شیب سنج را به ترتیب با ϕ_b ، θ_b و ψ_b نشان دهیم می‌توان نوشت:

$$C_b^n = R_z(\psi_b) R_y(\theta_b) R_x(\phi_b) \quad (۴)$$

که در آن $R_x(\cdot)$ ، $R_y(\cdot)$ و $R_z(\cdot)$ ماتریس‌های دوران تک محوره به ترتیب حول محورهای x ، y و z را بیان می‌کنند. بر این اساس می‌توان زوایای رول و پیچ را بر اساس داده شتاب‌سنج به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\phi_b = \tan^{-1}(A_y/A_z), \quad \theta_b = \sin^{-1}(A_x/\gamma) \quad (۵)$$

و مقدار زاویه ψ_b از معادله فوق قابل استخراج نیست.

شیب‌سنجی به روش فوق حداقل با دو منبع خطا مواجه است. اولاً خطای شتاب‌سنج موجب می‌شود بردار اندازه‌گیری شتاب‌سنج ($\hat{A}^b$) با مقدار واقعی آن به اندازه δA اختلاف داشته باشد:

$$\hat{A}^b = A^b + \delta A, \quad \delta A = (\delta A_x, \delta A_y, \delta A_z)^T \quad (۶)$$

این خطای اندازه‌گیری شتاب می‌تواند ترکیبی از خطاهای سیستماتیک و تصادفی را شامل شود که از مهمترین آنها می‌توان نویز ذاتی، دررفت حرارتی، و تکرارپذیری شتاب‌سنج‌ها و احیاناً خطاهای همراستایی، تعامد و کالیبراسیون آنها را نام برد. لازم به تاکید است که کالیبره کردن و جبران خطاهای سیستماتیک در صورت دسترسی به تجهیزات آزمایشگاهی مناسب امکان پذیر است اما خطاهای ذاتی حسگرها گریزناپذیر بوده و بزرگی آنها به تکنولوژی ساخت وابسته است. انحراف معیار خطای داده هر یک از محورهای شتاب‌سنج را با σ_a نمایش می‌دهیم. ذکر این نکته نیز حائز اهمیت است که در حالت سکون، با متوسط‌گیری از داده شتاب‌سنج در یک بازه زمانی، می‌توان تاثیر بخشی از خطای ذاتی آن را که رفتار نویز سفید دارد به مراتب کاهش داد.

شیب‌سنجی به روش فوق علاوه بر خطای شتاب‌سنج، با خطای مدل‌سازی جاذبه نیز مواجه است. در واقع پستی‌ها و بلندی‌های زمین موجب می‌شود که به خصوص در مناطق کوهستانی بردار جاذبه بر بیضی‌گون زمین عمود نباشد و نسبت به آن کمی (مثلاً چند ده ثانیه قوسی) انحراف نشان دهد. در این شرایط، مولفه‌های x و y از بردار g^n مقادیری غیر صفر خواهند داشت و صفر فرض کردن آنها می‌تواند خطای غیر قابل اغماضی ایجاد کند:

$$g^n = (\delta g_x, \delta g_y, \gamma)^T \quad (۷)$$

میزان اهمیت و تاثیرگذاری این انحراف کوچک در محورهای افقی که بزرگی هر یک از آنها را با σ_g نشان می‌دهیم، به دقت سایر المان‌های سامانه موقعیت بابتی بستگی خواهد داشت و در صورت ضرورت می‌توان از مدل‌های دقیق‌تری برای جاذبه نظیر EGM2008 بهره برد.

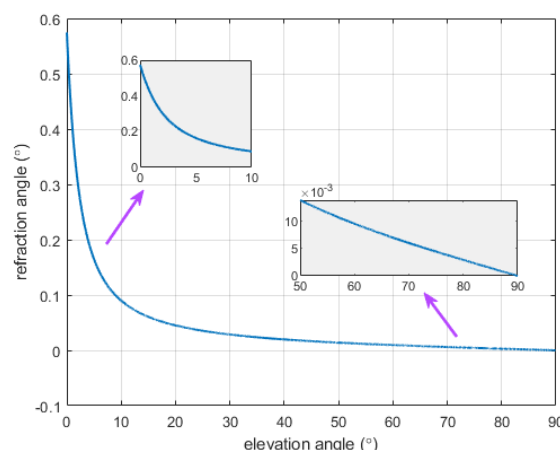
۲-۳- شیب‌سنج

برای اینکه داده حسگر ستاره بتواند برای تعیین موقعیت استفاده شود، لازم است از دستگاه اینرسی به دستگاه زمین-ثابت (ECEF)

انکسار جوی در زاویه ارتفاع ۹۰ درجه (سرسو) برابر با صفر است و با کاهش زاویه ارتفاع افزایش می‌یابد. به ویژه با نزدیک شدن به افق، انکسار جوی به حدود ۰/۵ درجه می‌رسد. روابط ریاضی مختلفی با پیچیدگی‌ها و دقت‌های متفاوت برای مدل‌سازی و تخمین میزان انکسار جوی ارائه شده است که مدل Bennett از ساده‌ترین معروفترین آنها به شمار می‌رود [15]. این مدل، در شرایط استاندارد (فشار یک اتمسفر و دمای 10°C) زاویه انکسار جوی را (بر حسب درجه) به عنوان تابعی از el' (بر حسب درجه) محاسبه می‌کند و در فشار دلخواه P (بر حسب کیلوپاسکال) و دمای T (بر حسب درجه سانتی‌گراد) ضریبی را به آن اعمال می‌نماید:

$$R = \frac{1}{60} \frac{P}{101} \frac{283}{273 + T} \cot \left(el' + \frac{7.31}{el' + 4.4} \right) \quad (۲)$$

