ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. Eng. *2026;26(08):649-663.*

Modares Mechanical Engineering

DOI:10.48311/mme.2026.117226.82872
journal homepage: mme.modares.ac.ir

An Extension to "Robust cooperative multiple flexible-joint arms control using the q-Bernstein-Schurer operators as the uncertainty approximator: A singular perturbation approach

Karim Bayat[1], Alireza Ezadbakhsh[2], Ali Jamali nazari[3], Amir hooshang Mazinan[1]

[1] Department of Electrical Engineering , ST.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran
[2] Department of Electrical Engineering , Ga. C., Islamic Azad University, Garmsar, Iran
[3] Department of biomedical engineering , Sha. C., Islamic Azad University, Shahrood, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: October 31, 2025
Revised: January 11, 2026
Accepted: January 28, 2026
ePublished: June 17, 2026

ABSTRACT

This paper introduces a robust adaptive controller for cooperative robotic arms with elastic joints. The main innovation of this research lies in the use of Bernstein-type rational functions as approximators for the lumped uncertainty. Unlike previous methods that require numerous and computationally heavy regressor matrices, the proposed approach employs only a single weighting matrix—for instance, of dimensions [small size, e.g., low-order]—which significantly reduces the computational burden. Simulation results demonstrate that this structure leads to substantial improvements in performance indices; specifically, the ISE (Integral Square Error) index in the proposed method (7.468×10^{-3}) shows more than 100-fold improvement compared to conventional fuzzy systems (9.771×10^{-3}) ، Furthermore, adaptation laws for the coefficients of these functions are derived for the first time through Lyapunov stability analysis in a form not previously presented in the mathematical or engineering literature. The uniform ultimate boundedness (UUB) of all signals is guaranteed, and the effectiveness of the algorithm in the presence of parametric variations and noise is verified through simulations on two elastic-joint robots.

Keywords: Bernstein-type rational functions; Collaborative robots; Elastic joints; Function approximation technique

How to cite this article
Bayat K, Ezadbakhsh A.R, Jamali nazari A, Maziznan A.H, An Extension to "Robust cooperative multiple flexible-joint arms control using the q-Bernstein-Schurer operators as the uncertainty approximator: A singular perturbation approach. Modares Mechanical Engineering; *2026;26(08):649-663.*

*Corresponding author's email: alijnazari@iau.ac.ir
*Corresponding ORCID ID: 0000-0002-9427-121X

Copyright© 2026, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

شاپا: ۶۹۰۹-۲۴۷۶؛ مهندسی مکانیک مدرس. ۶۶۳-۶۴۹ :(۰۸)۲۶؛۱۴۰۵

مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.117226.82872

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir

یک افزونه به "کنترل مقاوم همکاری چند بازوی انعطاف‌پذیر با استفاده از عملگرهای q-Bernstein-Schurer به عنوان تخمین‌گر عدم قطعیت: رویکرد اختلال تکین"

کریم بیات[۱]، علیرضا ایزدبخش [۲] ، علی جمالی نظری[۳]، امیرهوشنگ مزینان[۱]

[۱] گروه مهندسی برق، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاداسلامی ، تهران، ایران

[۲] گروه مهندسی برق، واحد گرمسار ، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

[۳] گروه مهندسی پزشکی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاداسلامی , سمنان، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۰۸/۰۹

بازنگری: ۱۴۰۴/۱۰/۲۱

پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۰۸

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۳/۲۷

چکیده

این مقاله یک کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم را برای بازوهای رباتیک همکار با مفاصل الاستیک معرفی می‌کند. نوآوری اصلی این پژوهش در بهره‌گیری از توابع گویای نوع برنشتاین (Bernstein-type rational functions) به عنوان تخمین‌گر عدم قطعیت تجمعی است. بر خلاف روش‌های پیشین که نیازمند ماتریس‌های رگرسور متعدد و حجیم بودند، روش پیشنهادی تنها با استفاده از یک ماتریس وزن‌دهی به عنوان مثال با ابعاد $n\beta_{\Delta} \times n$ ، بار محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که این ساختار منجر به بهبود قابل توجه در شاخص‌های عملکردی شده است، به طوری که شاخص خطای ISEدر روش پیشنهادی(7.468×10^{-3}) در مقایسه با سیستم‌های فازی رایج(9.771×10^{-3}) ، بیش از ۱۰۰ برابر بهبود یافته است. علاوه بر این، قوانین تطبیق برای ضرایب این توابع برای نخستین بار از طریق تحلیل پایداری لیاپانوف استخراج شده‌اند که پیش از این در متون ریاضی و مهندسی بدین صورت ارائه نشده بود. پایداری تمامی سیگنال‌ها به صورت یکنواخت نهایتاً محدود(UUB) تضمین شده و صحت عملکرد الگوریتم در حضور تغییرات پارامتری و نویز، از طریق شبیه‌سازی روی دو ربات الاستیک تایید گردیده است.

کلیدواژه‌ها: توابع گویای برنشتاین ؛ ربات‌های چندگانه همکار با مفصل انعطاف‌پذیر؛ تکنیک تقریب تابع

نحوه ارجاع به این مقاله

بیات کریم، ایزدبخش علیرضا، جمالی نظری علی، مزینان امیرهوشنگ، یک افزونه به "کنترل مقاوم همکاری چند بازوی انعطاف‌پذیر با استفاده از عملگرهای q-Bernstein-Schurer به عنوان تخمین‌گر عدم قطعیت: رویکرد اختلال تکین"، مهندسی مکانیک مدرس. ۶۶۳-۶۴۹ :(۰۸)۲۶؛۱۴۰۵

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: alijnazari@iau.ac.ir

*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: 0000-0002-9427-121X

Copyright© 2026, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

۱. مقدمه

در سیستم‌های رباتیک، دستیابی به کنترل دقیق و مقاوم بر روی چندین بازوی دارای مفصل انعطاف‌پذیر، به دلیل وجود عدم‌قطعیت‌های ذاتی و پیچیدگی در دینامیک سیستم، یک چالش بزرگ محسوب می‌شود. برای مقابله با این چالش، پژوهشگران به بهره‌گیری از رویکردهای نوآورانه با تکیه بر ابزارهای پیشرفته ریاضی و استراتژی‌های کنترلی پرداخته‌اند [۱-۳]. در مرجع [٤] یک نظریه جدید و مؤثر برای مدلسازی تطبیقی معرفی شده که متناسب با ربات‌های همکار دارای مفاصل انعطاف‌پذیر است. این نظریه بر پایه سنتز شبکه‌های پسیو الکتریکی و مکانیکی بنا شده و هدف آن ارائه چارچوبی ساختاریافته و نظری برای طراحی تطابق‌پذیری در مفاصل چرخشی انعطاف‌پذیر است. مرجع [٥] نوع جدیدی از فنر پیچشی تخت را پیشنهاد داده که برای برآورده‌کردن نیازهای عملگرهای الاستیک ربات‌های همکار طراحی شده است. در مرجع [٦] روش‌های کنترلی پویایی بر پایه دینامیک‌های کوپل سخت-انعطاف‌پذیر ویژه ربات‌های انعطاف‌پذیر مطرح شده‌اند.

مرجع [۷] از یک طرح کنترل ترکیبی شامل حلقه‌های کنترلی داخلی و خارجی برای کنترل چند ربات همکار با مفاصل انعطاف‌پذیر بهره برده است. کنترل‌کننده داخلی از یک راهبرد کنترل ردیابی جهانی مبتنی بر مفاهیم دینامیک معکوس مرتبه بالا و اصول استخراج‌شده از قضیه غیرفعال بودن استفاده می‌کند، در حالی‌که کنترل‌کننده حلقه خارجی، امپدانس دلخواه بین دو مجری نهایی و جسم منتقل‌شونده را ایجاد می‌نماید.

الگوریتم مشاهده گشتاور اغتشاش مرتبه دوم توسعه‌یافته در مرجع [۸] نیز بر مدل دینامیکی مفصل انعطاف‌پذیر همکار مبتنی است.

یکی از روش‌های پیشگام در این حوزه، استفاده از تکنیک تقریب تابع یا (FAT) به عنوان تخمین‌گر عدم‌قطعیت، در کنار چارچوب اختلال تکین برای دستیابی به کنترل مقاوم چند ربات همکار با مفاصل انعطاف‌پذیر است [۹]. تکنیک FAT ابزاری پیشرفته برای مدل‌سازی و کاهش عدم‌قطعیت‌های موجود در دینامیک بازوهای رباتیکی با مفصل انعطاف‌پذیر فراهم می‌کند. این تکنیک چارچوبی منعطف برای تقریب مؤلفه‌های نامعین ارائه می‌دهد و موجب افزایش تطبیق‌پذیری و مقاومت سامانه کنترلی می‌شود [۱۰-۱۲].

با یکپارچه‌سازی FAT در معماری کنترلی، مهندسان قادرند عدم‌قطعیت‌هایی ناشی از تغییر بار، اغتشاشات خارجی و دینامیک‌های غیرخطی را به‌خوبی مدیریت کنند، که برای انجام عملکردهای دقیق و مطمئن رباتیک حیاتی است. همچنین، استفاده از رویکرد اختلال تکین، استراتژی کنترلی را تقویت می‌کند، چرا که امکان تجزیه سامانه به دینامیک‌های سریع و کند را فراهم می‌آورد [۱۳-۱٦]. این تجزیه اجازه می‌دهد قوانین کنترلی جداگانه‌ای متناسب با هر بازه زمانی طراحی شوند و در نتیجه، پایداری و عملکرد کلی سامانه بهبود یابد [۱۷-۱۹]. با به‌کارگیری دقیق تکنیک اختلال تکین، سامانه کنترلی قادر خواهد بود تعامل پیچیده بین حرکت جسم صلب و تغییر شکل‌های انعطاف‌پذیر در پیکربندی‌های چند بازویی را به‌خوبی مدیریت کند و حتی در حضور اغتشاشات، مانورهایی روان و هماهنگ ارائه دهد. مراجع [۲۰-۳۰] نمونه‌هایی از ساختارهای مبتنی بر FAT در ادبیات اخیر را ارائه می‌کنند.

