

Stability of Rotating Beam Made of Ultra-light Metamaterials Subjected to Distributed Follower Force

Mohammad Tashakorian, Seyyed Ahmad Fazelzadeh*, Esmael Ghavanloo

School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Article History

Received: June 07, 2025

Revised: November 11, 2025

Accepted: November 24, 2025

ePublished: December 09, 2025

ABSTRACT

Today, the implementation of new materials in aero-structures such as propellers is crucial in the aeronautical industry. Also, ultralight metamaterials with capabilities to reduce the weight of the structure have received much interest. Therefore, it is essential to investigate the stability of aero-structures under non-conservative forces such as the follower force, which is generally considered as the fluid-structure interaction effect. In this paper, the stability of the rotating Timoshenko beam subjected to distributed follower force with clamped-free boundary condition is investigated. The beam consists of a sandwich structure and the core is made of ultralight metamaterials. The governing equations of the beam are derived using Hamilton's principle. For numerical analysis, the differential quadrature method (DQM) is used and the results are compared with those obtained from previous studies. Four core structures including square, hexagonal, triangular, and mixed are studied and their effects on the critical force of the beam are studied. The results showed that among the studied metamaterial structures, hexagonal structure has a better performance than other structures. Also, based on the numerical results, the use of metamaterials as the core of the sandwich beam increases the critical force per unit weight. In addition, the increase in shear effects in short beams and the effect of beam rotation reduces the effects of the core structure in increasing the critical force compared to the non-rotating beam; therefore, at high rotational speeds and long beams, the critical force of the sandwich beam and the uniform beam are quite the same.

Keywords: Rotating Timoshenko Beam, Distributed Follower Force, Ultra-Light Metamaterials, Stability, DQM.

How to cite this article

Tashakorian, M., Fazelzadeh, S.A., Ghavanloo, E., Stability of Rotating Beam Made of Ultra-light Metamaterials Subjected to Distributed Follower Force. Modares Mechanical Engineering; 2025;25(12):819-828.

*Corresponding author's email: fazelzad@shirazu.ac.ir

*Corresponding ORCID ID: 0000-0003-3079-8271



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.



پایداری تیر دوار ساخته شده از فرامواد فوق سبک تحت نیروی پیرو گسترده

محمد تشکریان ، سیداحمد فاضل زاده حقیقی*^{ID}، اسمعیل قوانلو

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

امروزه به کارگیری مواد نوین در سازه‌های هوایی مانند ملخ‌ها، امری حیاتی در صنعت هوافضا به شمار می‌رود. از سوی دیگر، فرامواد فوق سبک با قابلیت کاهش وزن سازه، توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. بنابراین، بررسی پایداری سازه‌های هوایی تحت نیروهای ناپایستار مانند نیروی پیرو که معمولاً به عنوان مدل ساده سازی شده اثر اندرکنش سیال و سازه شناخته می‌شود ضروری است. در این مقاله، پایداری تیر دوار تیموشنکو تحت نیروی پیرو گسترده یکنواخت و شرط مرزی یکسرگیردار مورد بررسی قرار گرفته است. تیر دارای ساختار ساندویچی با هسته‌ای از فرامواد فوق سبک است و معادلات حاکم بر تیر با استفاده از اصل همبستگی استخراج شده‌اند. برای تحلیل عددی از روش تربیع دیفرانسیل (DQM) استفاده شده و نتایج با مطالعات پیشین مقایسه شده‌اند. چهار نوع ساختار هسته شامل مربعی، شش ضلعی، مثلثی و ترکیبی مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر آن‌ها بر نیروی بحرانی تیر تحلیل شده است. نتایج نشان داد که در میان ساختارهای فرامواد بررسی شده، ساختار شش ضلعی عملکرد بهتری نسبت به سایر ساختارها دارد. همچنین، بر اساس نتایج بدست آمده، کاربرد فرامواد در هسته تیر ساندویچی باعث افزایش نیروی بحرانی به ازای وزن واحد می‌شود. علاوه بر آن، افزایش اثرات برشی در تیرهای کوتاه و نیز اثر دوران تیر، تأثیر ساختار هسته را در افزایش نیروی بحرانی نسبت به تیر غیر دوار کاهش می‌دهد؛ در نتیجه، در هر دو حالت سرعت‌های دورانی بالا و طول تیر زیاد، نیروی بحرانی تیر ساندویچی و تیر یکنواخت تقریباً یکسان می‌شود.

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۱۷

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۸/۲۰

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۹/۱۸

کلیدواژه‌ها: تیر دوار تیموشنکو، نیروی پیرو گسترده، فرامواد فوق سبک، پایداری، روش تربیع دیفرانسیل

نحوه ارجاع به این مقاله

تشکریان محمد، فاضل زاده حقیقی سیداحمد، قوانلو اسمعیل، پایداری تیر دوار ساخته شده از فرامواد فوق سبک تحت نیروی پیرو گسترده، مهندسی مکانیک مدرس. ۸۱۹-۸۲۸: ۱۴۰۴؛ ۲۵(۱۲)

*پست الکترونیکی نویسنده عهده دار مکاتبات: fazelzad@shirazu.ac.ir

*شناسه ارکید نویسنده عهده دار مکاتبات: 0000-0003-3079-8271



از ساختار لانه زنبوری با استفاده از روش المان محدود پرداختند و با استفاده از نتایج تجربی به اعتبارسنجی آن پرداختند.

با توجه به کاربرد وسیع نیروی پیرو در سازه‌های مرتبط با هواضا، مطالعه پایداری تیر تحت نیروی پیرو از گذشته مورد توجه محققان بوده و هست. هرچند، بیشتر مطالعات انجام شده با در نظر گرفتن نیروی پیرو متمرکز انجام شده است. اولین، مطالعه‌ای که اثرات برشی در پایداری تیر تحت نیروی پیرو متمرکز را در نظر گرفت توسط نعمت‌ناصر [10] در ۱۹۶۷ ارائه شد که در آن با استفاده از روش انرژی به محاسبه نیروی بحرانی پرداخت و مقایسه‌ای با نتایج تئوری اوپلر-برنولی ارائه کرد. در زمینه نیروی پیرو گسترده، اولین مطالعه مربوط به آیری و همکاران [11] و سوندراامایا و راثو [12] در ۱۹۸۰ است که در آن پایداری تیر با هندسه غیر یکنواخت را با در نظر گرفتن اثرات برشی و اینرسی دورانی مورد مطالعه قرار دادند. در تحقیقی دیگر، چن و کو [13] پایداری تیر تحت نیروی پیرو گسترده و بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. همچنین، راجو و راثو [14] با استفاده از روش گالریکن به بررسی پایداری تیر تحت نیروهای مختلف پیرو پرداختند. علی‌دوست و رضایی‌پژند [15] نیز به تحلیل پایداری دینامیکی تیر کامپوزیتی چندلایه تحت نیروی پیرو به روش تحلیلی پرداختند و نتایج حاصل را با نتایج روش اجزاء محدود مقایسه کردند. به منظور بررسی اثرات شرایط مرزی، فاضل‌زاده و همکاران [16] مساله ناپایداری تیر تحت هفت بارگذاری مختلف نیروی پیرو شامل توزیع گسترده را با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل مطالعه کردند. علاوه بر این، کیم و لی [17] مساله پایداری تیر کامپوزیتی با چیدمان نامتقارن تحت نیروی پیرو گسترده بر بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. اخیراً، مسجدی و همکاران [18] با بهره‌گیری از معادلات کاملاً ذاتی، یک روش دقیق و کارآمد برای تحلیل تیرهای سه‌بعدی تحت نیروهای پایستار و پیرو با روش ایزوژئومتریکی ارائه کردند.