تغییرات زاویه انکسار جوی بر حسب زاویه ارتفاع بر اساس این رابطه (در شرایط استاندارد) در شکل ۴ نمایش داده شده است. انکسار جوی اگرچه بر موقعیت ظاهری ستارگان و به تبع آن برداده خروجی حسگر ستاره تاثیر قابل ملاحظه‌ای دارد، اما بخش قابل توجهی از آن بر اساس مدل‌های موجود قابل جبران‌سازی است. البته با توجه به شرایط محیطی و محدودیت دقت مدل‌ها، خطاهایی در حد چند ثانیه قوسی ممکن است همچنان باقی بماند.



شکل ۴ تغییرات زاویه انکسار جوی بر حسب زاویه ارتفاع
Fig. 4 Atmospheric refraction angle vs. elevation angle

۲-۲- شیب‌سنج

یک شتاب‌سنج تک محوره در حالت سکون، تصویر شتاب جاذبه را در امتداد محور خود اندازه‌گیری می‌کند. بر این اساس با استفاده از دو یا سه عدد شتاب‌سنج عمود بر یکدیگر، می‌توان زوایای تراز (رول و پیچ) را استخراج کرد. اگر داده شتاب سه محوره را در دستگاه بدنی آن (با نماد b) با $A^b = (A_x, A_y, A_z)^T$ نشان دهیم و بردار جاذبه را در دستگاه NED (با نماد n) برابر $g^n = (0, 0, \gamma)^T$ در نظر بگیریم، و دوران از b به n را C_b^n بنامیم خواهیم داشت:

$$g^n = -C_b^n A^b \quad (۳)$$

و البته ماتریس C_b^n تابعی است از زوایای تراز و زاویه سمت. اگر زوایای رول، پیچ و یاو شیب‌سنج را به ترتیب با ϕ_b ، θ_b و ψ_b نشان دهیم می‌توان نوشت:

در ادامه چگونگی تاثیر عوامل مختلف خطا را بر دقت تعیین موقعیت بررسی می‌کنیم. تاثیر خطا در شتاب‌سنج بر روی محاسبه زوایای تراز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \pm \frac{1}{\gamma \cos \theta_b} (\delta A_y \cos \phi_b - \delta A_z \sin \phi_b) \\ \delta\theta &= \pm \frac{\delta A_x}{\gamma \cos \theta_b}\end{aligned}\quad (13)$$

و در نتیجه با توجه به انحراف معیار در نظر گرفته شده برای شتاب‌سنج، انحراف معیار تخمین زوایای رول و پیچ عبارتست از:

$$\sigma_{\phi,a} = \sigma_{\theta,a} = \frac{\sigma_a}{\gamma |\cos \theta_b|} \quad (14)$$

همچنین عمود نبودن بردار جاذبه بر بیضی‌گون زمین در صورت عدم جبران موجب می‌شود زوایای رول و پیچ محاسبه شده بر اساس داده شتاب‌سنج نسبت به مقدار واقعی آنها به ترتیب به اندازه $\pm \cos \theta_b g_x / \gamma$ و $\pm g_y / \gamma$ تغییر کند که انحراف معیار نظیر آنها به ترتیب برابر خواهد بود با $\sigma_{\phi,g} = |\cos \theta_b| \sigma_g / \gamma$ و $\sigma_{\theta,g} = \sigma_g / \gamma$. نهایتاً واریانس خطای تعیین رول و پیچ به علت خطای شتاب‌سنج و خطای مدل جاذبه برابر است با:

$$\sigma_{\phi}^2 = \sigma_{\phi,a}^2 + \sigma_{\phi,g}^2, \quad \sigma_{\theta}^2 = \sigma_{\theta,a}^2 + \sigma_{\theta,g}^2 \quad (15)$$

اکنون می‌توان خطای تعیین موقعیت را با جایگذاری در معادله مربوطه ارزیابی کرد:

$$\begin{aligned}\hat{C}_n^e \delta C_n^{eT} R_z(\psi_b + \delta\psi_b) &= R_z(-\omega_e \delta T) \hat{C}_e^i \hat{C}_s^i (I - \\ &\delta\theta)(I + \delta e) R_x(\phi_b - \delta\phi)^T R_y(\theta_b - \delta\theta)^T\end{aligned}\quad (16)$$

با توجه به مشخص بودن بزرگی هر یک از انحرافات و خطاهای طرف راست معادله، می‌توان بزرگی خطای تعیین موقعیت را استخراج نمود. در اینجا برای ساده شدن مسئله فرض می‌کنیم حسگر ستاره در حالت تراز قرار گرفته باشد و مستقیماً به سمت بالا (سرسو) نگاه کند. زاویه سمت آن را نیز برابر صفر فرض می‌کنیم. صفر شدن زوایای رول، پیچ و یاو نتیجه زیر را به دنبال خواهد داشت:

$$\hat{C}^* \delta C^* = (I - \omega_e \delta T \hat{k}) \hat{C}^*(I + \delta e - \delta\theta + \delta\phi \hat{i} + \delta\theta \hat{j}) \quad (17)$$

