ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. *2026;26(05):325-344.*

Modares Mechanical Engineering

DOI: 10.48311/mme.2026.118587.82921
journal homepage: mme.modares.ac.ir

Vibrational Analysis of Rotating Sandwich Beams with Variable Thickness and An Auxetic Core with Metallic Facesheets

Zahra Khoddami Maraghi, Ehsan Arshid*

Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Mahallat Institute of Higher Education, Mahallat, Iran.

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: December 29, 2025
Revised: January 24, 2026
Accepted: January 28, 2026
ePublished: March 04, 2026

ABSTRACT

The present study investigates the dynamic behavior of rotating sandwich beams with variable thickness, consisting of an auxetic core (either extensional or high-damping elastomeric) and metallic face sheets. Such structures are increasingly employed in aerospace, automotive, and advanced rotating tool applications. The modeling is carried out using higher-order shear deformation theory, and the governing equations are derived via Hamilton's principle and solved using the generalized differential quadrature method. Numerical results indicate that increasing the angular velocity leads to a pronounced rise in natural frequencies due to the centrifugal stiffening effect, whereas increasing the tapering parameter results in a reduction of the frequencies owing to the decrease in bending stiffness. In addition, increasing the aspect ratio of the auxetic cell dimensions and decreasing the cell re-entrant angle significantly enhance the natural frequencies. The choice of different metals for the face sheets also has a notable influence on the vibrational response, with steel providing the greatest increase in natural frequency. These findings not only contribute to a deeper understanding of the vibrational behavior of auxetic structures under rotational conditions, but also facilitate the design of advanced systems in the aforementioned industries.

Keywords: Auxetic structures; Dynamic analysis; Variable-thickness sandwich beams; Rotating structures.

How to cite this article
Khoddami Maraghi Z., Arshid E., Vibrational Analysis of Rotating Sandwich Beams with Variable Thickness and An Auxetic Core with Metallic Facesheets. Modares Mechanical Engineering; *2026;26(05):325-344.*

*Corresponding authors' email: e.arshid@mahallat.ac.ir
*Corresponding authors' ORCID ID: 0000-0002-7731-7386

شاپا: ۷۶-۲۴۷۶-۷۹۰۹؛ مهندسی مکانیک مدرس. ۳۴۴-۳۲۵:(۰۵)۲۶؛۱۴۰۵

مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.118587.82921

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشاتی تیرهای ساندویچی دوار با ضخامت متغیر و هسته‌ی آگزتیک دارای رویه‌های فلزی

زهرا خدامی مرقی، احسان آرشید*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، مرکز آموزش عالی محلات، محلات، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۰۸

بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۰۴

پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۰۸

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۱۲/۱۳

چکیده

پژوهش حاضر به تحلیل دینامیکی تیرهای ساندویچی دوار با ضخامت متغیر می‌پردازد که از یک هسته‌ی آگزتیک (اکستنشنال یا الاستومر با میرایی بالا) و رویه‌های فلزی تشکیل شده‌اند. این ساختارها به‌طور فزاینده‌ای در صنایع هوافضا، خودروسازی و ابزارهای دوار پیشرفته مورد استفاده قرار می‌گیرند. مدل‌سازی با بهره‌گیری از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا انجام شده و معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج و به روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته حل شده‌اند. نتایج عددی نشان دادند که افزایش سرعت زاویه‌ای منجر به افزایش چشمگیر فرکانس طبیعی به‌واسطه پدیده سفت‌شوندگی گریز از مرکز می‌شود، در حالی‌که افزایش پارامتر باریک‌شدگی موجب کاهش فرکانس به‌دلیل کاهش سختی خمشی سازه است. همچنین، افزایش نسبت ابعاد سلول‌های آگزتیک و کاهش زاویه انحنای سلول‌ها منجر به افزایش محسوس فرکانس طبیعی شده است. انتخاب فلزات مختلف برای پوسته‌ها نیز تأثیر قابل‌توجهی در پاسخ ارتعاشی داشته، به‌طوری‌که استفاده از فولاد موجب بیشترین افزایش در فرکانس طبیعی گردید. این یافته‌ها نه‌تنها به درک عمیق‌تری از رفتار ارتعاشی سازه‌های آگزتیک در شرایط دوار کمک می‌کنند، بلکه مسیر طراحی سامانه‌های پیشرفته در صنایع مورد اشاره را هموار می‌سازند.

کلیدواژه‌ها: ساختارهای آگزتیک؛ تحلیل دینامیکی؛ تیر ساندویچی ضخامت متغیر؛ سازه‌های دوار

نحوه ارجاع به این مقاله

خدامی مرقی زهرا، آرشید احسان، تحلیل ارتعاشاتی تیرهای ساندویچی دوار با ضخامت متغیر و هسته‌ی آگزتیک دارای رویه‌های فلزی، مهندسی مکانیک مدرس. ۳۴۴-۳۲۵:(۰۵)۲۶؛۱۴۰۵

*پست الکترونیکی نویسندگان عهده‌دار مکاتبات: e.arshid@mahallat.ac.ir

*شناسه ارکید نویسندگان عهده‌دار مکاتبات: 0000-0002-7731-7386

۱- مقدمه

تیرهای ضخامت‌متغیر دوار در بسیاری از کاربردهای مهندسی، به‌ویژه در صنایع هوافضا، انرژی و خودروسازی نقش مهمی ایفا کرده‌اند. این تیرها به دلیل دارا بودن مقطع عرضی یکنواخت یا تدریجاً متغیر در امتداد طول خود، از نظر سازه‌ای و آیرودینامیکی دارای ویژگی‌هایی هستند که موجب افزایش کارایی آن‌ها در سامانه‌های چرخان مانند توربین‌ها، کمپرسورها و روتورها شده است. عملکرد این تیرها تحت تأثیر عوامل گوناگونی نظیر خواص ماده، طراحی هندسی، و شرایط بهره‌برداری قرار دارد. یکی از مزایای کلیدی آن‌ها، قابلیت ساخت ساده‌تر در مقایسه با هندسه‌های پیچیده‌تر است. یکنواختی یا روند تغییر ضخامت در طول تیر، امکان استفاده از فرآیندهای تولید دقیق‌تری مانند اکستروژن، ماشین‌کاری و ریخته‌گری را با دقت بالا و هزینه کمتر فراهم کرده است. سادگی سازه‌ای این تیرها همچنین تعمیر و نگهداری را تسهیل می‌کند و زمان توقف عملیات را کاهش می‌دهد [۱, ۲].

رفتار مکانیکی تیرهای ضخامت‌متغیر تحت بارهای عملیاتی شامل نیروهای گریز از مرکز، فشار آیرودینامیکی و اثرات حرارتی، معمولاً قابل پیش‌بینی است. این ویژگی موجب شده است که تکنیک‌های تحلیلی و عددی بتوانند با دقت مناسبی برای بررسی ویژگی‌های ارتعاشی، عمر خستگی و پایداری دینامیکی آن‌ها به کار روند. این پیش‌بینی‌پذیری، کاربرد آن‌ها را در سامانه‌های دوار با سرعت بالا که به پایداری دینامیکی بالایی نیاز دارند، افزایش داده است.

با این حال، برخی محدودیت‌ها نیز در عملکرد این تیرها مشاهده شده است. یکی از چالش‌ها مربوط به کارایی آیرودینامیکی پایین‌تر آن‌ها در شرایطی است که جریان غیر یکنواخت وجود دارد. در این شرایط، طراحی‌هایی با هندسه‌های پیچیده‌تر مانند تیرهای مخروطی یا پیچ‌خورده عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. همچنین، به دلیل توزیع یکنواخت یا روند ساده‌ی تغییر ضخامت، احتمال بروز مودهای خاص ارتعاشی و پدیده‌های تشدید افزایش می‌یابد که نیازمند بررسی دقیق طراحی برای جلوگیری از شکست در سرعت‌های بالا است. پیشرفت در علوم مواد و دینامیک سیالات محاسباتی زمینه‌ساز توسعه‌ی بیشتر این تیرها شده است. استفاده از مواد مرکب پیشرفته با استحکام بالا و وزن کم، موجب بهبود عملکرد مکانیکی آن‌ها شده است. همچنین، تحلیل‌های عددی پیشرفته امکان بررسی دقیق‌تری از رفتار آیرودینامیکی را فراهم کرده‌اند. در کنار این موارد، استفاده از مواد فعال و حافظه‌دار نیز برای ایجاد قابلیت سازگاری عملکرد در شرایط کاری متغیر مورد توجه قرار گرفته است [۳, ۴].

ساختارهای سلولی به‌دلیل ویژگی‌های منحصربه‌فرد سازه‌ای و مکانیکی، جایگاه مهمی در طراحی سازه‌های سبک و مقاوم یافته‌اند. از میان این ساختارها، پیکربندی‌های لانه‌زنبوری و آگزتیک به‌دلیل قابلیت جذب انرژی بالا، عملکرد دینامیکی مناسب و چگالی کم، توجه گسترده‌ای را در حوزه‌های مختلف مهندسی از جمله هوافضا، پزشکی، خودرو و تجهیزات محافظتی جلب کرده‌اند. ساختارهای لانه‌زنبوری به‌دلیل آرایش منظم سلول‌های شش‌ضلعی، نسبت استحکام به وزن بسیار بالایی دارند و در اجزایی نظیر پانل‌های ساندویچی، بدنه‌ی هواپیما و تجهیزات بسته‌بندی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵–۷]. مواد آگزتیک، که دارای ضریب پواسون منفی هستند، رفتاری غیرمعمول از خود نشان می‌دهند؛ به‌طوری‌که هنگام کشش، در جهت عرضی نیز منبسط شده و در هنگام فشار منقبض می‌گردند. این رفتار که ناشی از آرایش میکروساختاری خاص در این مواد است، منجر به پایداری بیشتر، مقاومت بالاتر در برابر ضربه، و توانایی جذب انرژی بیشتر شده است. ساختارهای آگزتیک می‌توانند به شکل‌های مختلفی طراحی شوند؛ از جمله ساختارهای بازگشتی، واحدهای چرخان و سازه‌های شیره‌ای. با توجه به این ویژگی‌ها، از مواد آگزتیک در کاربردهایی استفاده می‌شود که عملکرد دینامیکی، میرایی ارتعاشات، و استحکام موضعی بالا اهمیت دارند. در سازه‌های ساندویچی، استفاده از مواد آگزتیک به‌عنوان هسته موجب افزایش ظرفیت جذب انرژی، کاهش شدت تنش‌ها در ناحیه اتصال رویه و هسته، و بهبود رفتار ارتعاشی شده است [۸, ۹]. از منظر ارتعاشات، وجود هسته آگزتیک باعث افزایش میرایی مؤثر، تغییر موقعیت فرکانس‌های طبیعی و کاهش شدت رزونانس در شرایط خاص می‌شود. این ویژگی‌ها به‌ویژه در تیرهای ساندویچی دوار و ضخامت‌متغیر اهمیت بیشتری می‌یابد، چرا که در این نوع سازه‌ها، پاسخ دینامیکی بسیار حساس به تغییرات سختی و جرم در طول سازه است. خواص آگزتیک با قابلیت جذب و توزیع یکنواخت‌تر انرژی، پایداری ارتعاشی را در برابر نیروهای گریز از مرکز و تحریک‌های دینامیکی افزایش می‌دهند.

امروزه با گسترش فناوری‌های ساخت مانند چاپ سه‌بعدی و تولید افزایشی، ساخت طرح‌های پیچیده‌ی آگزتیک با دقت بالا و در ابعاد میکرو و نانو ممکن شده است. این امر موجب شده تا کاربردهای بالقوه‌ی مواد آگزتیک در طراحی سازه‌های نوین نظیر تیرهای ساندویچی چرخان بیش از پیش مورد توجه قرار گیرد. در این میان، سازه‌های ساندویچی به‌دلیل ترکیب خواص مکانیکی بالا، وزن کم و امکان طراحی مهندسی دقیق، جایگاه مهمی در طراحی تیرها و پوسته‌های پیشرفته دارند. این سازه‌ها از دو رویه‌ی سخت و مقاوم و یک هسته‌ی سبک تشکیل شده‌اند که وظیفه انتقال برش و جذب انرژی را بر عهده دارد. بسته به نوع هسته (لانه‌زنبوری، فومی، یا آگزتیک)، رفتار کلی سازه می‌تواند تغییرات قابل توجهی داشته باشد. به‌ویژه، تیرهای ساندویچی با ضخامت متغیر یکی از زمینه‌های نوین پژوهشی در حوزه ارتعاشات و پایداری سازه‌ها به شمار می‌آیند. تغییر ضخامت در طول تیر نه‌تنها امکان توزیع بهینه جرم و سختی را فراهم می‌آورد، بلکه شرایط مرزی موثری را نیز در تحلیل دینامیکی ایجاد می‌کند. در سامانه‌های چرخان، ترکیب ویژگی ضخامت متغیر با هسته‌های پیشرفته مانند مواد آگزتیک،

فرصت‌هایی نو برای بهبود عملکرد ارتعاشی، کنترل پدیده تشدید، و افزایش عمر خستگی فراهم می‌سازد. مطالعه‌ی این نوع سازه‌ها از نظر تحلیلی و عددی، نیازمند استفاده از مدل‌های دقیق‌تر است که اثرات چرخش، تغییر ضخامت، خواص وابسته به مکان، و ناهمسانگردی مصالح را در نظر بگیرند. همچنین، بررسی پاسخ دینامیکی تحت اثر بارهای حرارتی، گریز از مرکز و ناپیوستگی‌های هندسی، نقش مهمی در طراحی این سازه‌ها ایفا می‌کند [۱۰, ۱۱].