مطالعه حاضر به بررسی اثربخشی استفاده از تکنیک تقریب تابع در قالب چارچوب اختلال تکین، برای کنترل تطبیقی مقاوم و همکارانه چند ربات دارای مفاصل انعطاف‌پذیر با بار محاسباتی پایین می‌پردازد. این کار نسخه‌ای توسعه‌یافته‌تر از پژوهش ارائه‌شده در مرجع [۹] است.فرض کنید m بازوی رباتیک مفصل انعطاف‌پذیر داریم، هر کدام با n درجه آزادی .(n-DOF) فرض کنید برای تخمین ماتریس اینرسی، ماتریس گریز از مرکز/کوریولیس و بردارهای گرانشی، باید از عبارات $\beta_N\beta_H$, و β_Gعملگرهای q برنشتاین برای تخمین تابع استفاده کنیم. در نتیجه، ماتریس‌های وزنی در کنترل‌کننده تطبیقی مبتنی بر FATذکرشده دارای ابعاد $mn^2\beta_H \times mn$ ، $mn^2\beta_N \times mn$, $mn\beta_G \times mn$, هستند. اگر m و n افزایش یابند، واضح است که ابعاد ذکرشده در بالا نیز افزایش خواهند یافت. با این حال، روش معرفی‌شده در این مقاله تنها به یک ماتریس وزنی با ابعاد $n\beta_\Delta \times n$ نیاز دارد، کهβ_Δ نشان‌دهنده تعداد توابع پایه‌ای مورد استفاده برای تقریب عدم‌قطعیت تجمیع‌شده را نشان می‌دهد. این موضوع مزیت اصلی روش پیشنهادی نسبت به کنترل‌کننده ارائه‌شده در [۹] محسوب می‌شود. ارزیابی پایداری با استفاده از قضیه لیاپانوف انجام می‌شود تا کرانداری سیگنال‌ها بررسی شود. در نهایت، استراتژی کنترلی پیشنهادی برای کنترل یک سامانه همکار شامل دو بازوی مفصل‌دار انعطاف‌پذیر که یک جسم صلب را حمل می‌کنند، پیاده‌سازی می‌شود. مزایای طرح پیشنهادی به شرح زیر است:

تا جایی که نویسندگان اطلاع دارند، این اولین کاربرد توابع گویای برنشتاین برای تقریب تابع در قالب تطبیقی است. در حالی که مطالعات پیشین هیچ‌گونه دستورالعملی برای تطبیق ارائه نداده‌اند. این ویژگی باعث می‌شود کنترل‌کننده پیشنهادی از محدودیت‌های رایج در روش‌های تطبیقی سنتی غلبه کند .

این روش مشکلاتی که از شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی ناشی می‌شوند ندارد و ساختار ساده‌تری نسبت به موارد فوق با پارامترهای تنظیم کم دارد .

فرآیند را ساده می‌کند و تعداد و ابعاد ماتریس‌های رگرسور مورد نیاز را کاهش می‌دهد .

از بار محاسباتی مربوط به تکنیک‌های نورو-فازی اجتناب کرده و توانایی تقریب تابع بدون وابستگی به حالات سامانه را دارد.

ساختار مقاله به شرح زیر است: بخش ۲ به مبانی توابع گویای برنشتاین برای تقریب عدم‌قطعیت اختصاص دارد. بخش ۳ مدل

دینامیکی بازوهای رباتیک دارای مفصل انعطاف‌پذیر را ارائه می‌دهد. در بخش ۴، ساختار کنترلی پیشنهادی همراه با تحلیل جامع پایداری و بررسی عملکرد گذرای سیستم کنترل‌شده تشریح می‌شود. بخش ۵ شامل نتایج و بحث‌ها است و بخش ۶ به نتیجه‌گیری‌های اصلی می‌پردازد.در ادامه، بزرگ‌ترین/کوچک‌ترین مقادیر ویژه یک ماتریس مثبت معین و کراندار ، به ترتیب با $(\cdot)$ و $\underline{\lambda}(\cdot)/\bar{\lambda}(\cdot)$ نمایش داده می‌شوند. . $\|z\| = \sqrt{z^T z}$ نشان‌دهنده نرم بردار $z \in \Re^n$ و $\|\Im(z)\|$ = $\sqrt{\bar{\lambda}(\Im(z)^T \Im(z))}$ نشان‌دهنده نرم ماتریس $\Im$ است.

۲- تخمین توابع با توابع گویا نوع برنشتاین

فرض کنید$f(t)$ یک تابع پیوسته با مقادیر حقیقی باشد که برای تمام اعداد حقیقی نامنفی تعریف شده است. توابع گویای نوع برنشتاین مرتبط با$f(t)$ به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$R_{\wp}(f;t) = (1+a_{\wp}t)^{-\wp} \sum_{k=0}^{\wp} \binom{\wp}{k} f\left(\frac{k}{b_{\wp}}\right)(a_{\wp}t)^k, \wp = 1,2,\dots \quad (۱)$$

که در آن اعداد حقیقی$a_{\wp}$ و$b_{\wp}$ به‌طور مناسب انتخاب شده‌اند و به t وابسته نیستند. علاوه بر این،

$$\binom{\wp}{k} = \frac{\wp!}{k!\,(\wp-k)!} \quad (۲)$$

نشان‌دهنده ضرایب دوجمله‌ای (binomial coefficients) است. حال فرض کنید $a_{\wp} = \frac{b_{\wp}}{\wp}$ ، برای $\wp = 1,2,\dots$ ، و $\omega_{2A}(\delta)$ نشان‌دهنده مدول پیوستگی تابع $f(t)$در بازه $[0,2A]$ باشد. طبق قضیه ۱ از [۳۱]، فرض کنید $f(t) = o(e^{\alpha t})(t \to$ $(\infty$، برای یک عدد حقیقیα . سپس، برای هر بازه $t \in [0,A]$ $(A > 0)$ نابرابری زیر برقرار است :

$$|R_{\wp}(f;t) - f(t)| \le c_0 \left\{\omega_{2A}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\wp}}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{\wp^2}}\right\} \quad (۳)$$

$\wp$ اگر به اندازه کافی بزرگ باشد، کهc_0 یک ثابت است که فقط بهα و A بستگی دارد. نابرابری آخرنشان می‌دهدکه $R_{\wp}(f;t) \to$ $f(t)$وقتی $t \ge 0$، به شرطی که $\wp$به بی‌نهایت همگرا شود. علاوه بر این، این همگرایی در هر بازه $t \in [0,A]$. محدود یکنواخت است. رابطه (۱) را می‌توان به‌راحتی به‌صورت خطی پارامترپذیربازنویسی کرد، به‌گونه‌ای که حاصل ضرب یک بردار رگرسور شامل توابع پایه و یک بردار شامل پارامترهای نامعلوم اما ثابت باشد.

یعنی :

$$R_{\wp}(f;t) = \varsigma_f^T \varphi_f \quad (۴)$$

جایی که

$$\varsigma_f = [f(0) \quad \wp.f\left(\frac{1}{b_{\wp}}\right) \quad \dots \quad f\left(\frac{\wp}{b_{\wp}}\right)]^T \in \Re^{\wp+1} \quad (۵)$$

$$\varphi_f = \underset{\Re^{\wp+1}}{[(1+a_{\wp}t)^{-\wp} \quad a_{\wp}t(1+a_{\wp}t)^{-\wp} \quad \dots \quad (a_{\wp}t)^{\wp}(1+a_{\wp}t)^{-\wp}]^{\gamma}} \quad (۶)$$

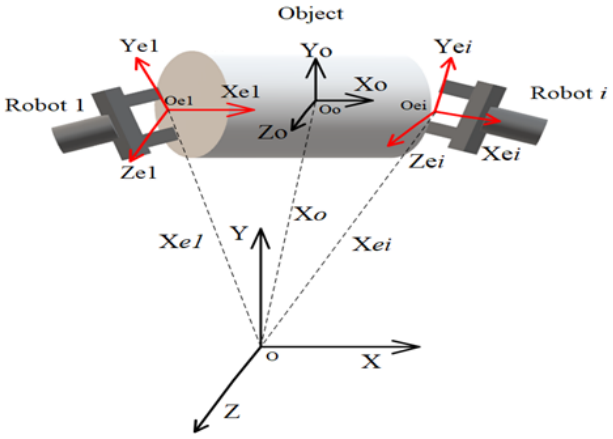
این نوع نمایش در طراحی کنترل‌کننده‌های تطبیقی رایج است.

۳. مدل‌سازی دینامیکی برای ربات‌های بازوی همکار با مفاصل الاستیک

در این پژوهش، فرض شده است که یک تیم متشکل از m بازوی رباتیک مفصل الاستیک داریم که هر کدام دارای n درجه آزادی(DOF) هستند. هدف کنترلی، ردیابی مسیر از پیش تعیین‌شده در فضای کاری توسط مرکز جرم جسم (OMC) در حضور عدم قطعیت‌ها در سیستم رباتیکی است.

۳-۱ نمای کلی سیستم و فرضیات پایه

فرض کنید سیستمی متشکل از m بازو مفصل الاستیک با n درجه آزادی که باید جسمی را در فضای کاری خود کنترل کنند. برای استخراج معادلات دینامیکی سیستم، اولین گام تعریف دستگاه‌های مختصات مجزاست، همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: سیستم مختصات رباتیک

Fig 1. The robotic coordinate system

طبق این شکل،$O_oX_oY_oZ_o$ به مرکز جرم جسم (OMC) متصل شده است. OXYZ چارچوب پایه است. به‌طور متناوب، چارچوب مختصات بازوا ام به صورت $O_{ei}X_{ei}Y_{ei}Z_{ei}$ نشان داده می‌شود و

در نقطه گرفتن آن ثابت است. همچنین، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شوند [۳۲-۳۳]

- فرضیه ۱ فضای کاری و تعداد درجات آزادی تمام ربات‌ها یکسان است؛ به عبارت دیگر، هیچ‌یک از ربات‌ها افزونگی ندارند.
- فرضیه ۲: به دلیل اتصال صلب، هیچ حرکت نسبی بین جسم و تمام مچ‌دست‌های ربات وجود ندارد
- فرضیه ۳: ماتریس ژاکوبی با رتبه کامل و معین در نظر گرفته شده است. همچنین، در سینماتیک هر ربات هیچ عدم قطعیتی وجود ندارد. بنابراین، هنگام حرکت جسم با تکینگی‌های سینماتیکی مواجه نخواهیم بود.
- فرضیه ٤: جسم به‌صورت صلب در نظر گرفته شده است، به طوری‌که نیروهای اعمال‌شده توسط مچ‌دست‌ها باعث تغییر شکل آن نمی‌شود.

۲-۳ مدل دینامیکی بازوها

با استفاده از روش لاگرانژ، می‌توان معادلات دینامیکی حرکت برای هر بازوی ربات با مفاصل الاستیک را به‌صورت زیر استخراج کرد مراجع [۳۴-۳۵] :

$$G_i(\theta_{l,i}) + C_i(\theta_{l,i},\dot{\theta}_{l,i})\dot{\theta}_{l,i} + D_i(\theta_{l,i})\ddot{\theta}_{l,i} + k_i(\theta_{l,i}-\theta_{m,i}) + \tau_{d,i} = -J_{ei}^T(\theta_{l,i})F_{ei}, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{۷}$$

$$J_{ai}\ddot{\theta}_{m,i} + k_i(\theta_{m,i}-\theta_{l,i}) = \tau_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{۸}$$

در اینجا $\theta_{l,i}$ و $\theta_{m,i}$ به‌ترتیب بردارهای $n\times 1$ نشان‌دهنده موقعیت لینک‌ها و موقعیت مفاصل هستند. $D_i(\theta_{l,i})$ نشان‌دهنده ماتریس $n\times n$ اینرسی است. بردار $n\times 1$ $G_i(\theta_{l,i})$ نشان‌دهنده عبارات گرانشی، بردار $n\times 1$ $C_i(\theta_{l,i},\dot{\theta}_{l,i})\dot{\theta}_{l,i}$ نشان‌دهنده اثرات نیروهای گریز از مرکز/کوریولیس و $\tau_{d,i}$ نشان‌دهنده اغتشاشات خارجی است. ماتریس ژاکوبین $n\times n$ با $J_{ei}(\theta_{l,i})$ تعریف می‌شود و F_{ei} بردار $n\times 1$ نیروی اعمال‌شده توسط مچ‌دست iام است. گشتاورهای اعمالی توسط محرک‌ها با $(\tau_i \in \Re^n)$ مشخص می‌شود. k_iوJ_{ai} به‌ترتیب نشان‌دهنده ثابت‌های قطری مثبت با اندازه $n\times n$ به ترتیب برای لختی محرک و سختی مفصل هستند.

