

Frequency Analysis of Single-Walled-Nanotube embedded in a Winkler-Pasternak Foundation using Generalized Differential Quadrature Method

Mehdi Babakhani, Isa Ahmadi* 

Mechanical Engineering Department, University of Zanjan, Zanjan, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: July 12, 2025
Revised: December 20, 2025
Accepted: December 20, 2025
ePublished: February 14, 2026

ABSTRACT

Due to the importance of investigating the vibrational behavior of carbon nanotubes, extensive research has been conducted in this field. In the present study, the natural frequencies of free vibrations of Single-Walled-Nanotube embedded in an elastic Winkler-Pasternak foundation are analyzed using a thin shell model and nonlocal elasticity theory. The governing equations of motion are derived based on Love's shell theory and Hamilton's principle. Since classical elasticity theory does not account for small-scale effects in the analysis of nanoscale structures—which can lead to inaccuracies in prediction—the Eringen's nonlocal elasticity theory is employed for more accurate modeling. The governing equations are discretized using the extended differential quadrature method and converted into an eigenvalue problem. Natural frequencies for various longitudinal and circumferential vibration modes are then computed. The predicted frequencies are compared with available data in the literature to validate the model. Furthermore, in the numerical results section, the effects of various parameters such as the length-to-radius ratio, radius-to-thickness ratio, properties of the elastic foundation, and the nonlocal parameter on the natural frequency of the carbon nanotube under different boundary conditions are analyzed and reported.

Keywords: Single-Walled Nanotube (SWNT), Thin Shell Model, Eringen's Nonlocal Elasticity Theory, Generalized Differential Quadrature (GDQ) Method, Elastic Foundation

How to cite this article

Babakhani M, Ahmadi I, Frequency Analysis of Single-Walled-Nanotube embedded in a Winkler-Pasternak Foundation using Generalized Differential Quadrature Method. Modares Mechanical Engineering; 2026;26(03):219-231.

*Corresponding author's email: i_ahmadi@znu.ac.ir

*Corresponding ORCID ID: 0000-0003-3327-1504



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.



تحلیل فرکانسی نانولوله‌های تک جداره احاطه شده در بستر وینکلر-پاسترناک با استفاده از تئوری غیرمحملی و روش مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته

مهدی باباخانی، عیسی احمدی*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده

در این پژوهش، فرکانس‌های ارتعاشات آزاد نانولوله‌های تک‌جداره محاط در بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک با استفاده از مدل پوسته نازک و تئوری الاستیسیته غیرمحملی مورد تحلیل قرار گرفته است. معادلات حرکت حاکم بر رفتار مکانیکی نانولوله، بر پایه تئوری پوسته لاو استخراج شده‌اند. با توجه به اینکه تئوری کلاسیک الاستیسیته قادر به لحاظ کردن اثرات مقیاس کوچک در تحلیل رفتار نانوسازه‌ها نیست و لذا استفاده از آن برای تحلیل رفتار مکانیکی نانولوله منجر به خطا در پیش‌بینی نتایج می‌شود، از تئوری الاستیسیته غیرمحملی ارینگن جهت مدل‌سازی اثر اندازه کوچک استفاده شده است. سپس معادلات حاکم بر نانولوله با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی توسعه‌یافته گسسته‌سازی و به مسئله مقدار ویژه تبدیل شده‌اند. سپس فرکانس‌های طبیعی برای مودهای مختلف طولی و محیطی محاسبه شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده با داده‌های موجود در منابع مقایسه و اعتبار مدل بررسی شده است. همچنین در بخش نتایج عددی، اثر پارامترهایی مانند نسبت طول به شعاع، نسبت شعاع به ضخامت، خواص بستر الاستیک و ضریب غیرمحملی بر فرکانس طبیعی نانولوله کربنی در شرایط مرزی مختلف تحلیل و گزارش شده است.

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۲۱
بازنگری: ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۱۱/۲۵

کلیدواژه‌ها: نانولوله تک‌جداره، مدل پوسته‌های نازک، تئوری الاستیسیته غیرمحملی ارینگن، روش مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته (GDQ)، بستر وینکلر-پاسترناک

نحوه ارجاع به این مقاله

باباخانی مهدی، احمدی عیسی، تحلیل فرکانسی نانولوله‌های تک جداره احاطه شده در بستر وینکلر-پاسترناک با استفاده از تئوری غیرمحملی و روش مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته، مهندسی مکانیک مدرس. ۲۳۱-۲۱۹ (۰۳): ۱۴۰۴

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: i_ahmadi@znu.ac.ir
*شناسه اراکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: 0000-0003-3327-1504



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

۱- مقدمه

فناوری نانو یا نانوتکنولوژی، شاخه‌ای پیشرفته و میان‌رشته‌ای از دانش کاربردی و فناوری است که حوزه‌های گسترده‌ای از علوم و مهندسی را در بر می‌گیرد. این فناوری نوین، با ترکیب و هم‌افزایی رشته‌هایی همچون پزشکی، زیست‌شناسی، فیزیک کاربردی، مهندسی مواد، مهندسی مکانیک، مهندسی برق و مهندسی شیمی، بستری برای توسعه مواد، دستگاه‌ها و سامانه‌هایی با عملکرد برتر فراهم می‌کند. در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های چشمگیر در دانش و مهندسی نانو، زمینه‌ساز گسترش تحقیقات و کاربردهای متنوع در سیستم‌های مواد مختلف شده است که توانسته‌اند تأثیر قابل‌توجهی بر حوزه‌های صنعتی، پزشکی و فناوری اطلاعات داشته باشند [۱]. نانوفناوری به معنای توانایی دستکاری، کنترل و طراحی مواد و ساختارها در مقیاس بسیار کوچک، از سطح اتمی و مولکولی تا ابعاد ۱ تا ۱۰۰ نانومتر است. این مقیاس کوچک، امکان تغییر آرایش و خواص اتم‌ها و مولکول‌ها را فراهم می‌آورد تا بتوان عملکرد مواد را به طور چشمگیری بهبود بخشید. هدف اصلی این فناوری، خلق مواد و سیستم‌هایی با ویژگی‌های منحصربه‌فرد و بازدهی بالاتر است که در صنایع مختلف از جمله الکترونیک، داروسازی، انرژی، محیط زیست و مهندسی کاربردهای فراوانی دارند. با توجه به ماهیت بین‌رشته‌ای و نوآورانه نانوتکنولوژی، این حوزه همچنان به عنوان یکی از محرک‌های اصلی پیشرفت‌های علمی و فناوری در قرن بیست و یکم شناخته می‌شود.

نانولوله‌های کربنی نوعی آلوتروپ کربن هستند که برای نخستین بار در سال ۱۹۹۱ توسط سامیو ایجیما [۲] کشف شد. نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تنها از یک لایه نازک ورق گرافیتی تشکیل شده‌اند و این ساختار منحصربه‌فرد باعث شده است که نانولوله‌های کربنی خواص فیزیکی، مکانیکی، الکتریکی و حرارتی چشمگیری از خود نشان دهند. از جمله این خواص می‌توان به استحکام بسیار بالا، سفتی قابل توجه، هدایت حرارتی و الکتریکی برجسته اشاره کرد که آنها را به کاندیدای ایده‌آل برای کاربردهای متنوع در حوزه‌های نانوالکترومکانیک، ابزارهای زیست‌پزشکی، سلول‌های سوختی و سایر فناوری‌های پیشرفته تبدیل کرده است [۳]. مطالعه رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی اهمیت فراوانی در فناوری نانو دارد و درک دقیق این ویژگی‌ها، گامی کلیدی برای طراحی و ساخت دستگاه‌های نانومکانیکی مانند نوسانگرها، آشکارسازهای بار، ساعت‌های نانومقیاس و حسگرها محسوب می‌شود. به همین دلیل، تحلیل ارتعاشی نانولوله‌ها به یکی از موضوعات پرطرفدار و مهم در پژوهش‌های اخیر تبدیل شده است. در دو دهه گذشته، بسیاری از مطالعات تحلیلی و عددی بر پایه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک انجام گرفته‌اند که در آنها از نظریه‌های مختلفی مانند تیر اویلر-برنولی،

تیر تیموشینکو و نظریه‌های صفحه و پوسته برای مدل‌سازی رفتار نانوسازه‌ها بهره گرفته شده است. این مطالعات شامل بررسی نانولوله‌های تک‌جداره و چندجداره می‌باشند.