فرامواد به گروهی از مواد مصنوعی اطلاق می‌شود که دارای خواصی بوده که در مواد طبیعی یافت نمی‌شود. خواص این مواد بیشتر از آنکه تابع خواص ماده پایه سازنده باشد، تابع هندسه ریزساختارهای آن است. بسیاری از محققین طی یک دهه گذشته از فرامواد در المان‌های مکانیکی بهره برده‌اند. به عنوان نمونه، لی و وانگ [19] یک کامپوزیت ساندویچی با هسته فراماده پرینت سه‌بعدی طراحی کردند که رفتارهای خمشی مختلفی از خود نشان می‌دهد. آن‌ها همچنین تحلیل عددی و تجربی را برای ساختار پیشنهاد شده خود انجام دادند. همچنین، ژانگ و همکاران [20]، ارتعاشات آزاد یک تیر ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری را مورد بررسی قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که فرکانس ارتعاشات تیر به طور قابل ملاحظه‌ای به هندسه هسته وابسته است. در تحقیقی دیگر، لُو و همکاران [21]، ارتعاشات تیر ساندویچی تحت شرایط مرزی مختلف را بررسی کرده و نتیجه گرفتند که افزایش ضخامت هسته با ساختار شبکه‌ای بهترین راه برای افزایش فرکانس طبیعی تیر است.

با توجه به کاربرد بالقوه این مواد در ساختارهای مکانیکی، بسیاری از محققین در سال‌های اخیر از فرامواد در المان‌های مرتبط با سازه‌های دوار استفاده کرده‌اند. بستا و همکاران [22]، به مدل‌سازی یک تیر دوار یکسر گیردار متشکل از فرامواد در قالب مجموعه تکرارشونده‌ای از فنر

۱- مقدمه

ملخ‌ها شامل دو یا چند پره بوده که به عنوان المان مکانیکی تیر مدل‌سازی می‌شوند. دو تئوری تیر پر کاربرد شامل تئوری تیر اوپلر-برنولی و تئوری تیر تیموشنکو هستند. کاربرد این دو تئوری در بررسی رفتار تیرهای بلند نظیر پره بالگرد منجر به نتایج مشابهی خواهد بود؛ زیرا اثرات تغییر شکل برشی ناچیز است. در مورد تیرهای کوتاه، نظیر پره ملخ، این اثرات قابل نظر نبوده و تئوری تیر اوپلر-برنولی نتایج دقیقی بدست نمی‌دهد. در نتیجه، استفاده از تئوری تیر تیموشنکو در تحلیل پره ملخ مناسب‌تر است.

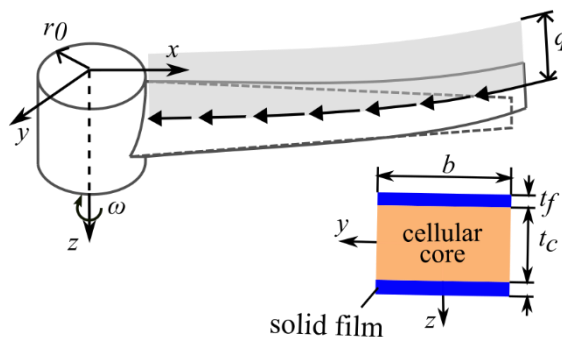
استفاده از مواد نوین و هوشمند در سازه‌های هوایی به عنوان یک ضرورت در نظر گرفته می‌شود. فرامواد مکانیکی به طور بالقوه قابلیت‌های زیادی را در هوانوردی ایجاد می‌کنند که در این میان، کاربرد فرامواد فوق سبک در سازه‌های هوانوردی امیدوار کننده است. از طرفی، توسعه فناوری‌های ساخت دقیق در سالهای اخیر نظیر پرینترهای سه‌بعدی، امکان ساخت این فرامواد را فراهم کرده است.

تیرهای دوار که در بسیاری از کاربردهای عملی مانند پره توربین، ملخ هواپیما و روتور بالگرد مورد استفاده هستند، توسط محققین متعدد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در اینجا به برخی از مهمترین این تحقیقات مرتبط با تئوری تیر تیموشنکو اشاره شده است. اولین مدل‌سازی تیر دوار تیموشنکو مطالعه استفانورد و جورجیوتیو [1] در اواسط دهه ۱۹۷۰ است. آنها فرکانس طبیعی پره روتور بالگرد را با استفاده از روش حل سری توانی تخمین زدند. یکی دیگر از اولین مطالعات توسط هاجز و داول [2] به عنوان بخشی از یک برنامه تحقیقاتی ناسا ارائه شده است. آنها معادلات حاکم بر تیر دوار شامل عبارتهای غیر خطی با مقطع دارای تابخوردگی غیر یکنواخت را ارائه کردند. استخراج معادلات حاکم در این تحقیق بر اساس اصل هامیلتون و انرژی کرنشی در نظر گرفته شد. مطالعه اثرات تغییر شکل برشی بر ارتعاشات تیر دوار در دهه ۱۹۹۰ توجه پژوهشگران بیشتری را جلب کرد. یوکویاما [3] از روش اجزای محدود برای تعیین فرکانس طبیعی تیر دوار تیموشنکو استفاده کرد و نتایج حاصل را با نتایج تئوری تیر اوپلر-برنولی مقایسه کرد. کو [4] نیز یک تیر دوار مخروطی را در نظر گرفت و فرکانس‌های طبیعی را با استفاده از روش مودهای فرضی تعیین کرد. علاوه بر این، بانرجی [5] از روش سختی دینامیکی برای محاسبه فرکانس طبیعی تیر دوار استفاده کرد. موسوی و الهامی [6] نیز به تحلیل ارتعاشات آزاد کوپل در یک ملخ گام متغیر با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی پرداختند و اثر تغییر زاویه گام بر مودهای ارتعاشی را مطالعه کردند. مساله تیر دوار تیموشنکو در سال‌های اخیر نیز مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان نمونه، لی و همکاران [7]، به مطالعه تئوری و تجربی ارتعاشات پره روتور با استفاده از مدل‌سازی غیرخطی و تئوری تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن تغییرات سرعت دورانی پرداختند. همچنین، شنگ و همکاران [8]، تحلیل ایروالاستیک پره روتور بالگرد ساخته شده از مواد کامپوزیتی را با استفاده از معادلات هندسه دقیق بر مبنای تئوری تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند. در تحقیقی دیگر، بوجادا و همکاران [9]، به تحلیل دینامیکی و مودال یک تیر دوار با ساخته شده

$$EI = \frac{E_s b t_f^3}{6} + \frac{E^* b t_c^3}{12} + \frac{E_s b t_f (t_c + t_f)^2}{2} \quad (2)$$