شکل یکپارچه معادلات بالا برای m ربات با مفاصل الاستیک به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$G(\theta_l) + C(\theta_l,\dot{\theta}_l)\dot{\theta}_l + D(\theta_l)\ddot{\theta}_l + k(\theta_l-\theta_m) + \tau_d(t) = -J_e^T(\theta_l)F_e \tag{۹}$$

$$J_a\ddot{\theta}_m + k(\theta_m-\theta_l) = \tau \tag{۱۰}$$

$$, \theta_l = \tau = [\tau_1^T \quad \tau_2^T \quad \ldots \quad \tau_m^T]^T \in \Re^{mn}$$
$$[\theta_{l,1}^T \quad \theta_{l,2}^T \quad \ldots \quad \theta_{l,m}^T]^T \in \Re^{mn}, \theta_m = [\theta_{m,1}^T \quad \theta_{m,2}^T \quad \ldots \quad \theta_{m,m}^T]^T \in$$
$$\Re^{mn}, \tau_d = [\tau_{d,1}^T \quad \tau_{d,2}^T \quad \ldots \quad \tau_{d,m}^T]^T \in \Re^{mn}, F_e = [F_{e1}^T \quad \ldots \quad F_{em}^T]^T \in \Re^{mn}, G(\theta_l) = [G_1^T(\theta_{l,1}) \quad \ldots \quad G_m^T(\theta_{l,m})]^T \in \Re^{mn}, J_e(\theta_l) = \text{blockdiag}[J_{e1}(\theta_{l,1}),\ldots,J_{em}(\theta_{l,m})] \in \Re^{mn\times mn},$$
$$C_i(\theta_{l,i},\dot{\theta}_{l,i}) = \text{blockdiag}[C_1(\theta_{l,1},\dot{\theta}_{l,1}),\ldots,C_m(\theta_{l,m},\dot{\theta}_{l,m})] \in \Re^{mn\times mn}, k = \text{blockdiag}[k_1,\ldots,k_m] \in \Re^{mn\times mn}, J_a = \text{blockdiag}[J_{a1},\ldots,J_{am}] \in \Re^{mn\times mn}, \text{ and } D(\theta_l) = \text{blockdiag}[D_1(\theta_{l,1}),\ldots,D_m(\theta_{l,m})] \in \Re^{mn\times mn}$$

که عبارت ارائه‌شده، "blockdiag"نشان‌دهنده ماتریس با ساختار قطری بلوکی است.

۳-۳ مدل دینامیکی جسم

بر اساس [۳۳, ۳٦]، دینامیک حرکت جسم توسط معادله زیرتوصیف می‌شود:

$$D_o(h_o)\ddot{h}_o + C_o(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_o(h_o) = F_o \tag{۱۱}$$

که در آن h_oبردار $n\times 1$نشان‌دهنده موقعیت/جهت‌گیری چارچوب $O_oX_oY_oZ_o$ نسبت به چارچوب OXYZ است. $D_o(h_o)$ ماتریس$n\times n$ اینرسی جسم است که متقارن و مثبت معین است. نیروهای گریز از مرکز/کوریولیس توسط بردار $n\times 1$ $C_o(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o$ توصیف می‌شوند. $G_o(h_o)$بردار $n\times 1$ نیروهای گرانشی را نشان می‌دهد و $F_o \in \Re^n$ نیروی اعمالی به OMC را نشان می‌دهد. فرض کنید:

$$J_o(h_o) = \begin{bmatrix} J_{o1}(h_o) \\ \vdots \\ J_{om}(h_o) \end{bmatrix} \in \Re^{mn\times n} \tag{۱۲}$$

که در آن ماتریس $n\times n$ ژاکوبی $J_{oi}(h_o)$ چارچوب مختصات$O_{ei}X_{ei}Y_{ei}Z_{ei}$ را به ساختار $O_oX_oY_oZ_o$ربات ام نگاشت می‌کند، سپس F_o به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_o = J_o^T(h_o)F_e \tag{۱۳}$$

اگر فرض شود F_o نیروی کل اعمال‌شده به جسم معلوم فرض شود ، F_e نیروی انتهای اجرایی ، که معادله (۱۳) را برآورده می‌کند، دو مؤلفه متعامد شامل مؤلفه مربوط به حرکت جسم و نیروی داخلی تقسیم می‌شود معادله (١٤): حرکت جسم و نیروی داخلی:$(F_I \in \Re^{mn})$

$$F_e = (J_o^T(h_o))^\dagger F_o + F_I \tag{١٤}$$

ماتریس $(J_o^T(h_o))^\dagger$ نشان‌دهنده ماتریس شبه‌معکوس $J_o^T(h_o)$ با ابعاد $mn\times n$ است. علاوه بر این، که در فضای تهی ژاکوبین ترنسپوز معرفی شده، معادله زیر را برآورده می‌کند:

$$J_o^T(h_o)F_I = 0 \tag{۱۵}$$

ترکیب معادلات (۱۱) و (۱۳) دینامیکی جسم و نگاشت نیرو منجر به رابطه‌ای کلی برای نیروی اندافکتورها می‌شود که شامل مؤلفه داخلی و مؤلفه‌ای وابسته به دینامیک جسم است

$$F_e = F_I + (J_o^T(h_o))^{\dagger}(D_o(h_o)\ddot{h}_o + C_o(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_o(h_o)) \quad (۱۶)$$

۳-٤ مدل‌سازی دینامیکی یکپارچه: جسم و ربات‌های همکار

با در نظر گرفتن معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۱)، تعداد کل متغیرهای سیستم برابر با حاصل‌ضرب n در (2m+1) ؛ از این میان، $n(m+1)$ مستقل هستند. . دلیل این امر بر اساس مفروضات ۱ و ۲ این است که مسیر مفصل هر ربات به طور یکتا از مسیر جسم تعیین می‌شود.. بنابراین، رفتار کل سیستم به‌صورت متغیر مستقل h_o مرتبط با جسم بیان می‌شود. در این راستا، فرض کنید $h_{ei} \in \Re^n$ نشان‌دهنده بردار موقعیت/جهت‌گیری انتهای اجرایی iام باشد. بردار $\dot{\theta}_{l,i}$ سرعت فضای مفصل برای توصیف رابطه بین سرعت مفصلی و سرعت اندافکتور، از ماتریس ژاکوبین هر ربات استفاده شده است

$$\dot{h}_{ei} = J_{ei}(\theta_{l,i})\dot{\theta}_{l,i}, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (۱۷)$$

همچنین، رابطه میان سرعت جسم و سرعت اندافکتور با استفاده از ماتریس ژاکوبین جسم بیان شده است ، رابطه بین $\dot{h}_o$ و $\dot{h}_{ei}$ به‌صورت زیر است:

$$\dot{h}_{ei} = J_{oi}(h_o)\dot{h}_o, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (۱۸)$$

با ترکیب (۱۷) و (۱۸)، با ترکیب این دو رابطه، ارتباط بین سرعت مفاصل ربات‌ها و سرعت جسم استخراج می‌شود:

$$J_{ei}(\theta_{l,i})\dot{\theta}_{l,i} = J_{oi}(h_o)\dot{h}_o, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (۱۹)$$

طبق فرضیه ۳، می‌توان استنباط کرد که $J_{ei}(\theta_{l,i})$ معکوس‌پذیر است. بر این اساس، و با در نظر گرفتن اینکه همه بازوهای رباتیک به‌طور همزمان جسم را مدیریت می‌کنند، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\dot{\theta}_l = J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)\dot{h}_o \quad (۲۰)$$

همچنین، مشتق‌گیری از این رابطه، شتاب مفاصل را نیز برحسب متغیرهای جسم نشان می‌دهد:

$$\ddot{\theta}_l = \frac{d}{dt}(J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o))\dot{h}_o + J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)\ddot{h}_o \quad (۲۱)$$

بر اساس معادلات (۱۶)، (۲۰) و (۲۱) با جای‌گذاری روابط قبلی ، مدل دینامیکی اولیه (۹) ربات‌ها، مدل بازنویسی‌شده‌ای برای دینامیک کلی ارائه شده است که شامل تأثیر نیروهای داخلی، دینامیک جسم و ربات‌ها است به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &G(\theta_l) + C(\theta_l,\dot{\theta}_l)J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)\dot{h}_o + D(\theta_l)\frac{d}{dt}(J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)) \quad (۲۲)\\ &+D(\theta_l)J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)\ddot{h}_o + k(\theta_l - \theta_m) + J_e^{T}(\theta_l)F_I + J_e^{T}(\theta\\ &(D_o(h_o)\ddot{h}_o + C_o(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_o(h_o)) = 0 \end{aligned}$$

با ضرب طرفین معادله(۲۲) در $J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)$ ترکیب ماتریس‌های ژاکوبین جسم و معکوس ترانهاده ژاکوبین ربات، و در نظر گرفتن اینکه مؤلفه نیروی داخلی حذف می‌شود$J_o^T(h_o)F_I = 0$، مدل دینامیکی یکپارچه برای سیستم شامل ربات‌ها و جسم استخراج می‌شود

$$\begin{aligned} &M_c(h_o)\ddot{h}_o + C_c(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_c(h_o)\\ &= J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)k(\theta_m - \theta_l) \end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن:

$$M_c(h_o) = J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)D(\theta_l)J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o) + D_o(h_o) \in \Re^{n\times}$$

$$\begin{aligned} C_c(h_o,\dot{h}_o) &= J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)C(\theta_l,\dot{\theta}_l)J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o) + C_o(h_o,\dot{h}_o \quad (۲٤)\\ &+J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)D(\theta_l)\frac{d}{dt}(J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)) \in \Re^{n\times n} \quad) \end{aligned}$$

$$G_c(h_o) = J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)(G(\theta_l) + \tau_d(t)) + G_o(h_o) \in \Re^n$$

بنابراین، معادلات (۱۰) و (۲۳) به‌طور جمعی دینامیک کلی بازوهای همکار چندگانه مفصل الاستیک را توصیف می‌کنند.

