


A General Methodology for Dynamic Modeling and Simulation of Aerial Robotic Manipulators

Seyed Ali Mirnajafizadeh, Hamed Sharifzadeh Behzadi, Ali Mohamad Shafei* 

Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Article History

Received: February 14, 2026

Revised: March 13, 2026

Accepted: March 15, 2026

ePublished: May 15, 2026

ABSTRACT

The main objective of this paper is to present a novel approach for dynamic modeling of manipulators mounted on a flying base. The most significant challenges addressed in this research can be summarized as follows: 1) Determining an appropriate formulation for computing the generalized forces of the system, including both the active forces generated by the actuators and the passive forces arising from the constraints governing the system. 2) Defining a desired trajectory for the flying base that incorporates not only the desired position but also the desired orientation. 3) Developing an automatic and systematic dynamic modeling framework such that increasing the number of links in the robotic manipulator or the flying base does not impose any limitation on the derivation of the system's equations of motion. 4) Arranging the motors installed on the flying base in a manner that enables arbitrary motion in three-dimensional space. To overcome these challenges, the overall robotic structure—comprising the flying base and the mounted manipulator is first decomposed, through a fully systematic procedure, into a specified number of substructures. The dynamic equations of motion of each substructure (which can be regarded as an open kinematic chain with a moving base) are then derived using the recursive Gibbs–Appell algorithm. Subsequently, by appropriately combining the equations of motion of these robotic chains, the kinetic equations of motion of the complete system are obtained, explicitly accounting for the mutual dynamic interactions between the flying base and the robotic manipulator.

Keywords: Manipulator, Aerial Base, Gibbs–Appell Formulation, Dynamic Equations

How to cite this article

Mirnajafizadeh. S. A, Sharifzadeh-Behzadi. H, Shafei. A. M, A General Methodology for Modeling and Simulation of Aerial Robotic Manipulators. Modares Mechanical Engineering; 2026;26(07):529-546.

*Corresponding author's email: Shafei@uk.ac.ir


*Corresponding ORCID ID: 0000-0002-0996-1153



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.



ارائه يك روش عمومي جهت مدلسازي ديناميكي و شبیه‌سازي بازوهای رباتیک پرنده

سید علی میرنجفی زاده، حامد شریف زاده بهزادی، علی محمد شافعی* 

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران

چکیده

هدف اصلی این مقاله، ارائه یک روش جدید جهت مدل‌سازی منیپولاتورهایی است که بر روی پایه پرنده نصب شده‌اند. مهمترین چالش‌های پیشرو این تحقیق عبارت هستند از: ۱- چگونگی محاسبه نیروهای تعمیم‌یافته سیستم شامل نیروی فعال موتورها و نیروی غیرفعال قیدهای حاکم بر سیستم. ۲- نحوه تعریف مسیر مطلوب برای پایه پرنده، بگونه‌ای که علاوه بر موقعیت مطلوب، جهت‌گیری مطلوب را نیز شامل گردد. ۳- چگونگی توسعه یک روش خودکار و سیستماتیک، بگونه‌ای که افزایش تعداد لینک‌های تشکیل‌دهنده بازوی مکانیکی و پایه پرنده هیچگونه محدودیتی در استخراج معادلات حرکت سیستم ایجاد نکند. و ۴- نحوه آرایش موتورهای نصب شده بر روی پایه پرنده بگونه‌ای که هرگونه حرکتی را در فضای سه‌بعدی امکان‌پذیر سازد. برای غلبه بر چالش‌های فوق، در ابتدا کل سازه ربات شامل پایه پرنده و منیپولاتور نصب شده بر روی آن طی یک فرآیند کاملاً سیستماتیک به تعداد مشخصی زیر-سازه تقسیم می‌گردد. سپس معادلات حرکت هر یک از این زیر-سازه‌ها (که در واقع یک زنجیره باز سینماتیکی با پایه متحرک هستند) با استفاده از الگوریتم بازگشتی گیبس-اپل به دست می‌آید. در ادامه با ترکیب معادلات حرکت هر یک از این زنجیره‌های رباتیکی، معادلات حرکت کل سیستم (که در آن اثر متقابل پایه پرنده بر روی بازوی مکانیکی و بالعکس لحاظ شده است) استخراج می‌گردد.