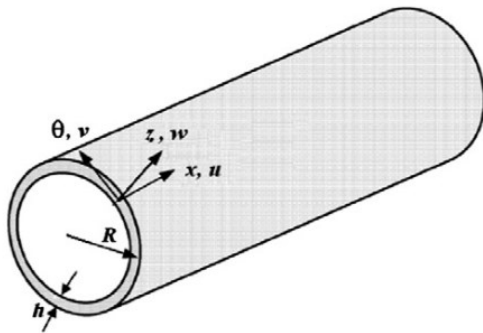
از جمله پژوهش‌های مهم در این زمینه، می‌توان به مطالعه یون و همکارانش [۴] در سال ۲۰۰۲ اشاره کرد که فرکانس‌های تشدید و مودهای ارتعاشی نانولوله‌های کربنی چندجداره در بستر الاستیک را با استفاده از تئوری تیر الاستیک چندگانه تحلیل کردند. همچنین، مدل تیر تیموشینکو برای نانولوله‌های کربنی چندجداره توسط ونگ و همکاران [۵] در سال ۲۰۰۶ ارائه شد. در سال ۲۰۰۷، مورمو و پردهان [۶] به بررسی ارتعاشات ترمومکانیکی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره در محیط الاستیک با بهره‌گیری از مدل تیرها و تئوری الاستیسیته غیرمحمولی پرداختند و از روش مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات استفاده کردند. همچنین در همان سال، مسوت [۷] به تحلیل ارتعاشات اجباری نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تحت بار هارمونیک متحرک، با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی غیرمحمولی و شرایط مرزی ساده-ساده پرداخت. انصاری و همکاران [۸] رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره را با بهره‌گیری از مدل پوسته الاستیک غیرمحمولی فلوگی و روش رایلی-ریتز مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۱۲، انصاری و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی دوجداره را با استفاده از مدل پوسته الاستیک غیرمحمولی دائل تحلیل کردند. پردهان و مندل [۱۰] در سال ۲۰۱۳، رفتار ارتعاشی، خمش و کمناش نانولوله‌های تک‌جداره را بر پایه فرمول‌بندی المان محدود و تئوری تیر تیموشینکو مطالعه نمودند. در سال ۲۰۱۵ انصاری و همکاران [۱۱] ارتعاشات اجباری نانولوله کربنی حاوی سیال بر روی بستر الاستیک بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده را مورد بررسی قرار دادند. رمضان نژاد آزارینی و کشاورزپور [۱۲] با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی پاسخ فرکانسی نانولوله‌های کربنی تک لایه انحنادار بر روی بستر ویسکوالاستیک تحت بار حرارتی را مورد تحلیل قرار دادند. شهریاری و همکاران [۱۳] بر پایه تئوری الاستیسیته غیرموضعی رفتار نانولوله‌های کربنی خمیده با شرایط بستر الاستیک و توزیع سینوسی بار جانبی، را مورد مطالعه قرار دادند. پالاسیوس و راجاموهان [۱۴] پاسخ دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره را با تئوری‌های مختلف پوسته تحلیل کردند. کمالی مقدم و همکاران [۱۵] نیز در سال ۲۰۱۷ به تجزیه و تحلیل تأثیر دمای محیط بر رفتار مکانیکی و شکست نانولوله‌های کربنی پرداختند. همچنین، سهار و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۲۰، اثر پارامتر غیرمحمولی بر ارتعاشات آزاد نانولوله‌های دوجداره را بر اساس تئوری پوسته دائل مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۲۳، آنادرزوا و همکاران [۱۷] ارتعاشات نانولوله‌های کربنی تک‌جداره را با استفاده از تئوری غیرمحمولی تیر تیموشینکو-ارزنست تحلیل کردند. در همان سال، چن و همکاران [۱۸] به تحلیل ارتعاشات عرضی نانولوله‌های کربنی دوجداره در بستر الاستیک تحت تأثیر گرادیان

۲- فرمولبندی

یک مدل پوسته‌ای از یک نانولوله کربنی تک‌جداره در شکل ۱ نشان داده شده است. مختصات استوانه‌ای $r\theta z$ برای مدلسازی پوسته در نظر گرفته شده است به طوری که x مختصه طولی استوانه، θ مختصه محیطی و $r=R+z$ مختصه شعاعی را نشان می‌دهد و z مختصه ضخامت است که از وسط ضخامت پوسته به سمت بیرون اندازه‌گیری می‌شود و $z=0$ سطح میانی جداره پوسته را نشان می‌دهد و R شعاع متوسط پوسته است. هدف این پژوهش بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی نانولوله با استفاده از رهیافت تئوری مکانیک محیط پیوسته با مدلسازی آن بصورت پوسته‌ها می‌باشد. لذا در این پژوهش از تئوری پوسته‌های نازک برای مدلسازی سینماتیک رفتار مکانیکی نانولوله استفاده می‌شود. در مدلسازی رفتار مکانیکی نانولوله، در بیان تغییر شکل نانولوله، میدان جابجایی نانولوله در راستای طولی، محیطی و شعاعی نانولوله، به ترتیب با $\bar{u}$ ، $\bar{v}$ و $\bar{w}$ مشخص شده است. برای پوسته نازک مولفه‌های جابجایی پوسته برحسب جابجایی صفحه میانی ($z=0$) بصورت زیر بیان می‌شود [۲۴].

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) - z \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} + \frac{v}{R} \right) \\ \bar{w}(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t)\end{aligned}\quad (1)$$

که در رابطه (۱)، توابع $u(x, \theta, t)$ ، $v(x, \theta, t)$ و $w(x, \theta, t)$ مولفه‌های جابجایی صفحه میانی پوسته ($z=0$) بترتیب در راستای طولی، محیطی و شعاعی است.



شکل ۱) مدل پوسته‌ای از یک نانولوله تک جداره

Fig.1 A shell model of a single-walled nanotube

این میدان جابجایی از مولفه کرنش عمودی و برشی در راستای شعاعی شامل ϵ_z ، γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$ صرف‌نظر می‌کند که این فرض برای پوسته‌های نازک منطقی می‌باشد و برای نانولوله‌ها قابل فرض است. لذا مدل در نظر گرفته شده برای پوسته‌های با نسبت $R/h > 30$ دارای دقت خوبی است و برای R/h کوچک‌تر دقت مدل کاهش می‌یابد. همچنین در مدل فرض شده است که جابجایی‌های پوسته کوچک است و لذا برای حالتی که جابجایی‌های بزرگ اتفاق بیافتد دقت مدل کاهش می‌یابد.

دما و میدان‌های الکتریکی با استفاده از تئوری غیرمحلی و مدل تیر ردی پرداختند. در سال ۲۰۲۴، احمدی و همکاران [۱۹] تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیرهای چندگانه در بستر الاستیک را با روش بدون المان و با مدل مرتبه اول برشی تیرها ارائه نمودند. همچنین احمدی و همکاران [۲۰] رفتار گذرای دینامیکی در اثر برخورد نانوذره به نانوتیر را با استفاده از روش بدون المان و تئوری الاستیسیسته غیرمحلی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۲۴، استروتزی و همکاران [۲۱] با استفاده از یک مدل پوسته ناهمسانگرد ارتعاشات نانولوله‌های کربنی تک جداره را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این پژوهش از مدل پوسته سندرز-کویتز و همچنین برای حل معادلات حاکم از روش متغیر مختلط استفاده کردند. همچنین برای استخراج معادلات حاکم از نظریه اربینگن و نظریه گرادیان کرنش میندلین استفاده کردند. همچنین در همین سال سابرات کومار و همکاران [۲۲] با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی و روش حل ناویر، به بررسی ارتعاشات حرارتی نانولوله‌های کربنی پرداختند. آیشه‌گل [۲۳] در سال ۲۰۲۵ با استفاده از روش مقادیر اولیه به بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک جداره احاطه شده در بستر الاستیک پرداخت. همچنین اشوای و همکاران [۲۴ و ۲۵] با استفاده از تئوری تیر به تحلیل و بررسی ارتعاشات عرضی نانولوله‌های کربنی تک جداره احاطه شده در بستر الاستیک تحت بار حرارتی دمای پایین پرداختند.

در مطالعه منابع دیده می‌شود که اکثر منابع از تئوری تیر برای مدلسازی رفتار نانولوله‌ها استفاده کرده‌اند هر چند که تئوری پوسته‌ها هم برای مدلسازی نانولوله‌ها استفاده شده است که به طور عمده برای شرایط مرزی دوسر ساده و با استفاده از روش حل ناویر است. در پژوهش حاضر، به منظور تحلیل دقیق‌تر رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی، از تئوری پوسته‌های نازک برای مدلسازی نانولوله‌ها استفاده شده است. برای لحاظ کردن اثرات اندازه کوچک که در مقیاس نانو قابل توجه است، تئوری الاستیسیسته غیرموضعی اربینگن به کار گرفته شده است. معادلات حرکت مربوط به نانولوله‌های تک‌جداره با بهره‌گیری از مدل پوسته نازک لاو و چارچوب تئوری الاستیسیسته غیرموضعی استخراج شده‌اند. با توجه به دقت و کارایی بالای روش مربعات دیفرانسیلی توسعه‌یافته، معادلات حاکم به روش مربعات دیفرانسیلی توسعه‌یافته گسسته‌سازی شده و به معادلات دیفرانسیل عادی بر حسب زمان تبدیل شده است. سپس فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌ها در شرایط مرزی مختلف با این روش استخراج شده است. اعتبار روش پیشنهادی با مقایسه نتایج حاصل با داده‌های موجود در منابع علمی تایید شده است؛ به طوری که دقت بالا حتی با تعداد گره‌های بسیار پایین قابل دستیابی است. همچنین، تأثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌ها به صورت جامع تحلیل شده است.