و پس از مرتب سازی و ساده سازی داریم:

$$\begin{aligned}\delta C^* &= (I + \delta e^*) \\ \delta e^* &= \delta e - \delta\theta + \delta\phi \hat{i} + \delta\theta \hat{j} - \omega_e \delta T (\cos \hat{\phi} \hat{i} \\ &\quad - \sin \hat{\phi} \hat{k})\end{aligned}\quad (18)$$

بردار δe^* دربرگیرنده خطاهای تعیین موقعیت و تعیین زاویه سمت است که در زاویه سمت صفر به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta e^* = \delta\lambda (\cos \hat{\phi} \hat{i} - \sin \hat{\phi} \hat{k}) - \delta\phi \hat{j} + \delta\psi_b \hat{k} \quad (19)$$

بنابراین بزرگی خطای تعیین عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی برابر خواهد بود با:

$$\sigma_{\phi} = \sigma_{e_{\phi}^*}, \quad \sigma_{\lambda} = \frac{\sigma_{e_{\lambda}^*}}{|\cos \hat{\phi}|} \quad (20)$$

که در نتیجه آن:

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda}^2 &= \frac{1}{(\cos \hat{\phi})^2} \left(\sigma_e^2 + \sigma_c^2 + \frac{\sigma_a^2 + \sigma_g^2}{\gamma^2} \right) + \omega_e^2 \sigma_T^2 \\ \sigma_{\phi}^2 &= \sigma_e^2 + \sigma_c^2 + \frac{\sigma_a^2 + \sigma_g^2}{\gamma^2}\end{aligned}\quad (21)$$

منتقل شود. با توجه به چرخش زمین به دور خود، لازمه این تبدیل اطلاع از زمان مطلق نسبت به یک مرجع زمانی به خصوص است. بر این اساس سامانه موقعیت یابی به یک زمان‌سنج با دقت مناسب احتیاج دارد که بتواند در شرایط عدم دسترسی به سیگنال ماهواره‌های ناوبری، زمان مطلق را به درستی گزارش نماید. با تعریف ω_e به عنوان سرعت چرخش زمین به دور خود، در صورت وجود δT ثانیه خطا در زمان‌سنجی میزان چرخش زمین به اندازه $\omega_e \delta T$ نادرست تشخیص داده می‌شود که بسته به بزرگی آن می‌تواند بر دقت تعیین موقعیت اثرگذار باشد. انحراف معیار خطای اندازه‌گیری زمان را با σ_T نشان می‌دهیم.

اگر دوران از دستگاه زمین-ثابت به دستگاه اینرسی با C_e^i و دوران تخمین زده شده بر اساس داده زمان‌سنج با $\hat{C}_e^i$ نشان داده شود می‌توان نوشت:

$$\hat{C}_e^i = C_e^i R_z(\omega_e \delta T) \quad (8)$$

۴-۲- همراستایی حسگرها

یکی از چالش‌های مهم در تعیین موقعیت با استفاده از حسگرهای سماوی، همراستا سازی آن حسگرها با شتاب‌سنج یا شیب‌سنج است. در واقع شیب‌سنج زاویه بدنه خود را با دستگاه NED محاسبه می‌کند و حسگر ستاره نیز به تعیین جهت‌گیری سه‌بعدی بدنه خود نسبت به دستگاه اینرسی می‌پردازد. عدم انطباق این دو دستگاه بدنی در صورت عدم جبران، می‌تواند خطاهای بزرگی را به سامانه تعیین موقعیت تحمیل کند.

دوران از دستگاه بدنی شیب‌سنج (b) به دستگاه بدنی حسگر ستاره (s) را با C_b^s نمایش می‌دهیم و با فرض کوچک بودن انحراف آنها نسبت به یکدیگر می‌توان نوشت:

$$C_b^s \approx I + \delta e, \quad \delta e = (\delta e_x, \delta e_y, \delta e_z)^T \quad (9)$$

انحراف معیار نظیر هر سه مولفه را برابر σ_e در نظر می‌گیریم.

۳- تعیین موقعیت و تحلیل خطا

دوران از دستگاه مختصات NED به دستگاه مختصات ECEF که آن را با C_n^e نمایش می‌دهیم، تابعی از طول و عرض جغرافیایی (λ و φ) است:

$$C_n^e = R_z(\lambda) R_y \left(-\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (10)$$

با کنار هم قرار دادن ماتریس‌های دوران معرفی شده، می‌توان تساوی زیر را میان آنها برقرار کرد:

$$C_e^i C_n^e C_b^n = C_s^i C_b^s \quad (11)$$

با جایگذاری از روابط ذکر شده در بخش‌های قبل، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$C_n^e R_z(\psi_b) = C_e^i C_s^i C_b^s R_x(\phi_b)^T R_y(\theta_b)^T \quad (12)$$

دوران‌های طرف راست تساوی فوق را ماتریس‌های معلوم (و البته دارای خطا) تشکیل می‌دهند و سمت چپ تساوی که آن را با C^* نمایش می‌دهیم، در بر گیرنده سه مجهول λ ، φ و ψ_b است. با معلوم بودن C^* می‌توان این سه پارامتر را استخراج کرد.