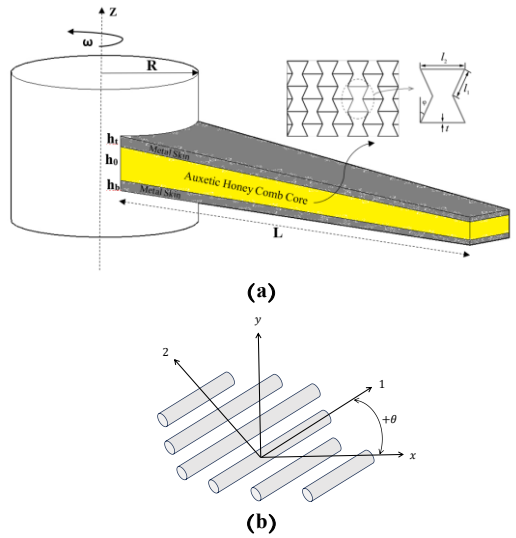
در سال‌های اخیر، مطالعات متعددی پیرامون بررسی رفتار ارتعاشی، پایداری، و عملکرد دینامیکی سازه‌های سلولی، ساندویچی، و آگزتیک انجام گرفته است. در یکی از این مطالعات، توسط تیان [۱۲]، مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشی صفحات میکروسلولی متخلخل با حرکت دوجهته در معرض جریان مافوق صوت و تحت بارگذاری‌های حرارتی، مغناطیسی، رطوبتی و مکانیکی انجام گرفت. در این پژوهش، از تکنیک‌های عددی و یادگیری ماشین به‌منظور پیش‌بینی پاسخ‌های دینامیکی استفاده شد و تأثیر عواملی نظیر توزیع تخلخل، بار پیرو، ضریب گرادیان کرنش، نسبت ابعاد و بستر ویسکوالاستیک ارتوتروپ مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن بود که افزایش رطوبت موجب گسترش ناحیه ناپایداری و اعمال میدان مغناطیسی باعث کاهش آن گردید. در مطالعه‌ای دیگر، امیر و همکاران [۱۳] تحلیل ارتعاش خمشی آزاد صفحات منحنی تابعی با ساختار سلولی در محیط تصادفی را بررسی کردند. در این تحقیق، فرمول‌بندی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا و با لحاظ فرضیات غیرخطی فون‌کارمان توسعه یافت. عدم قطعیت‌های خواص ماده با استفاده از روش اختلال مرتبه اول مدل‌سازی و پاسخ آماری فرکانس‌های خطی و غیرخطی سازه استخراج شد. نتایج به وضوح نشان داد که ناهمگونی‌های هندسی و مادی تأثیر چشم‌گیری بر پاسخ دینامیکی این سازه‌ها دارند. چن و همکاران [۱۴] به مدل‌سازی چندمقیاسی تیرهای متخلخل با ساختار لایه‌ای و خواص تابعی پرداختند. در این پژوهش، از همگن‌سازی مبتنی بر المان محدود برای محاسبه مدول یانگ فوم‌های سلول‌بسته استفاده شد. سپس، اثر چگالی نسبی و هندسه سلول بر مدول مکانیکی بررسی و روابط کمی استخراج گردید. در بخش تحلیل سازه‌ای، رفتار کمانشی و ارتعاشی تیرهای لایه‌ای متخلخل با تئوری تیموشنکو و روش ریتز مدل‌سازی شد. نتایج نشان داد که وجود تخلخل تابعی موجب افزایش بیش از ۳۰ درصدی در بار بحرانی کمانش و افزایش حدود ۱۰ درصدی در فرکانس طبیعی اول گردید. بولت و همکاران [۱۵] انواع مختلفی از تیرهای آگزتیک را طراحی و ویژگی‌های ارتعاشی آن‌ها را از دیدگاه برداشت انرژی بررسی کردند. در این پژوهش، از تحلیل‌های تجربی و عددی برای مقایسه پاسخ تیرها تحت ارتعاش تحمیلی استفاده شد. همچنین، برای افزایش تحریک آیرودینامیکی، از هندسه گالوپینگ در انتهای تیرها بهره گرفته شد. یافته‌ها نشان داد که طراحی آگزتیک منجر به بهبود عملکرد ارتعاشی و افزایش بازدهی سامانه برداشت انرژی گردید. سادیکباشا و همکاران [۱۶] عملکرد دینامیکی یک تیر طره‌ای سلولی را با استفاده از مدل همگن‌سازی‌شده بررسی کردند. نتایج نشان داد که پاسخ‌های ارتعاشی مدل همگن‌شده تطابق خوبی با مدل واقعی داشته و خطای آن کمتر از ۱۰ درصد بوده است. همچنین، زمان محاسباتی در مدل همگن‌شده به‌طور چشم‌گیری (تا ۷۵ درصد) کاهش یافت. این تحقیق اثربخشی روش همگن‌سازی را به‌عنوان ابزاری دقیق و سریع برای تحلیل دینامیکی سازه‌های سلولی تأیید نمود. روزن و اسکارپا [۱۷] به تحلیل انتشار موج در تیرهای ساندویچی با هسته سلولی پرداختند. در این پژوهش، از مدل تئوری برای استخراج ماتریس انتقال واحد سلولی استفاده شد و سپس با بازنویسی آن، مدل اجزای محدود طیفی تدوین گردید. نتایج نشان داد که طراحی مناسب ساختار تناوبی می‌تواند انتشار موج را در بازه‌های خاص فرکانسی به‌طور مؤثری تضعیف کرده و به‌عنوان روشی ساده و بدون نیاز به کنترل‌کننده‌های اضافی در طراحی سازه‌های فیلترکننده مورد استفاده قرار گیرد. ژائو و همکاران [۱۸] رفتار ارتعاشی غیرخطی تیرهای تابعی ساخته‌شده از فرامواد آگزتیک مبتنی بر گرافن‌اریگامی را مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش، خواص مکانیکی به‌صورت لایه‌ای و تابعی در راستای ضخامت تعریف گردید و برای تخمین دقیق آن‌ها از مدل‌های میکرومکانیکی مبتنی بر برنامه‌ریزی ژنتیک استفاده شد. معادلات حاکم با روش مربعات دیفرانسیلی حل گردید و مشخص شد که با تنظیم محتوای گرافن، الگوی توزیع و پارامترهای هندسی، می‌توان رفتار ارتعاشی تیر را به‌صورت مؤثر کنترل نمود. در نهایت، ابراهیمی و مهین‌زارع [۱۹] به بررسی رفتار ارتعاشی غیرخطی صفحات ساندویچی با لایه نانوکامپوزیتی تقویت‌شده با گرافن و هسته آگزتیک پرداختند. در این تحقیق، اثر تخلخل، ضخامت لایه‌ها و اعمال بار الکتریکی بر فرکانس‌های طبیعی تحلیل گردید و مشخص شد که استفاده از ساختارهای سلولی و نانوکامپوزیتی نقش مؤثری در بهبود پاسخ دینامیکی سازه ایفا می‌کند. همچنین پژوهش‌های مشابه دیگری نیز در این زمینه وجود دارند که می توان در مراجع [۲۰–۲۶] آن‌ها را مشاهده کرد.

با مرور جامع پیشینه، مشخص شد که اکثر مطالعات موجود بر روی تیرهای ساندویچی با ضخامت ثابت یا هسته‌های متعارف متمرکز بوده‌اند و بررسی همزمان اثرات چرخش، ضخامت متغیر، هسته‌ی آگزتیک و رویه‌های فلزی بر رفتار ارتعاشی به صورت نظام‌مند مورد غفلت واقع شده است. به‌ویژه، تأثیر پارامترهای ریزی مانند زاویه‌ی سلول آگزتیک، نسبت ابعادی و اثرات کوپل دینامیکی ناشی از چرخش بر فرکانس‌های طبیعی در شرایط مختلف مرزی، در مطالعات پیشین به اندازه‌ی کافی مورد کاوش قرار نگرفته است. پژوهش حاضر با درنظرگیری این تعاملات پیچیده و ارائه‌ی یک مدل تحلیلی-عددی دقیق مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالای سینوسی و حل با روش مربعات

تفاضلی تعمیم‌یافته، در صدد پرکردن این شکاف پژوهشی و ارائه‌ی بینشی عمیق‌تر برای طراحی بهینه‌ی چنین سازه‌هایی در کاربردهای دوار است. مواد آگزتیک که با ضریب پواسون منفی شناخته می‌شوند، الگوهای تغییر شکل غیرمتعارفی از خود نشان می‌دهند که می‌تواند منجر به افزایش سفتی و توانایی جذب انرژی در شرایط بارگذاری دینامیکی گردد. با وجود ویژگی‌های منحصر به‌فرد این مواد، رفتار مکانیکی آن‌ها در کاربردهای مربوط به سازه‌های دوار، به‌ویژه هنگامی که با رویه‌های فلزی ترکیب می‌شوند، تاکنون به‌صورت جامع مورد بررسی قرار نگرفته است. در پژوهش حاضر، هسته‌ی آگزتیک با رویه‌هایی از جنس فلز ترکیب شده‌اند که این رویه‌ها نقش مهمی در افزایش سفتی، مقاومت مکانیکی و کاهش ارتعاشات ایفا می‌کنند. ترکیب این دو نوع ماده منجر به برهم‌کنش‌های پیچیده‌ای می‌شود که تأثیر چشم‌گیری بر مشخصه‌های ارتعاشی سازه، به‌ویژه فرکانس‌های طبیعی، برجای می‌گذارد و بررسی آن‌ها را ضروری و به‌هنگام می‌سازد. از این‌رو، در این مطالعه تلاش شده است تا تأثیر پارامترهای هندسی مختلف و نحوه توزیع مواد بر فرکانس‌های طبیعی این نوع تیرهای دوار مورد تحلیل دقیق قرار گیرد. برای توصیف مؤلفه‌های جابجایی، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده شده است؛ نظریه‌ای که به‌دلیل دقت بالای آن در لحاظ اثرات برش عرضی، در مطالعات پیشرفته ارتعاشات بسیار مورد توجه قرار دارد. معادلات حرکت حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همیلتون و روش حساب تغییرات استخراج و به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته حل شده‌اند تا تأثیر عواملی نظیر هندسه هسته، نوع فلز و سرعت چرخش بر فرکانس‌های طبیعی به‌صورت نظام‌مند بررسی گردد. نتایج حاصل با تأکید بر تفسیرهای فیزیکی ارائه شده‌اند؛ از جمله بررسی نحوه تأثیر خاصیت آگزتیک بر توزیع انرژی کرنشی و چگونگی تغییر نسبت سفتی به جرم بر اثر افزودن رویه‌های فلزی که منجر به تغییرات قابل ملاحظه در رفتار مدی می‌گردد. هدف اصلی این پژوهش، کمک به طراحی سازه‌های دوار با عملکرد ارتعاشی بهینه است. انتظار می‌رود یافته‌های این مطالعه، بستری مناسب برای تحقیقات آتی در زمینه تیرهای ضخامت متغیر مرکب و چندمنظوره فراهم آورد.

۲- خواص مواد

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، از یک ساختار لانه‌زنبوری آگزتیک سبک‌وزن برای هسته تیر دوار مورد تحلیل که دارای ضخامت متغیر است، استفاده شده است. در این شکل، ω



شکل ۱ شماتیک **الف)** تیر ساندویچی و دوار ضخامت متغیر مورد بررسی؛ **ب)** جهت‌گیری رویه‌ها

Fig. 1 Schematic of **a)** the variable-thickness rotating sandwich beam under investigation; **b)** direction of facesheets.

بیانگر سرعت زاویه‌ای و R نشان‌دهنده شعاع دوران است. همچنین دو لایه فلزی با جنس‌های مختلف که در ادامه به آن پرداخته می‌شود، به‌طور کامل به هسته متصل شده‌اند. ضخامت اولیه لایه‌های بالایی، پایینی و میانی به‌ترتیب با h_t، h_b و h_0 نشان داده می‌شود. فرض شده است که ضخامت هسته به‌صورت خطی در راستای طول آن تغییر می‌کند؛ این فرض موجب ساده‌سازی نمایش هندسی و تسهیل فرایند مدل‌سازی تحلیلی یا عددی می‌شود.

ضخامت لایه میانی با استفاده از رابطه $h_c = h_0(1-\beta\, x/L)$ قابل تغییر است؛ که در آن L طول تیر، h_0 ضخامت اولیه و β پارامتر تغییر شکل در راستای ضخامت است.

در مطالعه حاضر، اتصال کامل و بدون نقص میان هسته آگزتیک و رویه‌ها فرض شده است؛ به‌گونه‌ای که انتقال تنش به‌صورت پیوسته در نواحی مرزی بین لایه‌ها برقرار باشد. این ساده‌سازی، عواملی همچون جدایش لایه‌ای، تنش‌های پسماند، و نواقص ناشی از فرآیند ساخت را نادیده می‌گیرد؛ در حالی‌که این عوامل می‌توانند تأثیر قابل‌توجهی بر یکپارچگی سازه‌ای و ویژگی‌های ارتعاشی صفحه ساندویچی داشته باشند.

در ادامه، ابتدا روابط تنش-کرنش برای هسته ارائه می‌شود و سپس به توسعه روابط سینماتیکی میان آن‌ها پرداخته خواهد شد. برای هر سه لایه، رابطه تنش-کرنش زیر به‌عنوان قانون ساختاری حاکم در نظر گرفته شده است [۲۷]:

$$\sigma_{ij}^{c,f} = C_{ijkl}^{c,f}(z)\varepsilon_{kl} \qquad (۱)$$

در این معادله، بالانویس‌های c و f به‌ترتیب نمایانگر هسته و رویه‌ها هستند که (f=t, b) برای لایه‌های بالا و پایین در نظر گرفته

شده است. مؤلفه‌های ماتریس سختی اصلاح‌شده $C_{ijkl}^{c,f}(z)$ بوده که برای هسته آگزتیک از طریق روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$C_{11}^{c}(z) = \frac{E_1(z)}{(1-\nu_{13}(z)\nu_{31}(z))}, \quad (۲)$$

$$C_{55}^{c}(z) = G_{13}(z) \quad (۳)$$

در معادلات ارائه‌شده، ν_{ij} بیانگر ضریب پواسون است و $E_1(z)$ و $G_{13}(z)$ به‌ترتیب نمایانگر مدول یانگ و مدول برشی هستند که با استفاده از روابط زیر به‌دست می‌آیند [۲۸]:

$$E_1(z) = \frac{E_c\lambda_2^3\,(\lambda_1-\sin\phi)}{\cos\phi[\cos^2\phi+\lambda_2^2(\lambda_1+\sin^2\phi)]} \quad (۴)$$

$$G_{13}(z) = \frac{G_c\lambda_2^3}{2\cos\phi}\left[\frac{\lambda_1-\sin\phi}{1+2\lambda_1}+\frac{\lambda_1+2\sin^2\phi}{2(\lambda_1-\sin\phi)}\right] \quad (۵)$$

$$\nu_{13}(z) = \frac{-\sin\phi(\lambda_1-\sin\phi)\,(1-\lambda_2^2)}{[\cos^2\phi+\lambda_2^2(\lambda_1+\sin^2\phi)]} \quad (۶)$$

$$\nu_{31}(z) = \frac{-\sin\phi(1-\lambda_2^2)}{(\tan^2\phi+\lambda_2^2)\,(\lambda_1-\sin\phi)} \quad (۷)$$

همچنین، چگالی هسته را می‌توان با استفاده از رابطه زیر تعیین کرد:

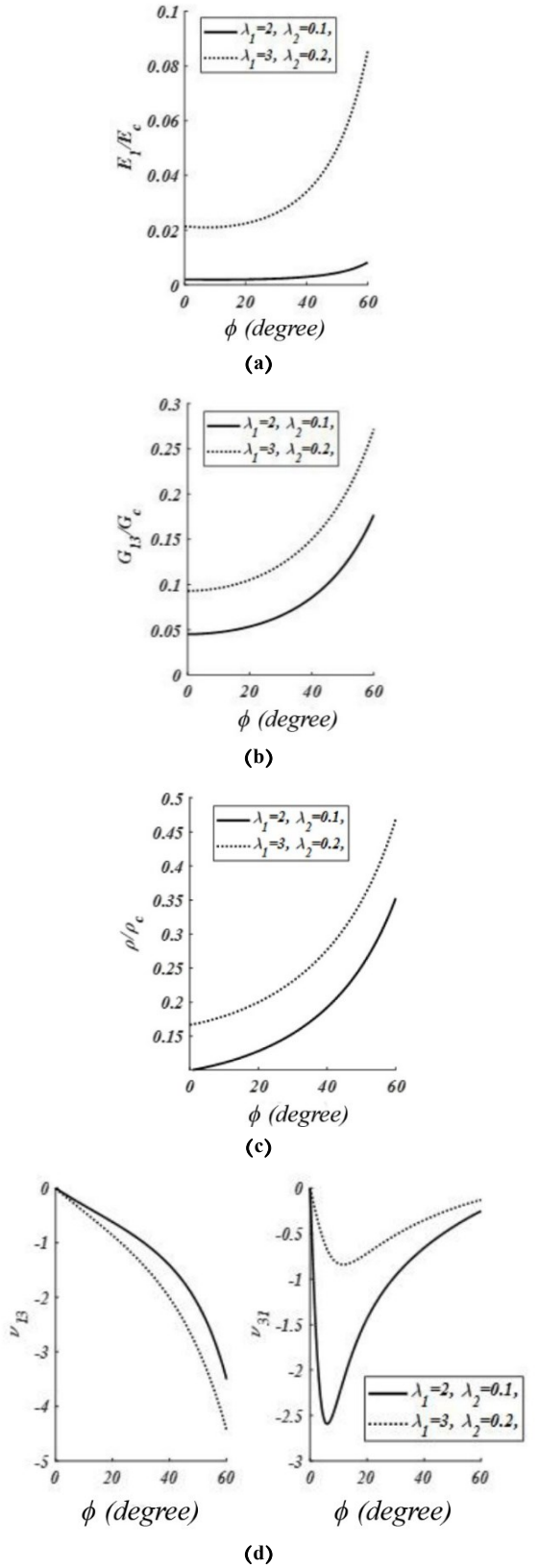
$$\rho(z) = \frac{\rho_c\lambda_2\,(\lambda_1+2)}{2\cos\phi\,(\lambda_1-\sin\phi)} \quad (۸)$$

زاویه شیب با نماد ϕ نمایش داده می‌شود. علامت این زاویه با علامت ضریب پواسون هم‌راستا بوده و زمانی که ϕ مقداری منفی داشته باشد، هسته آگزتیک رفتار آگزتیک از خود نشان می‌دهد. علاوه بر این، در روابط پیش‌گفته، پارامترهای η_1 و η_2 به‌عنوان پارامترهای هندسی هسته آگزتیک تعریف می‌شوند که به‌صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\eta_1 = {}^{l_2}/_{l_1}, \quad \eta_2 = {}^{t}/_{l_1} \quad (۹)$$

ضخامت دیواره سلول با نماد t نمایش داده می‌شود، در حالی‌که طول دیواره‌های مایل و عمودی سلول به‌ترتیب با l_1 و l_2 نشان داده می‌شوند.