جدول ۱ خواص الاستیک فرامواد مورد استفاده بر حسب ساختار هسته [28]
Table 1 Elastic properties of the implemented metamaterials based on core structure [28]

		E^*/E_s	G^*/E_s
Square		$0.5\rho_r$	$0.0625\rho_r^3$
Hexagonal		$1.5\rho_r$	$0.375\rho_r^3$
Triangular		$0.333\rho_r$	$0.125\rho_r$
Mixed		$0.369\rho_r$	$0.104\rho_r$



شکل ۱ هندسه تیر دوار تحت نیروی پیرو گسترده مماسی و ساختار ساندویچی سطح مقطع

Fig. 1 Geometry of the rotating beam subjected to distributed tangential follower force and cross section sandwich structure

$$GA = \frac{b(t_c + t_f)^2}{(2t_f)/G_s + t_c/G^*} \quad (3)$$

$$\rho A = \rho^* b t_c + 2\rho_s b t_f \quad (4)$$

$$\rho I = \frac{\rho_s b t_f^3}{6} + \frac{\rho^* b t_c^3}{12} + \frac{\rho_s b t_f (t_c + t_f)^2}{2} \quad (5)$$

در روابط فوق، زیر نویس f و c به ترتیب مرتبط با جداره بیرونی و هسته داخلی بوده و پارامترهای b ، t_c ، t_f به ترتیب عرض سطح مقطع، ضخامت جداره و ضخامت هسته می‌باشد که در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین، جنس دیواره از ماده پایه سازنده ساختار هسته به صورت توپر در نظر گرفته می‌شود.

۳- معادلات حاکم

مطابق شکل ۱، یک تیر مخروطی به طول L و سطح مقطع ساندویچی در نظر گرفته شده که با زاویه نصب ψ به یک توپی به شعاع r_0 متصل شده و با سرعت ثابت ω حول محور z در حال دوران است. سطح مقطع تیر به شکل مستطیل به ارتفاع ثابت و عرض متغیر در طول تیر است بطوریکه عرض تیر در ریشه و نوک به ترتیب با b_{root} و b_{tip} نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم بر تیر دوار از اصل هامیلتون تعمیم‌یافته بهره برده می‌شود.

و میراگر به منظور کاهش ارتعاشات آن پرداختند و نشان دادند این مجموعه در سرعت دورانی خاص دارای یک ناپایداری دینامیکی خواهد بود. تحلیل تیر دوار با هسته ساندویچی فراماده توسط تشکریان و همکاران [23] با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، آرتش و متلک [24] در تحقیقی به بررسی اثر دوران محوری بر رفتار دینامیکی فرامواد آکوستیکی پرداختند و اثر سرعت دورانی شفت و سفت‌شدگی ناشی از پیچش را بر نوار شکاف فرکانسی یک شفت دوار مورد بررسی قرار دادند. اخیراً، گو و همکاران [25] به مدلسازی پره بالگرد به عنوان یک تیر ساندویچی با هسته فرامواد پرداختند و نشان دادند استفاده از ساختار شبکه‌ای هسته به جای هسته توپر منجر به افزایش توزیع زاویه پیچش در طول پره می‌شود. همچنین در تحقیقی دیگر آموزگار و همکاران [26] به تحلیل تیر خمیده ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری پرداختند و نشان دادند ساختار هسته بر رفتار دینامیکی درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای تیر اثرگذار است. همچنین، صمدی‌اقدم و همکاران [27]، به تحلیل پایداری یک تیر متاکامپوزیت تشکیل شده از تشدیدگرهای محلی تحت نیروی پیرو پرداختند. آنها نشان دادند که تشدیدگرهای محلی تأثیری بر نیروی ناپایداری نداشته و تنها بر فرکانس فلاتر اثر می‌گذارد. در این مقاله، به منظور مدل‌سازی پره ملخ هواپیما، مساله تیر دوار تیموشنکو با ساختار ساندویچی مورد توجه قرار گرفته و پایداری آن تحت نیروی پیروی گسترده مماسی با توزیع یکنواخت بررسی شده است. هسته تیر ساخته شده از فرامواد فوق سبک با ساختار لانه زنبوری بوده و از تئوری تیر تیموشنکو بهره برده شده است. تحقیق حاضر به بررسی اثر ساختار فرامواد هسته و چگالی نسبی آن بر پایداری تیر غیر دوار و دوار تحت نیروی پیرو می‌پردازد.

۲- خواص سطح مقطعی

به منظور محاسبه خواص الاستیک فرامواد، از چگالی نسبی به صورت نسبت چگالی ساختار شبکه‌ای به چگالی ماده سازنده استفاده می‌شود که تابعی از شکل ساختار، اندازه المان و ضخامت دیواره می‌باشد. در اینجا، از چهار ساختار لانه زنبوری ارائه شده توسط وانگ و مک‌داول [28] استفاده شده است. تصاویر این ساختار به همراه مقادیر نسبت مدول کششی و برشی به مدول کششی ماده پایه بر حسب چگالی نسبی در جدول ۱ قابل مشاهده است. در این جدول، ρ_r چگالی نسبی، ρ_s ، E_s به ترتیب چگالی و مدول کششی ماده پایه بوده و G^* ، ρ^* به ترتیب چگالی، مدول کششی و مدول برشی ساختار شبکه‌ای هستند. چگالی نسبی به صورت چگالی ساختار شبکه‌ای به چگالی ماده پایه سازنده آن تعریف شده، به طوریکه:

$$\rho_r = \frac{\rho^*}{\rho_s} \quad (1)$$

ساختار سطح مقطع تیر ساندویچی به صورت شکل ۱ در نظر گرفته شده است. با استفاده از روابط هندسی مناسب، خواص سطح مقطعی معادل این ساختار ساندویچی قابل محاسبه است. در نتیجه، خواص معادل سطح مقطع شامل سفتی خمشی (EI)، سفتی برشی (GA)، جرم واحد طول (ρA) و ممان دوم اینرسی در واحد طول (ρI) به صورت زیر قابل محاسبه است [29].