ستاره در دستگاه زمین، نوعی میانگین‌گیری از C_s^e مطلوب خواهد بود. پس از ایجاد یک حدس اولیه مانند ماتریس دوران $\bar{C}_0$ به عنوان دوران میانگین، تخمین بعدی از آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C_s^e = \bar{C}_0(I + \Delta\bar{e}) \quad (24)$$

همچنین بردارهای Δe_k اختلاف دوران میانگین $\bar{C}_0$ را با اندازه‌گیری k ام از C_s^e بیان و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{C}_0^T(C_s^e)_k \approx I + \Delta\bar{e}_k \quad (25)$$

از سوی دیگر با توجه به رابطه (۱) می‌توان نوشت:

$$\bar{C}_0^T(C_s^e)_k = \bar{C}_0^T C_s^e (I + \delta\bar{\theta}_k) \quad (26)$$

آنگاه بهترین تخمین از C_s^e به گونه‌ای تعیین می‌شود که تابع هزینه زیر کمینه گردد:

$$J = \sum_{k=1}^N (\delta\theta_k)^T W^{-1} (\delta\theta_k) \rightarrow \min \quad (27)$$

ماتریس W همان ماتریس کوواریانس نظیر دقت داده حسگر ستاره است که با توجه به تعریف دو پارامتر σ_b و σ_c به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$W = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

با جایگذاری (۲۴) و (۲۵) در رابطه (۲۶) و با تقریب خطی خواهیم داشت:

$$\delta\theta_k = \Delta e_k - \Delta\bar{e} \quad (29)$$

و می‌توان دریافت که پاسخ بهینه $\Delta\bar{e}$ برای کمینه شدن تابع هزینه (۲۷) عبارت است از حاصل میانگین بردارهای Δe_k :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta\bar{e}} = 0 \Rightarrow \Delta\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta e_k \quad (30)$$

تخمین‌های دقیق‌تر از دوران میانگین، با تکرار محاسبات فوق تا رسیدن به همگرایی لازم حاصل می‌شود.

این روش برای محاسبه میانگین دورانها که بر روش حداقل مربعات غیرخطی بنا شده است، در حقیقت رویکردی برای محاسبه میانگین هندسی دورانها است که آن را میانگین کارچر (Karcher) نیز می‌نامند. میانگین هندسی $\bar{C}_s^e$ برای مجموعه‌ای از N ماتریس دوران $(C_s^e)_k$ یک ماتریس دوران است که تابع هزینه زیر را کمینه می‌کند [16]:

$$J = \sum_{i=1}^N \left\| \log \left(\bar{C}_s^{eT} (C_s^e)_k \right) \right\|_2^2 \quad (31)$$

و حاصل این بهینه سازی از حل معادله جبری زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^N \log \left(\bar{C}_s^{eT} (C_s^e)_k \right) = 0 \quad (32)$$

حل این معادله جبری از طریق روش‌های بازگشتی امکان‌پذیر است که یک نحوه پیاده سازی آن بر اساس روابط (۲۴)، (۲۵) و (۳۰) خواهد بود.

نکته حائز اهمیت آن است که اگرچه میانگین کارچر برای ماتریس‌های دوران، واریانس خطای اندازه‌گیری را در محورهای

و البته انحراف معیار خطای تعیین موقعیت (بر حسب متر) در امتداد شمال $(\sigma_{p,N})$ و شرق $(\sigma_{p,E})$ به ترتیب با σ_ϕ و σ_λ به صورت زیر متناسب است که در آن R_E معرف شعاع زمین است:

$$\sigma_{p,N}^2 = R_E^2 \sigma_\phi^2, \quad \sigma_{p,E}^2 = R_E^2 (\cos \phi)^2 \sigma_\lambda^2 = \sigma_{p,N}^2 + R_E^2 (\cos \phi)^2 \omega_e^2 \sigma_T^2 \quad (22)$$

به این ترتیب، بزرگی خطای تعیین موقعیت به عنوان تابعی از بزرگی خطای همراستاسازی، خطای نشان‌دهنده روی حسگر ستاره، خطای شتاب‌سنج، انحراف شتاب جاذبه از مدل بیضی‌گون زمین و نیز خطای اندازه‌گیری زمان به دست می‌آید.

۴- بهبود دقت با داده برداری متوالی

در بخش قبل ریاضیات حاکم بر تعیین موقعیت با بهره‌گیری از داده حسگر ستاره در یک لحظه زمانی مشخص و نیز منابع مختلف خطا و تاثیر آنها بر دقت تعیین موقعیت مورد بحث قرار گرفت. اکنون به بررسی این مسئله می‌پردازیم که تکرار داده برداری از حسگرها به صورت متوالی در یک بازه زمانی، چگونه و تا چه اندازه می‌تواند به بهبود کیفیت تعیین موقعیت کمک نماید.