با استفاده از رابطه (۵)، منته‌های نیرو و گشتاور بر حسب مولفه‌های جابجایی بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} N_{xx} - \mu \nabla^2 N_{xx} &= K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right) \\ N_{\theta\theta} - \mu \nabla^2 N_{\theta\theta} &= K \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right) \\ N_{x\theta} - \mu \nabla^2 N_{x\theta} &= K \left(\frac{1-v}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ M_{xx} - \mu \nabla^2 M_{xx} &= D \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \left(\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \right) \\ M_{\theta\theta} - \mu \nabla^2 M_{\theta\theta} &= D \left(-v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \right) \\ M_{x\theta} - \mu \nabla^2 M_{x\theta} &= D \left(\frac{1-v}{2} \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

که در رابطه فوق $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ سفتی موثر محوری، و $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ سفتی موثر خمشی پوخته می‌باشد. حال با استفاده از اصل همیلتون می‌توان نشان داد که معادلات حاکم بر حرکت نانولوله احاطه شده در یک بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک براساس تئوری پوخته لاو بصورت زیر قابل استخراج است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= I_0 \ddot{u} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= I_0 \ddot{v} \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \end{aligned} \quad (7)$$

$(1-\mu \nabla^2)(K_w w - K_p \nabla^2 w) = I_0 \ddot{w}$ که K_p و K_w بترتیب ضریب بستر وینکلر و بستر پاسترناک می‌باشند. همچنین شرایط مرزی لبه‌های نانولوله در $x=0$ و $x=L$ بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= 0, & or & \delta u = 0 \\ (N_{x\theta} + \frac{1}{R} M_{x\theta}) &= 0, & or & \delta v = 0 \\ M_{xx} &= 0, & or & \delta w_x = 0 \quad at \ x = 0, x = L \\ (M_{xx,x} + \frac{2}{R} M_{x\theta,\theta}) &= 0, & or & \delta w = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به اینکه استوانه در راستای محیطی بسته است لذا در بحث ارتعاشات آزاد می‌توان میدان جابجایی پوخته را در راستای محیطی بصورت مثلثاتی بسط داد. برای این منظور میدان جابجایی نانولوله در راستای محیطی استوانه (θ) بصورت مثلثاتی بسط داده می‌شود و بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= U(x, t) \sin \theta \\ v(x, \theta, t) &= V(x, t) \cos \theta \\ w(x, \theta, t) &= W(x, t) \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

که در معادله فوق n شماره مود محیطی نانولوله می‌باشد و توابع $U(x, t)$ و $V(x, t)$ و $W(x, t)$ توابع مجهول می‌باشند که با حل مساله استخراج می‌شوند. حال با استفاده از رابطه (۶)، (۷) و (۹)، معادلات تعادل برای نانولوله برحسب توابع جابجایی بصورت رابطه (۱۰) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(x, t) \\ V(x, t) \\ W(x, t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ + \rho h \left(1 + \mu \frac{n^2}{R^2} - \mu \partial_x^2 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{U}(x, t) \\ \ddot{V}(x, t) \\ \ddot{W}(x, t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

از طرف دیگر همان‌گونه که گفته شده تئوری کلاسیک الاستیسیته اثر اندازه کوچک را در نظر نمی‌گیرد و برای در نظر گرفتن اثر اندازه کوچک، در این مقاله از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی برای مدل‌سازی رفتار ماده استفاده شده است. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک محلّی و تئوری الاستیسیته غیرمحلّی در تعریف تنش است. در نظریه کلاسیک محلّی، بین تنش و کرنش در هر نقطه یک تناظر یک به یک برقرار است. بدین معنی که تنش یک نقطه فقط تابعی منحصر بفرد از کرنش در همان نقطه است، در حالیکه در تئوری الاستیک غیرمحلّی، تنش در یک نقطه خاص تابعی از کرنش در تمام نقاط همسایگی آن نقطه در جسم مورد نظر است. رابطه ساختاری تئوری الاستیسیته غیرمحلّی در فرم اصلی بصورت انتگرالی است ولی معمولاً از فرم دیفرانسیلی آن صورت زیر بیان می‌شود [۲۵].

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

که در معادله فوق، $\mu = (e_0 a)^2$ پارامتر مقیاس کوچک یا پارامتر غیر محلّی در تئوری الاستیسیته غیرمحلّی می‌باشد. این پارامتر برای هر ماده خاص با استفاده از آزمایشات مناسب تعیین می‌شود. e_0 ثابت ماده است و a طول داخلی نامیده می‌شود.

حال با توجه به اینکه از مولفه‌های عمودی و برشی کرنش در راستایی شعاعی صرف‌نظر شده است از این رو با استفاده از میدان جابجایی (۱) می‌توان مولفه‌های کرنش در یک نقطه دلخواه از پوخته را بصورت رابطه (۳) استخراج کرد [۲۶].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - z \frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

حال با استفاده از تئوری غیر محلّی الاستیسیته، رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌های درون صفحه‌ای در تئوری غیر محلّی بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} - (\mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

که در معادله فوق E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، σ_x و σ_θ و $\sigma_{x\theta}$ بترتیب تنش عمودی طولی و محوری و تنش برشی درون صفحه‌ای می‌باشند. در تئوری پوخته، منته‌های نیرو و گشتاور بر اساس مولفه‌های تنش تعریف شده در معادله (۴) بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}) dz \\ (M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}) z dz \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= (-n^2)K\left(\frac{1-\nu}{2R^2}\right), & R_{1,3} &= K \\ R_{1,5} &= (-n)K\left(\frac{1+\nu}{2R}\right), & R_{1,8} &= \left(\frac{\nu K}{R}\right) \\ R_{2,2} &= K\left(\frac{1+\nu}{2R}\right)(n), & R_{2,4} &= \left(\frac{K}{R^2} + \frac{D}{R^4}\right)(-n^2) \\ R_{2,6} &= K\left(\frac{1-\nu}{2}\right) + \frac{2}{R^2}D\left(\frac{1-\nu}{2}\right), \\ R_{2,7} &= \frac{K}{R^2}(n) - \frac{D}{R^4}(-n^3), & R_{2,9} &= -\left(\frac{D}{R^2}\right)(n) \\ R_{3,2} &= -\frac{\nu K}{R}, & R_{3,4} &= -\frac{K}{R^2}(-n) + \frac{D}{R^4}(n^3) \\ R_{3,6} &= \frac{D}{R^2}(-n), & R_{3,7} &= -\frac{D}{R^4}(n^4) - \frac{K}{R^2} + K_w \\ R_{3,9} &= -\frac{2D}{R^2}(-n^2) - \mu K_w - K_p, & R_{3,10} &= -D + \mu K_p \end{aligned} \quad (15)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود معادلات حاکم معادلات دیفرانسیلی بر حسب مختصه طول x هستند. لذا برای گسسته‌سازی معادلات حاکم، تعداد N گره در امتداد طول استوانه (محور x) در نظر گرفته می‌شود بطوریکه گره نام در نقطه x_i قرار دارد. مقادیر گره‌ای برای توابع مجهول در گره نام بترتیب با $W_i(t)=W(x_i,t)$ و $V_i(t)=V(x_i,t)$ ، $U_i(t)=U(x_i,t)$ با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته، مشتق مرتبه k از یک تابع پیوسته، مثلاً توابع $U(x,t)$ ، $V(x,t)$ و $W(x,t)$ در نقطه x_i را می‌توان بصورت گسسته و در فرم ماتریسی زیر نوشت.

$$\begin{aligned} U^{(k)}(x_i, t) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} \cdot U_j(t) = \{C\}_i^{(k)} \{U(t)\} \\ V^{(k)}(x_i, t) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} \cdot V_j(t) = \{C\}_i^{(k)} \{V(t)\} \\ W^{(k)}(x_i, t) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} \cdot W_j(t) = \{C\}_i^{(k)} \{W(t)\} \end{aligned} \quad (16)$$

که در رابطه (۱۶)، ماتریس‌های $\{U(t)\}$ ، $\{V(t)\}$ و $\{W(t)\}$ ماتریس‌های ستونی $N \times 1$ هستند که شامل مقادیر گره‌ای مربوطه می‌باشند، بطور مثال $\{U(t)\}$ شامل مقادیر گره‌ای بصورت زیر می‌باشد.