$\xi = 1$ باشد، تیر یکنواخت بدست آمده و $\xi = 0$ مربوط به تیر مثلی است. همچنین، با فرض پارامترهای بی‌بعد مناسب و ساده‌سازی، فرم بدون بعد معادلات حاکم و شرایط مرزی برای تیر یکسر گیردار قابل دست‌یابی است.

$$\begin{aligned} & -(1 + (\xi - 1)\chi)\dot{W} + \alpha(\xi - 1)(W' - \phi) \\ & + \alpha(1 + (\xi - 1)\chi)(W'' - \phi') \\ & - \Omega^2[R_0 + (1 + R_0(\xi - 1))\chi \\ & + (\xi - 1)\chi^2]W' \\ & + \frac{\Omega^2}{6}[(1 + 2\xi) + R_0(3 + 3\xi) \\ & - 6R_0\chi \\ & - 3(1 + R_0(\xi - 1))\chi^2 \\ & - 2(\xi - 1)\chi^3]W'' \\ & + (1 + (\xi - 1)\chi)\Omega^2 \sin^2(\psi)W \\ & - \bar{q}(1 - \chi)\Delta W''' = 0 \\ & -\beta(1 + (\xi - 1)\chi)\phi + (\xi - 1)\phi' \\ & + (1 + (\xi - 1)\chi)\phi'' \\ & + \alpha(1 + (\xi - 1)\chi)(W' - \phi) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{cases} W = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \text{at } \chi = 0$$

$$\begin{cases} W' - \phi = 0 \\ \phi' = 0 \end{cases} \quad \text{at } \chi = 1 \quad (14)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{x}{L} & W &= \frac{w}{L} \\ \tau &= \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI_{root}}{\rho A_{root}}} & R_0 &= \frac{r_0}{L} \\ \alpha &= \frac{K_s GA_{root} L^2}{EI_{root}} & \beta &= \frac{\rho I_{root}}{\rho A_{root} L^2} \\ \Omega^2 &= \frac{\rho A_{root} \omega^2 L^4}{EI_{root}} & & \\ \Lambda &= \frac{\rho A_{root} \left(1 + \frac{\xi - 1}{2}\right) g L^3}{EI_{root}} & & \\ \bar{q} &= \frac{q}{\rho A_{root} \left(1 + \frac{\xi - 1}{2}\right) g L^2} & & \end{aligned} \quad (15)$$

۴- گسسته‌سازی

در اینجا با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل به گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل پرداخته می‌شود. روش تربیع دیفرانسیل یک روش گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی است که مشتقات جزئی را بر حسب مجموع مقادیر نقاط گره‌ای وزن‌دار تخمین می‌زند [30]. مشتق مرتبه اول در این روش به صورت زیر بیان می‌شود.

$$f_x(x_i) = \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (16)$$

که در آن، $i = 1, 2, \dots, N$. همچنین، مشتق مرتبه m ام در این روش به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x_i) = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m)} f(x_j) \quad (17)$$

در روابط فوق، x_i مقادیر نقاط گره‌ای، $f(x_i)$ مقادیر تابع f در آن نقاط گره‌ای و N تعداد نقاط می‌باشد. همچنین $A_{ij}^{(1)}$ و $A_{ij}^{(m)}$ به ترتیب مولفه‌های ماتریس ضرایب وزنی روش تربیع دیفرانسیل مرتبط با مشتقات اول و m ام است. روش‌های مختلفی جهت محاسبه این

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (6)$$

در رابطه فوق، δT و δU به ترتیب وردش انرژی جنبشی و پتانسیل ناشی از تغییر شکل الاستیک بوده و δW_{nc} کار مجازی ناشی از نیروهای ناپایستار است. بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، انرژی جنبشی و پتانسیل تیر دوار به صورت زیر قابل بیان است:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I(x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L K_s GA(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L F_x(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\ &- \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \omega^2 w^2 \sin^2(\psi) dx \end{aligned} \quad (8)$$

در معادلات فوق، ϕ, w به ترتیب جابجایی عرضی و دوران سطح مقطع تیر بوده و K_s ضریب اصلاحی تنش برشی است. همچنین، F_x نیروی ناشی از دوران تیر است که به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$F_x(x) = \int_x^L \rho A(x) \omega^2 (r_0 + x) dx \quad (9)$$

نیروی پیرو، نوعی نیروی ناپایستار است که جهت اعمال آن وابسته به تغییر شکل محل اعمال آن است. این نوع نیروها معمولاً به عنوان مدل ساده‌سازی شده اثر اندرکنش سیال و سازه در مسائل پایداری نظیر نیروی جت سیال، رانش موتور هواپیما و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. مساله پایداری تیر تحت نیروی پیرو به عنوان یکی از مسائل کلاسیک پایداری سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. کار مجازی حاصل از نیروی پیرو گسترده با توزیع یکنواخت q مطابق شکل ۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت [17].

$$\delta W = q \int_0^L \left[(L - x) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right] dx \quad (10)$$

با جایگذاری روابط انرژی (۷) و (۸) و کار مجازی (۱۰) در رابطه اصل هامیلتون (۶) و استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی عمومی بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & -\rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_s GA(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right) \\ & + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + F_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + \rho A(x) \omega^2 \sin^2(\psi) w \\ & - q(L - x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -\rho I(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ & + K_s GA(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \\ & \left[K_s GA(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w + F_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right. \\ & \left. + q(L - x) \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

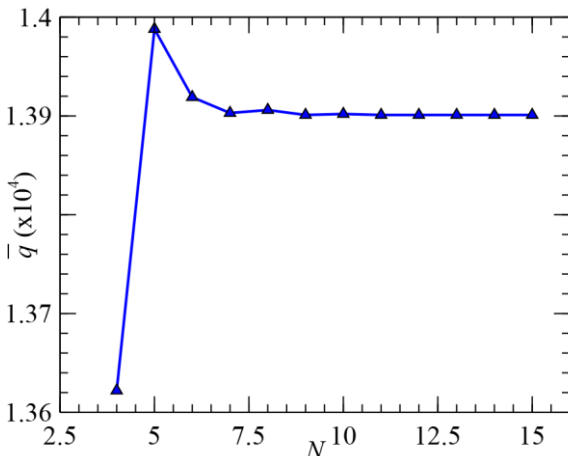
$$\left[EI(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \right]_0^L = 0$$

به منظور ساده‌سازی معادلات، در اینجا از پارامتر بی‌بعد $\xi = b_{tip}/b_{root}$ به عنوان نسبت مخروطی استفاده می‌شود. در صورتی که

به پایداری تیر تحت نیروی پیرو گسترده را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که نتایج حاضر تطابق خوبی با نتایج تحقیقات گذشته در شرایط مشابه دارد.