به عنوان یک قاعده عمومی، داده برداری مکرر از یک حسگر همواره می‌تواند به کاهش یا حذف اثر نویزهای تصادفی کمک کند. اگر داده یک حسگر آغشته به نویز سفید باشد، N مرتبه داده برداری متوالی و میانگین‌گیری از آنها، واریانس نویز سفید را N برابر کاهش خواهد داد. این میانگین‌گیری البته در شرایطی است که داده برداری‌های متوالی ناظر به یک کمیت یکسان و ثابت باشد. چنانچه کمیت مورد نظر متغیر با زمان باشد، لازم است ملاحظات لازم در نظر گرفته شود. به طور مشخص در مورد حسگر ستاره، با توجه به چرخش زمین به دور خود، آنچه حسگر وظیفه اندازه‌گیری آن را بر عهده دارد با زمان تغییر می‌کند؛ بنابراین میانگین‌گیری از داده خام حسگر رویکرد مناسبی نخواهد بود. در این بخش، الگوریتم پیشنهادی مبتنی بر روش حداقل مربعات غیرخطی به منظور تعیین موقعیت با بهره‌گیری از داده‌های متعدد از حسگر ستاره ارائه می‌گردد.

تابعیت از زمان در معادله (۱۲) مشخصاً در ماتریس C_e^i ظاهر می‌شود که می‌توان آن را به صورت $C_e^i(t)$ نوشت. بنابراین با توجه به تعریف ماتریس ثابت و مجهول C^* ، تساوی (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$C^* = C_e^i(t)^T C_s^i R_x(\phi_b)^T R_y(\theta_b)^T \quad (23)$$

با توجه به ساکن بودن سامانه بر روی زمین، زوایای رول و پیچ با زمان تغییر نمی‌کنند و به سادگی می‌توان میانگین زمانی آنها را مورد استفاده قرار داد. از طرف دیگر اگرچه ماتریس C_s^i به عنوان جهتگیری حسگر ستاره در دستگاه اینرسی، با زمان تغییر می‌کند، اما پس از جبران دوران زمین و محاسبه $C_s^i = C_e^i(t)^T C_s^i$ به عنوان جهتگیری حسگر ستاره در دستگاه زمین، این تغییرات زمانی از بین می‌رود. به این ترتیب با تضمین ثابت بودن جهتگیری حسگر

صفر، افزایش زاویه رول عمدتاً بر دقت تخمین طول جغرافیایی (و به تبع آن موقعیت در امتداد شرقی-غربی) اثر می‌گذارد و تاثیر زاویه پیچ عمدتاً بر دقت تخمین عرض جغرافیایی (و به تبع آن موقعیت در امتداد شمالی-جنوبی) خواهد بود. همچنین تغییر زاویه سمت از 180° تا 180° درجه، موجب تغییرات نوسانی در $\sigma_{p,N}$ و $\sigma_{p,E}$ می‌شود. و مثلاً در زاویه سمت 90° درجه در مقایسه با زاویه سمت صفر درجه، مقادیر $\sigma_{p,N}$ و $\sigma_{p,E}$ تقریباً با یکدیگر جابجا می‌گردند.

جدول ۱ مقادیر کمیت‌ها در شبیه‌سازی

Table 1 Parameter values in simulation

parameter	symbol	value	unit
accelerometer accuracy	σ_a	100	μg
sensor alignment accuracy	σ_e	0.01	degree
pointing accuracy of star sensor	σ_c	15	arcsecond
roll accuracy of star sensor	σ_b	100	arcsecond
gravity deviation from vertical direction	σ_g	50	μg
timekeeping accuracy	σ_t	0.5	second
latitude	φ	35	degree
longitude	λ	50	degree

جدول ۲ مقادیر کمیت‌ها در شبیه‌سازی

Table 2 Comparison of analytical and statistical simulation results

error source	analytical	statistical	analytical	statistical
	value of $\sigma_{p,N}$ (m)	value of $\sigma_{p,N}$ (m)	value of $\sigma_{p,E}$ (m)	value of $\sigma_{p,E}$ (m)
σ_a	637	640	637	636
σ_e	1112	1110	1112	1123
σ_c	463	461	463	466
σ_b	0	0	0	0
σ_g	319	318	319	319
σ_t	0	0	190	192
all items	1399	1402	1412	1416

در شکل ۵ مشاهده می‌شود که با فاصله گرفتن زوایای رول و پیچ از مقدار صفر، خطای موقعیت‌یابی افزایش می‌یابد. در حقیقت اگرچه در زوایای رول و پیچ صفر درجه که به معنای نشانه‌روی حسگر ستاره به سمت سراسو است، دقت رول حسگر ستاره (σ_b) بر دقت تعیین موقعیت اثری ندارد (جدول ۱)، اما با فاصله گرفتن از امتداد سراسو، کوپلینگ میان محورها منجر به تاثیر σ_b بر دقت تعیین موقعیت می‌گردد؛ و از آنجا که خطای رول حسگر ستاره نوعاً از خطای نشانه‌روی آن بزرگتر است ($\sigma_b > \sigma_c$)، این موضوع به افزایش خطای موقعیت‌یابی منتهی می‌گردد.

مختلف یکسان فرض کرده و رویکرد حداقل مربعات بدون وزن را دنبال می‌کند، با این وجود بر اساس روابط فوق، برای میانگین‌گیری از داده‌های حسگر ستاره که واریانس اندازه‌گیری‌ها در محورهای نوری (رول) و جانبی (نشانه‌روی) تفاوت زیادی با یکدیگر دارد، نتیجه آن همچنان معتبر بوده و بر نتیجه روش حداقل مربعات وزن‌دار منطبق می‌گردد.