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۲۵

بازنگری: ۱۴۰۴/۱۲/۲۲

پذیرش: ۱۴۰۴/۱۲/۲۴

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۲/۲۵

کلیدواژه‌ها: منیپولاتور، پایه پرنده، فرمولاسیون گیبس-اپل، معادلات دینامیکی

نحوه ارجاع به این مقاله

میرنجفی زاده سید علی، شریف‌زاده بهزادی حامد، شافعی علی محمد، ارائه یک روش عمومی جهت مدلسازی و شبیه‌سازی بازوهای رباتیک پرنده، مهندسی مکانیک مدرس. ۵۴۶-۵۲۹-۰۲۶(۰۷):۱۴۰۵

* پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Shafei@uk.ac.ir

* شناسه آرکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: 0000-0002-0996-1153



۱- مقدمه

بازوی ماهر هوایی به آن دسته از سیستم‌های رباتیکی اطلاق می‌شود که علاوه بر توانایی پرواز، قابلیت انجام عملیات دست‌کاری و جابجایی اشیاء را نیز دارند. این ربات‌ها معمولاً ترکیبی از یک ربات پرنده و یک بازوی رباتیکی چند درجه آزادی هستند. بازوی رباتیکی به ربات این امکان را می‌دهد که اشیاء را بردارد، جابجا کند، یا تعاملات دقیق‌تری با محیط اطراف خود داشته باشد؛ در حالی که مولتی‌روتور یا پایه پرنده وظیفه حفظ تعادل و جابجایی در فضا را بر عهده دارد. این امر موجب می‌گردد تا دامنه عملیات اینگونه از روبات‌ها به طرز قابل توجهی افزایش یابد. از سوی دیگر، ویژگی‌های منحصر به فرد و مانورهای پیچیده‌ای که این کلاس از سیستم‌های رباتیکی از خود نشان می‌دهند، باعث محبوبیت آنها در بین محققین حوزه رباتیک شده است [۱-۲]. بازوهای ماهر هوایی، با استفاده از درجات آزادی که پایه پرنده بدان بخشیده، مشکل کمبود آزادی عمل بازوی مکانیکی را حل کرده، که به دنبال آن افزایش ظرفیت حمل بار نسبت به وزن کل سیستم نتیجه می‌گردد [۳-۴]. این بازوهای پرنده به دلیل توانایی‌های پروازی دقیق و ثبات بالا پایه پرنده، و نیز چابکی و قابلیت‌های دستکاری بازوی مکانیکی، قادر به انجام عملیات‌های گسترده و پیچیده‌ای هستند. از مهمترین کاربردهای آنها می‌توان به مراقبت و بازرسی از تجهیزات صنعتی مانند خطوط انتقال برق، تعمیر توربین‌های بادی، گرفتن اجسام متحرک، کمک به انسان‌ها در عملیات جستجو و نجات، ساخت و ساز، مونتاژ و تعمیر قطعات در محیط‌های غیرقابل دسترس، همکاری بین بازوهای هوایی، نقاشی دیواره‌ها، تمیز کردن شیشه‌ها و برج‌ها، نگهداری پل‌ها، نقشه‌برداری، و حمل و نقل هوایی نام برد [۵-۹].

نمونه‌های اولیه این سیستم رباتیکی، مانند نمونه کوادروتور ساخته شده در دانشگاه ییل کانادا (که با وزن $4/3$ کیلوگرم توانایی حمل بار ۱ کیلوگرمی را داشت) شامل یک نگهدارنده ساده بودند [۱۰]. کوادروتور ساخته شده در دانشگاه درکسل با طراحی‌های مختلف (شامل بازوهای همکار ۲ درجه آزادی، ۴ درجه آزادی و نیز بازوی سریال ۶ درجه آزادی) ابتدا با استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری تحلیل گردید. سپس مدل ساخته شده آن برای انجام کارهایی همچون گرفتن اشیاء در حین پرواز، باز کردن شیر آب، و قرار دادن میخ در سوراخ به‌کارگرفته شد [۱۱]. مدل اوکتاروتور دانشگاه جان هاپکینز که مجهز به بازوی ۲ درجه آزادی بود، جهت حمل اشیاء و قراردادن آنها در مکان‌های مشخصی از فضا مورد استفاده قرار گرفت [۱۲]. همچنین می‌توان به ساخت و آزمایش موفقیت‌آمیز کوادروتور با گریپر مغناطیسی در دانشگاه ETH زوریخ اشاره نمود که به‌منظور گرفتن اشیاء ثابت و متحرک طراحی شده بود [۱۳].