فرض کنید همه مقادیر سختی مفصل برابر باشند، یعنی $k = kI_{mn}$ که k در آن یک ثابت اسکالر و I_{mn} یک ماتریس همانی mn در mn است. با توجه به اینکه میرایی مفصل بسیار کم است، منطقی است که مقادیر نسبتاً بزرگی برای سختی مفصل در مقایسه با سایر پارامترهای سیستم در نظر گرفته شود [۳۷]. فرض ایده‌آل‌شده فوق با انتخاب k متعلق به $O(1/\varepsilon^2)$ استخراج می‌شود، که ε نشان‌دهنده یک پارامتر کوچک است. اگر همه مفاصل صلب باشند، معادلات (۱۰) و (۲۳) به معادله (۲۵) ساده می‌شوند:

$$H_c(h_o)\ddot{h}_o + N_c(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_c(h_o) = J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\tau \quad (۲۵)$$

که در آن:

$$H_c(h_o) = M_c(h_o) + J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)J_aJ_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o) \in \Re^{n\times n} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} N_c(h_o,\dot{h}_o) &= C_c(h_o,\dot{h}_o)\\ &+ J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)J_a\frac{d}{dt}(J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o))\\ &\in \Re^{n\times n} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

و $\theta_m = \theta_l$مدل توصیف‌شده توسط معادله (۲۵) نمونه خاصی از مدل ربات‌های همکار چندگانه با مفاصل الاستیک است وقتی که$k \to \infty$

٤- تعریف مسئله

٤-١ مدل تکین مختل‌شده

قانون کنترل به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$\tau = \kappa_v(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) + \tau_r \qquad (۲۸)$$

که τ_r در آن بردار کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم با ابعاد mn در ۱ را نشان می‌دهد که بعداً توضیح داده خواهد شد.$\kappa_v(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m)$ نشان‌دهنده قانون کنترل سریع است که$0 < \kappa_v \in \Re^{mn\times mn}$ یک ماتریس قطری ثابت با عناصری به ترتیب$O(1/\varepsilon)$ را نشان می‌دهد. جایگذاری معادله (۲۸) در معادله (۱۰) منجر به این می‌شود:

$$J_a\ddot{\theta}_m + k(\theta_m - \theta_l) = \kappa_v(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) + \tau_r \qquad (۲۹)$$

متغیر$z = k(\theta_m - \theta_l) \in \Re^{mn}$ را تعریف میکنیم. با انتخابκ_v و فرض مقدار قابل توجهی برای k ، می‌توان بیان کرد:

$$k = \frac{\kappa_1}{\varepsilon^2}, \quad \kappa_v = \frac{\kappa_2}{\varepsilon} \qquad (۳۰)$$

که در آنκ_2 وκ_1 ماتریس‌های mn در mn هستند که به ترتیب $O(1)$ مرتب شده‌اند. سیستم دینامیک کامل در شکل تکین مختل‌شده می‌تواند با جایگذاری تعریف z در معادلات (۲۳) و (۲۹) و سپس بازنویسی کرد، که نتیجه آن در معادلات (۳۱) و (۳۲) قابل مشاهده است.:

$$M_c(h_o)\ddot{h}_o + C_c(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_c(h_o) = J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)z \qquad (۳۱)$$

$$\varepsilon^2 J_a\ddot{z} + \varepsilon\kappa_2\dot{z} + \kappa_1 z = \kappa_1(\tau_r - J_a\frac{d}{dt}(J_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o))\dot{h}_o - J_aJ_e^{-1}(\theta_l)J_o(h_o)\ddot{h}_o) \qquad (۳۲)$$

در دو معادله فوق، متغیرهای h_o و $\dot{h}_o$ می‌توانند به‌عنوان متغیرهای آهسته در نظر گرفته شوند، در حالی که$\dot{z}$ وz متغیرهای سریع را نشان می‌دهند. با استفاده از نتایج نظریه اختلال تکین که توسط [۱۷] مشخص شده، معادلات (۳۱) و (۳۲) را می‌توان به دو سیستم مستقل تقسیم کرد: سیستم حالت شبه‌پایدار و سیستم لایه مرزی قابل نمایش هستند. با $\varepsilon = 0$ ، (۳۲) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\bar{z} = \bar{\tau}_r - J_a\frac{d}{dt}(J_e^{-1}(\theta_l)J_o(\bar{h}_o))\dot{\bar{h}}_o - J_aJ_e^{-1}(\theta_l)J_o(\bar{h}_o)\ddot{\bar{h}}_o \qquad (۳۳)$$

که متغیرها در$\varepsilon = 0$ با یک خط بالای آن‌ها نشان داده می‌شوند. جایگذاری معادله (۳۳) در معادله (۳۱) و استفاده از معادلات (۲۶) و (۲۷)، منجر به این می‌شود:

$$H_c(\bar{h}_o)\ddot{\bar{h}}_o + N_c(\bar{h}_o,\dot{\bar{h}}_o)\dot{\bar{h}}_o + G_c(\bar{h}_o) = J_o^T(\bar{h}_o)J_e^{-T}(\theta_l)\bar{\tau}_r \qquad (۳٤)$$

مهم است که ذکر شود معادله (۳٤)، که به‌عنوان سیستم حالت شبه‌پایدار نامیده می‌شود، در واقع همان مدل صلب (۲۵) است اما$\bar{h}_o$ به‌صورت بیان‌شده است برای$t \geq 0$ ، متغیرهای$h_o(t)$ و$z(t)$ معادلات زیر را دنبال می‌کنند، طبق نظریه تیخونوف:

$$h_o(t) = \bar{h}_o(t) + O(\varepsilon) \qquad (۳۵)$$

$$z(t) = \eta(\tau) + \bar{z}(t) + O(\varepsilon) \qquad (۳٦)$$

که $\tau = t/\varepsilon$ در آن مقیاس زمانی سریع را نشان می‌دهد، $O(\varepsilon)$ عبارات مرتبه ε یا بالاتر را نشان می‌دهد، و $\eta \in \Re^{mn}$ معادله لایه مرزی زیر را برآورده می‌کند:

$$J_a\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \kappa_2\frac{d\eta}{d\tau} + \kappa_1\eta = 0 \qquad (۳۷)$$

با استفاده از تعریف $x = [\eta^T \quad \dot{\eta}^T]^T \in \Re^{2mn}$ و با در نظر گرفتن نتایج ذکرشده قبلی، هر دو سیستم الاستیک (۳۱) و (۳۲) می‌توانند تا مرتبه $O(\varepsilon)$ به‌صورت زیر نشان داده شوند:

$$H_c(h_o)\ddot{h}_o + N_c(h_o,\dot{h}_o)\dot{h}_o + G_c(h_o) = u + J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\eta(t/\varepsilon) \qquad (۳۸)$$

$$\dot{x}(t) = \Gamma x(t) \qquad (۳۹)$$

که در آن:

$$u = J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\tau_r \in \Re^n \qquad (٤۰)$$

و

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{mn} & I_{mn} \\ -J_a^{-1}k & -J_a^{-1}\kappa_v \end{bmatrix} \in \Re^{2mn\times 2mn} \qquad (٤۱)$$

0_{mn} نشان‌دهنده ماتریس صفر، هورویتز است. انتخاب مناسب بهره کنترلκ_v باعث می‌شود سیستم لایه مرزی (۳۹) به‌صورت مجانبی پایدار شود. بنابراین، با مقادیر به اندازه کافی کوچک ،

پاسخ ربات‌های همکار چندگانه مفصل الاستیک به معادله (۲۸) شبیه به سیستم صلب کنترل‌شده صرفاً توسط τ_r است، پس از یک گذار میرا شده اولیه از متغیرهای سریع $\eta(t/\varepsilon)$.

۴-۲ کنترل‌کننده پیشنهادی

طبق معادله (۳۸)، نمایش ریاضی ربات‌های همکار چندگانه با مفاصل الاستیک شامل ماتریس‌های پیچیده‌ای است که سیستم کنترلی را به چالش می‌کشد و قابلیت‌های آن را محدود می‌کند. به بیان ساده، طراحی کنترل‌کننده‌ها برای چنین سیستم‌هایی به دلیل غیرخطی بودن‌ها و عدم قطعیت‌های ذاتی در این ماتریس‌ها و بردارها پیچیده است. این چالش با افزایش تعداد بازوهای همکار و درجات آزادی آن‌ها برجسته‌تر می‌شود. بنابراین، هدف کنترل مدیریت OMC برای دنبال کردن یک مسیر از پیش تعیین‌شده در فضای کار است. کنترل‌کننده باید با اختلالات خارجی و عدم قطعیت‌ها در دینامیک بازوهای همکار چندگانه مفصل الاستیک مقابله کند. علاوه بر این، محدود کردن نیروی اعمالی بر جسم برای جلوگیری از تغییر شکل آن حیاتی است. یک کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم برای ساده‌سازی و کاهش بار محاسباتی مرتبط با استراتژی‌های کنترلی مبتنی بر FAT سنتی برای ربات‌های همکار چندگانه با مفاصل الاستیک معرفی شده است تا این چالش‌ها را برطرف کند. فرض کنید معادله (۳۸) به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$\ddot{h}_o = u + J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\eta(t/\varepsilon) + \Delta(t) \qquad (۴۲)$$

که در آن:

$$\Delta(t) = (I_n - H_c(h_o))\ddot{h}_o - N_c(h_o, \dot{h}_o)\dot{h}_o - G_c(h_o) \in \Re^n \qquad (۴۳)$$

بردار عدم قطعیت‌ها را نشان می‌دهد که شامل تأثیر نوسانات پارامتر و اختلالات خارجی است، با I_n نشان‌دهنده ماتریس همانیn بعدی. با این فرض ، یک قانون کنترل ساده به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$u(t) = \ddot{h}_o^d(t) - K_p e_o(t) - K_d \dot{e}_o(t) - \hat{\Delta}(t) \qquad (۴۴)$$

که درآن K_p و K_d ماتریس‌های بهره مثبت n×n هستند. با استفاده از معادله (۴۴) در معادله (۴۲)، با برخی ساده‌سازی‌های ریاضی، مجموعه معادلات خطای ردگیری زیر به‌دست می‌آید:

$$\ddot{e}_o + K_d\dot{e}_o + K_p e_o = \Delta(t) - \hat{\Delta}(t) + J_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\eta(t/\varepsilon) \qquad (۴۵)$$

که $h_o^d(t)$ در آن مسیر از پیش تعیین‌شده جسم متحرک در فضای کار را نشان می‌دهد و $e_o(t) = h_o(t) - h_o^d(t)$ خطای ردگیریOMC ها را نشان می‌دهد.

فرضیه ۵: $h_o^d(t) \in \Re^n$ مسیر از پیش تعیین‌شده در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، مشتقات آن تا سطح مورد نیاز خاص محدود و یکنواخت پیوسته باقی می‌مانند.

اکنون، با معرفی متغیر حالت $\Xi = [e_o^T \quad \dot{e}_o^T]^T \in \Re^{2n}$ و

$$A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \in \Re^{2n\times 2n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix} \in \Re^{2n\times n} \qquad (۴۶)$$

معادله (۴۵) می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\dot{\Xi} = A\Xi + BJ_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\eta(t/\varepsilon) + B(\Delta(t) - \hat{\Delta}(t)) \qquad (۴۷)$$

واضح است که نادیده گرفتن اثرات خطاهای مدل‌سازی و اختلالات عملکرد سیستم کنترلی را کاهش می‌دهد. یکنواخت محدود بودن $\Xi(t)$ از طریق معادله (۴۷) می‌تواند به‌دست آید اگر قوانین تطبیق به‌گونه‌ای طراحی شوند که همگرایی$\rightarrow \hat{\Delta}(t)$ $\Delta(t)$ را تضمین کنند. با این فرض، تکنیک‌های تخمین تابع برای نمایش $\Delta(t)$ به‌عنوان ترکیبی خطی از توابع منطقی نوع برنشتاین استفاده می‌شوند، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta(t) = \varsigma_\Delta^T\varphi_\Delta + \varepsilon_\Delta \qquad (۴۸)$$

که $\varsigma_\Delta \in \Re^{n\beta_\Delta\times n}$ در آن ماتریس ضرایب توابع منطقی نوع برنشتاین است. β_Δ تعداد توابع پایه استفاده‌شده را نشان می‌دهد. $\varphi_\Delta \in \Re^{n\beta_\Delta}$ بردار نشان‌دهنده توابع پایه است. علاوه بر این، خطای تخمین با $\varepsilon_\Delta \in \Re^n$ مشخص می‌شود. با استفاده از همان مجموعه توابع منطقی نوع برنشتاین، تخمین مرتبط می‌تواند به‌صورت زیر ارائه شود:

$$\hat{\Delta}(t) = \hat{\varsigma}_\Delta^T\varphi_\Delta \qquad (۴۹)$$

که $\hat{\varsigma}_\Delta$ در آن تخمینی از است، با ابعادی مشابه. حالا، با جایگذاری معادلات (۴۸) و (۴۹) در معادله (۴۷)، به‌دست می‌آید:

$$\dot{\Xi} = A\Xi + BJ_o^T(h_o)J_e^{-T}(\theta_l)\eta(t/\varepsilon) + B\tilde{\varsigma}_\Delta^T\varphi_\Delta + B\varepsilon_\Delta \qquad (۵۰)$$

که $\tilde{\varsigma}_\Delta = \varsigma_\Delta - \hat{\varsigma}_\Delta$ در آن خطای تخمین‌ها مرتبط با ضرایب توابع منطقی نوع برنشتاین است.