شکل ۲ تغییرات ویژگی‌های مکانیکی مختلف هسته آگزتیک را بر اساس زاویه سلولی آن، مطابق با روابط (۴) تا (۸)، نشان می‌دهد.



شکل ۲ تغییرات خواص مکانیکی هسته آگزتیک نسبت به زاویه سلول

Fig. 2 Variation of the mechanical properties of the auxetic core with respect to the cell angle.

در ادامه، تمرکز بر مؤلفه‌های ماتریس سختی مربوط به لایه‌های رویه معطوف می‌گردد. با توجه به اینکه رویه های فلزی به صورت

همگن هستند، بنابراین خواص مکانیکی آن ها نظیر مدول یانگ، ضریب پواسون و چگالی آن ها ثابت است. همچنین با توجه به این‌که لایه‌های رویه در راستای محوری قرار ندارند، مؤلفه‌های اصلاح‌شده ماتریس سختی C_{ijkl}^{Mf} با در نظر گرفتن درجه چرخش، از مؤلفه‌های استاندارد ماتریس سختی C_{ijkl}^{f} استخراج می‌شوند [۲۹]:

$$C_{11}^{Mf} = C_{11}^{f}cos^4(\Lambda) + 4C_{55}^{f}sin^2(\Lambda)cos^2(\Lambda), \quad (۱۰)$$

$$C_{55}^{Mf} = [C_{11}^{f} - 2C_{55}^{f}]sin^2(\Lambda)cos^2(\Lambda) + C_{55}^{f}[sin^4(\Lambda) + cos^4(\Lambda)] \quad (۱۱)$$

که در آن، $\Lambda = \Lambda_1$ و Λ_2 به‌ترتیب مربوط به لایه‌های رویه بالا و پایین می‌باشند.

۳- روابط سینماتیکی

در این مرحله، تمرکز بر بررسی روابط سینماتیکی معطوف می‌شود. از این‌رو، تعریف جابجایی‌های تیغه منشوری امری ضروری است. فرض می‌شود که جابجایی‌ها در راستای محورهای x و z به‌ترتیب با U و W نمایش داده می‌شوند. بنابراین، نخست لازم است این جابجایی‌ها مطابق با روابط زیر تعریف گردند [۳۰]:

$$\mathcal{U}(x,z,t) = u(x,t) - \mathcal{F}(z)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \mathcal{g}(z)\kappa(x,t), \quad (۱۲)$$

$$\mathcal{W}(x,z,t) = w(x,t)$$

شایان ذکر است که κ نشان‌دهنده‌ی چرخش صفحه میانی حول محور x می‌باشد. در تحلیل توزیع تنش در راستای ضخامت، اثر تغییر شکل برشی از طریق توابع $\mathcal{F}(z)$ و $\mathcal{g}(z)$ در نظر گرفته می‌شود. در این‌جا، این توابع در قالب نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه بالا با پایه‌ی مثلثاتی، و به‌ویژه با استفاده از تابع تغییر شکل برشی سینوسی قابل بیان هستند:

$$\mathcal{F}(z) = z, \qquad \mathcal{g}(z) = \frac{h}{\pi}sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (۱۳)$$

از آنجا که در تیرهای ساندویچی با هسته‌ی نرم (مانند آگزتیک‌های الاستومری)، اثرات برش عرضی قابل توجه است، تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول ممکن است دقت کافی را برای توصیف توزیع تنش برشی در ضخامت ارائه ندهند. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای سینوسیبا تابع شکل سینوسی، توزیع واقعی‌تری از تنش برشی در عرض لایه‌ها ارائه می‌دهد و شرط تنش برشی صفر در سطوح آزاد را به‌طور خودکار ارضا می‌کند. این امر به ویژه در سازه‌های با نسبت طول به ضخامت متوسط و پایین، منجر به نتایج دقیق‌تری در محاسبه فرکانس‌های طبیعی و پاسخ‌های دینامیکی می‌شود.

جابجایی عرضی در راستای ضخامت به‌صورت ثابت فرض شده است، که این فرض منجر به صفر شدن کرنش نرمال عرضی یعنی $\varepsilon_{zz}=0$ می‌گردد. این فرض یکی از مفروضات رایج در نظریه‌های کلاسیک و پیشرفته صفحات است، که در آن اثر کرنش نرمال در راستای ضخامت قابل صرف‌نظر تلقی می‌شود. برای استخراج مؤلفه‌های کرنش، می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathcal{U}(x,z,t)}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial \mathcal{U}(x,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}(x,z,t)}{\partial x} \quad (۱۴)$$

معادلات حاکم بر پایه اصل همیلتون و با به‌کارگیری روابط خطی بین کرنش و جابجایی استخراج شده‌اند. این رویکرد با فرض تغییر شکل‌های کوچک و رفتار خطی ماده، تحلیل را ساده‌سازی می‌کند. در این مدل، اثرات غیرخطی هندسی مانند تغییر شکل‌ها یا چرخش‌های بزرگ لحاظ نشده‌اند؛ عواملی که می‌توانند در سرعت‌های دورانی بالا تأثیرگذار باشند. اصل همیلتون به‌عنوان مبنای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم به‌کار گرفته شده است تا روند مدل‌سازی دینامیکی به‌صورت نظام‌مند و تحلیلی دنبال شود [۳۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta\mathcal{S} - \delta\mathcal{K} - \delta W_R)\mathrm{d}t = 0 \quad (۱۵)$$

که در این رابطه، K انرژی جنبشی، S انرژی کرنشی و W_R کار ناشی از نیروی گریز از مرکز را نشان می‌دهند. انرژی جنبشی را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود:

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{A}}\int_{-h(x)/2-h_b}^{+h(x)/2+h_t}\frac{\rho(x,z)}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mathcal{A} \quad (۱۶)$$

در نتیجه، تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta\mathcal{K} = \int_{\mathcal{A}}\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}-\wp_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \wp_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\\ -\wp_3\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2}\end{pmatrix}\delta u + \\ \begin{pmatrix}\wp_{2,x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + \wp_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\\ -\wp_{1,x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \wp_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\\ -\wp_{4,x}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} - \wp_4\frac{\partial^3 \kappa}{\partial x\partial t^2} - \wp_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{pmatrix}\delta w + \\ \left(-\wp_3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \wp_4\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - \wp_5\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2}\right)\delta\kappa\end{matrix}\right\}\mathrm{d}\mathcal{A} \quad (۱۷)$$

که در آن:

$$\begin{Bmatrix}\wp_0\\ \wp_1\\ \wp_2\\ \wp_3\\ \wp_4\\ \wp_5\end{Bmatrix} = \int_{-h(x)/2-h_b}^{+h(x)/2+h_t}\rho(x,z)\begin{Bmatrix}1\\ \mathcal{F}(z)\\ \mathcal{F}(z)^2\\ \mathcal{g}(z)\\ \mathcal{F}(z)\mathcal{g}(z)\\ \mathcal{g}(z)^2\end{Bmatrix}\mathrm{d}z \quad (۱۸)$$

گام بعدی شامل بررسی انرژی کرنشی و تغییرات آن می‌باشد. بیان ریاضی انرژی کرنشی مربوط به هر یک از لایه‌های تیر ضخامت متغیر سه‌لایه به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{A}}\int_{-h(x)/2-h_b}^{+h(x)/2+h_t}\frac{[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}]}{2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mathcal{A} \quad (۱۹)$$

بر این اساس، فرمول مربوط به تغییرات انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\delta\mathcal{S}=\int_{\mathcal{A}}\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{N}_{xx}(x)}{\partial x}\right)\delta u+\left(\frac{\partial^2\mathcal{M}_{xx}(x)}{\partial x^2}\right)\delta w-\left(\mathcal{H}_x-\frac{\partial\mathcal{P}_{xx}(x)}{\partial x}\right)\delta\kappa\right\}\mathrm{d}\mathcal{A} \tag{۲۰}$$

که در آن:

$$\begin{Bmatrix}\mathcal{N}_{xx}\\ \mathcal{M}_{xx}\\ \mathcal{P}_{xx}\end{Bmatrix}=\int_z\sigma_{xx}\begin{Bmatrix}1\\ \mathcal{F}(z)\\ \mathcal{g}(z)\end{Bmatrix}\mathrm{d}z,\qquad \mathcal{H}_x=\int_z\sigma_{xz}\,\mathrm{d}z \tag{۲۱}$$

تغییرات کار ناشی از نیروی گریز از مرکز که در اثر چرخش ایجاد می‌شود، به‌صورت بارهای استاتیکی و مستقل از زمان مدل‌سازی می‌گردند و به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\delta W_R=\int_{\mathcal{A}}\left(N_R\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial N_R}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w\,\mathrm{d}\mathcal{A} \tag{۲۲}$$

که در آن، $N_R=\int_x^l I_0\omega^2(R+x)\,\mathrm{d}x$ بوده و ω سرعت زاویه‌ای است. معادلات حرکت مربوط به جابجایی را می‌توان با جای‌گذاری روابط به‌دست‌آمده برای کرنش، انرژی جنبشی و نیروی گریز از مرکز در اصل همیلتون، به‌صورت زیر استخراج نمود:

δu:

$$\begin{aligned}&[\hbar_1+\hbar_{17}+\hbar_{33}+4\hbar_7+4\hbar_{23}]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\&+[\hbar_1+\hbar_{17}+\hbar_{33}+4\hbar_7+4\hbar_{23}]_{,x}\frac{\partial u}{\partial x}\\&-[\hbar_2+\hbar_{18}+\hbar_{34}+4\hbar_8+4\hbar_{24}]\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\&-[\hbar_2+\hbar_{18}+\hbar_{34}+4\hbar_8+4\hbar_{24}]_{,x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&+[\hbar_4+\hbar_{20}+\hbar_{36}+4\hbar_{10}+4\hbar_{26}]\frac{\partial^2\kappa}{\partial x^2}\\&+[\hbar_4+\hbar_{20}+\hbar_{36}+4\hbar_{10}+4\hbar_{26}]_{,x}\frac{\partial\kappa}{\partial x}\\&=\wp_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\wp_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+\wp_3\frac{\partial^2\kappa}{\partial t^2},\end{aligned} \tag{۲۳}$$

δw:

$$\begin{aligned}&[\hbar_2+\hbar_{18}+\hbar_{34}+4\hbar_8+4\hbar_{24}]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\\&+2[\hbar_2+\hbar_{18}+\hbar_{34}+4\hbar_8+4\hbar_{24}]_{,x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\&+[\hbar_2+\hbar_{18}+\hbar_{34}+4\hbar_8+4\hbar_{24}]_{,xx}\frac{\partial u}{\partial x}\\&-[\hbar_3+\hbar_{19}+\hbar_{35}+4\hbar_9+4\hbar_{25}]\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\&-2[\hbar_3+\hbar_{19}+\hbar_{35}+4\hbar_9+4\hbar_{25}]_{,x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\&-[\hbar_3+\hbar_{19}+\hbar_{35}+4\hbar_9+4\hbar_{25}]_{,xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&+[\hbar_5+\hbar_{21}+\hbar_{37}+4\hbar_{11}+4\hbar_{27}]\frac{\partial^3\kappa}{\partial x^3}\\&+2[\hbar_5+\hbar_{21}+\hbar_{37}+4\hbar_{11}+4\hbar_{27}]_{,x}\frac{\partial^2\kappa}{\partial x^2}\\&+[\hbar_5+\hbar_{21}+\hbar_{37}+4\hbar_{11}+4\hbar_{27}]_{,xx}\frac{\partial\kappa}{\partial x}+N_R\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&+\frac{\partial N_R}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\\&=\wp_{1,x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\wp_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\\&+\wp_{4,x}\frac{\partial^2\kappa}{\partial t^2}-\wp_{2,x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\\&-\wp_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\wp_4\frac{\partial^3\kappa}{\partial x\partial t^2}\\&+\wp_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned} \tag{۲۴}$$

$\delta\kappa$:

$$\begin{aligned}&[\hbar_4+\hbar_{20}+\hbar_{36}+4\hbar_{10}+4\hbar_{26}]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\&+[\hbar_4+\hbar_{20}+\hbar_{36}+4\hbar_{10}+4\hbar_{26}]_{,x}\frac{\partial u}{\partial x}\\&-[\hbar_5+\hbar_{21}+\hbar_{37}+4\hbar_{11}+4\hbar_{27}]\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\&-[\hbar_5+\hbar_{21}+\hbar_{37}+4\hbar_{11}+4\hbar_{27}]_{,x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&+[\hbar_6+\hbar_{22}+\hbar_{38}+4\hbar_{12}+4\hbar_{28}]\frac{\partial^2\kappa}{\partial x^2}\\&+[\hbar_6+\hbar_{22}+\hbar_{38}+4\hbar_{12}+4\hbar_{28}]_{,x}\frac{\partial\kappa}{\partial x}\\&-[\hbar_{13}+\hbar_{15}+\hbar_{16}+\hbar_{29}+\hbar_{31}+\hbar_{32}+\hbar_{39}+2\hbar_{14}+2\hbar_{30}]\kappa\\&=\wp_3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\wp_4\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+\wp_5\frac{\partial^2\kappa}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{۲۵}$$

در این مرحله، شرایط مرزی مرتبط باید تعیین گردد. برای هر یک از دو انتهای تیغه مورد بررسی، دو نوع مرز متفاوت در نظر گرفته شده است. در مدل حاضر، شرایط مرزی کلاسیک (گیردار-گیردار، ساده-ساده) عمدتاً برای مقایسه با ادبیات موجود و تحلیل پارامتریک بنیادی در نظر گرفته شده‌اند. درک ما این است که در یک سیستم دوار عملیاتی واقعی (مانند یک پره توربین)، انتهای

داخلی تیر به یک هاب گیردار می‌شود و انتهای خارجی آزاد است. با این حال، مطالعه شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-ساده همچنان از نظر تئوریک ارزشمند است، زیرا می‌تواند رفتار بخش‌هایی از سازه‌های پیچیده‌تر یا شرایط تست آزمایشگاهی خاص را شبیه‌سازی کند. تأکید اصلی این مقاله بر تحلیل حساسیت پارامترهای مواد و هندسه است. اعمال شرط مرزی گیردار-آزاد که واقع‌بینانه‌تر است، به عنوان یک کار مهم برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌گردد. روابط زیر شرایط مرزی را در حالت گیردار (Clamped) توصیف می‌کنند:

$$\begin{aligned} &w = 0, && u = 0, \\ &\frac{\partial w}{\partial x} = 0 && \kappa = 0, \end{aligned} \tag{۲۶}$$