۲-۵- اثر چگالی نسبی

به منظور تحلیل عددی تیر دوار تحت نیروی پیرو، خواص ماده پایه و مشخصات هندسی سطح مقطع مطابق با جدول ۴ در نظر گرفته شده است. همچنین، تعداد نقاط گره‌ای برای همه نتایج برابر با ۱۵ فرض شده است. شکل ۳ اثر چگالی نسبی هسته با ساختار مختلف بر بار بحرانی پیرو با نسبت رعنائی ۵۰ را نشان می‌دهد.



شکل ۲) تحلیل همگرایی روش تربیع دیفرانسیل ($L/r = 100, E/G = 2.5$)

Fig. 2 Convergence study of differential quadrature method ($E/G=2.5$, $L/r=100$)

جدول ۲) مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر دوار مخروطی با سطح مقطع ساندویچی به ازای نسبت‌های مخروطی مختلف

Table 2 Comparison of dimensionless natural frequency of rotating tapered beam with sandwich cross section for different taper ratios

ξ		Mode1	Mode2	Mode3
1	Present	3.5160	22.0340	61.6972
	Navazi et. al. [31]	3.5136	21.9284	60.9972
0.6	Present	4.0970	23.1186	62.7763
	Navazi et. al. [31]	4.0938	23.0073	62.0626
0.2	Present	5.3976	25.6558	65.7470
	Navazi et. al. [31]	5.3924	25.5275	64.9845

جدول ۳) مقایسه بار بحرانی بی‌بعد تیر تیموشنکو تحت نیروی پیرو گسترده ($L/r = 50$)

Table 3 Comparison of Dimensionless critical load of Timoshenko beam subjected to distributed follower force ($L/r=50$)

Present	Kim and Lee [17]	Irie et. al. [11]
38.07	40.06	38.36

جدول ۴) خواص مکانیکی و سطح مقطعی مورد استفاده در تیر ساندویچی مورد مطالعه با هسته فراماده

Table 4 Mechanical and cross-sectional properties of sandwich beam under consideration with metamaterial core

Parameters	Value	Unit
Density (ρ_s)	2680	kg/m ³
Elastic modulus (E_s)	80	GPa
Poisson's ratio (ν_s)	0.3	-
Root width (b_{root})	0.02	m
Film thickness (t_f)	0.005	m
Core thickness (t_c)	0.02	m
Shear correction factor (K_s)	0.85	-

ضرایب پیشنهاد شده است که در اینجا از روش عمومی شو [30]، به دلیل سادگی در محاسبه و عمومیت آن استفاده خواهیم کرد. در نتیجه برای مشتق اول، ضرایب وزنی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} \quad \text{for } i \neq j \quad (18)$$

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik}^{(1)}$$

که در آن تابع M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (19)$$

$$M(x_j) = \prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)$$

ضرایب وزنی مشتقات بالاتر نیز با ضرب ماتریسی به طور بازگشتی قابل محاسبه است.

$$A^{(r)} = A^{(r-1)} A^{(1)} = A^{(1)} A^{(r-1)} \quad (20)$$

انتخاب نقاط گره‌ای یکی از کمیت‌های تاثیرگذار در نتایج مسئله است. در اینجا نقاط گره‌ای به صورت غیریکنواخت، با توزیع چبیشف در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه:

$$x_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

استفاده از روش تربیع دیفرانسیل و در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب، معادلات (۱۳) را تبدیل به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌نماید که به فرم ماتریسی قابل بیان است.

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} = 0 \quad (22)$$

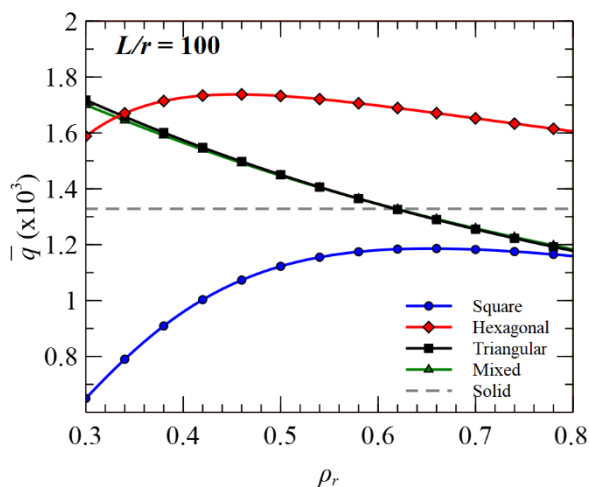
که در آن $[A]$ و $[B]$ ماتریس‌های مربعی بوده و $\{q\}$ بردار مختصات تعمیم‌یافته است. با فرض پاسخ هارمونیک به صورت $\{q\} = \exp(\lambda t)$ مقادیر ویژه مختلط سیستم قابل محاسبه است که با استفاده از آن می‌توان خصوصیات پایداری سیستم را تعیین نمود. در صورتی که قسمت حقیقی λ منفی باشد، ارتعاشات سیستم همگرا بوده و سیستم پایدار است. در صورت مثبت بودن λ ، ارتعاشات واگرا خواهد بود و سیستم ناپایدار است.

۵- نتایج عددی

۵-۱- اعتبارسنجی و همگرایی

به منظور اطمینان از نتایج بدست آمده، در ابتدا به تحلیل همگرایی و اعتبارسنجی نتایج حاصل بوسیله مقایسه آن با نتایج تحقیقات پیشین پرداخته شده است. شکل ۲ نتایج نیروی بحرانی به ازای مقادیر مختلف تعداد نقاط گره‌ای را نشان می‌دهد مطابق نتایج حاضر، تعداد ۱۵ نقطه گره‌ای به منظور تضمین همگرایی روش تربیع دیفرانسیل در این مساله مناسب است. علاوه بر آن، جدول ۲ نتایج مربوط به ارتعاشات آزاد تیر دوار مخروطی با سطح مقطع ساندویچی ارائه شده توسط نوازی و همکاران [31] به همراه نتایج تحقیق حاضر را نشان می‌دهد. فرکانس طبیعی تیر مخروطی در سه مود مختلف و سه نسبت مخروطی بدست آمده از تحلیل حاضر در این جدول مقایسه شده که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. همچنین، جدول ۳ مقایسه نتایج مربوط

افزایش نیروی بحرانی می‌شود. از طرفی، با افزایش نسبت رعنایی، اثر ساختار هسته در تیر ساندویچی کاهش