نکته ۱: مهم است که تأکید شود ورودی τ_r به سیستم اختصاص داده خواهد شد. بنابراین،

$$\tau_r = J_e^T(\theta_l)F_{Ic} + J_e^T(\theta_l)(J_o^T(h_o))^\dagger u \qquad (۵۱)$$

که در آن $F_{Ic} \in \Re^{mn}$ به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$F_{Ic} = K_I(F_{Id} - F_I) + F_{Id} \quad (۵۲)$$

که در آن $K_I \in \Re^{mn\times mn}$ یک ماتریس بهره قطری مثبت است.

۴-۳ تحلیل پایداری

قضیه ۱: با توجه به دینامیک ربات در شکل تکین مختل‌شده (۳۸) و (۳۹)، کنترل‌کننده پیشنهادی (۴۴)، (۵۱) و (۵۲) با تخمین‌گر عدم قطعیت (۴۹) پایداری یکنواخت نهایتاً محدود سیستم کلی را تضمین می‌کند به شرطی که قانون کنترل تطبیق به‌صورت زیر انتخاب شود:

$$\dot{\hat{\zeta}}_\Delta = Q_\Delta^{-1}(\varphi_\Delta \Xi^T \Pi_1 B - \sigma_\Delta \hat{\zeta}_\Delta) \quad (۵۳)$$

که σ_Δ در آن اسکالرهای مثبت هستند، با $Q_\Delta \in \Re^{n\beta_\Delta \times n\beta_\Delta}$ یک ماتریس بهره تطبیق مثبت معین، که قطری و ثابت است.

اثبات: یک تابع کاندیدای لیپانوف به‌صورت زیر معرفی خواهیم کرد:

$$v(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) = \Xi^T \Pi_1 \Xi + \frac{1}{2} x^T \Pi_2 x + Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T Q_\Delta \tilde{\zeta}_\Delta) \quad (۵۴)$$

که در آن نماد $Tr(\cdot)$ عملگر ردیابی را نشان می‌دهد، $\Pi_1 \in \Re^{2n\times 2n}$ راه‌حل معادله لیپانوف است.

$$A^T \Pi_1 + \Pi_1 A + Q = 0_{2n} \quad (۵۵)$$

که Q در آن یک ماتریس مثبت معین است و $\Pi_2 = \begin{bmatrix} \kappa_v + k & J_a \\ J_a & J_a \end{bmatrix} \in \Re^{2mn\times 2mn}$ مثبت معین است. معادله (۵۴) توسط محدودیت‌های زیر محدود می‌شود که به تحلیل پایداری کمک می‌کند:

$$v(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) \le \bar{\lambda}(\Pi') \left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\|^2 + \bar{\lambda}(Q_\Delta) Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \tilde{\zeta}_\Delta) \quad (۵۶)$$

$$v(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) \ge \underline{\lambda}(\Pi') \left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\|^2 + \underline{\lambda}(Q_\Delta) Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \tilde{\zeta}_\Delta) \quad (۵۷)$$

که در آن $\Pi' = blockdiag(\Pi_1, 0.5\Pi_2)$. مشتق‌گیری $v(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta)$ به این نتیجه می‌رسد:

$$\dot{v}(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) = \dot{\Xi}^T \Pi_1 \Xi + \Xi^T \Pi_1 \dot{\Xi} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \Pi_2 x + \frac{1}{2} x^T \Pi_2 \dot{x} - 2Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T Q_\Delta \dot{\hat{\zeta}}_\Delta) \quad (۵۸)$$

با ترکیب معادلات (۳۹)، (۵۰)، (۵۵) و (۵۸)، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$= -\Xi^T Q \Xi - x^T \psi x + 2\Xi^T \Pi_1 B \varepsilon_\Delta - 2Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T (Q_\Delta \dot{\hat{\zeta}}_\Delta - \varphi_\Delta \Xi^T \Pi_1 B)) + 2\Xi^T \Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l) \eta(t/\varepsilon) \quad (۵۹)$$

که در آن

$$\psi = \text{blockdiag}(k, (\kappa_v - J_a)) \in \Re^{2mn\times 2mn} \quad (۶۰)$$

یک ماتریس مثبت معین است. حالا، با پیشنهاد قانون تطبیقی به‌صورت (۵۳)، معادله (۵۹) می‌تواند به‌صورت معادله (۶۱) بازنویسی شود:

$$\dot{v}(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) = -\Xi^T Q \Xi - x^T \psi x + 2\Xi^T \Pi_1 B \varepsilon_\Delta + 2\sigma_\Delta Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \hat{\zeta}_\Delta) + 2\Xi^T \Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l) \eta(t/\varepsilon) \quad (۶۱)$$

نتیجه ۱: در صورتی که تعداد کافی از توابع گویا نوع برنشتاین به کار گرفته شود، می‌توان ترم اصلاحی σ را نادیده گرفت که در نهایت منجر به معادله (۶۲) می‌شود. این حالت موجب همگرایی مجانبی متغیرهای حالت سیستم طبق لم باربالا می‌شود.

$$\dot{v}(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) = -\Xi^T Q \Xi - x^T \psi x + 2\Xi^T \Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l) \eta(t/\varepsilon) \quad (۶۲)$$

از آنجایی که $\|x\| < \|\eta\|$ و $\left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \|\Xi\| \\ \|x\| \end{matrix} \right\|$، سپس داریم:

$$\dot{v} \le -[\|\Xi\| \quad \|x\|] Q_1 \begin{bmatrix} \|\Xi\| \\ \|x\| \end{bmatrix} \le -\underline{\lambda}(Q_1) \left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\|^2 \quad (۶۳)$$

که در آن ماتریس متقارن Q_1 به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \underline{\lambda}(Q) & -\bar{\sigma}(\Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l)) \\ -\bar{\sigma}(\Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l)) & \underline{\lambda}(\Psi) \end{bmatrix} \in \Re^{2\times 2} \quad (۶۴)$$

با $\bar{\sigma}(\Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l))$ اطلاع مقدار تکین حداکثر ماتریس $\Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l)$. به‌راحتی می‌توان نشان داد که Q_1 مثبت معین است اگر:

$$\underline{\lambda}(Q)\underline{\lambda}(\Psi) > \bar{\sigma}^2(\Pi_1 B J_o^T(h_o) J_e^{-T}(\theta_l)) \quad (۶۵)$$

بنابراین، همگرایی مجانبی Ξ و x بر اساس لم باربالات به‌دست می‌آید.

نتیجه ۲: در صورت نادیده نگرفتن خطای تقریب، برخی دستکاری‌ها روی معادله (۶۱) انجام شده که منجر به معادله (۶۶) می‌شود.

$$\dot{v}(\Xi, x, \tilde{\zeta}_\Delta) \le -\frac{1}{2}\underline{\lambda}(Q_1) \left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\|^2 + \frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)} \|\varepsilon_\Delta\|^2 - \sigma_\Delta Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \tilde{\zeta}_\Delta) + \sigma_\Delta Tr(\zeta_\Delta^T \zeta_\Delta) \quad (۶۶)$$

که در آن از روش تکمیل مربعات استفاده کردیم، با در نظر گرفتن اینکه $\|\Xi\|$ کمتر از $\left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\|$ است، همواره نابرابری زیربرقرار است :

$$2Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \hat{\zeta}_\Delta) \le -(Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \tilde{\zeta}_\Delta) - Tr(\zeta_\Delta^T \zeta_\Delta)) \quad (۶۷)$$

با توجه به حد بالای معادله (۵۴) که توسط معادله (۵۶) ارائه شده، می‌توانیم v را به نابرابری (۶۶) به‌صورت زیر مرتبط کنیم:

$$\dot{v} \le -\mu v + \left(\mu\bar{\lambda}(\Pi') - \frac{1}{2}\underline{\lambda}(Q_1)\right) \left\| \begin{matrix} \Xi \\ x \end{matrix} \right\|^2 + \frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)} \|\varepsilon_\Delta\|^2 + \sigma_\Delta Tr(\zeta_\Delta^T \zeta_\Delta) + (\mu\bar{\lambda}(Q_\Delta) - \sigma_\Delta) Tr(\tilde{\zeta}_\Delta^T \tilde{\zeta}_\Delta) \quad (۶۸)$$

انتخاب کنید :

$$\mu \le \min\left\{\frac{\underline{\lambda}(Q_1)}{2\bar{\lambda}(\Pi')}, \frac{\sigma_\Delta}{\bar{\lambda}(Q_\Delta)}\right\} \quad (٦٩)$$

بنابراین، معادله (٦٨) به این صورت ساده می‌شود:

$$\dot{v} \le -\mu v + \frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)}\|\varepsilon_\Delta\|^2 + \sigma_\Delta \mathrm{Tr}(\varsigma_\Delta^T \varsigma_\Delta) \quad (٧٠)$$

بنابراین تا زمانی که $\dot{v} < 0$:

$$v > \frac{1}{\mu}\{\frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)}\sup_{t\ge t_0}\|\varepsilon_\Delta(t)\|^2 + \sigma_\Delta \mathrm{Tr}(\varsigma_\Delta^T \varsigma_\Delta)\} \quad (٧١)$$

حفظ می‌شود. در نتیجه، $\left\|\xi_x^\Xi\right\|$ و $\tilde{\varsigma}_\Delta$ UUB هستند.