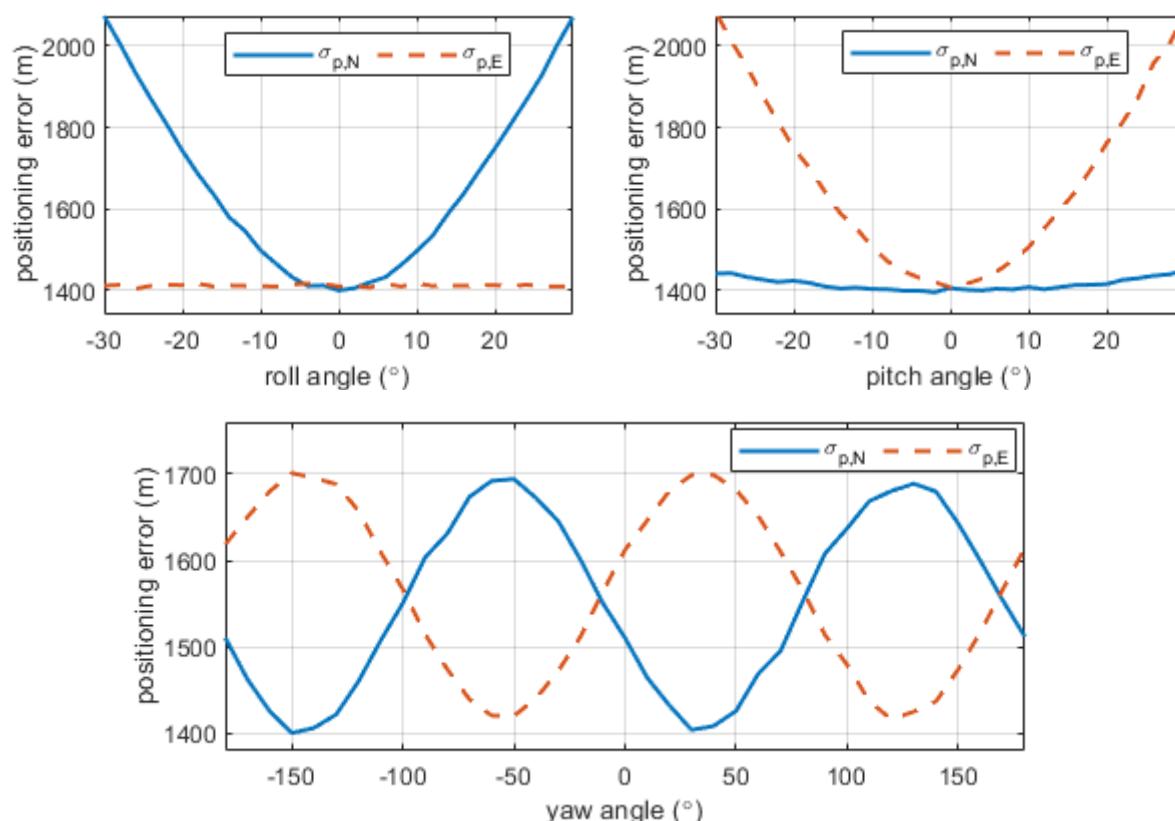
بر اساس قانون حداقل مربعات، واریانس نویز سفید حسگر ستاره با این روش، N برابر کاهش خواهد یافت و واریانس خطای اندازه‌گیری زوایای نشانه‌روی و رول حسگر در نتیجه آن، به ترتیب برابر با σ_b^2/N و σ_c^2/N خواهد بود. به عنوان مثال برای حسگری با نرخ به‌روز رسانی ۵ هرتز، در یک دقیقه نمونه برداری ۳۰۰ مرتبه داده‌برداری انجام می‌شود که میانگین‌گیری از آنها بر اساس روابط (۲۵) و (۳۰) می‌تواند واریانس نویز سفید را ۳۰۰ برابر کاهش دهد. به این ترتیب با داده‌برداری مکرر از حسگر ستاره و میانگین‌گیری از آنها به روش مناسب در کنار میانگین‌گیری از داده‌های شیب‌سنج در طول زمان، می‌توان دامنه نویز تصادفی داده‌ها را کاهش داده و دقت تعیین موقعیت را بهبود بخشید. البته خطاهای غیرتصادفی نظیر خطاهای نصب و ناهمراستایی و یا انحراف بردار شتاب جاذبه از مدل بیضی‌گون، از این طریق جبران‌پذیر نبوده بلکه جبران آنها با مدلسازی دقیق‌تر و کالیبراسیون میسر خواهد بود. همچنین لازم به تاکید است که رفتار خطای ذاتی حسگر ستاره تماماً به صورت نویز سفید نبوده و میانگین‌گیری از داده‌های متوالی، صرفاً در کاهش و یا حذف اثر نویزهای سفید موثر خواهد بود.

۵- شبیه‌سازی

به منظور صحت‌سنجی نتایج این پژوهش و به ویژه روابط (۲۱) و (۲۲)، مجموعه‌ای از شبیه‌سازی‌ها طراحی و اجرا شده است. با توجه به رفتار تصادفی فرض شده برای منابع مختلف خطا، لازم است در شبیه‌سازی نیز انواع خطا به شکل تصادفی تولید شود و خطای تعیین موقعیت حاصل از آن به صورت آماری مورد ارزیابی قرار گیرد.