و روابط زیر برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده (Simply supported) صدق می کنند:

$$\begin{aligned} &w = 0, && N_{xx} = 0, \\ &M_{xx} = 0 && \kappa = 0, \end{aligned} \tag{۲۷}$$

ضرایب زیر به‌منظور استفاده در معادلات تعادل و شرایط مرزی معرفی می‌شوند:

$$[\hbar_1,\ \hbar_2,\ \hbar_3,\ \hbar_4] = \int_{+h(x)/2-h_t}^{+h(x)/2} C_{11}^{Mt}\cos^4\Lambda_1 \mathcal{T}_1 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_5,\ \hbar_6] = \int_{+h(x)/2-h_t}^{+h(x)/2} C_{11}^{Mt}\cos^4\Lambda_1 \mathcal{T}_2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_7,\ \hbar_8,\ \hbar_9,\ \hbar_{10}] = \int_{+h(x)/2-h_t}^{+h(x)/2} C_{55}^{Mt}\cos^2\Lambda_1\sin^2\Lambda_1 \mathcal{T}_1 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{11},\ \hbar_{12}] = \int_{+h(x)/2-h_t}^{+h(x)/2} C_{55}^{Mt}\cos^2\Lambda_1\sin^2\Lambda_1 \mathcal{T}_2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{13},\ \hbar_{14}] = \int_{+h(x)/2-h_t}^{+h(x)/2} [C_{11}^{Mt},\ C_{55}^{Mt}]\cos^2\Lambda_1\sin^2\Lambda_1 \left[\mathcal{g}(z)_{,z}\right]^2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{15},\ \hbar_{16}] = \int_{+h(x)/2-h_t}^{+h(x)/2} C_{55}^{Mt}[\sin^4\Lambda_1,\ \cos^4\Lambda_1]\left[\mathcal{g}(z)_{,z}\right]^2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{17},\ \hbar_{18},\ \hbar_{19},\ \hbar_{20}] = \int_{-h(x)/2}^{-h(x)/2+h_b} C_{11}^{Mb}\cos^4\Lambda_2 \mathcal{T}_1 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{21},\ \hbar_{22}] = \int_{-h(x)/2}^{-h(x)/2+h_b} C_{11}^{Mb}\cos^4\Lambda_2 \mathcal{T}_2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{23},\ \hbar_{24},\ \hbar_{25},\ \hbar_{26}] = \int_{-h(x)/2}^{-h(x)/2+h_b} C_{55}^{Mb}\cos^2\Lambda_2\sin^2\Lambda_2 \mathcal{T}_1 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{27},\ \hbar_{28}] = \int_{-h(x)/2}^{-h(x)/2+h_b} C_{55}^{Mb}\cos^2\Lambda_2\sin^2\Lambda_2 \mathcal{T}_2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{29},\ \hbar_{30}] = \int_{-h(x)/2}^{-h(x)/2+h_b} [C_{11}^{Mb},\ C_{55}^{Mb}]\cos^2\Lambda_2\sin^2\Lambda_2 \left[\mathcal{g}(z)_{,z}\right]^2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{31},\ \hbar_{32}] = \int_{-h(x)/2}^{-h(x)/2+h_b} C_{55}^{Mb}[\sin^4\Lambda_2,\ \cos^4\Lambda_2]\left[\mathcal{g}(z)_{,z}\right]^2 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{33},\ \hbar_{34},\ \hbar_{35},\ \hbar_{36}] = \int_{-h(x)/2+h_b}^{+h(x)/2-h_t} C_{11}^{c}\mathcal{T}_1 \mathrm{d}z,$$

$$[\hbar_{37},\ \hbar_{38}] = \int_{-h(x)/2+h_b}^{+h(x)/2-h_t} C_{11}^{c}\mathcal{T}_2 \mathrm{d}z,$$

$$\hbar_{39} = \int_{-h(x)/2+h_b}^{+h(x)/2-h_t} C_{55}^{c}\left[\mathcal{g}(z)_{,z}\right]^2 \mathrm{d}z$$

که در این ضرایب داریم:

$$\mathcal{T}_1 = [1,\ \mathcal{F}(z),\ \mathcal{F}(z)^2,\ \mathcal{g}(z)], \tag{۲۹}$$

$$\mathcal{T}_2 = [\mathcal{F}(z)\mathcal{g}(z),\ \mathcal{g}(z)^2] \tag{۳۰}$$

۴- حل معادلات دیفرانسیل حرکت

برای حل دقیق معادلات دیفرانسیل حاکم و در عین حال کاهش مصرف منابع محاسباتی، از تکنیک مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته استفاده شده است. روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته به دلیل دقت بالا، سرعت همگرایی سریع و نیاز به نقاط گسسته کمتر نسبت به روش‌هایی مانند اجزای محدود برای مسائل با مشتقات با مرتبه بالا انتخاب شد. این روش به‌ویژه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل از تئوری مرتبه بالا مناسب است و با انتخاب بهینه نقاط نمونه‌گیری (مانند نقاط چبیشف)، خطای ناشی از گسسته‌سازی فضایی را به حداقل می‌رساند. همچنین این روش انعطاف بالایی در اعمال شرایط مرزی مختلف دارد و امکان تحلیل پارامتری کارآمد را فراهم می‌آورد. در این روش، معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل می‌گردند. به‌منظور انجام این تبدیل در راستای محوری، می‌توان از تقریب‌های زیر بهره گرفت [۳۲]:

$$\frac{\mathrm{d}^n \hbar_x(x_i)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{\hbar=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{i\hbar}^{(n)} \hbar(x_k) \tag{۳۱}$$

که در این رابطه، $n = 1,\ldots,\mathcal{N}-1$ است. ضرایب وزنی با نماد $\mathcal{A}_{i\hbar}^{(n)}$ نمایش داده می‌شوند. رابطه مربوط به ضریب وزنی مرتبه اول به‌صورت زیر بیان می‌گردد [۳۳]:

$$\mathcal{A}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}(x_i)}{(x_i - x_j)\mathcal{M}(x_j)} & \text{For Non-diagonal Arrays} \\ -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{ij}^{(1)} & \text{For Diagonal Arrays} \end{cases} \tag{۳۲}$$

که در آن:

$$\mathcal{M}(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\mathcal{N}} (x_i - x_j) \tag{۳۳}$$

برای محاسبه ضرایب وزنی مراتب بالاتر، می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود [۳۴]:

$$\mathcal{A}_{ij}^{(n)} = n\left(\mathcal{A}_{ii}^{(n-1)}\mathcal{A}_{ij}^{(1)} - \frac{\mathcal{A}_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)}\right) \quad (۳۴)$$

نحوه توزیع نقاط شبکه تأثیر قابل‌توجهی بر دقت و قابلیت اعتماد نتایج دارد. در این پژوهش، برای ایجاد یک توزیع غیریکنواخت از گره‌ها در راستای محوری، از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف استفاده شده است:

$$x_i = \frac{L}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{\mathcal{N}-1}\right)\right] \quad (۳۵)$$

با در نظر گرفتن این شرایط، N نشان‌دهنده‌ی مجموع کل نقاط شبکه در راستای محوری است. با تلفیق معادلات حاکم بر حرکت با شرایط مرزی مرتبط (روابط (۲۳) تا (۲۸))، معادله ماتریسی زیر قابل فرموله‌سازی خواهد بود:

$$([\mathcal{K}] + \omega^2[\mathcal{M}])\ \{d\} = 0 \quad (۳۶)$$

فرکانس طبیعی با نماد ω نمایش داده می‌شود، در حالی‌که ماتریس‌های سختی الاستیک و جرم به‌ترتیب با $[K]$ و $[M]$مشخص می‌گردند. بردار جابجایی‌ها نیز با $\{d\}$ نشان داده می‌شود. بخش موهومی مقادیر ویژه حاصل از رابطه (۳۶) قابل استفاده برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیغه منشوری خواهد بود.

۵- نتایج و بحث

پیش از ارائه نتایج اصلی، ارزیابی صحت و قابلیت اعتماد آن‌ها امری ضروری است. به‌منظور تحقق این هدف، نتایج حاصل از این پژوهش با مطالعات پیشین منتشرشده مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. جدول ۱، فرکانس‌های طبیعی حاصل از روش‌های ارائه‌شده در این تحقیق را با نتایج گزارش‌شده در منابع [۳۵–۳۷] با توجه به مقادیر ارائه شده در جدول ۲، مقایسه می‌نماید.

همان‌گونه که در جدول مشاهده می‌شود، همبستگی قابل توجهی میان یافته‌های این مطالعه و نتایج گزارش‌شده در منابع مرجع وجود دارد. این تطابق، درستی و اعتبار نتایج عددی به‌دست‌آمده را تأیید کرده و در نتیجه، اعتبار روابط فرمول‌بندی‌شده و روش حل عددی به‌کاررفته در این پژوهش تضمین می‌شود.

در نتیجه، پس از تأیید قابلیت اعتماد نتایج، تحلیل همگرایی، و انتخاب بهینه تعداد نقاط گسسته و همچنین نتایج حاصل از این پژوهش در ادامه بررسی خواهد شد. شایان ذکر است در مواردی که ذکر نشده است، نتایج برای شرایط مرزی گیردار- گیردار نمایش داده شده‌اند.

همگرایی در روش‌های عددی به خاصیتی اطلاق می‌شود که طی آن، با اصلاح پارامترهای محاسباتی نظیر اندازه مش، گام زمانی یا تعداد تکرارها، پاسخ عددی به پاسخ دقیق یا واقعی مسئله ریاضی مورد نظر نزدیک می‌شود. این ویژگی از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا تضمین‌کننده‌ی دقت و اعتبار نتایج محاسباتی است. در صورت عدم همگرایی، حتی با صرف منابع محاسباتی بیشتر یا

جدول ۱ مقایسه نتایج با مطالعات منتشرشده پیشین

Table 1 Comparison of the results with previously published studies.

Mode Number	Present Work	Ref. [۳۵]	Ref. [۳۶]	Ref. [۳۷]
1	31.463	31.46	31.46	34.13
2	193.702	193.7	193.7	202.1
3	529.241	529.2	529.2	527.4

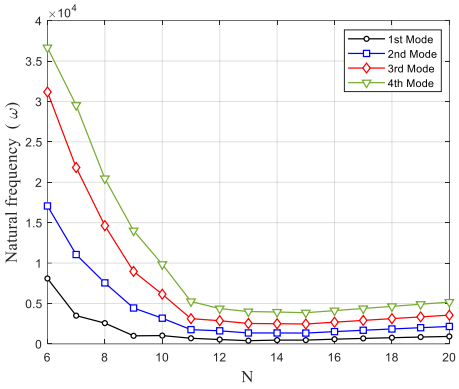
جدول ۲ مشخصات هندسی و مکانیکی نمونه پایه برای تحلیل پارامتریک و اعتبارسنجی

Table 2 Geometrical and mechanical specifications of the base model for parametric and validation study.

Parameter	Symbol	Unit	Value
Length	L	m	0.6
Width	b	m	0.05
Core's initial thickness	h_0	m	0.02
Top layer's thickness	h_t	m	0.003
Bottom layer's thickness	h_b	m	0.003
tapering parameter	β	-	0~0.3
Facesheets material type	-	-	Aluminium alloy
Facesheets Young's modulus	E_f	GPa	70
Facesheets Poisson's ratio	ν_f	-	0.33
Facesheets density	ρ_f	kg/m^3	2700
Core's matrix properties	E_0, G_0, ρ_0	-	Ref. [26]
Cells aspect ratio	$\lambda_1 = l_2/l_1$	-	2
Cells angle	θ	$Degree$	30
Hub radius	R	m	0.1~0.25
Angular speed	Ω	rpm	0~1500

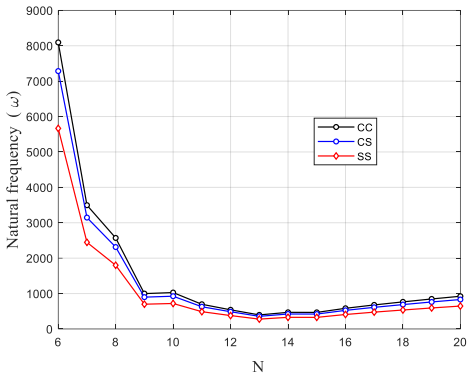
ریزتر کردن شبکه، ممکن است نتایج به‌درستی رفتار واقعی سیستم را بازتاب ندهند. در کاربردهای عملی، تحلیل همگرایی به تعیین تعادلی بهینه میان دقت و کارایی محاسباتی کمک می‌کند و نقشی اساسی در اعتبارسنجی شبیه‌سازی‌ها و اطمینان از صحت روش عددی ایفا می‌نماید.

شکل ۳ رفتار همگرایی چهار فرکانس طبیعی نخست یک تیر دوار با ضخامت متغیر، دارای هسته آگزتیک و رویه‌های فلزی را که با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی محاسبه شده‌اند، نمایش می‌دهد. این تحلیل برای تعداد مختلفی از نقاط شبکه انجام گرفته و شامل مودهای اول تا چهارم ارتعاشی می‌باشد. تمامی مودها کاهش سریعی در مقدار فرکانس طبیعی از N=۶ تا حدود N=۱۴ نشان می‌دهند. از N=۱۴ به بعد، مقادیر فرکانس برای هر چهار مود به حالت پایدار می‌رسند که این موضوع به‌وضوح نشان‌دهنده‌ی همگرایی عددی روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته است. مودهای بالاتر (سوم و چهارم) نسبت به مودهای پایین‌تر (اول و دوم) کمی دیرتر همگرا می‌شوند، که با توجه به حساسیت بیشتر آن‌ها به گسسته‌سازی فضایی، رفتاری قابل انتظار است. یکنواختی همگرایی در تمامی مودها نشان‌دهنده‌ی پایداری و دقت بالای روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در پیش‌بینی رفتار ارتعاشی مرتبه پایین و بالا می‌باشد. روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته با استفاده از تعداد نسبتاً کمی از نقاط شبکه، دقتی بالا و در عین



شکل ۳ بررسی همگرایی نتایج در مودهای مختلف

Fig. 3 Convergence study of the results for different vibration modes



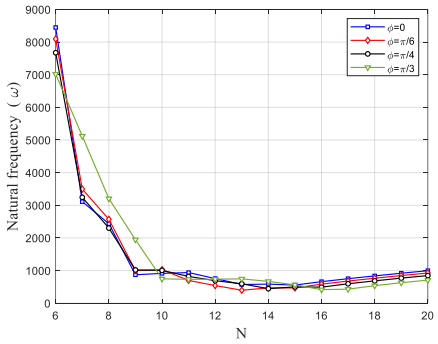
شکل ۴ بررسی همگرایی نتایج در شرایط مرزی مختلف

Fig. 4 Convergence study of the results under different boundary conditions

حال بهره‌وری محاسباتی قابل توجهی نسبت به روش‌های عددی سنتی مانند روش اجزاء محدود ارائه می‌دهد. این شکل، کارایی و اعتبار روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته را به‌عنوان ابزاری مناسب برای تحلیل تیرهای کامپوزیتی پیچیده با غیرخطی‌های هندسی و مواد هسته‌ای غیرمرسوم مانند آگزتیک‌ها تأیید می‌کند. همچنین دقت و اثربخشی روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در این شکل به نمایش گذاشته شده است؛ جایی که همگرایی چهار فرکانس طبیعی اول با افزایش تعداد نقاط شبکه بررسی شده است. مشاهده می‌شود که فرکانس‌ها به‌سرعت پایدار می‌گردند، به‌طوری‌که برای $N\geq14$ نتایج دقیقی برای تمامی مودها فراهم می‌آورد. این همگرایی سریع، حتی در مودهای بالاتر، نشان‌دهنده‌ی توان تفکیک بالا و کارایی روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در تحلیل دینامیکی سازه‌های پیچیده از نظر هندسی، با خواص تابعی یا هسته آگزتیک می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده تأیید می‌کنند که روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته ضمن حفظ بهره‌وری محاسباتی، دقت مورد نیاز برای تحلیل ارتعاشی سازه‌ها را نیز به‌خوبی تأمین می‌نماید.