٤-٤ تجزیه و تحلیل عملکرد

برای اطمینان از عملکرد رضایت‌بخش کنترل‌کننده پیشنهادی تحت شرایط اولیه، معادله (٧٠) حل شده و رابطه‌ای برای کاهش تابع شبه لیاپانوف در طول زمان به دست می‌آید. این معادله نشان می‌دهد که خطاها به سرعت کاهش یافته و به یک حد کوچک نهایی می‌رسند.:

$$v(t) \le v(t_0)e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{1}{\mu}\{\frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)}\sup_{t\ge t_0}\|\varepsilon_\Delta(t)\|^2 + \sigma_\Delta \mathrm{Tr}(\varsigma_\Delta^T \varsigma_\Delta)\} \quad (٧٢)$$

بر اساس معادله (٥٧)، داریم:

$$\sqrt{\frac{v(\Xi, x, \tilde{\varsigma}_\Delta)}{\underline{\lambda}(\Pi')}} \ge \left\|\xi_x^\Xi\right\| \quad (٧٣)$$

که با استفاده از نابرابری (٧٢) به نابرابری (٧٤) ساده می‌شود:

$$\left\|\xi_x^\Xi\right\| \le \sqrt{\frac{1}{\mu\underline{\lambda}(\Pi')}\{\frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)}\sup_{t\ge t_0}\|\varepsilon_\Delta(t)\|^2 + \sigma_\Delta \mathrm{Tr}(\varsigma_\Delta^T \varsigma_\Delta)\}} + \sqrt{\frac{v(t_0)}{\underline{\lambda}(\Pi')}}e^{-0.5\mu(t-t_0)} \quad (٧٤)$$

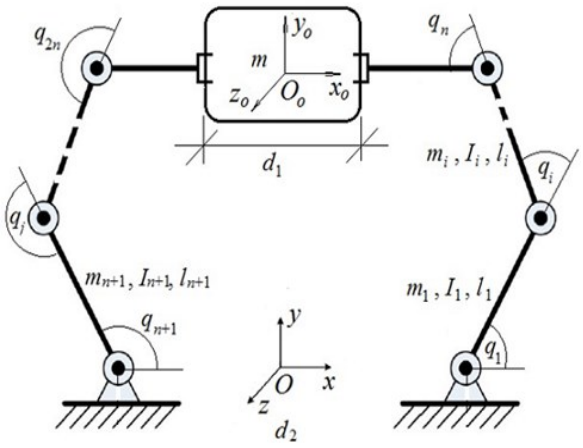
با دنبال کردن همین روش، می‌توانیم حد زیر را نیز استخراج کنیم:

$$\|\tilde{\varsigma}_\Delta\|_F \le \sqrt{\frac{1}{\mu\underline{\lambda}(Q_\Delta)}\{\frac{2\bar{\sigma}^2(\Pi_1 B)}{\underline{\lambda}(Q_1)}\sup_{t\ge t_0}\|\varepsilon_\Delta(t)\|^2 + \sigma_\Delta \mathrm{Tr}(\varsigma_\Delta^T \varsigma_\Delta)\}} + \sqrt{\frac{v(t_0)}{\underline{\lambda}(Q_\Delta)}}e^{-0.5\mu(t-t_0)} \quad (٧٥)$$

که در آن از نابرابری‌های (٥٧)، (٧٢) و تعریف نرم فروبینوس استفاده شده است. این امر تحلیل رفتار گذرا را تسهیل می‌کند.

٥- نتایج شبیه‌سازی

برای ارزیابی کارایی سیستم کنترل‌شده، دو بازوی رباتی با مفصل الاستیک و سه درجه آزادی برای جابجایی بار به کار گرفته شده‌اند



شکل ۲: بازوهای همکار

Fig 2. The cooperating arms

(شکل ۲). پارامترهای مدل دینامیکی، شامل ماتریس‌های ژاکوبین، کوریولیس، اینرسی و نیروهای گرانشی از مرجع [۳۸] گرفته شده است. پارامترهای طول و جرم لینک‌ها، لحظه اینرسی مفاصل، و پارامترهای کنترل به دقت تعیین شده‌اند. کنترل‌کننده پیشنهادی با استفاده از سه ترم اول توابع گویا نوع برنشتاین برای تقریب عدم قطعیت‌ها پیاده‌سازی شده و پارامترهای نرخ یادگیری به صورت ماتریس‌های قطری انتخاب شده‌اند.دو بازوی رباتیک در شبیه‌سازی‌ها با شاخص‌های i=1 ، 2نشان داده شده‌اند. طول لینک‌ها به‌صورت $l_{1,1} = l_{2,1} = 2\mathrm{m}, l_{1,2} = l_{2,2} =$ as $1.5\mathrm{m}$ و $l_{1,3} = l_{2,3} = 0.5\mathrm{m}$ تعریف شده است. جرم لینک‌ها نیز به‌صورت $m_{1,1} = m_{2,1} = 1.5\mathrm{kg}$, و, $m_{1,2} = m_{2,2} = 1\mathrm{kg}$, $m_{1,3} = m_{2,3} = 0.5\mathrm{kg}$ تعیین شده است. علاوه بر این، گشتاورهای اینرسی لینک‌ها با $I_{i,1} = I_{i,2} = 0.7\mathrm{kgm}^2$, $I_{i,3} = 0.3\mathrm{kgm}^2$ for i=1,2 و $0.5\mathrm{kgm}^2$, برای i=1 ، 2نشان داده می‌شوند. همچنین، $J_{ai} = k = 1600$ and $\mathrm{diag}(0.0002, 0.0002, 0.0002)(\mathrm{kg.m}^2)$ برای i=1 ، .2پارامترهای مدل دینامیکی جسم به‌صورت زیر هستند:

$$G_o(h_o) = [0 \quad m_o g \quad 0]^T, \quad D_o(h_o) = blockdiag(m_o, m_o, I_o) \quad (٧٦)$$

که در آن I_o/m_o به‌ترتیب اینرسی/جرم جسم را نشان می‌دهد. پارامترهای ماتریس گرفتن به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$J_{oi}^T(h_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (-1)^{i+1} l_{il} sin(h_{o3}) & (-1)^i l_{il} cos(h_{o3}) & 1 \end{bmatrix}, i = 1,2 \quad (٧٧)$$

که در آن l_{il} فاصله بین انتهای اجرایی‌i ام و OMC را نشان می‌دهد. $m_o = 0.2\text{kg}$ و $I_o = 0.1\text{kgm}^2$ فرض می‌شود هیچ دانشی از دینامیک سیستم وجود ندارد. علاوه بر این، یک اختلال خارجی به سیستم تزریق می‌شود به‌صورت:

$$\tau_{d,i}(t) = [4\cos(2t) \quad \sin(t) + 10\cos(2t) \quad \sin(t)]^T, \ i = 1,2 \qquad (۷۸)$$

مرحله اولیه طراحی شامل انتخاب مناسب برای تعیین بهره κ_v است. انتخاب $\varepsilon = 0.1$ منجر $\kappa_1 = 16I_6$ به می‌شود. حالا، $\kappa_2 = 8I_6$ برای دستیابی به رفتار میرا شده بحرانی برای سیستم لایه مرزی (۳۹)، تنظیم می‌شود، که نتیجه می‌دهد $\kappa_v = 80I_6$. پارامترهای کنترل‌کننده‌ها نیز به‌صورت $K_p = K_d = 200I_3$ و $K_I = 100I_6$ انتخاب شده‌اند.

سه عبارت اول توابع منطقی نوع برنشتاین برای تخمین عدم قطعیت انتخاب شده‌اند. بنابراین، $\hat{\varsigma}_\Delta \in \Re^{9\times 3}$. مقادیر اولیه ماتریس وزنی به‌صورت تصادفی تنظیم شده‌اند. ماتریس نرخ یادگیری به‌صورت $Q_\Delta = 0.1I_9$ انتخاب شده است که I_9 نشان‌دهنده یک ماتریس همانی ۹×۹ است. لطفاً توجه داشته باشید که ماتریس‌های نرخ یادگیری پیشنهادی در مرجع [۹] دارای ابعاد $Q_H = 0.05I_{54}$, $Q_N = 0.1I_{54}$ و $Q_G = 0.01I_{18}$ هستند. بنابراین، رویکرد پیشنهادی ساده‌تر از آن‌هایی است که توسط [۹] ارائه شده‌اند.

برای بررسی کارایی تخمین‌گر پیشنهادی، شبکه عصبی مبتنی بر تابع پایه شعاعی (RBFNN) و سیستم‌های فازی در کنترل‌کننده ارائه‌شده برای تخمین عدم قطعیت‌های تجمعی گنجانده شده‌اند. جزئیات بیشتر را می‌توان در مراجع [۲۰، ۳۹] یافت. لطفاً توجه داشته باشید که تمام پارامترهای کنترلی یکسان هستند به جز تخمین‌گر عدم قطعیت، که با یک تخمین‌گر جدید جایگزین شده است. علاوه بر این، ماتریس‌های نرخ یادگیری برای RBFNNو سیستم‌های فازی به‌ترتیب به‌صورت $Q_\Delta = 0.1I_6$ و $Q_\Delta = 0.1I_9$ انتخاب شده‌اند. جدول ۱ پارامترهای بازخورد و کنترل ضروری برای اجرای هر سه روش را مشخص می‌کند.

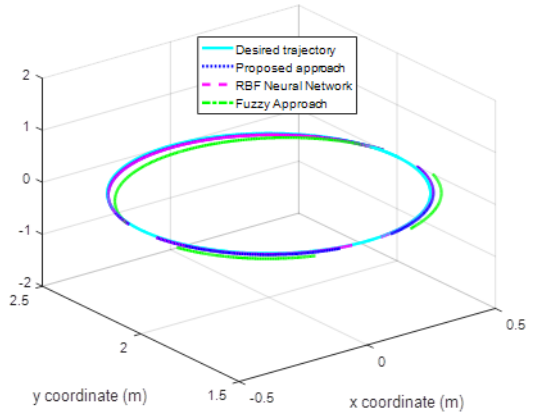
یک مسیر مطلوب برای جسم به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$h_o^d(t) = \begin{bmatrix} 0.5\cos(0.5\pi t) \\ 0.5\sin(0.5\pi t) + 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۹)$$

فرمان نیروی داخلی F_{Id} مطلوب به صفر تنظیم شده است. همچنین، $q(0) = [2.08 \quad -1.91 \quad -0.17 \quad 0.57 \quad 1.91 \quad 0.66]^T$ نشان‌دهنده مقدار اولیه موقعیت مفاصل برای دو بازوی ۳ درجه آزادی است که همان مسیر مطلوب است.