پارامترهای در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی در جدول ۱ خلاصه شده است. به منظور صحت‌سنجی، ابتدا اثر هر یک از عوامل خطا به صورت جداگانه و در غیاب سایر عوامل بررسی گردیده و سپس ترکیب آنها با یکدیگر مورد مطالعه قرار گرفته است (جدول ۲). با هدف معتبر بودن تحلیل آماری داده‌ها، هر شبیه‌سازی ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار گردیده و انحراف معیار نتایج آنها گزارش شده است.

همچنین تاثیر مقادیر غیر صفر برای زوایای رول، پیچ و یاو در شکل ۵ نمایش داده شده است. این نتایج حاصل شبیه‌سازی به ازای پارامترهای جدول ۱ می‌باشد. مشاهده می‌شود که در زاویه سمت



شکل ۵ خطای تخمین موقعیت در زوایای رول، پیچ و یاء غیرصفر. بالا سمت چپ: خطای موقعیتیابی بر حسب زاویه رول در پیچ و سمت برابر صفر؛ بالا سمت راست: خطای موقعیتیابی بر حسب زاویه پیچ در رول و یاء برابر صفر؛ پایین: خطای موقعیتیابی بر حسب زاویه سمت در رول و پیچ به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۵ درجه

Fig.5 Position estimation error at non-zero roll, pitch and yaw angles. Upper-left: positioning error vs. roll angle at zero pitch and yaw. Upper-right: positioning error vs. pitch angle at zero roll and yaw. Lower: positioning error vs. yaw angle at roll and pitch equal to 10 and 15 degrees respectively

۳- در صورت بهره‌گیری از حسگرهای دقیق و با کیفیت،

انحراف بردار جاذبه از مدل WGS84 می‌تواند تاثیر مخرب بر دقت تعیین موقعیت داشته باشد. به خصوص در مناطق کوهستانی که این انحراف جاذبه به چند ده ثانیه قوسی می‌رسد، اهمیت آن در حضور حسگرهای دقیق قابل چشم‌پوشی نخواهد بود.

۴- خطای اندازه‌گیری زمان می‌تواند منجر به افت دقت تعیین طول جغرافیایی شود. با توجه به سرعت دورانی زمین، یک ثانیه خطا در اندازه‌گیری زمان، معادل ۱۵ ثانیه قوسی خطا در تعیین طول جغرافیایی ایجاد خواهد کرد.

به عنوان مثال، چنانچه دستیابی به یک سامانه تعیین موقعیت با دقتی در حد ۱ کیلومتر (1σ) در طول و عرض جغرافیایی مد نظر باشد، آنگاه مقدار σ_ϕ مطلوب حدود ۰/۰۱ درجه خواهد بود که لازمه دستیابی به آن، اولاً استفاده از یک حسگر ستاره با دقت نشانه روی در حد یک تا چند هزارم درجه و ثانیاً بهره‌گیری از شتابسنج‌هایی با دقت بهتر از یک هزارم متر بر مجذور ثانیه خواهد بود. به علاوه، همراستاسازی حسگرها از مرتبه هزارم درجه اهمیت داشته و لحاظ انحراف بردار جاذبه از امتداد قائم، حداقل در مناطق کوهستانی حائز

۶- شبیه‌سازی

از روابط به دست آمده برای تحلیل خطای تعیین موقعیت می‌توان نتایج زیر را استنباط کرد که لازم است در پیکره‌بندی سامانه‌های تعیین موقعیت مبتنی بر حسگر ستاره مورد توجه قرار گیرد:

۱- دقت همراستاسازی حسگر ستاره و شتاب‌سنج، همانند دقت نشانه‌روی حسگر ستاره حائز اهمیت است. بنابراین در صورت استفاده از حسگر ستاره با دقت نشانه‌روی بالا، لازم است همراستاسازی آن با شتاب‌سنج‌ها نیز با دقتی در همان مرتبه انجام شود. چنانچه همراستاسازی با چنین دقتی از لحاظ ملاحظات ساخت میسر نباشد، کالیبره کردن میزان عدم همراستایی می‌تواند تاثیر مخرب آن را جبران نماید.

۲- دقت شیب‌سنجی نیز همانند دقت همراستایی حسگرها و دقت نشانه‌روی حسگر ستاره حائز اهمیت است. استفاده از شتاب‌سنج‌های با کیفیت پایین، کارایی سامانه تعیین موقعیت را تحت الشعاع قرار می‌دهد هرچند از حسگر ستاره‌ای با دقت بالا استفاده شود.