شکل ۴ همگرایی فرکانس طبیعی پایه را با افزایش تعداد نقاط شبکه، تحت شرایط مرزی مختلف و با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، نمایش می‌دهد. سازه مورد تحلیل، یک تیر با ضخامت متغیر است که دارای هسته آگزتیک و رویه‌های فلزی می‌باشد. در این بررسی، شرایط مرزی گیردار–گیردار (CC)، گیردار–ساده (CS) و ساده–ساده (SS) مورد نظر قرار گرفته‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در تمامی شرایط مرزی، کاهش شدیدی در مقدار فرکانس طبیعی برای مقادیر پایین N (در بازه ۶ تا ۱۰) رخ می‌دهد و پس از آن، مقادیر به حالت پایدار می‌رسند، به‌طوری‌که برای $N\geq14$ همگرایی عددی به‌خوبی حاصل می‌گردد. این رفتار نه‌تنها دقت روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته را تأیید می‌کند، بلکه نشان‌دهنده‌ی پایداری آن در مواجهه با شرایط مرزی مختلف نیز هست. در میان شرایط بررسی‌شده، حالت CC به دلیل ایجاد بیش‌ترین سختی در دو انتهای تیر، منجر به بیش‌ترین مقدار فرکانس طبیعی شده است. در مقابل، شرایط SS با آزادی بیشتر در تغییر شکل، کم‌ترین مقدار فرکانس را تولید کرده است و حالت CS نیز مطابق انتظار، رفتاری بینابین از خود نشان داده است. این نتایج نقش کلیدی شرایط مرزی در تعیین پاسخ ارتعاشی تیرهای با هسته آگزتیک را نمایان ساخته و بیانگر آن است که سختی حاصل از قیود مرزی و نحوه برهم‌کنش آن با ساختار آگزتیک، اثر چشم‌گیری بر ویژگی‌های دینامیکی تیر دارد.

شکل ۵ همگرایی فرکانس طبیعی پایه را نسبت به تعداد نقاط شبکه، با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، برای زوایای مختلف انحراف سلول‌های آگزتیک (φ) در ساختار هسته نمایش می‌دهد. تیر با ضخامت متغیر مورد بررسی شامل یک هسته آگزتیک و رویه‌های فلزی است. با افزایش تعداد نقاط از N=6 تا N=14، کاهش قابل توجهی در مقدار فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود و پس از آن، مقدار فرکانس به وضعیت تقریباً پایداری می‌رسد. این پایداری از $N\geq14$ به‌وضوح نمایان است که نشان‌دهنده همگرایی مناسب و اعتبار فرموله‌سازی عددی روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته می‌باشد. زاویه انحراف سلول‌های آگزتیک (φ=0, π/6, π/4, π/3)تأثیر محسوسی بر رفتار مکانیکی هسته دارد و منجر به تغییراتی در سختی کلی سازه می‌شود. در حالت φ=0، سلول‌ها به‌صورت عمودی قرار دارند که معمولاً سختی بالاتری را فراهم کرده و در نتیجه فرکانس طبیعی بیشتری ایجاد می‌کنند. با افزایش زاویه انحراف، آرایش سلول‌ها متمایل‌تر می‌شود و این مسئله منجر به کاهش مؤثر سختی هسته و افت فرکانس طبیعی می‌گردد. بنابراین، تحلیل همگرایی ارائه‌شده در شکل ۵، ضمن تأیید دقت روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در پیش‌بینی پاسخ ارتعاشی، اهمیت زاویه سلولی در تنظیم رفتار دینامیکی تیرهای با هسته آگزتیک را نیز به‌روشنی نشان می‌دهد.



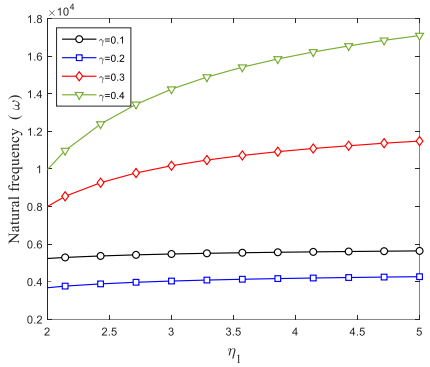
شکل ۵ بررسی همگرایی نتایج برای زوایای مختلف انحراف سلول هسته آگزتیک

Fig. 5 Convergence study of the results for different auxetic core cell re-entrant angles

شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی پایه را نسبت به نسبت ابعادی سلول‌های آگزتیک ($\eta_1=d/l$) نشان می‌دهد؛ که در آن d و l به‌ترتیب ابعاد عمودی و افقی سلول واحد هستند. نتایج برای مقادیر مختلف سرعت زاویه‌ای تیر دوار با ضخامت متغیر (γ)، با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته محاسبه شده‌اند. با افزایش نسبت ابعادی سلول (η_1)، فرکانس طبیعی در تمام مقادیر سرعت زاویه‌ای افزایش یافته است که این امر به افزایش سختی محوری و خمشی هسته به‌دلیل بلندتر شدن سلول‌های آگزتیک در راستای عمودی نسبت داده می‌شود. از سوی دیگر، با افزایش سرعت زاویه‌ای (γ) از ۰٫۱ تا ۰٫۴، در یک مقدار ثابت η_1، فرکانس طبیعی به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد؛ این پدیده ناشی از اثر تقویت‌کننده نیروی گریز از مرکز است، که باعث افزایش مؤثر سختی سازه در اثر افزایش بارهای چرخشی شده و در نتیجه به افزایش فرکانس منجر می‌شود. این اثر در مقادیر بالاتر η_1 برجسته‌تر است، که بیانگر تعامل غیرخطی بین سرعت چرخش و هندسه ریزساختار سلولی است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهند که پاسخ ارتعاشی سازه نسبت به طراحی سلولی و شرایط دینامیکی چرخش حساس بوده و امکان تنظیم عملکرد ارتعاشی سازه‌های مبتنی بر آگزتیک در کاربردهای دوار را فراهم می‌آورد.

شکل ۷ رابطه بین فرکانس طبیعی و پارامتر η_2 را برای مقادیر مختلف زاویه داخلی (φ) در یک ساختار لانه‌زنبوری آگزتیک بازگشتی نمایش می‌دهد. در ساختارهای آگزتیک، زوایای داخلی معمولاً دارای مقادیر منفی هستند (یعنی به‌سمت داخل متمایل‌اند نه خارج) و موجب ایجاد شکل‌های مشخصه‌ای نظیر «پروانه‌ای» یا شش‌ضلعی بازگشتی می‌شوند. در این شکل، چهار مقدار برای زاویه داخلی در نظر گرفته شده است: $\varphi=0$، $\varphi=\pi/6$، $\varphi=\pi/4$ و $\varphi=\pi/3$.

پارامتر η_2 نسبت ضخامت دیواره سلولی به طول ضلع سلول را در هسته آگزتیک نشان می‌دهد و درواقع، شاخصی از چگالی نسبی ساختار لانه‌زنبوری محسوب می‌شود. مطابق نتایج، برای تمامی

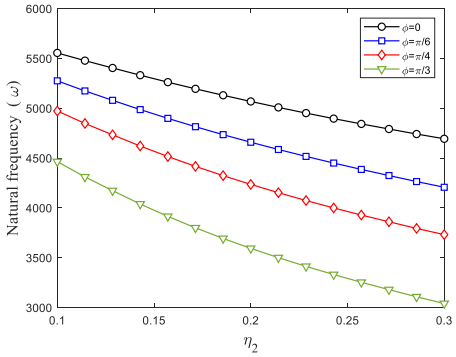


شکل ۶ تاثیر نسبت ابعادی سلول آگزتیک و سرعت دورانی بر نتایج

Fig. 6 Effect of the auxetic cell aspect ratio and rotational speed on the results

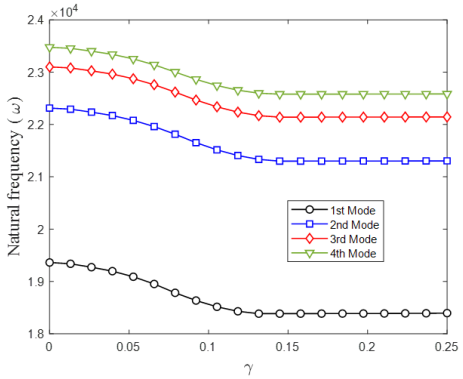
مقادیر زاویه داخلی، با افزایش η_2 (یعنی افزایش ضخامت دیواره نسبت به طول سلول)، فرکانس طبیعی به‌صورت پیوسته کاهش می‌یابد. این روند در بازه‌ی η_2=0.1 تا 0.30 تقریباً خطی ظاهر می‌شود. همچنین، برای هر مقدار ثابت از η_2، افزایش زاویه داخلی منجر به کاهش فرکانس طبیعی می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که بالاترین مقادیر فرکانس مربوط به φ=0 است و پس از آن به‌ترتیب برای $\varphi=\pi/6$، $\pi/4$ و در نهایت $\pi/3$ کاهش می‌یابد.

زاویه داخلی، پارامتر طراحی بسیار مهمی است که مستقیماً بر رفتار آگزتیک (ضریب پواسون منفی) تأثیر می‌گذارد. از سوی دیگر، نسبت ضخامت به طول ضلع سلول (η_2) نیز بر خواص مکانیکی و پاسخ دینامیکی ساختارهای آگزتیک تأثیرگذار است. افزایش این نسبت معمولاً موجب افزایش چگالی نسبی سازه می‌شود که به نوبه‌ی خود بر رفتار ارتعاشی آن اثر می‌گذارد. منحنی‌های ارائه‌شده در این شکل نشان می‌دهند که طراحان می‌توانند با کنترل هم‌زمان زاویه داخلی و نسبت ضخامت، به تنظیم فرکانس طبیعی مطلوب دست یابند. این ویژگی، انعطاف‌پذیری قابل‌توجهی در طراحی ساختارهای آگزتیک برای کاربردهای ارتعاشی خاص فراهم می‌آورد.



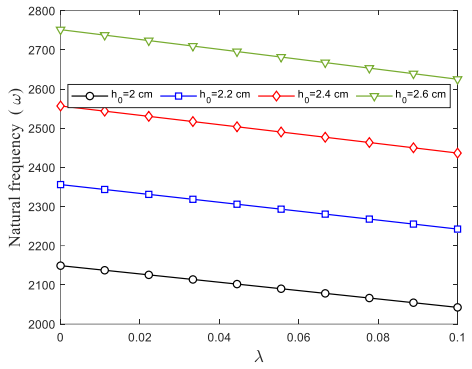
شکل ۷ تاثیر نسبت ضخامت دیواره سلولی به طول ضلع سلول آگزتیک بر نتایج

Fig. 7 Effect of the ratio of cell wall thickness to auxetic cell edge length on the results



شکل ۸ تاثیر سرعت دورانی بر فرکانس‌های مودهای مختلف

Fig. 8 Effect of rotational speed on the frequencies of different modes



شکل ۹ تاثیر ضخامت هسته و پارامتر باریک‌شوندگی بر نتایج

Fig. 9 Effect of the core thickness and tapering parameter on the results

شکل ۸ تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول یک تیر دوار با ضخامت متغیر، دارای هسته آگزتیک و رویه‌های فلزی را به‌عنوان تابعی از سرعت زاویه‌ای بدون‌بعد (γ) نمایش می‌دهد.

در تمامی مودها، فرکانس طبیعی در ابتدا با افزایش سرعت زاویه‌ای تا حدود $\gamma\approx0.15-0.2$ کاهش جزئی دارد، اما پس از این نقطه، روندی افزایشی و یکنواخت در فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. افت اولیه در فرکانس ناشی از اثر نرم‌شوندگی هندسی است؛ وضعیتی که در آن چرخش باعث ایجاد خمش و نیروهای ناپایدارکننده در سازه می‌شود، به‌ویژه در مقادیر پایین سرعت زاویه‌ای. با افزایش بیشتر γ، اثر سفت‌شوندگی گریز از مرکز غالب می‌گردد و با افزایش سفتی محوری تیر، فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

مودهای بالاتر (سوم و چهارم) حساسیت بیشتری به تغییرات γ نشان می‌دهند و دامنه نوسان فرکانس در آن‌ها چشم‌گیرتر است. این پدیده ناشی از فرکانس فضایی بالاتر مودهای بالاست که نسبت به تغییرات سفتی دینامیکی ناشی از چرخش، حساس‌تر هستند. در مجموع، رفتار مشاهده‌شده حاصل برهم‌کنش میان دو اثر متضاد است: اثر ناپایدارکننده‌ی خمش ناشی از چرخش در مقادیر پایین γ، و اثر سفت‌کنندگی ناشی از نیروهای گریز از مرکز در مقادیر بالاتر. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی، به‌ویژه در مودهای بالاتر، به‌شدت تحت تأثیر پدیده‌های دینامیکی ناشی از چرخش قرار دارند و این موضوع نقش تعیین‌کننده‌ای در طراحی سازه‌های دوار با هسته آگزتیک ایفا می‌کند.

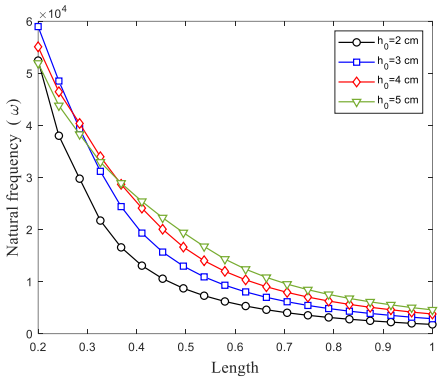
شکل ۹ تغییرات فرکانس طبیعی را نسبت به پارامتر باریک‌شوندگی هندسی λ برای مقادیر مختلفی از ضخامت هسته آگزتیک h_0 نشان می‌دهد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که در تمامی حالت‌ها، با افزایش λ، فرکانس طبیعی به‌صورت قابل توجهی کاهش می‌یابد. این رابطه معکوس ناشی از کاهش تدریجی سختی سازه‌ای در اثر افزایش شیب باریک‌شوندگی است که موجب انعطاف‌پذیرتر شدن تیر و کاهش مقاومت آن در برابر تحریکات دینامیکی می‌شود.

علاوه بر اثر باریک‌شوندگی، تأثیر ضخامت هسته آگزتیک نیز به‌روشنی قابل مشاهده است. برای یک مقدار ثابت از λ، افزایش h_0 منجر به افزایش فرکانس طبیعی می‌گردد. این افزایش عمدتاً به دلیل تقویت سختی خمشی سازه با ضخامت بیشتر هسته آگزتیک است. رفتار مکانیکی منحصربه‌فرد مواد آگزتیک، که با ضریب پواسون منفی شناخته می‌شوند، مقاومت مؤثرتری در برابر تغییر شکل تحت بارهای ارتعاشی ایجاد کرده و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد.