جدول ۱: پارامترهای بازخورد و تنظیم‌پذیر ضروری برای همه رویکردها

حالت‌های مورد نیاز برای تخمین تابع	پارامترهای کنترلی و ماتریس‌های نرخ یادگیری	
Regressor free	$\varepsilon = 0.1, \kappa_1 = 16I_6, \kappa_2 = 8I_6, \kappa_v = 80I_6, K_p = K_d = 200I_3, K_I = 100I_6$, and $Q_\Delta = 0.1I_9$	توابع منطقی نوع برنشتاین
$h_o, \dot{h}_o$	$\varepsilon = 0.1, \kappa_1 = 16I_6, \kappa_2 = 8I_6, \kappa_v = 80I_6, K_p = K_d = 200I_3, K_I = 100I_6$, and $Q_\Delta = 0.1I_9, \hat{\theta}_1$, and σ	سیستم فازی
$h_o, \dot{h}_o$	$\varepsilon = 0.1, \kappa_1 = 16I_6, \kappa_2 = 8I_6, \kappa_v = 80I_6, K_p = K_d = 200I_3, K_I = 100I_6$, and $Q_\Delta = 0.1I_6$, c_β, and δ_β for β=1,2,…,6	شبکه عصبی مبتنی بر تابع پایه شعاعی



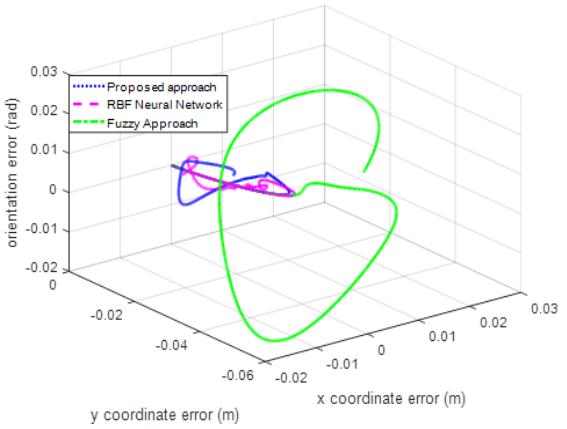
شکل ۳: ردگیری مسیر جسم

Fig3. Path tracking of the object

شکل ۳ مختصات واقعی و هدف OMC را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، همه روش‌های کنترلی علی‌رغم وجود عدم قطعیت‌ها خطاهای ردگیری کوچکی ایجاد می‌کنند. با این حال، استراتژی مبتنی بر فازی شامل پارامترهای قابل تنظیم بیشتری است، از جمله مرکز و عرض تابع عضویت، نوع تابع عضویت و تعداد آن، روش فازی‌سازی/فازی‌زدایی و غیره؛ بهینه‌سازی این پارامترها برای یافتن مناسب‌ترین مقادیر می‌تواند کاری دشوار و زمان‌بر باشد، عمدتاً به این دلیل که شامل فرآیندهای آزمون و خطای مکرر است. علاوه بر این،

برخلاف سیستم‌های فازی و RBFNN که برای تخمین تابع و ساخت بردار رگرسور به حالت‌های سیستم وابسته هستند، رویکرد مبتنی بر توابع منطقی نوع برنشتاین به‌طور مستقل از حالت‌های سیستم عمل می‌کند. این به این دلیل است که این تخمین‌گر عدم قطعیت را به‌عنوان تابعی که با زمان تغییر می‌کند در نظر می‌گیرد نه وابسته به حالت‌های مختلف سیستم. بنابراین، کنترل‌کننده مبتنی بر توابع منطقی نوع برنشتاین دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری و ساختار ساده‌تری نسبت به سایر تخمین‌گرها است.

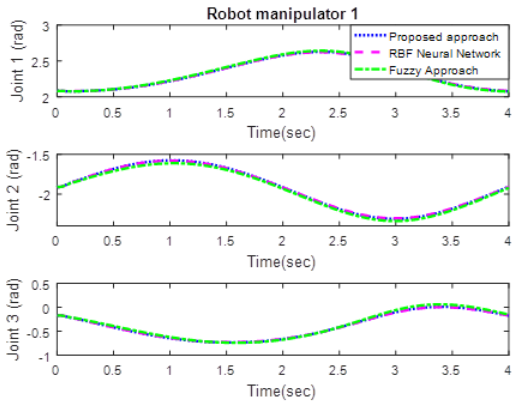
خطاهای ردگیری x-y/ جهت‌گیری OMC در شکل ٤ ارائه شده‌اند



شکل ٤: خطاهای ردگیری جهت‌گیری و موقعیت

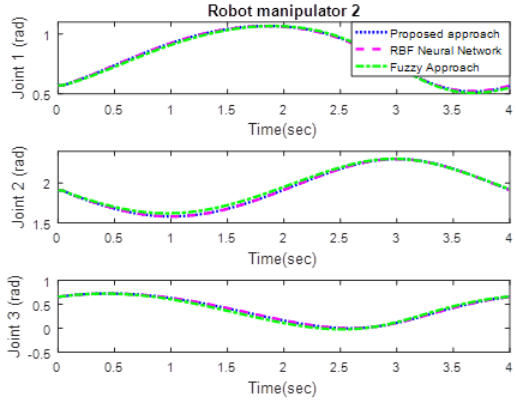
Fig 4. Orientation and position tracking errors

که UUB و کوچک هستند. شکل‌های ٥ و ٦ به‌ترتیب موقعیت‌های زاویه‌ای بازوهای اول و دوم را نشان می‌دهند،که عملکرد ردگیری خوبی دارند.



شکل ٥: موقعیت‌های زاویه‌ای برای بازوی اول

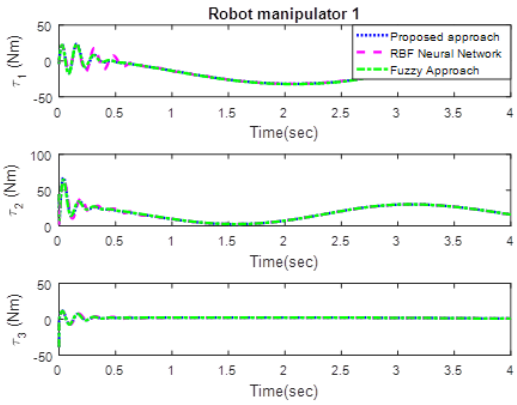
Fig 5. The angular positions for the 1st arm



شکل ٦ موقعیت‌های زاویه‌ای برای بازوی دوم

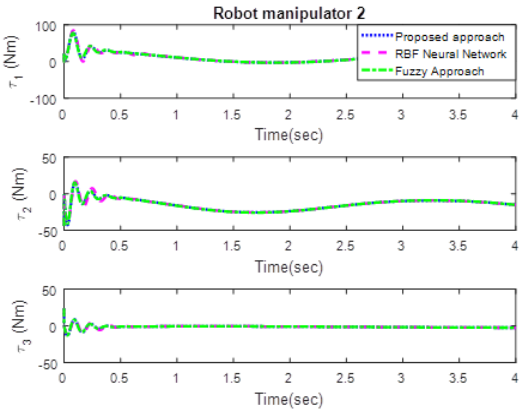
Fig 6. The angular positions for the 2nd arm

شکل‌های ۷ و ۸ سیگنال‌های کنترلی اعمال‌شده بازوها را نشان می‌دهند، که صاف و محدود به نظر می‌رسند.



شکل ۷: سیگنال‌های اعمالی برای بازوی اول

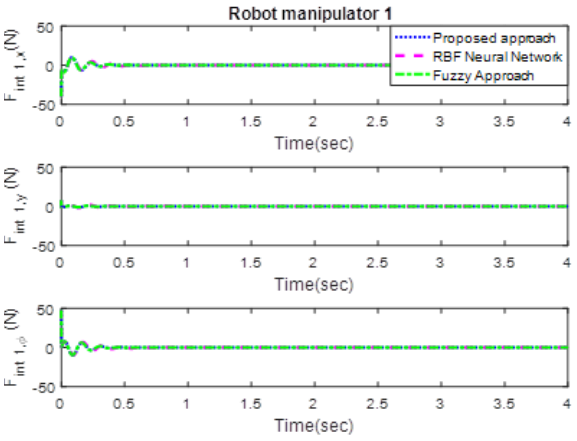
Fig 7. The applied signals for the 1st arm



شکل ۸: سیگنال‌های اعمالی برای بازوی دوم

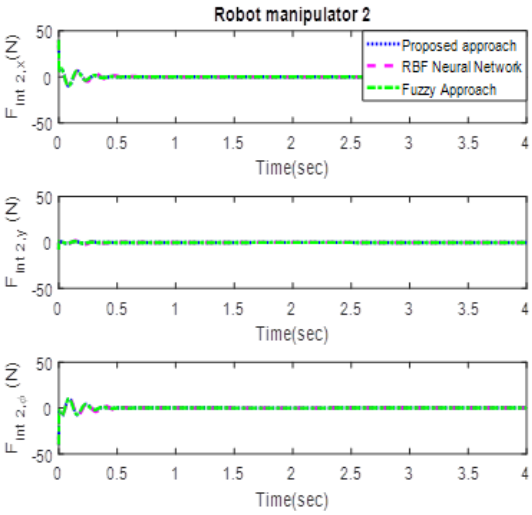
Fig 8. The applied signals for the 2nd arm

در نهایت، خطاهای ردگیری نیروی داخلی در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده‌اند، که عملکرد مؤثر آن را نشان می‌دهند.



شکل ۹: نیروی داخلی بازوی اول

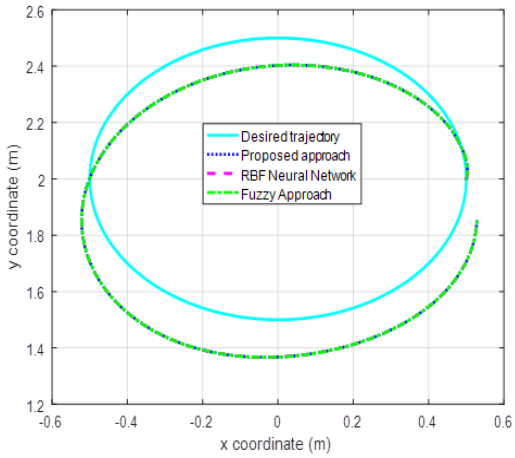
Fig 9. The internal force of the first arm



شکل ۱۰: نیروی داخلی بازوی دوم

Fig 10. The internal force of the second arm

برای نشان دادن اهمیت عبارت$\hat{\Delta}(t)$ در معادله (٤٤)، نتایج بدون آن شبیه‌سازی شده‌اند. این موقعیت نشان‌دهنده سناریوی بهینه برای ارزیابی پایداری UUB سیستم است، در حالی که خطای تخمین ε_4 نادیده گرفته نمی‌شود. شکل ۱۱ نتایج ردگیری مسیر را تحت این شرایط نشان می‌دهد.



شکل ۱۱: ردگیری مسیر جسم در صفحه XY در غیاب عبارت($\hat{\Delta}(t)$

Fig 11. Tracking of the object in the XY plane in the absence of the $\hat{\Delta}(t)$ term

سه شاخص عملکرد برای تسهیل مقایسه دقیق‌تر نتایج در نظر گرفته شده‌اند. شاخص اول انتگرال مربع خطا (ISE) است:

$$\mathrm{ISE} = \int_0^t \|e_o(\iota)\|^2 d\iota \qquad (۸۰)$$

دومی عبارت است از:

$$\mathrm{IAE} = \int_0^t \|e_o(\iota)\| d\iota \qquad (۸۱)$$

علاوه بر این، شاخص سوم را در نظر بگیرید که به‌صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\mathrm{ITAE} = \int_0^t \iota\|e_o(\iota)\| d\iota \qquad (۸۲)$$

که در آن t زمان شبیه‌سازی را نشان می‌دهد. معادلات (۸۰) تا (۸۲) به‌عنوان شاخص‌های ارزیابی استاندارد در زمینه کنترل عمل می‌کنند. جدول ۲ مقادیر متمایز مربوط به شاخص برای شکل ٤ را ارائه می‌دهد. طبق این نتایج، استراتژی پیشنهادی و RBFNNکاهش بیشتری را در هر سه معیار نشان می‌دهند.