$$\{U(t)\} = \{U_1(t), U_2(t), U_3(t), \dots, U_N(t)\}^T \quad (17)$$

و ماتریس $\{C\}_i^{(k)}$ ماتریس ضرایب مربوط به مشتق مرتبه k ام در روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته است که با تکنیک‌های ارائه شده در این روش قابل استخراج است که جزئیات آن در [۲۳] آمده است که بصورت خلاصه در ذیل آمده است. مولفه‌های ماتریس ضرایب مربوط به مشتق m ام بصورت زیر بدست می‌آید.

$$c_{ij}^{(m)} = m \left(c_{ij}^{(1)} c_{ii}^{(m-1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right), i \neq j \quad (18)$$

$$c_{ij}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(m)}, i = j \quad (19)$$

که در آن $c_{ij}^{(1)}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) \cdot M^{(1)}(x_j)}, i \neq j \quad (19)$$

که L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} L_{11} &= K \left(\frac{\sigma^2}{\sigma x^2} + (-n^2) \left(\frac{1-\nu}{2R^2} \right) \right) \\ L_{12} &= (-n)K \left(\frac{1+\nu}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial x}, & L_{13} &= \left(\frac{\nu K}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{21} &= (n)K \left(\frac{1+\nu}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{22} &= \left(K \frac{1-\nu}{2} + \frac{2}{R^2} D \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{K}{R^2} + \frac{2D}{R^4} \right) (-n^2) \\ L_{23} &= -\frac{D}{R^2}(n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K}{R}(n) - \left(\frac{D}{R^4} \right) (-n^3) \\ L_{31} &= -\frac{\nu K}{R} \frac{\partial}{\partial x}, & L_{32} &= \frac{D}{R^2}(-n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{K}{R}(-n) + \left(\frac{D}{R^4} \right) (n^3) \\ L_{32} &= \frac{D}{R^2}(-n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{K}{R}(-n) + \left(\frac{D}{R^4} \right) (n^3) = L_{23} \\ L_{33} &= -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{2D}{R^2}(-n^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{D}{R^4}(n^4) - \frac{K}{R^2} + \\ &K_w \left(1 + \mu \frac{n^2}{R^2} \right) + K_p \left(\frac{n^2}{R^2} + \mu \frac{n^4}{R^4} \right) - \left(\mu K_w + K_p (1 + \mu \frac{2n^2}{R^2}) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu K_p \frac{\partial^4}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (11)$$

معادله (۱۰) یک دسته سه تایی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر حسب زمان و مکان x است که برای استخراج فرکانس‌های طبیعی نانولوله باید حل شود.

۳- حل معادلات حاکم به روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته

در این پژوهش، به علت دقت بالا روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته در حل معادلات دیفرانسیلی حتی با تعداد پایین گره‌ها، برای حل معادلات حاکم به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی نانولوله، از روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته استفاده شده است. همانطور که از روابط (۱۱) مشخص است، در معادلات حاکم مشتق توابع $U(x,t)$ و $V(x,t)$ نسبت به متغیر x تا مرتبه دوم و مشتق تابع $W(x,t)$ تا مرتبه چهارم می‌باشد ولی مشتق مرتبه سوم تابع $W(x,t)$ در معادلات ظاهر نشده است. برای راحتی حل یک ماتریس ستونی $\{X\}_{10 \times 1}$ که شامل توابع مجهول فوق و مشتقات موجود آنها در معادله (۱۰) است بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{X(x,t)\}_{10 \times 1} = \left\{ \{\bar{U}\}^T, \{\bar{V}\}^T, \{\bar{W}\}^T \right\}^T \quad (12)$$

که در رابطه (۱۲) ماتریس‌های $\{\bar{U}\}$ ، $\{\bar{V}\}$ و $\{\bar{W}\}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \{\bar{U}(x,t)\}^T &= \{U(x,t), U^{(1)}(x,t), U^{(2)}(x,t)\} \\ \{\bar{V}(x,t)\}^T &= \{V(x,t), V^{(1)}(x,t), V^{(2)}(x,t)\} \\ \{\bar{W}(x,t)\}^T &= \{W(x,t), W^{(1)}(x,t), W^{(2)}(x,t), W^{(4)}(x,t)\} \end{aligned} \quad (13)$$

که در روابط فوق عدد بالانویس داخل پرانتز مانند (k) به معنی مشتق مرتبه k ام آن عبارت نسبت به متغیر x می‌باشد و بعنوان مثال $U^{(2)}(x,t) = U_{xx}(x,t)$ با استفاده از معادله (۱۰) و (۱۲)، معادلات دیفرانسیل حاکم بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$[R]\{X(x,t)\} - \rho h \left(1 + \mu \frac{n^2}{R^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

که در معادله (۱۴)، ماتریس $[R]_{3 \times 10}$ یک ماتریس 3×10 می‌باشد که مولفه‌های آن در ذیل آمده است.

n ام بدست می‌آید که مود طولی با m نشان داده شده است. همچنین در روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته که در این پژوهش استفاده شده است، موقعیت گره‌ها بر اساس مکان ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف انتخاب شده‌اند تا دقت و پایداری تقریب افزایش یابد. توزیع چبیشف برای گره‌ها بصورت زیر است.

$$x_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right) \right], i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

۴- نتایج عددی

برای استخراج نتایج عددی، نانولوله‌ای به شعاع متوسط $2/32$ نانومتر با خواص مکانیکی مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱ مشخصات فیزیکی نانولوله

Table 1 Physical characteristics of the nanotube

R (nm)	ρ (kg/m ³)	ν	E (TPa)
2.32	1340	0.3	1.06

در این قسمت ابتدا همگرایی نتایج عددی روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته و فرمول‌بندی ارائه شده با افزایش تعداد گره‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در جدول ۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله در مودهای مختلف محیطی (n) و طولی (m) با تعداد متفاوت گره‌ها از ۵ گره تا ۲۱ گره آمده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد مطابق رابطه (۳۱) تعریف شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد گره‌ها نتایج عددی برای همه مودها با سرعت بالایی همگرا شده است و برای تعداد ۱۷ گره نتایج ارائه شده کاملاً همگرا شده است. همگرایی نتایج فقط با ۱۷ گره نشان دهنده سرعت همگرایی بسیار بالای این روش برای حل مساله است. لذا استفاده از روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته منجر به کاهش قابل توجه حجم محاسبات به علت کاهش تعداد گره‌های لازم برای حل مساله می‌شود که از مزایای این روش می‌باشد.

جدول ۲ بررسی همگرایی فرکانس طبیعی با افزایش تعداد گره‌ها در روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته برای مودهای مختلف ($R=2.32nm$, $L/R=10$, $R/h=20$, $\mu=0$)

Table 2 Investigation of convergence of natural frequency with increasing number of nodes in generalized differential quadrature method for different modes ($R=2.32nm$, $L/R=10$, $R/h=20$, $\mu=0$)

	$m=1, n=1$	$m=1, n=2$	$m=1, n=3$	$m=2, n=1$	$m=2, n=2$	$m=2, n=3$
Number of Nodes	$\Omega_{1,1}$	$\Omega_{1,2}$	$\Omega_{1,3}$	$\Omega_{2,1}$	$\Omega_{2,2}$	$\Omega_{2,3}$
5=1+4×1	0.0419	0.5755	0.5931	0.0289	0.0436	1.0805
9=1+4×2	0.0620	0.2061	0.3988	0.0469	0.986	0.1623
13=1+4×3	0.0620	0.1955	0.3433	0.0469	0.0916	0.1690
17=1+4×4	0.0620	0.1955	0.3431	0.0469	0.0916	0.1688
21=1+4×5	0.0620	0.1955	0.3431	0.0469	0.0916	0.1688

سپس برای اعتبار سنجی نتایج حاضر، نتایج پژوهش حاضر برای شرایط مرزی ساده-ساده با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۹] مقایسه شده است. در جدول ۳ مشابه با مرجع [۲۹] فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌صورت رابطه (۳۱) تعریف شده است. شایان ذکر است

$$c_{ij}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^1, i = j$$

و در معادله فوق $M^{(1)}(x_i)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$M^{(1)}(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (x_k - x_j) \quad (20)$$

اکنون برای راحتی در ادامه فرمول‌بندی، تمام مقادیر گره‌ای در ماتریس ستونی $\{d(t)\}$ بصورت زیر جمع می‌شود.

$$\{d(t)\}_{3N \times 1} = \{U(t)\}^T, \{V(t)\}^T, \{W(t)\}^T \quad (21)$$

و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل توسعه یافته و رابطه (۱۶)، می‌توان ماتریس $\{X\}$ را که در رابطه (۱۲) تعریف شد در نقطه x_i بصورت رابطه (۲۲) نوشت.

$$\{X(x_i, t)\} = [G_i]\{d(t)\} \quad (22)$$

و همچنین ترم دوم معادله (۱۴) بصورت زیر قابل نوشتن خواهد بود.

$$\rho h \left(1 + \mu \frac{n^2}{R^2} - \mu \partial_x^2 \right) \left\{ \begin{matrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \end{matrix} \right\} = [m_i]\{\ddot{d}(t)\} \quad (23)$$

که در روابط (۲۲) و (۲۳) ماتریس‌های $[G_i]$ و $[m_i]$ براساس روش گسسته‌سازی GDQ بدست می‌آیند. بطور مثال ماتریس $[m_i]$ بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$[m_i]_{3 \times 3N} = \rho h \begin{bmatrix} m_{11} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & m_{22} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن مولفه‌های ماتریس جرم بصورت زیر تعریف شده است.