به‌طور کلی، نتایج شکل ۹ بر نقش کلیدی باریک‌شوندگی هندسی و پیکربندی هسته آگزتیک در تنظیم پاسخ دینامیکی سازه تأکید دارند. در حالی که افزایش شیب باریک‌شوندگی موجب کاهش سفتی و فرکانس طبیعی می‌شود، افزایش ضخامت هسته آگزتیک این اثر را خنثی کرده و موجب تقویت یکپارچگی سازه‌ای می‌گردد. این یافته‌ها برای طراحی بهینه اجزای سبک و حساس به ارتعاش در کاربردهای مهندسی پیشرفته از اهمیت بسزایی برخوردارند.

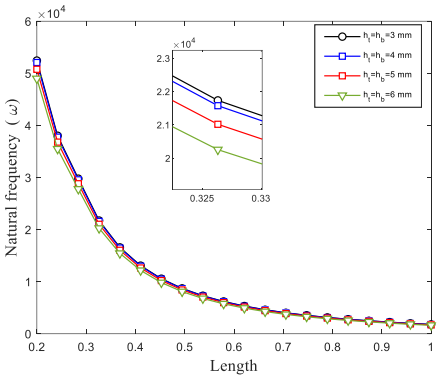
شکل ۱۰ تأثیر طول تیر بر فرکانس طبیعی را برای ضخامت‌های مختلف هسته آگزتیک h_0 نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش طول تیر از ۰/۲ تا ۱/۰، فرکانس طبیعی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند. این رابطه معکوس کاملاً قابل انتظار است، چرا که تیرهای بلندتر از سفتی کمتری برخوردارند و انعطاف‌پذیری بالاتری دارند، که این امر مقاومت آن‌ها را در برابر تحریکات ارتعاشی به‌شدت کاهش می‌دهد. این روند کاهشی برای تمامی مقادیر h_0 به‌طور یکنواخت مشاهده شده است.

علاوه بر آن، شکل مذکور تأثیر ضخامت هسته آگزتیک بر رفتار ارتعاشی را نیز برجسته می‌سازد. برای تیرهای کوتاه (در حدود طول ۰/۲ تا ۰/۴)، افزایش ضخامت h_0 باعث افزایش محسوس فرکانس طبیعی می‌شود، که نشان‌دهنده نقش غالب ضخامت هسته در تقویت سختی سازه‌ای است. با این حال، هنگامی‌که طول تیر از حدود ۰/۷ فراتر می‌رود، تفاوت بین فرکانس‌های طبیعی مربوط به مقادیر مختلف h_0 کاهش می‌یابد. این موضوع نشان می‌دهد که



شکل ۱۰ تاثیر طول تیر و ضخامت هسته بر نتایج

Fig. 10 Effect of the beam length and core thickness on the results



شکل ۱۱ تاثیر طول تیر و ضخامت رویه‌ها بر نتایج

Fig. 11 Effect of the beam length and face sheet thickness on the results

برای تیرهای نسبتاً بلند، اثر کاهنده‌ی طول بر سفتی سازه‌ای غالب شده و نقش ضخامت هسته آگزتیک در پاسخ دینامیکی کمرنگ‌تر می‌شود.

نتایج ارائه‌شده در شکل ۱۰ بیانگر اثر هم‌زمان ابعاد هندسی و پیکربندی ماده آگزتیک بر پاسخ دینامیکی تیرهای با ضخامت متغیر هستند. در حالی که افزایش ضخامت هسته موجب تقویت سفتی و بالا رفتن فرکانس طبیعی می‌گردد، این مزیت با افزایش طول تیر کاهش می‌یابد. این بینش‌ها برای مهندسان و طراحان، به‌ویژه در کاربردهایی که نیاز به تنظیم عملکرد ارتعاشی در مقیاس‌های مختلف دارند، از اهمیت بالایی برخوردار است.

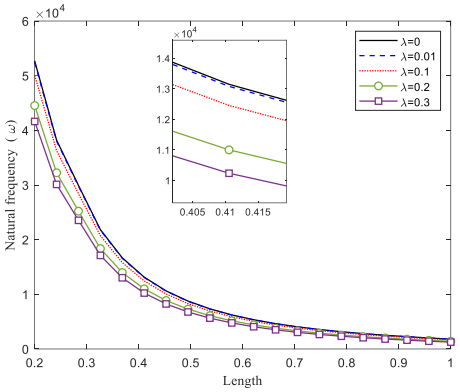
شکل ۱۱ رابطه بین فرکانس طبیعی و طول یک تیر ساندویچی با ضخامت متغیر، متشکل از رویه‌های فلزی و هسته آگزتیک را نمایش می‌دهد. در این شکل، چهار پیکربندی مختلف با ضخامت‌های متفاوت رویه بالا (h_t) و رویه پایین (h_b) از ۳ تا ۶ میلی‌متر ارائه شده‌اند. نمودار به‌وضوح نشان می‌دهد که در تمامی پیکربندی‌ها، روندی نزولی و غیرخطی مشاهده می‌شود؛ به‌طوری‌که با افزایش طول تیر از ۰/۲ تا ۱/۰، فرکانس‌های طبیعی به‌صورت چشم‌گیری کاهش یافته‌اند. در طول‌های کوتاه‌تر، فرکانس‌های طبیعی مقدار قابل‌توجهی دارند (تا حدود 5.2×10^4) و با افزایش طول، این مقادیر به‌سرعت کاهش یافته و در حدود طول ۱/۰ به مقادیری همگرا در حدود 0.2×10^4 می‌رسند.

ضخامت رویه‌ها تأثیر مستقیمی بر ویژگی‌های ارتعاشی تیر دارد، به‌گونه‌ای که رویه‌های نازک‌تر معمولاً منجر به فرکانس طبیعی بالاتری می‌شوند. این اثر به‌ویژه در طول‌های کوتاه تیر به‌وضوح محسوس است، چنان‌که در بزرگ‌نمایی موجود در بازه‌ی طولی ۰/۳۲۵ تا ۰/۳۳ نیز نشان داده شده است. پیکربندی دارای ضخامت ۳ میلی‌متر به‌طور مداوم بالاترین مقادیر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد، و پس از آن به‌ترتیب پیکربندی‌های ۴، ۵ و ۶ میلی‌متر قرار دارند. این رابطه معکوس میان ضخامت رویه‌ها و فرکانس طبیعی از آن‌جا ناشی می‌شود که کاهش ضخامت رویه، جرم کل تیر را کاهش می‌دهد، در حالی‌که به‌دلیل ساختار ساندویچی با هسته آگزتیک، سفتی سازه در حد مطلوب حفظ می‌شود و در نتیجه، فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابد.

نکته قابل توجه آن است که با افزایش طول تیر، تفاوت بین فرکانس‌های طبیعی مربوط به پیکربندی‌های مختلف ضخامت رویه کاهش می‌یابد، که نشان می‌دهد در تیرهای بلندتر، تأثیر طول نسبت به ضخامت رویه بر رفتار ارتعاشی غالب می‌شود. از این‌رو، در طراحی سازه‌های ساندویچی با ضخامت متغیر، مهندسان باید به‌دقت میان ضخامت رویه، طول تیر و فرکانس طبیعی حاصل، توازن برقرار کنند تا در کاربردهایی نظیر اجزای هوافضا، سازه‌های خودرویی یا عناصر عمرانی که کاهش وزن و کنترل ارتعاش از اهمیت بالایی برخوردار است، به عملکرد بهینه دست یابند.

شکل ۱۲ تأثیر پارامتر باریک‌شوندگی هندسی λ را بر فرکانس طبیعی تیرهای ساندویچی دارای هسته آگزتیک و رویه‌های فلزی نمایش می‌دهد. مطابق تصویر دوم، مقادیر مختلف λ (در بازه ۰ تا ۰/۳) رفتارهای ارتعاشی متمایزی را در طول‌های مختلف تیر ایجاد می‌کنند. در تمامی مقادیر λ، فرکانس طبیعی با افزایش طول تیر کاهش می‌یابد و این روند کاهشی از نوع غیرخطی است. در طول‌های کوتاه‌تر (حدود ۰/۲ تا ۰/۳)، اثر λ ملموس‌تر است؛ به‌طوری‌که برای $\lambda=0$ (تیر ضخامت یکنواخت)، بالاترین مقدار فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود، در حالی‌که با افزایش λ (نمایانگر افزایش شیب باریک‌شوندگی)، مقادیر فرکانس به‌تدریج کاهش می‌یابند. این موضوع نشان می‌دهد که افزایش پارامتر باریک‌شوندگی منجر به کاهش نسبت سفتی به جرم در ساختار تیر ساندویچی شده و در نتیجه، فرکانس‌های ارتعاشی کاهش می‌یابند.

بزرگ‌نمایی ارائه‌شده در بازه طولی ۰/۴۰۵ تا ۰/۴۱۵ تصویری واضح‌تر از تأثیر پارامتر λ بر فرکانس طبیعی ارائه می‌دهد. نمودارها ترتیبی منظم را دنبال می‌کنند؛ به‌طوری‌که در بالا، منحنی مربوط به $\lambda=0$ قرار دارد (حدود 1.4×10^4) و در پایین، منحنی $\lambda=0.3$ (حدود 1.0×10^4) واقع شده است؛ در میان آن‌ها نیز مقادیر میانی $\lambda=0.01$، 0.10 و 0.20 به‌ترتیب قرار دارند. این کاهش سیستماتیک در فرکانس



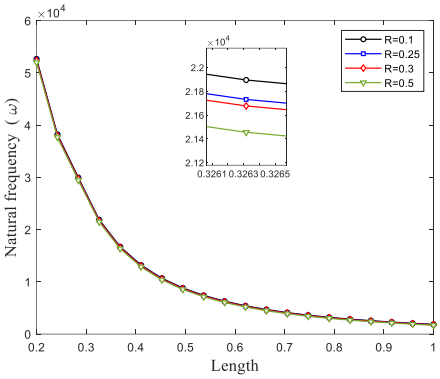
شکل ۱۲ تاثیر طول و پارامتر باریک‌شوندگی بر نتایج

Fig. 12 Effect of the beam length and tapering parameter on the results

طبیعی با افزایش λ، در تضاد با برخی مطالعات دیگر است که در آن‌ها، پیکربندی‌های خاص باریک‌شوندگی ممکن است منجر به افزایش فرکانس شوند. به‌عنوان نمونه، در برخی تحقیقات پیرامون تیرهای دوار با ضخامت متغیر، افزایش نسبت باریک‌شوندگی در شرایط خاص موجب افزایش فرکانس پایه شده است [۲۷]. این تفاوت احتمالاً به ویژگی‌های مکانیکی خاص هسته آگزتیک بازمی‌گردد که به‌دلیل داشتن ضریب پواسون منفی، برهم‌کنش متفاوتی با هندسه باریک‌شونده نسبت به مواد متداول از خود نشان می‌دهد.

اهمیت عملی پارامتر λ در قابلیت تنظیم ویژگی‌های ارتعاشی سازه‌های ساندویچی نهفته است. مهندسان می‌توانند از این پارامتر به‌صورت راهبردی استفاده کنند تا به پاسخ فرکانسی مطلوب برای کاربردهای خاص دست یابند، به‌ویژه در مواردی که نیاز به کنترل ارتعاش یا بهینه‌سازی میرایی وجود دارد. با افزایش طول تیر به‌سوی مقدار ۱/۰، نمودارهای مربوط به مقادیر مختلف λ به هم نزدیک می‌شوند، که این امر نشان می‌دهد اثر باریک‌شوندگی در تیرهای بلندتر اهمیت کمتری خواهد داشت.

شکل ۱۳ تأثیر شعاع هاب (R) را بر فرکانس طبیعی تیر ساندویچی با ضخامت متغیر، هسته آگزتیک و رویه‌های فلزی نمایش می‌دهد. نمودار، رابطه بین فرکانس طبیعی و طول تیر را برای چهار مقدار مختلف شعاع هاب شامل R=0.1، R=0.25، R=0.3 و R=0.5 ارائه می‌کند. مشابه شکل‌های پیشین، تمامی منحنی‌ها روند کاهشی غیرخطی واضحی را در فرکانس طبیعی با افزایش طول تیر از ۰/۲ تا ۱/۰ نشان می‌دهند. با این حال، شعاع هاب الگوی مشخصی ایجاد می‌کند به‌گونه‌ای که در تمام طول‌ها، مقادیر کوچکتر R همواره منجر به فرکانس طبیعی بالاتری می‌شوند. این رابطه معکوس به‌ویژه در بزرگ‌نمایی بازه طولی ۰/۳۲۶۱ تا ۰/۳۲۶۵ مشهود است؛ جایی که پیکربندی R=0.1 بیشترین فرکانس طبیعی (حدود 2.19×10^4) را نشان می‌دهد و به‌ترتیب پس از آن



شکل ۱۳ تاثیر شعاع هاب بر نتایج

Fig. 13 Effect of the radius of hub on the results

پیکربندی‌های R=0.25، R=0.3 و در نهایت R=0.5 با کمترین مقدار (حدود 2.14×10^4) قرار دارند.

مکانیسم فیزیکی این رفتار به نحوه تأثیرگذاری شعاع هاب بر توزیع نیروهای گریز از مرکز در سراسر ساختار تیر بازمی‌گردد. شعاع هاب کوچکتر باعث تمرکز اثرات چرخشی در نزدیکی محور دوران می‌شود و در نتیجه نسبت سفتی به جرم مؤثر سازه را افزایش داده و فرکانس طبیعی را بالا می‌برد. همان‌طور که در مطالعات مربوط به تیرهای ساندویچی دوار نیز گزارش شده است، دوران تیر موجب ایجاد سختی افزوده‌ای می‌شود که مستقیماً بر ویژگی‌های ارتعاشی اثر می‌گذارد. هندسه باریک‌شونده همراه با ویژگی‌های خاص هسته آگزتیک (ضریب پواسون منفی) یک سامانه مکانیکی پیچیده ایجاد می‌کند که در آن شعاع هاب به‌عنوان پارامتر کنترلی کلیدی در رفتار ارتعاشی عمل می‌کند. این اثر در طول‌های کوتاه‌تر تیر بارزتر است، جایی که تفاوت بین مقادیر مختلف R برجسته‌تر بوده، در حالی‌که برای تیرهای بلندتر، نمودارها به سمت مقادیر فرکانس نزدیک به هم همگرا می‌شوند و نقش شعاع هاب کاهش می‌یابد.

از منظر مهندسی، پارامتر شعاع هاب یک درجه آزادی مهم در طراحی سازه‌های دوار ساندویچی با هسته آگزتیک محسوب می‌شود. با انتخاب مناسب شعاع هاب، می‌توان پاسخ ارتعاشی مطلوبی برای اجزای سازه‌ای دوار مانند پره‌های توربین، روتورهای بالگرد یا بازوهای رباتیک به‌دست آورد. نتایج نشان می‌دهند که برای کاربردهایی که نیاز به فرکانس طبیعی بالاتر و ایزولاسیون ارتعاشی بهتر دارند، انتخاب شعاع هاب کوچکتر، به‌ویژه در طراحی تیرهای کوتاه‌تر، مزیت محسوسی خواهد داشت. با این حال، کاهش تأثیر R در تیرهای بلندتر بیانگر آن است که برای سازه‌های با طول زیاد، پارامترهایی نظیر ضخامت رویه یا نسبت باریک‌شوندگی ممکن است کنترل مؤثرتری بر ویژگی‌های ارتعاشی ایجاد کنند.