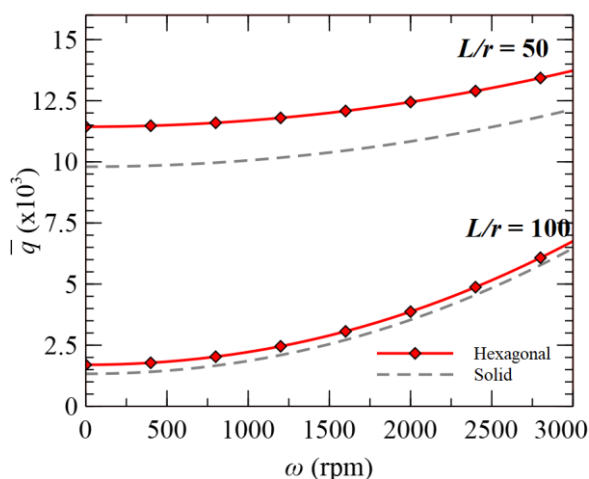


شکل ۴) اثر چگالی نسبی بر بار بحرانی در تیر غیر دوار بلند

Fig. 4 Effect of relative density on the critical load of long non-rotating beam

می‌یابد؛ بطوریکه در تیرهای بلند، نتایج هر دو ساختار شش‌ضلعی و تیر توپر بر هم منطبق است.

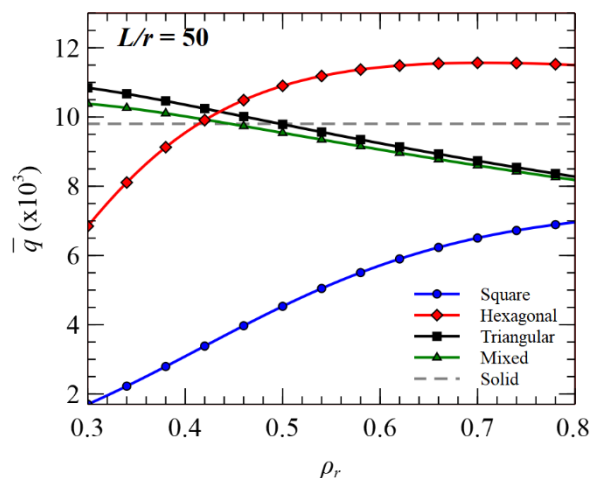
در نهایت، اثر نسبت مخروطی بر بار بحرانی تیر غیر دوار و اثر سرعت دورانی و نسبت مخروطی به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش نسبت مخروطی، بار بحرانی افزایش می‌یابد. دلیل این موضوع، حذف قسمت‌های غیر موثر در تحمل نیروی محوری و کاهش وزن تیر بوده که در نتیجه آن نیروی ناپایداری به ازای وزن واحد افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش سرعت دورانی، اختلاف نیروی بحرانی ناشی از نسبت مخروطی کاهش می‌یابد. در نتیجه، دوران تیر اثر نسبت مخروطی در افزایش نیروی بحرانی را تا حدی خنثی می‌کند.



شکل ۵) اثر سرعت دورانی بر بار بحرانی تیر تحت نیروی پیرو گسترده

Fig. 5 Effect of rotating speed on the critical load of beam subjected to distributed follower force

نسبت رعنایی (L/r)، به صورت نسبت طول تیر به شعاع ژیراسیون سطح مقطع بوده و مبین کوتاه یا بلند بودن تیر است. در اینجا، تیر



شکل ۳) اثر چگالی نسبی بر بار بحرانی تیر غیر دوار کوتاه

Fig. 3 Effect of relative density on the critical load of short non-rotating beam

نسبت رعنایی ۵۰ و ۱۰۰ به ترتیب به عنوان تیر کوتاه و بلند در نظر گرفته می‌شود. به منظور درک بهتر نتایج، مقادیر مربوط به تیر با هسته توپر نیز در این شکل با خط چین نشان داده شده است. باتوجه به معادله (۱۵)، بی‌بعدسازی نیروی پیرو به گونه‌ای انجام شده که مقادیر بالاتر نیرو مبین نیروی ناپایداری بیشتر به ازای وزن واحد است. مطابق شکل ۳، رفتار چهار ساختار شبکه‌ای مورد مطالعه در حالت‌های مختلف بارگذاری شبیه است. از طرفی، بار بحرانی به ازای مقادیر مختلف چگالی نسبی تغییر قابل توجهی داشته، بطوریکه در ساختار مربعی به ازای تمامی مقادیر چگالی نسبی، نیروی بحرانی کمتر از حالت توپر است. این می‌تواند به دلیل اختلاف قابل ملاحظه مدول برشی در ساختار مربعی نسبت به دیگر ساختارها باشد. در بین چهار ساختار مورد مطالعه، ساختار شش‌ضلعی دارای عملکرد بهتری بوده و به ازای چگالی نسبی بیشتر از ۰/۴۱ نسبت به حالت توپر حداکثر تا ۲۱ درصد با نیروی بیشتری در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد. رفتار دو ساختار مثلثی

و ترکیبی نیز مشابه یکدیگر بوده و تنها در چگالی نسبی کمتر از ۰/۵ حداکثر تا ۱۵ درصد بهتر از حالت توپر عمل می‌کند. جهت بررسی اثرات برشی نتایج مشابه برای تیر بلند با نسبت رعنایی ۱۰۰ در شکل ۴ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در تیرهای بلند که اثرات برشی ناچیز بوده، اثر ساختار هسته تقویت شده، بطوریکه ساختار شش‌ضلعی به ازای تمام مقادیر چگالی نسبی عملکردی بهتر از حالت توپر دارد.

۵-۳- اثر سرعت دورانی

اثر سرعت دورانی بر نیروی ناپایداری تیر به ازای نسبت رعنایی مختلف در شکل ۵ نشان داده شده است. با توجه به نتایج بخش قبل، در این شکل تنها ساختار شش‌ضلعی با چگالی نسبی ۰/۶ که دارای بهترین عملکرد بوده مورد بررسی قرار گرفته و با حالت توپر مقایسه شده است. همانطور که انتظار می‌رود، اثر سفت‌شوندگی ناشی از دوران باعث

شده و دوران باعث کاهش اثر ساختار هسته در تیر ساندویچی می‌شود. تحقیق حاضر به درک بهتر پایداری ناپایستار تیرهای ساخته شده از فرامواد فوق سبک کمک نموده و نتایج آن به منظور تعمیم بررسی پایداری ناپایستار این سازه‌های ساخته شده از این مواد نظیر مدل‌سازی غیرخطی و استفاده از تئوری تیر جدارنازک جهت دستیابی به درک بهتر در تحقیقات آتی قابل استفاده است.

تاییدیه اخلاقی محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیر ایرانی منتشر نشده است.
تعارض منافع: تعارض منافعی برای اظهار وجود ندارد.