بازوی مکانیکی نصب شده بر روی پایه پرنده از چالش‌هایی همچون محدود بودن فضای کاری و پایین بودن توانایی چنگ زدن رنج می‌برد. بازوی یک درجه آزادی الهام گرفته شده از پرندگان به‌منظور گرفتن اجسام توسط توماس و همکاران بررسی شد [۱۴]. کیم و همکاران از یک بازوی دو درجه آزادی که بر روی یک کوادکوپتر نصب شده بود، برای برداشتن، جابه‌جا کردن، و رها کردن اجسام در یک محفظه سود جستند [۱۵]. در تحقیقی دیگر، لی و همکاران از یک بازوی ماهر هوایی که دارای دو درجه آزادی بود و بر روی یک پرنده شش ملخه نصب شده بود، برای جابجایی اجسام استفاده کردند [۱۶]. کورپلا و همکاران یک ربات پرنده مجهز به دو بازوی مکانیکی دو درجه آزادی را جهت گرفتن و چرخاندن شیرهای صنعتی بکار گرفتند [۱۷]. جیمز-کانو و همکاران با استفاده از یک بازوی مکانیکی نصب شده بر روی کوادروتور، عملیات بازرسی و شناسایی عیوب سازه‌ها را توسط سنسورهایی که در انتهای بازو نصب شده بود، به انجام رساندند [۱۸]. در ارتباط با بازوهای دارای افزونگی درجه آزادی، اولرو و همکاران از یک بازوی ۷ درجه آزادی نصب شده بر روی کوادکوپتر به‌منظور برداشتن و جابه‌جا کردن اجسام استفاده کردند [۱۹]. سوارز و همکاران از یک مکانیزم پیشرفته در بازوی هوایی سه درجه آزادی برای تشخیص عیب در بدنه سازه‌ها سود جستند [۲۰]. از دیگر کارهای صورت گرفته در این حوزه می‌توان به ساخت کوادروتور مجهز به یک بازوی پنج درجه آزادی و اوکتاروتور با بازوی همکار چهار درجه آزادی جهت گرفتن اجسام و تعامل فیزیکی با محیط اشاره نمود [۲۱]. همچنین در بررسی تماس فیزیکی ربات هوایی با دیوار و کنترل نیروی تماس می‌توان به تحقیقات [۲۲] اشاره نمود. با این حال، مهمترین نقص تحقیقات صورت گرفته در این حوزه، استفاده از منیپولاتورهایی است که در ساختار آنها از تعداد محدودی لینک استفاده شده است [۲۳].

به‌منظور شبیه‌سازی دینامیکی و طراحی سیستم کنترل، ابتدا باید معادلات حرکت سیستم استخراج گردند. اگرچه بسیاری از سیستم‌های دینامیکی را می‌توان به‌صورت خطی مدل‌سازی کرد، اما سیستم‌هایی همچون ربات‌های هوایی ذاتاً غیرخطی هستند؛ و لذا مدل‌سازی غیرخطی آنها اجتناب‌ناپذیر است. در واقع، برخی از رفتارهای اینگونه از سیستم‌های رباتیکی همچون حرکات دورانی در فضای کاری، تنها با استفاده از مدل‌های غیرخطی قابل بیان هستند. از سوی دیگر، اضافه کردن بازوی مکانیکی به ربات‌های پرنده، باعث ایجاد اثرات پیچیده در رفتار دینامیکی اینگونه از سیستم می‌گردد. اساساً دو رویکرد متفاوت برای مدل‌سازی دینامیکی بازوهای رباتیک هوایی وجود دارد. در رویکرد اول پایه پرنده و بازوی مکانیکی به‌عنوان یک سیستم یکپارچه در نظر گرفته می‌شوند. حال آنکه در رویکرد دوم پایه پرنده و بازوی مکانیکی به‌عنوان دو سیستم مستقل در نظر گرفته می‌شوند. سپس اثر متقابل این دو سیستم بر روی یکدیگر توسط

مدل‌سازی بازوهای رباتیکی با درجات آزادی دلخواه، و نیز نصب این بازوهای رباتیکی بر روی پلنترهای چندروره متنوع، مانند اکتاکوپترها، دکاکوپترها و پیکربندی‌های مشابه را فراهم می‌کند.