بر اساس جدول ۳، تحلیلی از فرکانس‌های طبیعی یک تیر ساندویچی با ضخامت متغیر و پارامترهای مشخص‌شده (طول ۰/۶ متر) ، ضخامت رویه بالا و پایین ۳ میلی‌متر، تعداد نقاط شبکه ۱۴، شرایط مرزی گیردار–ساده، سرعت زاویه‌ای بدون‌بُعد γ=0.1، شعاع

هاب R=0.25، نسبت ابعادی سلول η_1=2، نسبت ضخامت به طول سلول η_2=0.1، و زاویه داخلی سلول آگزتیک ($\varphi=\pi/6$) قابل ارائه است. جدول مذکور چهار مود اول فرکانس طبیعی را برای مقادیر مختلف پارامتر باریک‌شوندگی λ و سرعت زاویه‌ای γ گزارش می‌کند. در حالت بدون چرخش(γ=0)، فرکانس‌های طبیعی بدون‌بُعد برای چهار مود نخست به‌ترتیب برابرند با: ۵۹۶۶/۴۸، ۱۳۵۸۵/۱۷، ۲۱۲۷۹/۴۲ و ۲۲۴۲۲/۰۲، زمانی که λ=0 (یعنی تیر ضخامت یکنواخت و بدون باریک‌شوندگی). با افزایش پارامتر باریک‌شوندگی از صفر تا ۰/۱، کاهش جزئی در مقادیر فرکانس طبیعی در تمام مودها مشاهده می‌شود؛ به‌عنوان مثال، فرکانس مود اول از ۵۹۶۶/۴۸ به ۵۶۷۱/۱۶۶ و فرکانس مود چهارم از ۲۲۴۲۲/۰۲ به ۲۱۴۷۲/۱۸ کاهش می‌یابد. این نتایج نشان می‌دهد که حتی مقدار اندکی از باریک‌شوندگی نیز منجر به کاهش نسبت سفتی به جرم سازه شده و به دنبال آن، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. با در نظر گرفتن چرخش (γ=0.3 و γ=0.4)، فرکانس‌های طبیعی در تمامی مودها و برای تمام مقادیر λ به‌صورت چشم‌گیری افزایش می‌یابند. به‌عنوان نمونه، در حالت γ=0.4 و λ=0، فرکانس‌های چهار مود اول به‌ترتیب برابرند با: ۹۸۳۷/۱۶، ۳۲۹۳۹/۶۲، ۴۵۴۱۰/۲۲، و ۴۵۷۷۸/۵۱. این افزایش قابل توجه ناشی از اثر سفت‌کنندگی نیروهای گریز از مرکز است که در اثر چرخش ایجاد می‌شوند و موجب افزایش سختی مؤثر سازه می‌گردند.

با این حال، مشابه با حالت بدون چرخش، افزایش پارامتر λ حتی در حضور سرعت زاویه‌ای نیز منجر به کاهش تدریجی فرکانس‌های طبیعی می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده برهم‌کنش دو اثر متضاد است: از یک‌سو، سفت‌شوندگی ناشی از چرخش و از سوی دیگر، نرم‌شدگی هندسی ناشی از باریک‌شوندگی. در مجموع، نتایج جدول ۳ تأکید می‌کنند که رفتار دینامیکی این نوع تیرها تحت تأثیر ترکیبی از پارامترهای هندسی و دینامیکی بوده و طراحی بهینه آن‌ها مستلزم موازنه دقیق میان این عوامل است.

بر اساس جدول ۴، تأثیر شعاع هاب R بر فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی با ضخامت متغیر و هسته آگزتیک، برای مقادیر مختلفی از سرعت زاویه‌ای γ قابل بررسی است. داده‌های جدول شامل فرکانس‌های طبیعی چهار مود اول در سه مقدار از سرعت زاویه‌ای γ=0.1،0.2،0.3 و سه شعاع هاب مختلف R=0.05،0.1،0.25 می‌باشد. برای γ=0.1، افزایش شعاع هاب از ۰/۰۵ به ۰/۲۵ باعث افزایش جزئی در فرکانس‌های طبیعی تمامی مودها می‌شود؛ به‌عنوان مثال، فرکانس مود اول از ۶۱۷۹/۸۴۵ به ۶۲۸۴/۱ افزایش یافته است. این موضوع نشان می‌دهد که با افزایش شعاع هاب، اثر نیروهای گریز از مرکز گسترده‌تر شده و سختی مؤثر سازه کمی افزایش یافته که به‌دنبال آن فرکانس‌های طبیعی نیز بالاتر می‌روند. با افزایش سرعت زاویه‌ای γ از ۰/۱ به ۰/۳، فرکانس‌های طبیعی در تمام مودها و برای تمام شعاع‌های چرخش به‌صورت قابل توجهی افزایش می‌یابند. به‌عنوان نمونه، در R=0.25، فرکانس مود اول از ۶۲۸۴/۱ در γ=0.1 به ۸۴۲۴/۴۱۵ در γ=0.3 افزایش یافته است. این روند بیانگر اثر تقویت‌شده نیروهای گریز از مرکز با افزایش سرعت چرخش است که موجب افزایش سختی سازه و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

جدول ۳ تاثیر سرعت دورانی و پارامتر باریک‌شوندگی بر فرکانس مودهای مختلف ارتعاشی

Table 3 Effect of rotational speed and tapering parameter on the frequencies of different vibration modes.

Mode Number	γ=0				γ=0.3				γ=0.4			
	λ=0	λ=0.01	λ=0.05	λ=0.1	λ=0	λ=0.01	λ=0.05	λ=0.1	λ=0	λ=0.01	λ=0.05	λ=0.1
1	5966.48	5937.288	5819.783	5671.166	8445.312	8424.415	8340.457	8234.622	9837.16	9818.992	9745.946	9653.726
2	13585.17	13519.02	13252.46	12914.67	18283.06	18233.86	18036.24	17787.3	32939.62	32867.27	20877.82	20632.35
3	21279.42	21298.45	21375.12	21324.65	21270.38	21289.64	21367.08	21464.88	45410.22	45449.74	21307.27	21433.32
4	22422.02	22313.89	21877.86	21472.18	28964.85	28882.3	28550.39	28131.43	45778.51	45671.54	32576.44	32209.4

جدول ۴ تاثیر سرعت دورانی و شعاع هاب بر فرکانس مودهای مختلف ارتعاشی

Table 4 Effect of rotational speed and radius of hub on the frequencies of different vibration modes.

Mode Number	γ=0			γ=0.2			γ=0.3		
	R=0.05	R=0.1	R=0.25	R=0.05	R=0.1	R=0.25	R=0.05	R=0.1	R=0.25
1	6179.845	6206.143	6284.1	6838.54	6929.3	7191.828	7774.11	7943.904	8424.415
2	13965.53	14012.32	14151.37	15201.84	15367.59	15850.26	17005.66	17324.18	18233.86
3	21297.94	21297.89	21297.72	21296.39	21296.16	21295.46	21293.27	21292.52	21289.64
4	22917.67	22981.07	23169.82	24614.33	24843.59	25514.08	27141.76	27591.51	28882.3

جدول ۵ تاثیر سرعت دورانی و زاویه سلول آگزتیک بر فرکانس مودهای مختلف ارتعاشی

Table 5 Effect of rotational speed and auxetic cell angle on the frequencies of different vibration modes.

Mode Number	γ=0				γ=0.1				γ=0.3			
	φ=0	φ=30	φ=45	φ=60	φ=0	φ=30	φ=45	φ=60	φ=0	φ=30	φ=45	φ=60
1	6222.909	5937.288	5632.968	5134.785	6554.721	6284.1	5997.22	5531.414	8637.573	8424.415	8200.823	7843.064
2	14166.95	13519.02	12828.53	11697.18	14771.45	14151.37	13493.37	12422.51	18731.84	18233.86	17712.36	16879.41
3	22225.06	21298.45	20192.25	18465.44	22224.35	21297.72	20191.48	18464.61	22216.89	21289.64	20181.88	18450.88
4	23376.13	22313.89	21180.69	19321.86	24193.68	23169.82	22081.4	20306.19	29721.54	28882.3	28000.54	26586.99

در مجموع، نتایج جدول ۴ نشان می‌دهند که با تنظیم شعاع هاب و سرعت زاویه‌ای می‌توان ویژگی‌های ارتعاشی مطلوبی را برای تیرهای ساندویچی با هسته آگزتیک به‌دست آورد. این یافته‌ها می‌توانند به‌عنوان مبنایی ارزشمند برای طراحی و بهینه‌سازی سازه‌های دوار سبک‌وزن و مقاوم در برابر ارتعاش در کاربردهای مهندسی پیشرفته مورد استفاده قرار گیرند.

جدول ۵ داده‌هایی درباره فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی با ضخامت متغیر و هسته آگزتیک ارائه می‌دهد، که در آن زاویه انحراف سلول‌های هسته (φ) و سرعت زاویه‌ای (γ) مورد بررسی قرار گرفته‌اند. فرکانس‌های طبیعی چهار مود اول برای مقادیر مختلف زاویه انحراف و برای سه مقدار سرعت زاویه‌ای گزارش شده‌اند. در حالت بدون چرخش (γ=0)، با افزایش زاویه انحراف سلول‌ها، فرکانس‌های طبیعی در تمامی مودها به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال، فرکانس مود اول از ۶۲۲۲/۹۰۹ در φ=0 به ۵۱۳۴/۷۸۵ در φ=60 کاهش یافته است. این روند نشان‌دهنده کاهش سختی مؤثر سازه با افزایش زاویه انحراف است که موجب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. با افزایش سرعت زاویه‌ای γ، فرکانس‌های طبیعی در تمامی مودها و برای تمامی زوایای انحراف افزایش می‌یابد که ناشی از اثر سخت‌کنندگی نیروهای گریز از مرکز در سازه در حال چرخش است. با این حال، روند کاهشی فرکانس طبیعی با افزایش زاویه φ حتی در مقادیر بالای γ نیز حفظ می‌شود. برای مثال، در γ=0.3، فرکانس مود اول از ۸۶۳۷/۵۷۳ در φ=0 به ۷۸۴۳/۰۶۴ در φ=60 کاهش یافته است. این نتایج به‌خوبی نشان می‌دهند که زاویه انحراف سلول‌های آگزتیک نقش مؤثری در تعیین رفتار ارتعاشی تیر ساندویچی دارد و می‌توان با تغییر این زاویه، ویژگی‌های دینامیکی سازه را در کاربردهای خاص تنظیم و بهینه‌سازی کرد.

با استناد به جداول ۶ و ۷، می‌توان مقایسه‌ای میان چهار نوع فلز به‌کاررفته در لایه‌های رویی و زیرین یک تیر ساندویچی ضخامت‌متغیر (آلومینیوم، تیتانیوم، منیزیم و فولاد AISI 4140) از نظر فرکانس‌های طبیعی در چهار مود اول انجام داد. نتایج نشان می‌دهد که تیر ساندویچی با پوسته فولادی به‌طور کلی بالاترین فرکانس‌های طبیعی را در تمام مودها داراست. برای مثال، در مود اول، فرکانس طبیعی فولاد برابر ۶۲۹۵/۶۰۲ هرتز است که بالاتر از مقادیر مربوط به آلومینیوم (۶۲۸۴/۱)، تیتانیوم (۶۲۶۵/۸۱۶) و منیزیم (۶۲۷۳/۰۰۶) می‌باشد. این موضوع نشان می‌دهد که استفاده از پوسته‌های فولادی سختی کلی سازه را افزایش داده و منجر به فرکانس‌های طبیعی بالاتر می‌شود.

آلومینیوم عملکردی نزدیک به فولاد دارد و با توجه به چگالی کمتر، گزینه مناسبی در کاربردهایی است که کاهش وزن اهمیت دارد. در مقابل، تیتانیوم و منیزیم مقادیر فرکانس طبیعی کمتری نسبت به فولاد و آلومینیوم دارند که حاکی از سختی کمتر این مواد در ترکیب ساندویچی مورد بررسی است.

در مود چهارم نیز روند مشابهی مشاهده می‌شود؛ به‌گونه‌ای که فولاد همچنان بیشترین فرکانس (۲۳۱۹۸/۶۲) و تیتانیوم کمترین مقدار (۲۳۱۲۴/۱) را داراست. این نتایج تأکید می‌کنند که انتخاب ماده فلزی برای پوسته‌ها نقش تعیین‌کننده‌ای در رفتار دینامیکی تیر ساندویچی دارد و می‌تواند بسته به کاربرد، برای افزایش سختی یا کاهش جرم به‌طور هدفمند انتخاب شود.

به عنوان یک نمونه عملی، نتایج این پژوهش می‌تواند در طراحی بهینه پره توربین بادی با ساختار ساندویچی اعمال شود. با استفاده از یافته‌های حاضر، می‌توان با تنظیم پارامترهایی چون زاویه سلول آگزتیک (برای افزایش میرایی)، ضخامت متغیر (برای توزیع بهینه جرم و سختی) و انتخاب رویه فولادی (برای افزایش سفتی)، فرکانس طبیعی پره را از باند تحریکات ناشی از وزش باد دور کرده و پدیده رزونانس را مهار نمود. این امر منجر به افزایش عمر خستگی، کاهش صدا و افزایش راندمان استحصال انرژی می‌گردد.

جدول ۶ خواص مکانیکی رویه‌های فلزی

Table 6 Mechanical properties of the metallic facesheets.

Metal Type	Young's Modulus (GPa)	Poisson's Ratio	Density (kg/m³)
Aluminum alloy	70-80	0.33	2700
Titanium alloy	110-120	0.34	4500
Magnesium alloy	45-50	0.29	1800
Steel	210	0.3	7850

جدول ۷ تغییرات فرکانس طبیعی بر اساس جنس رویه‌ها

Table 7 Variation of the natural frequency with respect to the face sheet material.