فهرست علائم

A	مساحت سطح مقطع (m^2)
b	عرض سطح مقطع (m)
E	مدول الاستیک (GPa)
G	مدول برشی (GPa)
I	ممان دوم سطح مقطع
K_s	ضریب تصحیح برش
$\bar{q}$	نیروی پیرو بی‌بعد
r_0	شعاع توپی
t	ضخامت سطح مقطع
w	تغییر شکل عرضی

علائم یونانی

ξ	نسبت مخروطی
ρ	چگالی (kg/m^3)
ϕ	دوران سطح مقطع
ψ	زاویه نصب (deg)
ω	سرعت زاویه‌ای (rpm)

بالانویس‌ها

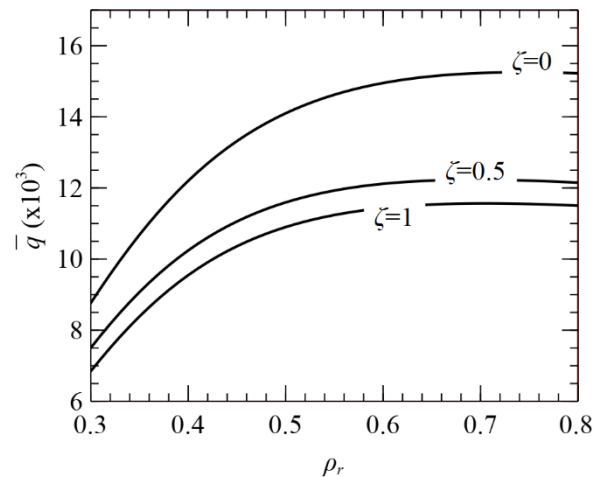
*	خواص ساختار شبکه
---	------------------

زیرنویس‌ها

c	خواص لایه میانی (هسته)
f	خواص لایه بیرونی (جداره)
r	خواص نسبی
s	خواص ماده پایه

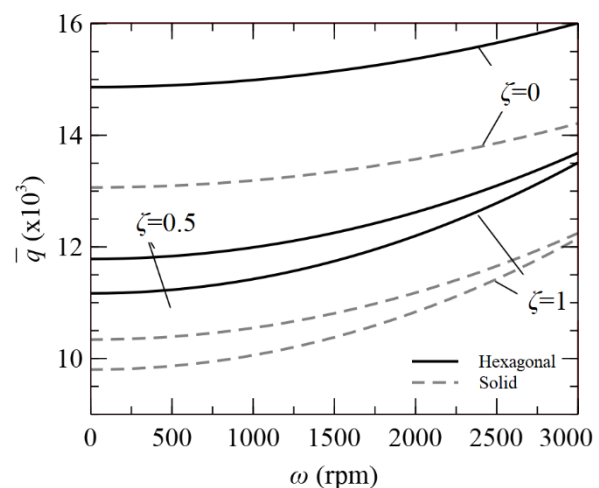
منابع

- 1- R. O. Stafford and V. Giurgiutiu, "Semi-Analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams," International Journal of Mechanical Sciences, vol. 17, no. 11-12, pp. 719-727, 1975. DOI: 10.1016/0020-7403(75)90075-2
- 2- D. H. Hodges and E. H. Dowell, "Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades." 1974.
- 3- T. Yokoyama, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," International Journal of Mechanical Sciences, vol. 30, no. 10, pp. 743-755, 1988. DOI: 10.1016/0020-7403(88)90039-2



شکل ۶ اثر نسبت مخروطی و چگالی نسبی بر بار بحرانی تیر غیر دوار با هسته شش‌ضلعی

Fig. 6 Effect of taper ratio and relative density on the critical load of non-rotating beam with hexagonal core



شکل ۷ اثر سرعت دورانی و نسبت مخروطی بر بار بحرانی تیر با هسته شش‌ضلعی با چگالی نسبی ۰/۶

Fig. 7 Effect of rotating speed and taper ratio on the critical load of beam with hexagonal core and relative density 0.6

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی پایداری تیر دوار تیموشنکو تحت نیروی پیرو گسترده پرداخته شده است. تیر با ساختار ساندویچی بوده و هسته آن از فرامواد فوق سبک در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی تیر با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده و به منظور تحلیل عددی از روش تربیع دیفرانسیل بهره برده شده است. نتایج تحقیق حاضر نشان داد، در تیرهای کوتاه با نسبت رعنائی پایین، از بین چهار ساختار فراماده مورد بررسی، تنها ساختار شش‌ضلعی عملکردی بهتر نسبت به تیر با هسته توپر دارد؛ در حالی که در تیرهای بلند، بیشتر ساختار مورد بررسی عملکردی مطلوب‌تر نسبت به حالت توپر داشته‌اند. همچنین، نتایج حاصل نشان داد، در تیر تحت اثر سرعت دورانی، اثر ساختار هسته با افزایش نسبت رعنائی کاهش می‌یابد. علاوه بر آن، کاهش نسبت مخروطی در تیر غیر دوار باعث افزایش نیروی بحرانی