جدول ۲: معیار ارزیابی

استراتژی کنترلی	معیار ارزیابی		
	ISE	**IAE**	**ITAE**
توابع منطقی نوع برنشتاین	7.468×10^{-4}	0.05261	0.09455
شبکه عصبی مبتنی بر تابع پایه شعاعی	5.621×10^{-4}	0.03981	0.05218
سیستم فازی	9.321×10^{-3}	0.1891	0.3587

٦- نتیجه‌گیری

این مقاله مسئله ردگیری موقعیت/نیرو یک جسم که توسط بازوهای رباتیک همکار با مفاصل الاستیک جابه‌جا می‌شود را در حالی که با عدم قطعیت‌های ناشناخته و اختلالات خارجی مواجه است بررسی می‌کند. راه‌حل پیشنهادی از یک طرح کنترل تطبیقی استفاده می‌کند که از توابع منطقی نوع برنشتاین به‌عنوان تخمین‌گر برای مدیریت عدم قطعیت‌ها بهره می‌برد. ضرایب توابع منطقی نوع برنشتاین با استفاده از قوانین تطبیقی مشتق‌شده از تحلیل پایداری تنظیم می‌شوند. تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته از روش مستقیم لیپانوف استفاده می‌کند و پایداری یکنواخت نهایتاً محدود را برای همه سیگنال‌های خطا تضمین می‌کند. یک سیستم متشکل از دو بازوی رباتیک ۳

درجه آزادی با مفاصل الاستیک، کنترل‌کننده مشخص‌شده را پیاده‌سازی می‌کند. نتایج استراتژی پیشنهادی با تخمین‌گر فازی و RBFNN مقایسه شده‌اند تا دقت و اثربخشی طراحی کنترل‌کننده پیشنهادی نشان داده شود. نتایج نشان می‌دهند که روش کنترلی پیشنهادی و RBFNN به‌طور مؤثر ردگیری دقیق نیروی داخلی و موقعیت از پیش تعیین‌شده را حتی در حضور اختلالات و عدم قطعیت‌ها انجام می‌دهند.

تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: هیچ تعارض منافعی برای اظهار وجود ندارد.

منابع

[1] S. Dong, R. Kuzuno, K. Otsuka, and K. Makihara, “A novel and efficient Hamiltonian dynamic analysis approach for constraint force determination in flexible multibody systems,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 588, Art. no. 118517, 2024, doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118517.

[2] X. Yu, A. Zwölfer, and A. Mikkola, “An efficient, floating-frame-of-reference-based recursive formulation to model planar flexible multibody applications,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 547, Art. no. 117542, 2023, doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.117542.

[3] C. Zhang, P. Cao, R. Zhu, W. Chen, and D. Wang, “Dynamic modeling and analysis of the spline joint-flexible coupling-rotor system with misalignment,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 554, Art. no. 117696, 2023, doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.117696.

[4] S. Xu and B. He, “A compliance modeling method of flexible rotary joint for collaborative robot using passive network synthesis theory,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 236, no. 8, pp. 4038–4048, 2022, doi: https://doi.org/10.1177/09544062211045678.

[5] Y. Chen, Y. Huang, K. Chen, Y. Wang, and Y. Wu, “Novel torsional spring with corrugated flexible units for series elastic actuators for cooperative robots,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 36, no. 6, pp. 3131–3142, 2022, doi: https://doi.org/10.1007/s12206-022-0531-8.

[6] H. Yin, “Rigid-flexible coupling dynamics-the mechanical basis of lightweight collaborative robot design and control-interpretation of ‘robot rigid-flexible coupling dynamics’,” *China Mechanical Engineering*, vol. 29, no. 24, pp. 3020–3023, 2018, doi:: https://doi.org/10.3969 .1004-132X.2018.24.003

[7] X. Jing, H. Gao, Y. Wang, and Z. Chen, “Cooperative compliance control of the dual-arm manipulators with elastic joints,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 35, no. 12, pp. 5689–5697, 2021,

doi: https://doi.org/10.1007/s12206-021-1214-8

[8] J. Wang, H. Zhu, Y. Guan, and Y. Song, “Sensitive collision detection of second-order generalized momentum flexible cooperative joints based on dynamic feedforward control,” in *2021 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, 2021, pp. 1682–1687, doi: https://doi.org/10.1109/ROBIO54168.2021.9739482

[9] A. Izadbakhsh, A. J. Nazari, and H. Talaei, “Robust cooperative multiple flexible-joint arms control using the q-Bernstein-Schurer operators as the uncertainty approximator: A singular perturbation approach,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 29, no. 21-22, pp. 5035–5052, 2023, doi: https://doi.org/10.1177/10775463221114048.

[10] M. Mursaleen, M. Nasiruzzaman, and A. Nurgali, “Some approximation results on Bernstein-Schurer operators defined by (p, q)-integers,” *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2015, no. 1, p. 249, 2015, doi: https://doi.org/10.1186/s13660-015-0767-4.

[11] H. Karslı, “On approximation to discrete q-derivatives of functions via q-Bernstein-Schurer operators,” *Mathematical Foundations of Computing*, vol. 4, no. 4, pp. 281–292, 2021, doi: https://doi.org/10.3934/mfc.2021020

[12] Q.-B. Cai, “On (p, q)-analogue of modified Bernstein–Schurer operators for functions of one and two variables,” *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 54, no. 1-2, pp. 1–21, 2017, doi: https://doi.org/10.1007/s12190-016-1023-8.

[13] M. Dogan and Ö. Morgül, “On the control of two-link flexible robot arm with nonuniform cross section,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 16, no. 5, pp. 619–646, 2010, doi: https://doi.org/10.1177/1077546309103569.

[14] J. Zhu, J. Zhang, J. Zhu, L. Zeng, and Y. Pi, “A composite controller for manipulator with flexible joint and link under uncertainties and disturbances,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 28, no. 9-10, pp. 1148–1164, 2022, doi: https://doi.org/10.1177/10775463211010549.

[15] J. Zhu, J. Zhang, X. Tang, and Y. Pi, “Adaptive boundary control of a flexible-link flexible-joint manipulator under uncertainties and unknown disturbances,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 29, no. 1-2, pp. 169–184, 2023, doi: https://doi.org/10.1177/10775463211063288.

[16] K. Arezoo, J. Arezoo, B. Tarvirdizadeh, and K. Alipour, “Modeling and control of robotic manipulators equipped with the flexible cable-pulley based gravity compensation mechanism,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 30, no. 5-6, pp. 1077–1092, 2024, doi https://doi.org/10.1177/10775463231164435

[17] P. Kokotović, H. K. Khalil, and J. O’Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1999, doi: https://doi.org/10.1137/1.9781611971118.

[18] P. V. Kokotovic, R. E. O’Malley Jr, and P. Sannuti, “Singular perturbations and order reduction in control theory—an overview,” Automatica, vol. 12, no. 2, pp. 123–132, 1976, doi: https://doi.org/10.1016/0005-1098(76)90076-5

[19] V. R. Saksena, J. O'Reilly, and P. V. Kokotovic, "Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976–1983," *Automatica*, vol. 20, no. 3, pp. 273–293, 1984, doi: https://doi.org/10.1016/0005-1098(84)90044-X.

[20] A. Deylami and A. Izadbakhsh, "Observer-based adaptive control of cooperative multiple manipulators using the Mastroianni operators as uncertainty approximator," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 32, no. 6, pp. 3625–3646, 2022, doi: https://doi.org/10.1002/rnc.5992.

[21] A. Deylami and A. Izadbakhsh, "FAT-based robust adaptive control of cooperative multiple manipulators without velocity measurement," *Robotica*, vol. 40, no. 6, pp. 1732–1762, 2022, doi: https://doi.org/10.1017/S026357472100148X.

[22] P. Kheirkhahan and A. Izadbakhsh, "Observer-based adaptive fractional-order control of flexible-joint robots using the Fourier series expansion: theory and experiment," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 42, no. 10, p. 505, 2020, doi: https://doi.org/10.1007/s40430-020-02588-5

[23] A. Izadbakhsh and N. Nikdel, "Chaos synchronization using differential equations as extended state observer," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 153, p. 111433, 2021, doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111433.

[24] A. Izadbakhsh and N. Nikdel, "Robust adaptive control of Cooperative multiple manipulators based on the Stancu–Chlodowsky universal approximator," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 111, p. 106471, 2022, doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106471.

[25] T. Mao, Z. Shi, and D.-X. Zhou, "Approximating functions with multi-features by deep convolutional neural networks," *Analysis and Applications*, vol. 21, no. 01, pp. 93–125, 2023, doi: https://doi.org/10.1142/S021953052250018X.

[26] A. V. Krivoshein, "Approximation by frame-like multiwavelets," *Analysis and Applications*, 2024, doi: https://doi.org/10.1142/S021953052450007X.

[27] A. Izadbakhsh, N. Nikdel, and A. Deylami, "Cooperative and robust object handling by multiple manipulators based on the differential equation approximator," *ISA Transactions*, vol. 128, pp. 68–80, 2022, doi: https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.02.012.

[28] A. Izadbakhsh, H. Khalesi, and S. Khorashadizadeh, "Chaos synchronization using q-Chlodowsky operators as uncertainty approximator," *Journal of Vibration and Control*, vol. 29, no. 17-18, pp. 4107–4117, 2023, doi: https://doi.org/10.1177/10775463221114052.

[29] A. Izadbakhsh, I. Zamani, and S. Khorashadizadeh, "Szász–Mirakyan-based adaptive controller design for chaotic synchronization," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 31, no. 5, pp. 1689–1703, 2021, doi: https://doi.org/10.1002/rnc.5378.

[30] A.-C. Huang and M.-C. Chien, *Adaptive Control of Robot Manipulators: A Unified Regressor-Free Approach*. Singapore: World Scientific, 2010, doi: https://doi.org/10.1142/9789814313537.

[31] K. Balázs, "Approximation by Bernstein type rational functions," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 26, no. 1-2, pp. 123–134, 1975, doi: https://doi.org/10.1007/BF01896098.

[32] G. Song and L. Cai, "A smooth robust control approach to cooperation of multiple robot manipulators," in *Proc. 1995 American Control Conference (ACC)*, vol. 2, 1995, pp. 1382–1386, doi: https://doi.org/10.1109/ACC.1995.520993.

[33] J.-H. Jean and L.-C. Fu, "An adaptive control scheme for coordinated multi manipulator systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 2, pp. 226–231, 1993, doi: https://doi.org/10.1109/70.238286.

[34] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2008. https://doi.org/10.1007/s12206-021-1214-8

[35] F. Lewis, C. Abdallah, and D. Dawson, "Control of robot manipulators," in *Robot Manipulators*, Canada: Maxwell McMillan, 1993, pp. 25–36. https://doi.org/10.1017/S026357472100148X.

[36] B. Yao and M. Tomizuka, "Adaptive coordinated control of multiple manipulators handling a constrained object," in *Proc. 1993 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, vol. 1, 1993, pp. 624–629, doi: https://doi.org/10.1109/ROBOT.1993.292038

[37] F. Ghorbel, J. Y. Hung, and M. W. Spong, "Adaptive control of flexible-joint manipulators," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 9, no. 7, pp. 9–13, 1989, doi: https://doi.org/10.1109/37.41446.

[38] M. Uchiyama and P. Dauchez, "A symmetric hybrid position/force control scheme for the coordination of two robots," in *Proc. 1988 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, 1988, pp. 350–356, doi: https://doi.org/10.1109/ROBOT.1988.12085.

[39] A. Izadbakhsh, S. Khorashadizadeh, and P. Kheirkhahan, "Real-time fuzzy fractional-order control of electrically driven flexible-joint robots," *AUT Journal of Modeling and Simulation*, vol. 52, no. 1, pp. 11–18, 2020, doi: https://doi.org/10.22060/miscj.2020.17800.5172