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \left(1 + \mu \frac{n^2}{R^2} \right) \{I\}_i - \mu \{C\}_i^{(2)} \quad (25)$$

در رابطه فوق $\{0\} = \{0, 0, 0, \dots, 0\}$ یک ماتریس سطری صفر با N ستون است و $\{I\}_i$ یک ماتریس سطری مانند $\{0\}$ است که ستون نام آن برابر یک و بقیه ستون‌ها صفر می‌باشد. حال با استفاده از معادله (۱۴)، (۲۲) و (۲۳) معادله حاکم در نقطه x_i بصورت زیر گسسته می‌شود.

$$[m_i]\{\ddot{d}\} + [k_i]\{d\} = \{0\} \quad (26)$$

که در رابطه فوق $[k_i]$ ماتریسی است که بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$[k_i]_{3 \times 3N} = [R]_{3 \times 10} [G_i]_{10 \times 3N} \quad (27)$$

با اعمال معادله (۲۷) برای تمامی گره‌های (N گره) موجود در دامنه، دستگاه معادلات دیفرانسیل با $3N$ معادله و $3N$ مجهول بصورت زیر بدست می‌آید.

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{0\} \quad (28)$$

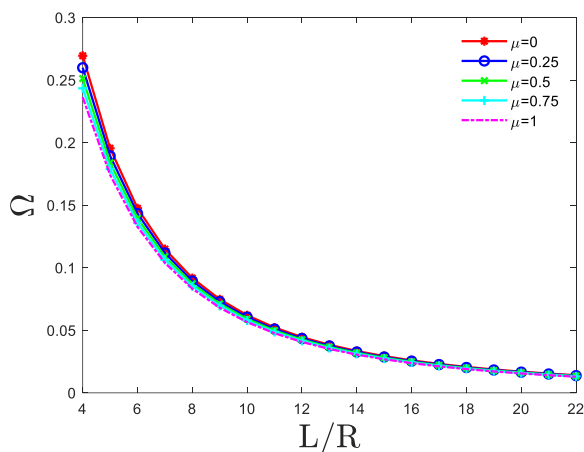
و فرکانس طبیعی نانولوله با مساله مقدار ویژه زیر استخراج می‌شود.

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (29)$$

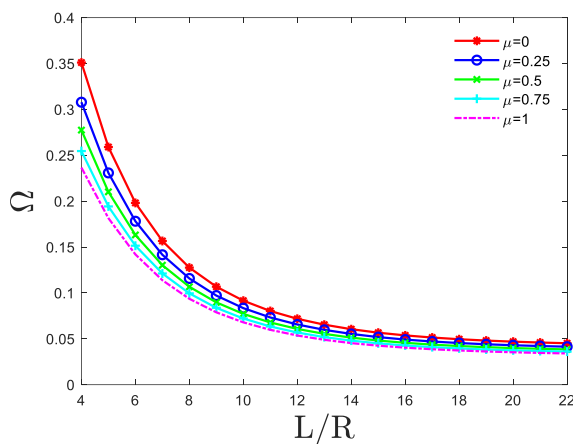
شایان ذکر است که معادله فوق برای مود محیطی n ام است که در معادله (۹) آمده است و با حل معادله فوق، فرکانس‌های طبیعی نانولوله مربوط به مودهای مختلف طولی در مود محیطی

۴-۱ شرایط مرزی ساده-ساده

در شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد که مانند رابطه (۳۱) تعریف شده است برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع (L/R) نانولوله (در شعاع ثابت) و بر حسب مقادیر مختلف پارامتر مقیاس کوچک μ برای شرایط مرزی ساده-ساده آمده است. نسبت شعاع به ضخامت نانولوله برابر با $R/h=20$ انتخاب شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به شعاع L/R ، فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه شعاع ثابت است بنابر این فرکانس طبیعی نانولوله با افزایش نسبت طول به شعاع کاهش یافته است.



(الف)



(ب)

شکل ۲) بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب نسبت L/R و مقادیر مختلف ضریب غیرمحلّی در شرایط مرزی ساده-ساده

(الف) ($R/h=20, n=1, m=1$)، (ب) ($R/h=20, n=2, m=2$)

Fig.2 Investigation of dimensionless natural frequency versus L/R ratio and different values of nonlocal coefficient for simple-simple boundary conditions a) ($R/h=20, n=1, m=1$) b) ($R/h=20, n=2, m=2$)

در شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت (R/h) نانولوله بر حسب مقادیر مختلف پارامتر مقیاس کوچک آورده شده است. همانگونه که در شکل‌های مذکور نیز قابل مشاهده است، با افزایش این نسبت یعنی با کاهش ضخامت فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش پیدا می‌کند.

که مرجع [۲۹] یک حل سه بعدی برای شرایط مرزی ساده-ساده می‌باشد. اختلاف اندک مشاهده شده به علت تفاوت در مدل استفاده شده است.

$$\Omega = \omega R \sqrt{\rho/E} \quad (31)$$

جدول ۳ مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نانولوله کربنی تک‌جداره در شرایط مرزی دوسر ساده ($h/R=0.0034, L/R=2$)

Table 3 Comparison of dimensionless natural frequencies for single-walled carbon nanotubes under simple-simple boundary conditions ($h/R=0.0034, L/R=2$)

m	n	$\mu=0 \text{ nm}^2$		$\mu=0.3 \text{ nm}^2$	
		Ref [29]	Present	Ref [29]	Present
1	1	0.59721	0.60041	0.53951	0.54964
	2	0.34025	0.34297	0.28102	0.29404
	3	0.20145	0.20333	0.14667	0.15881
2	1	0.88357	0.88579	0.65422	0.70097
	2	0.68072	0.68372	0.47474	0.51348
	3	0.50059	0.50446	0.32079	0.35218

همچنین برای شرایط مرزی گیردار-گیردار فرکانس‌های طبیعی در جدول ۴ با مرجع [۳۰] مقایسه شد. در این مرجع فرکانس طبیعی بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده است:

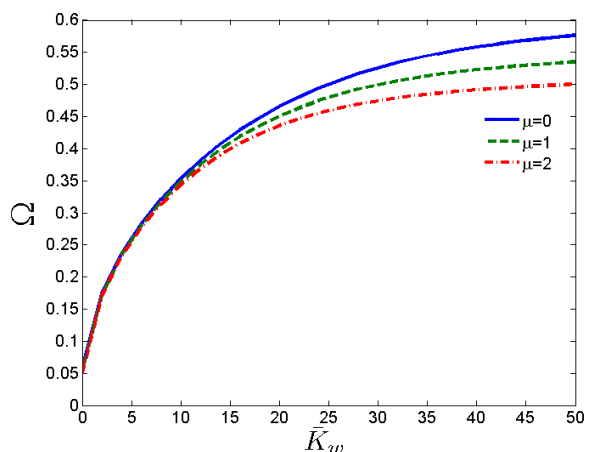
$$\Omega = \omega R \sqrt{(1-v^2)\rho/E} \quad (32)$$

جدول ۴ مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نانولوله کربنی تک‌جداره در شرایط مرزی گیردار-گیردار، ($h/R=0.01, L/R=20, m=1$)

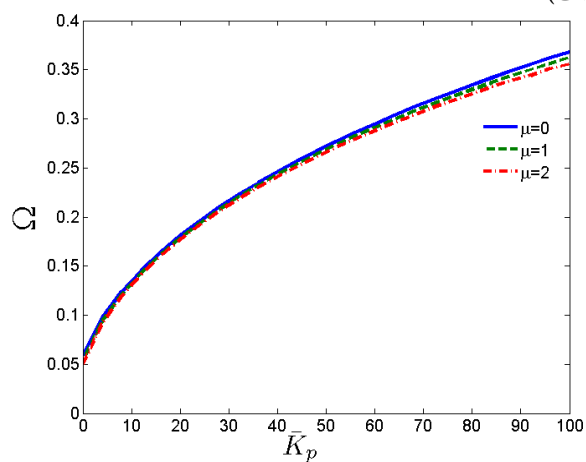
Table 4 Comparison of dimensionless natural frequencies for single-walled carbon nanotubes under clamped-clamped boundary conditions ($h/R=0.01, L/R=20, m=1$)

n	Ref [30]	GDQ
1	0.034395	0.034961
2	0.14256	0.016224
3	0.022713	0.023283
4	0.042216	0.042347
5	0.068051	0.068068