- Boundary Conditions," *AIAA Journal*, vol. 57, no. 10, pp. 4269–4277, 2019. DOI: [10.2514/1.J057501](https://doi.org/10.2514/1.J057501)
- 17- N.-I. Kim and J. Lee, "Stability for Leipholz's Type of Laminated Box Columns with Nonsymmetric Lay-Ups on Elastic Foundation," *Adv. Appl. Math. Mech.*, vol. 7, no. 2, pp. 158–179, 2015. DOI: [10.4208/aamm.2013.m418](https://doi.org/10.4208/aamm.2013.m418)
- 18- P.K. Masjedi, S. Jangravi, A. Reali, "Isogeometric collocation for locking-free large deflection analysis of geometrically exact beams with intrinsic formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 446, pp.118282, 2025. DOI: [10.1016/j.cma.2025.118282](https://doi.org/10.1016/j.cma.2025.118282)
- 19- T. Li and L. Wang, "Bending Behavior of Sandwich Composite Structures with Tunable 3d-Printed Core Materials," *Composite Structures*, vol. 175, pp. 46–57, 2017. DOI: [10.1016/j.compstruct.2017.05.001](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.05.001)
- 20- Z. Zhang, B. Han, Q. Zhang, and F. Jin, "Free vibration analysis of sandwich beams with honeycomb-corrugation hybrid cores," *Composite Structures*, vol. 171, pp. 335–344, 2017. DOI: [10.1016/j.compstruct.2017.03.045](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.045)
- 21- J. Lou, B. Wang, L. Ma, and L. Wu, "Free vibration analysis of lattice sandwich beams under several typical boundary conditions," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 26, no. 5, pp. 458–467, 2013. DOI: [10.1016/S0894-9166\(13\)60041-5](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(13)60041-5)
- 22- E. Basta, M. Ghommam, S. Emam, "Vibration suppression of nonlinear rotating metamaterial beams", *Nonlinear Dynamics*, vol. 101, pp. 311–332, 2020. DOI: [10.1007/s11071-020-05796-z](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05796-z)
- 23- M. Tashakorian, S. A. Fazelzadeh, and E. Ghavanloo, "Dynamic stability of rotating cantilever meta-sandwich beam subjected to tangential tip non-conservative force," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 105, pp. 423–437, 2022, DOI: [10.1016/j.apm.2021.12.044](https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.12.044).
- 24- I. Arretche, K. H. Matlack, "Centrifugal forces enable band gaps that self-adapt to synchronous vibrations in rotating elastic metamaterial", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 202, pp. 110689, 2023. doi: [10.1016/j.ymssp.2023.110689](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110689)
- 25- H. Gu, A. D. Shaw, M. Amoozgar, J. Zhang, C. Wang, and M. I. Friswell, "Twist morphing of a composite rotor blade using a novel metamaterial," *Composite Structures*, vol. 254, p. 112855, 2020. DOI: [10.1016/j.compstruct.2020.112855](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112855)
- 26- M. Amoozgar, S. A. Fazelzadeh, E. Ghavanloo, and R. M. Ajaj, "Free vibration analysis of curved lattice sandwich beams," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 31, no. 2, pp. 343–355, 2024. DOI: [10.1080/15376494.2022.2114043](https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2114043)
- 27- K. Samadi Aghdam, C.Q. Ru, P. Schiavone, "Dynamic instability of metacomposite columns with embedded local resonators under a follower force", *Acta Mechanica*, 2025. DOI: [10.1007/s00707-025-04437-z](https://doi.org/10.1007/s00707-025-04437-z)
- 28- A. J. Wang and D. L. McDowell, "In-Plane Stiffness and Yield Strength of Periodic Metal Honeycombs," *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 126, no. 2, pp. 137–156, 2004. doi: [10.1115/1.1646165](https://doi.org/10.1115/1.1646165)
- 29- C. Phan, Y. Frostig, and G. Kardomateas, "Free vibration of unidirectional sandwich panels, Part II: Incompressible core," *Journal of Sandwich Structures*
- 4- C. L. Ko, "Dynamic Analysis for Free Vibrations of Rotating Sandwich Tapered Beams," *AIAA Journal*, vol. 27, no. 10, pp. 1425–1433, 1989. DOI: [10.2514/3.10281](https://doi.org/10.2514/3.10281)
- 5- J. R. Banerjee, "Dynamic Stiffness Formulation and Free Vibration Analysis of Centrifugally Stiffened Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 247, no. 1, pp. 97–115, 2001. DOI: [10.1006/jsvi.2001.3716](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3716)
- 6- S. A. Mousavi, M. R. Elhami. "Dynamic Analysis And Coupled Vibration Of Variable pitch Propeller", *Modares Mechanical Engineering*, vol. 15 no. 9, pp. 170-178, 2015. (In Persian) DOR: [10.1001.1.10275940.1394.15.9.52.4](https://orcid.org/10.1001.1.10275940.1394.15.9.52.4)
- 7- Z. M. Li, T. Liu, H. Kang, J. Tian, J. Jing, and D. Wang, "Theoretical and experimental investigations on steady-state responses of rotor-blade systems with varying rotating speeds based on a new nonlinear dynamic model," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 184, p. 109692, 2023. DOI: [10.1016/j.ymssp.2022.109692](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109692)
- 8- L. Shang, P. Xia, J. Zhang, and C. Lin, "Geometrically exact aeroelastic stability analysis of helicopter composite rotor blades in forward flight," *Aerospace Science and Technology*, vol. 144, p. 108818, 2024. DOI: [10.1016/j.ast.2023.108818](https://doi.org/10.1016/j.ast.2023.108818)
- 9- Y. Boudjaada, T. Benmansour, H. E. Fiala, B. Issasfa, "Experimental and numerical investigation of the honeycomb structures' effect on the dynamic characteristics of rotors: a modal analysis", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 133, pp. 4453–4467, 2024. DOI: [10.1007/s00170-024-13875-3](https://doi.org/10.1007/s00170-024-13875-3)
- 10- S. Nemat-Nasser, "Instability of a Cantilever Under a Follower Force According to Timoshenko Beam Theory," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 34, no. 2, pp. 484–485, 1967. DOI: [10.1115/1.3607709](https://doi.org/10.1115/1.3607709)
- 11- T. Irie, G. Yamada, and I. Takahashi, "Vibration and Stability of a Non-Uniform Timoshenko Beam Subjected to a Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 70, no. 4, pp. 503–512, 1980. DOI: [10.1016/0022-460X\(80\)90320-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(80)90320-X)
- 12- V. Sundararamaiah and G. V. Rao, "Effect of shear deformation and rotatory inertia on the stability of Beck's and Leipholz's columns," *AIAA Journal*, vol. 18, no. 1, pp. 124–125, Jan. 1980, DOI: [10.2514/3.7641](https://doi.org/10.2514/3.7641).
- 13- L. W. Chen and D. M. Ku, "Stability Analysis of a Timoshenko Beam Subjected to Distributed Follower Forces Using Finite Elements," *Computers & Structures*, vol. 41, no. 4, pp. 813–819, 1991. DOI: [10.1016/0045-7949\(91\)90190-W](https://doi.org/10.1016/0045-7949(91)90190-W)
- 14- K. K. Raju and G. V. Rao, "A simple method to evaluate the critical loads of cantilever columns with follower forces," *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*, vol. 11, pp. 143–146, 2004.
- 15- J. Rezaeepazhand, H. Alidoost. "Dynamic Stability of Laminated Composite Beam Subjected to a Follower Force". *Modares Mechanical Engineering*, vol. 15, no. 10, pp. 233-239, 2016 (In Persian). dor: [10.1001.1.10275940.1394.15.10.13.7](https://orcid.org/10.1001.1.10275940.1394.15.10.13.7)
- 16- S. A. Fazelzadeh, M. Tashakorian, E. Ghavanloo, M. I. Friswell, and M. Amoozgar, "Nonconservative Stability Analysis of Columns with Various Loads and

Tapered Sandwich Beam," International Journal of Mechanical Sciences, vol. 122, pp. 308–317, 2017. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2017.01.016](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.016)

& Materials, vol. 15, no. 4, pp. 412–428, 2013. DOI: [10.1177/1099636213485520](https://doi.org/10.1177/1099636213485520)

30- C. Shu, Differential Quadrature and Its Application in Engineering. New York: Springer, 2000.

31- H. M. Navazi, S. Bornassi, and H. Haddadpour, "Vibration Analysis of a Rotating Magnetorheological