- [4] I. Jovanovic and J. Enright, "Towards star tracker geolocation for planetary navigation," in 2017 IEEE Aerospace Conference, MT, USA, 2017, pp. 1-6, doi: [10.1109/AERO.2017.7943972](https://doi.org/10.1109/AERO.2017.7943972).
- [5] D. A. Sigel and D. Wettergreen, "Star Tracker Celestial Localization System for a Lunar Rover," in 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Diego, CA, USA, 2007, pp. 2851-2856, doi: [10.1109/IROS.2007.4399510](https://doi.org/10.1109/IROS.2007.4399510).
- [6] A. C. Gardner, "Position estimation using gravity, sun, planets and stars," Master Thesis, Aerospace Engineering, Texas A&M University, 2021.
- [7] J. Enright and T. Barfoot, "Star tracking for planetary rovers," in 2012 IEEE Aerospace Conference, MT, USA, 2012, pp. 1-13, doi: [10.1109/AERO.2012.6187042](https://doi.org/10.1109/AERO.2012.6187042).
- [8] Y. Zhan, Y. Zheng, C. Li, R. Wang, Y. Zhu, and Z. Chen, "High-accuracy absolute positioning for the stationary planetary rover by integrating the star sensor and inclinometer," Journal of Field Robotics, vol. 37, no. 6, pp. 1063-1076, 2020, doi: [10.1002/rob.21944](https://doi.org/10.1002/rob.21944).
- [9] X. Wei, C. Cui, G. Wang, and X. Wan, "Autonomous positioning utilizing star sensor and inclinometer," Measurement, vol. 131, pp. 132-142, 2019, doi: [10.1016/j.measurement.2018.08.061](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.08.061).
- [10] M. Soto, "Geolocation using celestial measurements," Master Thesis, Aerospace Engineering, Ryerson University, 2008.
- [11] J. A. Jevnikar, "Sun sensor geolocalization system: field testing and navigational application," Master Thesis, Aerospace Engineering, Ryerson University, 2018.
- [12] Y. Zhan, S. Chen, and X. Zhang, "Adaptive celestial positioning for the stationary Mars rover based on a self-calibration model for the star sensor," Journal of Navigation, vol. 75, no. 1, pp. 160 - 175, 2022, doi: [10.1017/S0373463321000680](https://doi.org/10.1017/S0373463321000680).
- [13] N. Bessaad, Q. Bao, Z. Jiangkang, and K. Elikier, "On SINS\star tracker geo-localization," Engineering Research Express, vol. 3, no. 4, 2021, doi: [10.1088/2631-8695/ac3e12](https://doi.org/10.1088/2631-8695/ac3e12).
- [14] I. Jovanovic, "Star tracker and LIDAR based nighttime planetary navigation," Master Thesis, Aerospace Engineering, Ryerson University, 2013.
- [15] G. G. Bennett, "The Calculation of Astronomical Refraction in Marine Navigation," Journal of Navigation, vol. 35, no. 2, pp. 255-259, 1982, doi: [10.1017/S0373463300022037](https://doi.org/10.1017/S0373463300022037).
- [16] J. H. Manton, "A globally convergent numerical algorithm for computing the centre of mass on compact Lie groups," in ICARCV 2004 8th Control, Automation, Robotics and Vision Conference, 2004, vol. 3, pp. 2211-2216, doi: [10.1109/ICARCV.2004.1469774](https://doi.org/10.1109/ICARCV.2004.1469774).
- [17] M. Moakher, "Means and averaging in the group of rotations," SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 24, no. 1, pp. 1-16, 2002, doi: [10.1137/S0895479801383877](https://doi.org/10.1137/S0895479801383877).

اهمیت است. همچنین زمانسنجی با دقت دهم ثانیه در این سناریو کفایت می‌کند. مشخصات فنی ذکر شده برای حسگر ستاره و حسگر شتاب‌سنج و همچنین میزان همراهی مورد نیاز میان آنها، چالش‌های مهمی در راستای توسعه یک سامانه تعیین موقعیت مبتنی بر حسگر ستاره محسوب می‌شود. طبیعتاً دستیابی به دقت‌های تعیین موقعیت بهتر، با چالش‌های دشوارتری در تکنولوژی مواجه خواهد شد.

۷- جمع بندی

پژوهش حاضر به بررسی تحلیلی موقعیت یابی به کمک حسگر ستاره و الزامات و ملاحظات دقت آن پرداخته است. عوامل موثر در دقت تعیین موقعیت اعم از خطاهای ذاتی حسگرها و خطاهای همراهی‌سازی و زمان‌سنجی در این پژوهش مورد مطالعه قرار گرفته و تاثیر هر یک از آنها به محاسبه شده است. آنگاه با نگاه احتمالاتی به منابع مختلف خطا، دقت مورد انتظار از سامانه تعیین موقعیت به عنوان تابعی از دامنه نویزها و خطاهای مختلف استخراج شده است. همچنین پدیده انکسار جوی و ضرورت و چگونگی جبران اثر آن مورد بحث قرار گرفته است.

به این ترتیب و با بهره‌گیری از نتایج این پژوهش، بودجه بندی خطا و لحاظ اثرات مختلف در تعادل با یکدیگر، می‌تواند به یک طراحی بهینه از منظر پیچیدگی تکنولوژی و هزینه ساخت منتهی شود.

تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: نویسنده اعلام می‌دارد که هیچ‌گونه تضاد منافی مرتبط با تحقیق حاضر ندارد.

منابع مالی: این مقاله حاصل پژوهش‌های علمی نویسنده بوده و از حمایت مالی برخوردار نبوده است.

منابع

- [1] M. Hashemi, A. Karmozdi, A. Naderi, and H. Salarieh, "Development of an integrated navigation algorithm based on IMU, depth, DVL sensors and earth magnetic field map," Modares Mechanical Engineering, vol. 16, no. 11, 2017.
- [2] K. Kianfar, A. Ranjbar Noiey, and B. Rezaie, "Accessibility to the Geographic Location of Earth's Magnetic Field with Simulation and Data Collection," Modares Mechanical Engineering, vol. 19, no. 8, 2019.
- [3] F. Somayeh, A. A. Nikkhah, and J. Roshanina, "Uniform star catalog using triangulation for application in star sensor," Modares Mechanical Engineering, vol. 18, no. 6, 2018.