در جداول بالا n شماره موج محیطی و m شماره موج طولی می‌باشند. همانطور که جدول ۳ مشخص است، نتایج بدست آمده برای شرایط مرزی ساده-ساده تطابق قابل قبولی با نتایج مرجع [۲۷] دارد. با توجه به جدول مشخص می‌شود که با افزایش μ مقدار فرکانس کاهش می‌یابد، با افزایش عدد مد طولی m مقدار فرکانس بی‌بعد افزایش و با افزایش عدد موج محیطی n از ۱ تا ۳ فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد. همچنین در جدول ۴ با افزایش مقدار n از ۱ به ۲، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و سپس با افزایش n روند صعودی پیدا می‌کند. نتایج بدست آمده برای شرایط مرزی گیردار-گیردار تطابق قابل قبولی با نتایج مرجع [۳۰] دارد. اختلاف موجود به علت اختلاف در تئوری استفاده شده بین پژوهش حاضر با این تئوری‌ها می‌باشد. در ادامه فرکانس‌های طبیعی نانولوله کربنی برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی بیشتر قرار می‌گیرد و اثر پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه فرکانس طبیعی بی‌بعد مانند رابطه (۳۱) تعریف شده است مگر اینکه به صورت صریح ذکر شده باشد. قابل ذکر است که مقدار ضریب غیر محلی μ برای نانولوله‌ها بین 0.09 تا 4 نانومتر مربع (nm^2) است که در مقالات برای نانولوله‌های کربنی حدود 1 نانومتر مربع (nm^2) در نظر گرفته می‌شود.



(الف)



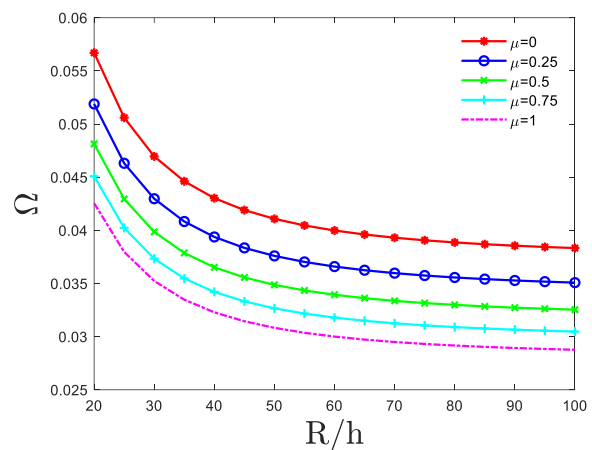
(ب)

شکل ۴ بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب الف) ضرایب وینکلر و ب) ضرایب پاسترناک بی‌بعد در شرایط مرزی ساده-ساده (L/R=10, R/h=50, n=1, m=1)

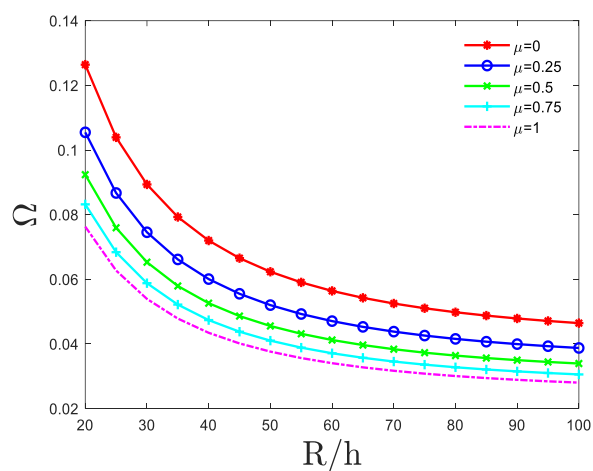
Fig.4 Investigation of dimensionless natural frequency versus a) dimensionless Winkler and b) dimensionless Pasternak coefficients in simple-simple boundary conditions (L/R=10, R/h=50, n=1, m=1)

۴-۲ شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-ساده

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع نانولوله و مقادیر مختلف پارامتر مقیاس کوچک در **شکل ۵ الف و ۵ ب** به ترتیب برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار و گیردار-ساده نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به شعاع فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و فرکانس طبیعی نانولوله گیردار-ساده کوچکتر از گیردار-گیردار است. همچنین فرکانس طبیعی برای سه حالت شرط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار ساده در **شکل ۶** با همدیگر مقایسه شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۳ بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت R/h و ضریب غیر محلی مختلف در شرایط مرزی ساده-ساده الف) (L/R=15, n=2, m=2) ب) (L/R=15, n=3, m=3)

Fig.3 Investigation of dimensionless natural frequency versus R/h ratio and different values of nonlocal parameter in simple-simple boundary conditions a) (L/R=15, n=2, m=2) b) (L/R=15, n=3, m=3)

۴-۱-۲ تاثیر بستر الاستیک

برای بی‌بعد سازی ضرایب بستر الاستیک از روابط زیر استفاده شده است.

$$\bar{K}_w = \frac{k_w L^5}{1000 EI}, \quad \bar{K}_p = \frac{k_p L^3}{EI}, \quad I = \pi R^3 h, \quad (33)$$

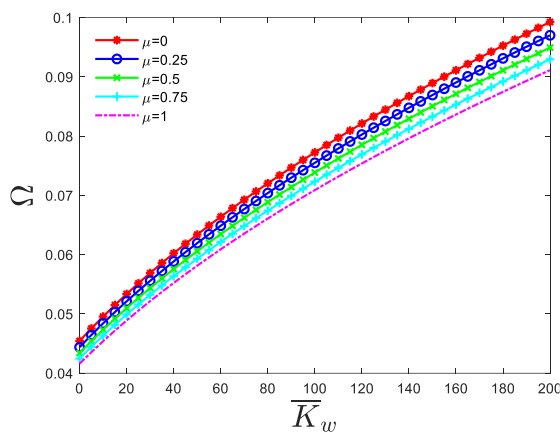
در **شکل ۴** تاثیر بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود، در شکل‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک، فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز افزایش پیدا می‌کند. همانطور که مشخص است با افزایش μ مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

افزایش نسبت طول به شعاع نانولوله فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌شود که در شرایط مرزی گیردار-گیردار فرکانس طبیعی بی‌بعد دارای بیشترین مقدار و همچنین در شرایط مرزی ساده-ساده دارای کمترین مقدار می‌باشد. همچنین در جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت طول به شعاع نانولوله، شرایط مرزی و پارامتر مقیاس کوچک مختلف آمده است.

جدول ۵) فرکانس طبیعی بی‌بعد نانولوله برحسب L/R در شرایط مرزی و پارامتر مقیاس کوچک مختلف ($R/h=20$, $R=2.32\text{nm}$, $n=1$, $m=1$)

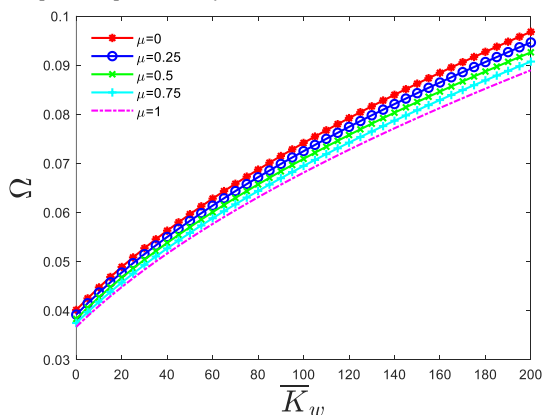
μ	$\mu=0.50\text{ nm}^2$				$\mu=1\text{nm}^2$		
BC	SS	CC	CS	SS	CC	CS	
L/R=10	0.0591	0.0960	0.0760	0.0565	0.0918	0.0726	
L/R=15	0.0280	0.0528	0.0440	0.0269	0.0506	0.0421	
L/R=20	0.0162	0.0335	0.0321	0.0155	0.0321	0.0308	

تاثیر بستر وینکلر بر فرکانس طبیعی در شکل ۷ آمده است.