- ارائه یک روش ملموس برای تعیین جهت‌گیری پایه پرنده در فضای سه‌بعدی، به‌گونه‌ای که کلیت مسئله حفظ شده و از روش‌های سینماتیکی گیج‌کننده و غیرضروری اجتناب شود.
- بررسی کوپلینگ دینامیکی بین پایه پرنده و بازوی رباتیک نصب‌شده بر روی آن، به‌منظور تحلیل تأثیر متقابل حرکات آنها، که نتیجه آن درک بهتری از چگونگی تأثیر حرکت یک زیرسیستم بر دیگری در سیستم‌های رباتیکی پرنده می‌باشد.
- ردیابی مسیر حرکت این سیستم رباتیکی به‌گونه‌ای که علاوه بر موقعیت مطلوب، جهت‌گیری مطلوب ربات نیز در آن لحاظ شده باشد.

در این راستا، در بخش‌های ۲ و ۳ به ترتیب معادلات سینماتیکی و دینامیکی سیستم استخراج می‌گردد. به عبارت دقیق‌تر، با حل مسئله سینماتیک معکوس، مختصات‌های تعمیم‌یافته این سیستم رباتیکی جهت رسیدن آن به موقعیت و جهت‌گیری مطلوب تعریف‌شده تعیین می‌گردد. همچنین معادلات دینامیک معکوس برای تعیین نیروی تراست ایجاد شده توسط موتورها، و معادلات دینامیک مستقیم جهت تعیین پاسخ سیستم در نتیجه اعمال این نیروها به آن حل می‌گردند. در پایان، فصل چهارم به ارائه نتایج حاصل از شبیه‌سازی، و فصل پنجم به ارائه نتایج حاصل از این تحقیق و پیشنهادات جهت کارهای آینده پرداخته است.

۲- سینماتیک بازوی رباتیک با پایه پرنده

هدف اصلی این بخش توصیف سینماتیکی یک پرنده بدون سرنشین مولتی-روتور است که یک بازوی مکانیکی متشکل از n لینک صلب بر روی آن نصب شده است. یک نمونه از این نوع سیستم‌های رباتیکی در شکل (۱) نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل مشاهده می‌گردد، پایه پرنده این ربات از شش بازو که به انتهای هر یک از آنها یک موتور نصب شده است، تشکیل شده است (این بخش با رنگ آبی متمایز شده است). از طرفی نیروی پیشرانش ایجاد شده توسط این شش موتور، دقیقاً در راستای محور دوران موتورها با رنگ صورتی نشان داده شده است. برای توصیف موقعیت این سیستم رباتیکی نسبت به دستگاه مرجع جهانی $X_0Y_0Z_0$ موقعیت یک نقطه از آن نسبت به این دستگاه مختصات باید معلوم باشد. همانگونه که در شکل (۱) مشاهده می‌گردد، موقعیت موتور اول (یعنی M_1 که دارای مختصات X_{01} ، Y_{01} ، و Z_{01} است) برای تحقق هدف فوق