Mode Number	Aluminum	Titanium	Magnesium	Steel
1	6295.602	6273.006	6265.816	6284.1
2	14172.52	14130.98	14117.78	14151.37
3	21297.7	21297.75	21297.76	21297.72
4	23198.62	23142.07	23124.1	23169.82

فهرست علائم

$\mathcal{A}_{ik}^{(n)}$	ضرایب وزنی روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته
C	مولفه‌های ماتریس سفتی
$\{d\}$	بردار جابجایی (m)
$E(z)$	مدول یانگ (Pa)
$\mathcal{F}(z), \mathcal{G}(z)$	توابع تغییر شکل برشی
$G(z)$	مدول برشی (Pa)
h_t, h_0, h_b	ضخامت لایه بالا، هسته و لایه پایین (m)
$[\mathcal{K}]$	ماتریس سختی الاستیک
$\mathcal{K}$	انرژی جنبشی
L	طول تیر (m)
l_1, l_2, l_3	طول‌های افقی، عمودی و مایل سلول‌های هسته آگزتیک (m)
$[\mathcal{M}]$	ماتریس جرم
N	تعداد نقاط شبکه
N_R	نیروی گریز از مرکز (N)
R	شعاع دوران تیر (m)
$\mathcal{S}$	انرژی کرنشی
t	ضخامت هسته (m)
$\mathcal{U}, \mathcal{W}$	مولفه‌های جابجایی در راستای x و z (m)
W_R	کار ناشی از نیروی گریز از مرکز (J)
ε, γ	کرنش‌های نرمال و برشی
θ	زاویه شیب هسته آگزتیک (rad)
λ_1, λ_2	نسبت‌های هندسی هسته آگزتیک
Λ	زاویه رویه‌های تیر نسبت به افق (rad)
ν	ضریب پواسون
ρ	چگالی (kg/m^3)
σ, τ	تنش‌های نرمال و برشی (Pa)
ω	سرعت زاویه‌ای تیر (rad/s)

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار ارتعاشی یک تیر ساندویچی ضخامت‌متغیر دوار با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک و رویه‌های فلزی تحت تأثیر پارامترهای هندسی و دینامیکی گوناگون مورد تحلیل دقیق قرار گرفت. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استخراج شده و حل عددی آن‌ها با روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته انجام شد. تحلیل همگرایی نتایج نشان داد که روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته دقت بالا و کارایی محاسباتی مناسبی در پیش‌بینی رفتار مودهای ارتعاشی مختلف دارد، به‌طوری که نتایج برای تعداد گره‌های بیشتر از ۱۴ به پایداری عددی مطلوبی رسیدند. مطالعات پارامتری گسترده حاکی از آن بود که پارامترهای هندسی هسته آگزتیک (از جمله زاویه انحراف سلول‌ها، نسبت ضخامت به طول دیواره، و نسبت ابعادی سلول) تأثیر بسزایی بر فرکانس‌های طبیعی سازه دارند. با افزایش زاویه سلولی و نسبت ضخامت دیواره به طول، فرکانس‌های طبیعی کاهش یافته و نشان‌دهنده کاهش سختی مؤثر سازه هستند. از سوی دیگر، افزایش نسبت طولی سلول‌ها (η_1)موجب افزایش فرکانس طبیعی شد، که می‌توان آن را به افزایش سختی خمشی هسته نسبت داد. همچنین افزایش سرعت زاویه‌ای (γ) موجب افزایش قابل توجه فرکانس‌ها شد که این پدیده ناشی از اثر سخت‌کنندگی گریز از مرکز می‌باشد. نتایج نشان داد که پارامترهای ساختاری همچون طول تیر، پارامتر کاهش ضخامت (λ)، ضخامت هسته و ضخامت رویه‌ها تأثیر هم‌زمان و گاه متضادی بر رفتار دینامیکی دارند. به‌عنوان مثال، افزایش طول تیر منجر به کاهش شدید فرکانس طبیعی شد، در حالی‌که تأثیر ضخامت هسته در طول‌های بیشتر کاهش می‌یابد. در همین راستا، تغییر پارامتر λ موجب کاهش سختی و در نتیجه کاهش فرکانس‌ها شد، به‌خصوص در طول‌های کوتاه‌تر. بررسی تأثیر شعاع دوران نیز نشان داد که در مقادیر کوچک‌تر این پارامتر، سختی مؤثر تیر افزایش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی بالاتری حاصل می‌شود. این تأثیر در تیرهای کوتاه‌تر بارزتر بوده و در طول‌های بیشتر کاهش می‌یابد. همچنین مقایسه بین رویه‌های فلزی مختلف نشان داد که استفاده از فولاد AISI 4140 به دلیل سختی بالا منجر به بیشترین فرکانس طبیعی شده و در مقابل، تیتانیوم و منیزیم فرکانس‌های کمتری تولید می‌کنند. در مجموع، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که با تنظیم دقیق پارامترهای هندسی، جنس مواد، و شرایط مرزی، می‌توان پاسخ دینامیکی سازه‌های ساندویچی با هسته آگزتیک را به‌طور مؤثری کنترل کرد. این یافته‌ها می‌توانند راهگشای طراحی بهینه‌ی سازه‌های چرخان سبک‌وزن با عملکرد ارتعاشی مطلوب در کاربردهایی نظیر توربین‌ها، تیغه‌های هوایی، و سامانه‌های برداشت انرژی باشند. از محدودیت‌های این تحلیل می‌توان به این نکته که مدل تیرتوسعه‌یافته برای بخش مرکزی پره در نظر گرفته شده و شکل کمانی دقیق (فیلت) در منطقه اتصال به هاب مدل نشده است، اشاره کرد. این ساده‌سازی می‌تواند در محاسبه دقیق فرکانس‌های طبیعی به ویژه برای مودهای بالاتر که حساسیت بیشتری به تغییرات محلی سختی دارند، تأثیرگذار باشد. شبیه‌سازی با المان محدود با در نظرگیری هندسه واقعی اتصال، برای دستیابی به نتایج عملیاتی دقیق‌تر توصیه می‌شود. همچنین شایان ذکر است مدل ارائه‌شده مبتنی بر فرضیات ساده‌کننده‌ای است که ممکن است در شرایط عملی پیچیده‌تر نیاز به بازنگری داشته باشد. از جمله اتصال کامل و بدون لغزش بین لایه‌ها در نظر گرفته شده و اثرات احتمالی جدایش، تنش‌های پسماند ناشی از فرآیند ساخت، یا نواقص اتصال مدل نشده‌اند. رفتار خطی مواد فرض شده و اثرات غیرخطی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ یا خزش مواد در سرعت‌های بسیار بالا در نظر گرفته نشده است. توزیع یکنواخت سلول‌های آگزتیک در طول هسته فرض شده و تغییرات احتمالی در چیدمان سلولی محلی مدل نشده است. تحلیل حساسیت این فرضیات و توسعه‌ی مدل‌های غیرخطی با درنظرگیری آسیب‌پذیری اتصالات، می‌تواند زمینه‌ی پژوهشی ارزشمندی برای مطالعات آتی باشد.

تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: در این مقاله از برخی نتایج حاصل از رساله دکتری نویسنده مسئول استفاده شده است. هیچ تعارض منافع دیگری برای اظهار وجود ندارد.

منابع

[1] R. A. Shanab and M. A. Attia, "Semi-analytical solutions for static and dynamic responses of bi-directional functionally graded nonuniform nanobeams with surface energy effect," *Eng. Comput.*, pp. 1–44, Nov. 2020, doi: 10.1007/s00366-020-01205-6.

[2] X. Huang, Y. Zhang, Z. Moradi, and N. Shafiei, "Computer simulation via a couple of homotopy perturbation methods and the generalized differential quadrature method for nonlinear vibration of functionally graded non-uniform micro-tube," *Eng. Comput.*, vol. 38, no. 3, pp. 2481–2498, Apr. 2022, doi: 10.1007/s00366-021-01395-7.

[3] S. S. Mirjavadi, A. Matin, N. Shafiei, S. Rabby, and B. Mohasel Afshari, "Thermal buckling behavior of two-dimensional imperfect functionally graded microscale-tapered porous beam," *J. Therm. Stress.*, vol. 40, no. 10, pp. 1201–1214, Oct. 2017, doi: 10.1080/01495739.2017.1332962.

[4] M. H. Ghayesh, "Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams," *Appl. Math. Model.*, vol. 59, pp. 583–596, 2018, doi: 10.1016/j.apm.2018.02.017.

[5] L. P. Lefebvre, J. Banhart, and D. C. Dunand, "Porous metals and metallic foams: Current status and recent developments," *Adv. Eng. Mater.*, vol. 10, no. 9, pp. 775–787, Sep. 2008, doi: 10.1002/adem.200800241.

[6] E. Magnucka-Blandzi, "Mathematical modelling of a rectangular sandwich plate with a metal foam core," *J. Theor. Appl. Mech.*, vol. 49, no. 2, pp. 439–455, 2011.

[7] S. Kitipornchai, D. Chen, and J. Yang, "Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets," *Mater. Des.*, vol. 116, pp. 656–665, Feb. 2017, doi: 10.1016/j.matdes.2016.12.061.

[8] P. T. Thang, C. Kim, H. Jang, T. Kim, and J. Kim, "Buckling behavior analysis of hybrid-honeycomb sandwich cylindrical shells," *Ocean Eng.*, vol. 276, p. 114214, May 2023, doi: 10.1016/J.OCEANENG.2023.114214.

[9] M. H. Hajmohammad, R. Kolahchi, M. S. Zarei, and A. H. Nouri, "Dynamic response of auxetic honeycomb plates integrated with agglomerated CNT-reinforced face sheets subjected to blast load based on visco-sinusoidal theory," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 153–154, pp. 391–401, Apr. 2019, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.02.008.

[10] X. Zhang, H. Hao, R. Tian, Q. Xue, H. Guan, and X. Yang, "Quasi-static compression and dynamic crushing behaviors of novel hybrid re-entrant auxetic metamaterials with enhanced energy-absorption," *Compos. Struct.*, vol. 288, p. 115399, May 2022, doi: 10.1016/j.compstruct.2022.115399.

[11] Q. Gao, Z. Ding, and W.-H. Liao, "Effective elastic properties of irregular auxetic structures," *Compos. Struct.*, vol. 287, p. 115269, May 2022, doi: 10.1016/j.compstruct.2022.115269.

[12] T. Tian, "Aero-thermal stability and vibrational behavior prediction of porous-cellular microplates traveling in two directions under hygro-magneto-mechanical loading: numerical approach and machine learning algorithm," *Thin-Walled Struct.*, p. 113624, Jun. 2025, doi: 10.1016/j.tws.2025.113624.

[13] M. Amir, S.-W. Kim, and M. Talha, "On the stochastic vibration analysis of the geometrically nonlinear graded cellular curved panels with material stochasticity," *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, vol. 199, p. 104768, Oct. 2022, doi: 10.1016/j.ijpvp.2022.104768.

[14] D. Chen, S. Rezaei, P. L. Rosendahl, B.-X. Xu, and J. Schneider, "Multiscale modelling of functionally graded porous beams: Buckling and vibration analyses," *Eng. Struct.*, vol. 266, p. 114568, Sep. 2022, doi: 10.1016/j.engstruct.2022.114568.

[15] F. Ç. Bolat, A. Sugeç, and A. Özdemir, "Design, numerical analysis and experiments of different types auxetic beams for vibration based energy harvester," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 210, p. 111170, Mar. 2024, doi: 10.1016/j.ymssp.2024.111170.

[16] S. Sadikbasha, Y. B. Subrahmanyam, V. Pandurangan, and B. Radhika, "Computational homogenization for dynamic characterization of a square cellular honeycomb vibration energy harvester," *Structures*, vol. 63, p. 106269, May 2024, doi: 10.1016/j.istruc.2024.106269.

[17] M. Ruzzene and F. Scarpa, "Control of Wave Propagation in Sandwich Beams with Auxetic Core," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 14, no. 7, pp. 443–453, Jul. 2003, doi: 10.1177/1045389X03035515.

[18] S. Zhao, Y. Zhang, Y. Zhang, J. Yang, and S. Kitipornchai, "A functionally graded auxetic metamaterial beam with tunable nonlinear free vibration characteristics via graphene origami," *Thin-Walled Struct.*, vol. 181, p. 109997, Dec. 2022, doi: 10.1016/j.tws.2022.109997.

[19] F. Ebrahimi and M. Mahinzare, "Nonlinear vibration analysis of sandwich plate with cellular auxetic core and porous GPL reinforced piezoelectric face sheets rested on elastic foundation using GDQM via Reddy plate theory," *Structures*, vol. 77, p. 108976, Jul. 2025, doi: 10.1016/j.istruc.2025.108976.

[20] M. A. Mohammadimehr, A. Loghman, S. Amir, M. Mohammadimehr, and E. Arshid, "Vibration behavior of a thick double-curved sandwich panel with auxetic core and carbon nanotube reinforced composite based on TSDDCT and NSGT," *Acta Mech.*, vol. 236, no. 5, pp. 2967–3000, May 2025, doi: 10.1007/s00707-025-04302-z.

[21] P. H. Cong, P. T. Long, N. Van Nhat, and N. D. Duc, "Geometrically nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened circular cylindrical shells with negative poisson's ratio in auxetic honeycombs core layer," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 152, pp. 443–453, Mar. 2019, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.052.

[22] Y. Li, Z. Chen, D. Xiao, W. Wu, and D. Fang, "The Dynamic response of shallow sandwich arch with auxetic metallic honeycomb core under localized impulsive loading," *Int. J. Impact Eng.*, vol. 137, p. 103442, Mar. 2020, doi: 10.1016/j.ijimpeng.2019.103442.

[23] H. Amirabadi, A. Mottaghi, M. Sarafraz, and H. Afshari, "Free vibrational behavior of a conical sandwich

shell with a functionally graded auxetic honeycomb core," *J. Vib. Control*, Mar. 2024, doi: 10.1177/10775463241240215.
[24] H. A. Pham, H. Q. Tran, M. T. Tran, V. L. Nguyen, and Q. T. Huong, "Free vibration analysis and optimization of doubly-curved stiffened sandwich shells with functionally graded skins and auxetic honeycomb core layer," *Thin-Walled Struct.*, vol. 179, p. 109571, Oct. 2022, doi: 10.1016/J.TWS.2022.109571.
[25] M. Taghizadeh, J. Khaghanifard, AR. Askari, and O. Graja, "Modified couple stress flexural-flexural-torsional large deformable beam element," *Mech. Based Des. Struct. Mach*., p. 1-27, Jul 2025, doi: 10.1080/15397734.2025.2532732.
[26] M. Taghizadeh, M. Gholikord, and E. Etemadi, "Enhanced design and experimental validation of negative and zero Poisson's ratio metamaterials using topology optimization method," *Smart Mater. Struct*., vol. 34, p. 045018, April 2025, doi: 10.1088/1361-665X/adc11a.
[27] M. Nouraei, V. Zamani, and Ö. Civalek, "Vibration of smart sandwich plate with an auxetic core and dual-FG nanocomposite layers integrated with piezoceramic actuators," *Compos. Struct.*, vol. 315, p. 117014, Jul. 2023, doi: 10.1016/j.compstruct.2023.117014.
[28] X. Wang and T. Fu, "A novel arc-type auxetic cellular doubly-curved shells with negative Poisson's ratio for broadband low-frequency sound insulation," *Eur. J. Mech. - A/Solids*, vol. 106, p. 105326, Jul. 2024, doi: 10.1016/j.euromechsol.2024.105326.
[29] E. Arshid, Z. K. Maraghi, and Ö. Civalek, "Variable-thickness higher-order sandwich beams with FG cellular core and CNT-RC patches: vibrational analysis in thermal environment," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 95, no. 1, p. 2, Jan. 2025, doi: 10.1007/s00419-024-02716-0.
[30] B. Akgöz and Ö. Civalek, "A size-dependent beam model for stability of axially loaded carbon nanotubes surrounded by Pasternak elastic foundation," *Compos. Struct.*, vol. 176, pp. 1028–1038, Sep. 2017, doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2017.06.039.
[31] M. Sobhy, "Buckling and vibration of FG graphene platelets/aluminum sandwich curved nanobeams considering the thickness stretching effect and exposed to a magnetic field," *Results Phys.*, vol. 16, p. 102865, Mar. 2020, doi: 10.1016/j.rinp.2019.102865.
[32] Z. Liu, S. Su, D. Xi, and M. Habibi, "Vibrational responses of a MHC viscoelastic thick annular plate in thermal environment using GDQ method," *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, pp. 1–26, 2020, doi: 10.1080/15397734.2020.1784201.
[33] M. S. H. Al-Furjan, H. Safarpour, M. Habibi, M. Safarpour, and A. Tounsi, "A comprehensive computational approach for nonlinear thermal instability of the electrically FG-GPLRC disk based on GDQ method," *Eng. Comput.*, pp. 1–18, Jun. 2020, doi: 10.1007/s00366-020-01088-7.
[34] E. Arshid, S. Amir, and A. Loghman, "Static and dynamic analyses of FG-GNPs reinforced porous nanocomposite annular micro-plates based on MSGT," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 180, no. March, p. 105656, 2020, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105656.
[35] P. Ruta and J. Szybiński, "Free Vibration of Non-prismatic Sandwich Beams Using the Chebyshev Series," *Procedia Eng.*, vol. 91, pp. 105–111, 2014, doi: 10.1016/j.proeng.2014.12.022.
[36] J. R. Banerjee, "Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method," *Comput. Struct.*, vol. 81, no. 18–19, pp. 1915–1922, Aug. 2003, doi: 10.1016/S0045-7949(03)00211-6.
[37] D. J. Mead and S. Sivakumaran, "The Stodola method applied to sandwich beam vibration," in *Proceedings of the Symposium on Numerical Methods for Vibration Problems, University of Southampton, UK*, 1966.