الف) شرایط مرزی گیردار-گیردار

a) clamped-clamped boundary condition

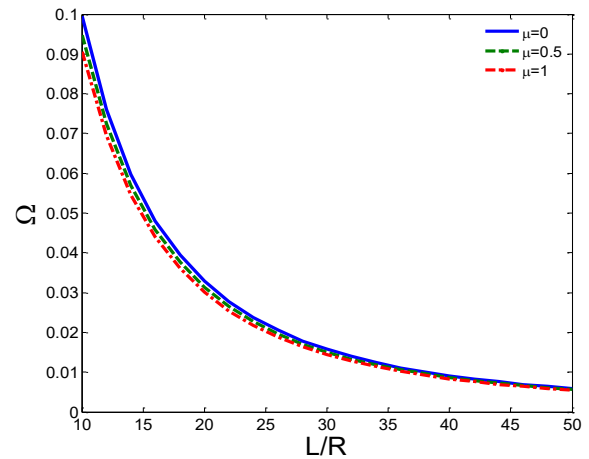


ب) شرایط مرزی گیردار-ساده

b) clamped-simple boundary condition

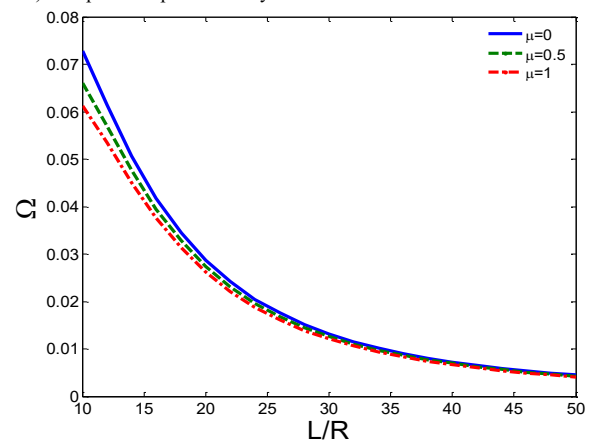
شکل ۷) بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضرایب وینکلر بی‌بعد ($L/R=17$, $R/h=20$, $n=1$, $m=1$)

Fig.7 Investigation of dimensionless natural frequency versus dimensionless Winkler coefficients ($L/R=17$, $R/h=20$, $n=1$, $m=1$)



الف) شرایط مرزی گیردار-گیردار

a) clamped-clamped boundary condition

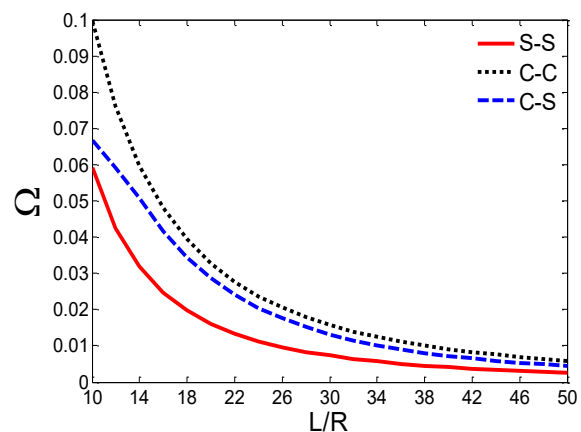


ب) شرایط مرزی گیردار-ساده

b) clamped-simple boundary condition

شکل ۵) بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت L/R و پارامتر غیرمحمولی ($R/h=100$, $n=1$, $m=1$)

Fig.5 Investigation of dimensionless natural frequency versus L/R ratios in ($R/h=100$, $n=1$, $m=1$)



شکل ۶) بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت L/R در شرایط

مرزی مختلف ($R/h=100$, $n=1$, $m=1$, $\mu=0.1\text{nm}^2$)

Fig.6 Investigation of dimensionless natural frequency versus L/R ratios under different boundary conditions ($R/h=100$, $n=1$, $m=1$, $\mu=0.1\text{nm}^2$)

با توجه به شکل ۵ الف و شکل ۵ ب، همانند شرایط مرزی ساده-ساده، در سایر شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-ساده نیز با

کاهش یافته است. شکل مودهای ارتعاشی نانولوله برای حالت $n=1$ و $m=1$ در شکل ۹ برای سه شرط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-ساده نشان داده شده است. برای حالت ساده-ساده و حالت گیردار-گیردار شکل مود ارتعاشی نسبت به وسط لوله متقارن است ولی برای شرط مرزی گیردار-ساده این تقارن مشاهده نمی‌شود. مشاهده می‌شود که حتی با تعداد گره پایین شکل مود بخوبی پیش‌بینی شده است.

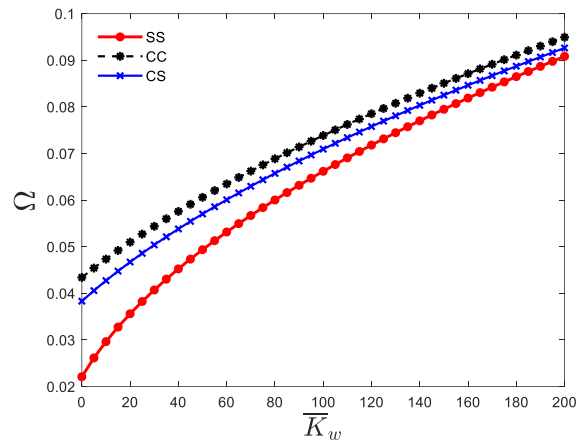
۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره واقع در محیط الاستیک با استفاده از تئوری پوسته‌های نازک و تئوری غیرمحملی ارینگن مدل‌سازی شده و فرکانس‌های طبیعی نانولوله با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته استخراج شده است. برای تایید صحت روابط استخراج شده و روش حل در نظر گرفته شده، مقایسه‌ای با نتایج مقالات موجود انجام گرفته که دقت و تطابق خوب نتایج کار حاضر را نشان می‌دهد. تاثیر پارامترهای از جمله ضریب بستر وینکلر و پاسترناک، پارامترهای هندسی نظیر نسبت طول به شعاع و نسبت شعاع به ضخامت، پارامتر غیرمحملی و شرایط لبه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی نانولوله بررسی شده است. مشاهده شده است که روش عددی مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته به همراه تئوری پوسته نازک لاو می‌تواند با موفقیت برای استخراج فرکانس‌های طبیعی نانولوله استفاده شود. از مزایای عمده این روش سرعت بالای همگرایی نتایج عددی است که در تعداد گره‌های پایین (۱۷ گره در این مساله) همگرایی حاصل شده است که منجر به کاهش هزینه محاسباتی برای روش مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته می‌شود. همچنین با بررسی نتایج عددی موارد زیر قابل استنباط است:

- در شعاع ثابت، با افزایش نسبت طول به شعاع نانولوله، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش پیدا می‌کند و با افزایش نسبت شعاع به ضخامت نانولوله، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند.
- با افزایش ضریب سفتی بستر وینکلر و پاسترناک، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند و با افزایش پارامتر غیرمحملی، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند.
- در این مقاله از تئوری لاو استفاده شده است و مدل استفاده شده برای نانولوله‌های نازک با انحنای ملایم و تحت ارتعاشات خطی دقت بالایی دارد، اما در شرایطی با انحنای زیاد یا بارگذاری دینامیکی قوی نیازمند توسعه به مدل‌های غیرخطی یا مرتبه بالاتر است.

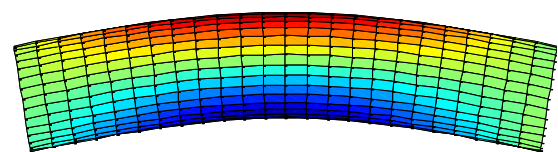
تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

با توجه به شکل ۷ الف و شکل ۷ ب، همانند شرایط مرزی ساده-ساده، در شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار ساده نیز با افزایش ضریب بستر الاستیک وینکلر فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد. همچنین در شکل ۸ تاثیر ضریب بستر الاستیک وینکلر در سه شرایط مرزی مختلف آورده شده است.

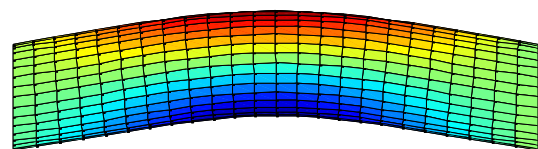


شکل ۸) بررسی فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب وینکلر بی‌بعد در شرایط مرزی مختلف ($L/R=17$, $R/h=20$, $n=1$, $m=1$, $\mu=0.5nm^2$)

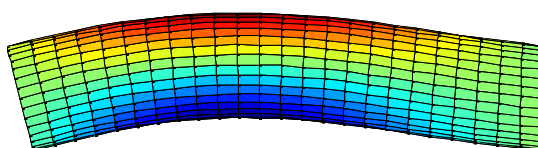
Fig.8 Investigation of dimensionless natural frequency versus dimensionless Winkler coefficient under different boundary conditions ($L/R=17$, $R/h=20$, $n=1$, $m=1$, $\mu=0.5nm^2$)



Simple-Simple



Clamped-Clamped



Simple-Clamped

شکل ۹) شکل مودهای نانولوله برای شرایط مرزی مختلف ($m=n=1$, $L/R=10$)

Fig.9 Modes shape of nanotube for different boundary condition ($m=n=1$, $L/R=10$)

با توجه به شکل بالا مشاهده می‌شود که در شرایط مرزی گیردار-گیردار فرکانس طبیعی بی‌بعد دارای بیشترین مقدار و همچنین در شرایط مرزی ساده-ساده دارای کمترین مقدار می‌باشد. با افزایش ضریب بستر نقش شرط مرزی در مقدار فرکانس طبیعی

تعارض منافع: در این مقاله از برخی نتایج حاصل از پایان‌نامه نویسنده اول استفاده شده است. هیچ تعارض منافع دیگری برای اظهار وجود ندارد.

منابع

- [12] H. Ramezannejad Azarboni, H. Keshavarzpour Primary resonance analysis of a curved single walled carbon nanotubes on the viscoelastic medium in thermal environment under harmonic force. *Modares Mechanical Engineering* 18 (5), pp.211-217, 2018; (In Persian), doi:20.1001.1.10275940.1394.15.3.34.4
- [13] B. Shahriari, , M.T. Ahmadian, V. Ghorbanian Kerdabadi, "Investigation of curved shaped carbon nano tubes behavior on an elastic foundation due to sinusoidal load using nonlocal elasticity theory." *Modares Mechanical Engineering*, pp. 199-209. 2017, (In Persian), doi:20.1001.1.10275940.1395.16.11.35.8
- [14] J. A. Palacios and R. Ganesan, "Dynamic response of single-walled carbon nanotubes based on various shell theories," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 38, no. 9, pp. 413-425, 2019. doi:10.1177/0731684418824997
- [15] M. Kamali Moghaddam, M. Tahani, "Study the effect of environment temperature on mechanical and fracture behavior of carbon nanotubes, " *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 87-92, 2017 (in Persian) doi:20.1001.1.10275940.1396.17.3.42.6
- [16] S. Asghar, M. N. Naeem, and M. Hussain, "Non-local effect on the vibration analysis of double walled carbon nanotubes based on Donnell shell theory," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 116, p. 113726, 2020. doi:10.1016/j.physe.2019.113726
- [17] M. A. De Rosa, M. Lippiello, A. Onorato, and I. Elishakoff, "Free vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal truncated Timoshenko-Ehrenfest beam theory," *Applied Mechanics*, vol. 4, no. 2, pp. 699-714, 2023. doi:10.3390/applmech4020035
- [18] J. Chen et al., "Transverse vibration analysis of double-walled carbon nanotubes in an elastic medium under temperature gradients and electrical fields based on nonlocal Reddy beam theory," *Materials Science and Engineering: B*, vol. 291, p. 116220, 2023. doi:10.1016/j.mseb.2022.116220
- [19] I. Ahmadi, M. Davarpanah, J. Sladek, V. Sladek, and M. N. Moradi, "A size-dependent meshless model for free vibration analysis of 2D-functionally graded multiple nanobeam system," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 46, no. 1, p. 11, 2024. doi:10.1007/s40430-023-04580-5
- [20] I. Ahmadi, M. N. Moradi, and M. D. Panah, "Dynamic response analysis of nanoparticle-nanobeam impact using nonlocal theory and meshless method," *Struct. Eng. Mech*, vol. 89, no. 2, p. 135, 2024. doi:10.12989/sem.2024.89.2.000
- [21] M. Strozzi, I. E. Elishakoff, M. Bochicchio, M. Cocconcini, R. Rubini, and E. Radi, "Nonlocal Strain Gradient Anisotropic Elastic Shell Model for Vibration Analysis of Single-walled Carbon Nanotubes," 2024. doi: 10.20944/preprints202401.0806.v1
- [22] S. K. Jena, S. Pradyumna, and S. Chakraverty, "Thermal vibration of armchair, chiral, and zigzag
- [1] I. Kang et al., "Introduction to carbon nanotube and nanofiber smart materials," *Composites Part B: Engineering*, vol. 37, no. 6, pp. 382-394, 2006. doi:10.1016/j.compositesb.2006.02.011
- [2] S. Iijima, "Helical microtubules of graphitic carbon," *nature*, vol. 354, no. 6348, pp. 56-58, 1991.
- [3] C. Gutschke, "S. Reich, C. Thomsen, J. Maultzsch: Carbon nanotubes, basic concepts and physical properties: Wiley-VCH, 2004," ed: Springer, 2004. doi:10.1007/s00396-004-1180-6
- [4] J. Yoon, C. Ru, and A. Mioduchowski, "Vibration of an embedded multiwall carbon nanotube," *Composites Science and Technology*, vol. 63, no. 11, pp. 1533-1542, 2003. doi:10.1016/S0266-3538(03)00058-7
- [5] C. Wang, V. Tan, and Y. Zhang, "Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 294, no. 4-5, pp. 1060-1072, 2006. doi:10.1016/j.jsv.2006.01.005
- [6] T. Murmu and S. Pradhan, "Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory," *Computational Materials Science*, vol. 46, no. 4, pp. 854-859, 2009. doi:10.1016/j.commatsci.2009.04.019
- [7] M. Şimşek, "Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 43, no. 1, pp. 182-191, 2010. doi:10.1016/j.physe.2010.07.003
- [8] R. Ansari and H. Rouhi, "Analytical treatment of the free vibration of single-walled carbon nanotubes based on the nonlocal Flugge shell theory," *J. Eng. Mater. Technol.* 2012, vol. 134, no. 1, pp. 011008, 2012. doi:10.1115/1.4005347
- [9] R. Ansari, H. Rouhi, and B. Arash, "Vibrational analysis of double-walled carbon nanotubes based on the nonlocal Donnell shell theory via a new numerical approach," *IJST, Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 37, No. M2, pp 91-105, 2013. doi:10.22099/ijstm.2013.1740
- [10] S. Pradhan and U. Mandal, "Finite element analysis of CNTs based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory including thermal effect," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 53, pp. 223-232, 2013. doi:10.1016/j.physe.2013.04.029
- [11] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, "Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, " *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 27-34, 2015 (In Persian), doi:20.1001.1.10275940.1394.15.3.34.4

- types of single walled carbon nanotubes using a nonlocal elasticity theory: An analytical approach," ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 104, no. 4, p. e202301047, 2024.
doi:10.1002/zamm.202301047
- [23] A. Tepe, "Vibration analysis of SWCNTs resting on an elastic foundation using the initial values method: A. Tepe," Journal of Engineering Mathematics, vol. 152, no. 1, p. 20, 2025.
doi:10.1007/s10665-025-10465-4
- [24] E. K. Echouai, A. Adri, O. Outassafte, Y. El Khouddar, I. El Hantati, and R. Benamar, "Analysis of the Transverse Vibrations of a Carbon Nanotube Resting on a Winkler Foundation Subjected to Low-Temperature Thermal Load," in Advanced Materials for Sustainable Energy and Engineering: Volume 1: Novel Nanomaterials for Sustainable Energy: Springer, 2025, pp. 41-53.
doi:10.1007/978-3-031-75032-8_4
- [25] E. K. Echouai et al., "The Effect of Temperature Change on the Transverse Vibration Frequencies of a Carbon Nanotube," in the Proceedings of the International Conference on Smart City Applications, 2024: Springer, pp. 536-547.
doi:10.1007/978-3-031-88653-9_52
- [26] X. Zhang, "Parametric analysis of frequency of rotating laminated composite cylindrical shells with the wave propagation approach," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 191, no. 19-20, pp. 2057-2071, 2002.
doi:10.1016/S0045-7825(01)00368-1
- [27] A. C. Eringen, "Theories of nonlocal plasticity," International Journal of Engineering Science, vol. 21, no. 7, pp. 741-751, 1983.
doi:10.1016/0020-7225(83)90058-7
- [28] C. Shu, Generalized differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation. University of Glasgow (United Kingdom), 1991.
<https://theses.gla.ac.uk/id/eprint/77274>
- [29] A. Alibeigloo and M. Shaban, "Free vibration analysis of carbon nanotubes by using three-dimensional theory of elasticity," Acta Mechanica, vol. 224, pp. 1415-1427, 2013.
doi:10.1007/s00707-013-0817-2
- [30] M. A. Khadimallah, M. Hussain, M. Taj, H. Ayed, and A. Tounsi, "Parametric vibration analysis of single-walled carbon nanotubes based on Sanders shell theory," Advances in Nano Research, vol. 10, no. 2, pp. 165-174, 2021.
doi:10.12989/anr.2021.10.2.165