نیروها و گشتاورهای داخلی که بین آنها برقرار است، در مدل‌سازی لحاظ می‌گردد. تاکنون، در اکثر کارهای انجام شده، از فرمولاسیون نیوتن-اویلر و معادلات لاگرانژ جهت استخراج معادلات دینامیکی استفاده شده است. در فرمولاسیون نیوتن-اویلر، قانون دوم نیوتن و معادله اویلر بر روی تمامی لینک‌های ربات اعمال می‌گردد. یکی از نخستین مدل‌های دینامیکی کوادروتور بر مبنای فرمولاسیون نیوتن-اویلر توسط آلتانگ [۲۴] انجام گرفت. این روش همچنین توسط لوییانو و همکاران [۲۵]، اوشی و همکاران [۲۶]، چن و همکاران [۲۷]، نگوئن و همکاران [۲۸] و تاگلیابو و همکاران [۲۹] مورد استفاده قرار گرفت. مهمترین مزیت این روش، تعیین تمامی نیروها و گشتاورهای قیود است؛ که این امر خود موجب می‌گردد حجم محاسبات افزایش یافته و زمان مورد نیاز برای استخراج و حل معادلات حرکت یک سیستم طولانی شود. فرمولاسیون لاگرانژ-اویلر که بر مبنای روش انرژی توسعه یافته است و بر روی تغییرات انرژی درون سیستم تکیه دارد، مشکل فوق را ندارد. احتمالاً اولین مدل دینامیکی رباتهای پرنده بر مبنای روش لاگرانژ توسط کاستیلو و همکاران استخراج شد [۳۰]. همچنین می‌توان به کارهای لی و همکاران [۳۱-۳۲]، کیم و همکاران [۳۳-۳۴]، بیبرد و همکاران [۳۵]، و کاکاوالی و همکاران [۳۶] اشاره نمود. در این رویکرد، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی هر لینک مورد نیاز است. در اینجا نیز با افزایش درجه آزادی سیستم رباتیکی، تعداد عملیات ریاضی مورد نیاز برای محاسبه ترم‌های انرژی به‌طور نمایی افزایش می‌یابد. از دیگر روش‌هایی که به‌رغم مزایای بسیار آن، کمتر از بقیه روش‌ها جهت استخراج معادلات دینامیکی سیستم‌های مکانیکی استفاده شده است، فرمولاسیون گیبس اپل است. اولین کارها در زمینه استخراج معادلات دینامیک معکوس ربات‌های سریال با استفاده از روش فوق به تحقیق ماتا و همکاران برمی‌گردد [۳۷-۳۸]. با این حال، برای اینکه معادلات حرکت جامعیت داشته، و محدود به درجات آزادی محدود نباشد، شافعی و همکاران با توسعه یک الگوریتم بازگشتی مبتنی بر فرمولاسیون گیبس-اپل که در آن از ماهیت زنجیری بازوهای استفاده شده بود، به استخراج معادلات حرکت طیف وسیعی از سیستم‌های رباتیکی، شامل بازوهای مکانیکی صلب و انعطاف‌پذیر [۳۹-۴۰]، ربات‌های پایه سیار [۴۱-۴۲]، مکانیزم‌های حلقه بسته [۴۳-۴۴]، و ربات‌های دوبا [۴۵-۴۹] پرداختند. با اینحال تاکنون از این روش بسیار کارا و موثر در استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر بازوهای هوایی استفاده نشده است.

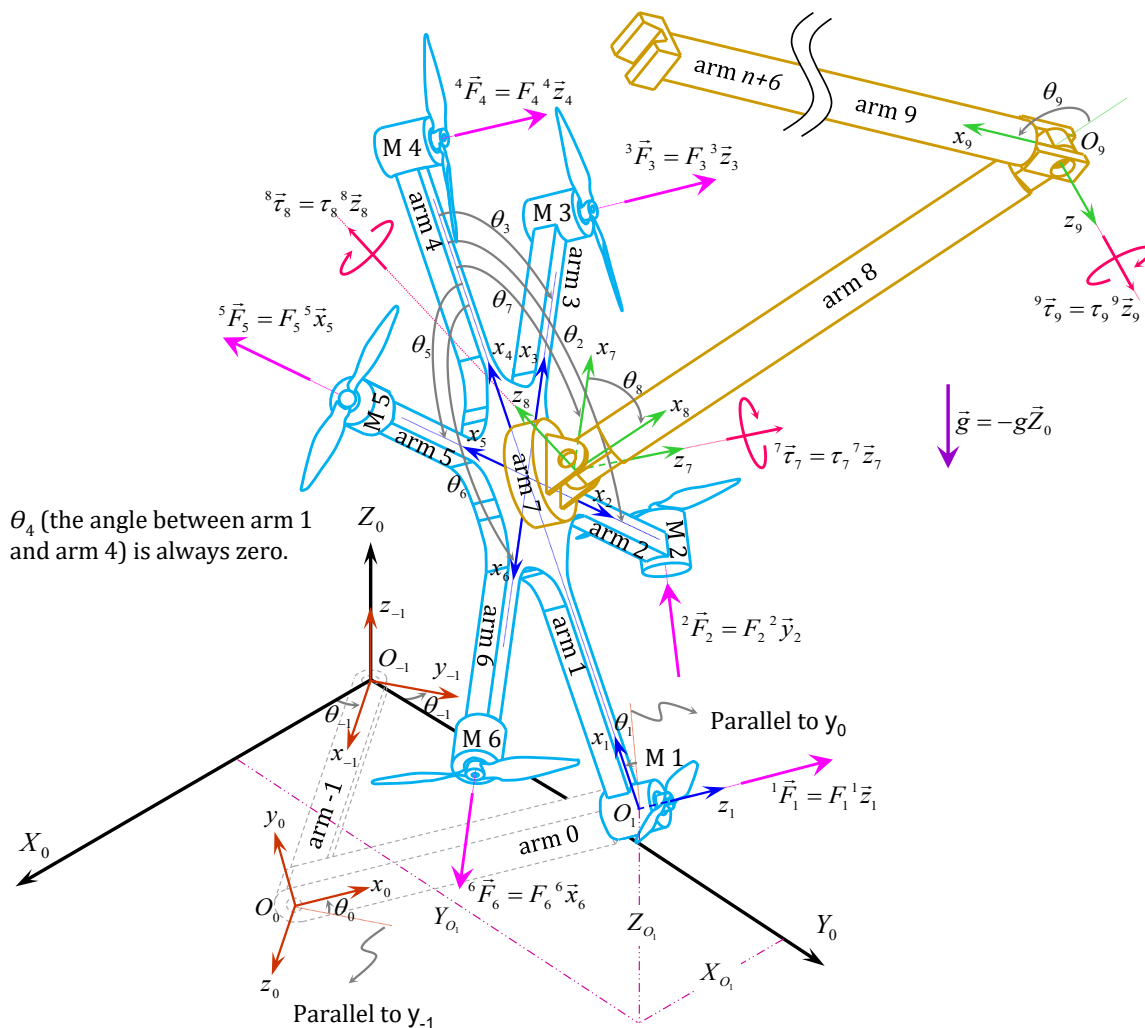
هدف اصلی در این تحقیق، بررسی جامع و دقیق دینامیک حاکم بر حرکت بازوهای رباتیکی پرنده است. لذا از نظر نویسندگان آنچه که به‌عنوان نوع‌آوری‌های این تحقیق شناخته می‌شود، عبارتند از:

- استخراج معادلات حرکت برای بازوهای رباتیک پرنده با استفاده از فرمولاسیون بازگشتی گیبس-اپل، که امکان

طرفي گشتاور اعمالی به مفاصل این بازوی مکانیکی دقیقاً در راستای محور دوران لینک‌های تشکیل‌دهنده آن است که با رنگ قرمز نشان داده شده است (مطابق قرارداد ${}^j\vec{\tau}_j; j = 7, \dots, n+6$). حاکم بر سینماتیک زنجیره‌های رباتیکی (که در آن زاویه میان دو بازوی مجاور به عنوان یک مختصات تعمیم‌یافته محسوب می‌گردد)، سیستم رباتیکی نشان داده شده در شکل (۱) شامل $n+8$ درجه آزادی دورانی θ_{-1} تا θ_{n+6} است. البته به دلیل آنکه بازوهای تشکیل‌دهنده پایه پرنده فاقد هرگونه دورانی نسبت بهم می‌باشند، برخی از این درجات آزادی از نوع مختصات تعمیم‌یافته مقید محسوب می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر زوایای $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ و θ_6 به عنوان مختصات‌های تعمیم‌یافته مقید، همواره به ترتیب دارای مقادیر ثابت $120^\circ, -60^\circ, 0^\circ, +60^\circ$ و 120° درجه هستند.

انتخاب شده است. از طرفی برای توصیف جهت‌گیری این سیستم رباتیکی نسبت به دستگاه مختصات جهانی باید موقعیت سه زاویه رول، پیچ و یاو در آن معلوم باشد. با این حال برای آنکه تجسم هندسی بهتری نسبت به جهت‌گیری این سیستم رباتیکی در اختیار داشته باشیم، دو بازوی مجازی با نام‌های $arm-1$ و $arm 0$ به این سیستم رباتیکی اضافه شده است. این دو بازو که دارای طول و جرم صفر هستند با خط چین خاکستری رنگ در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. اکنون با داشتن زوایای θ_0, θ_1 جهت‌گیری پایه پرنده این سیستم رباتیکی نسبت به دستگاه مرجع جهانی تعیین می‌گردد.

در ادامه به توصیف سینماتیکی بازوی مکانیکی نصب شده بر روی این پایه پرنده مولتی-روتوره می‌پردازیم. این بازوی مکانیکی که با رنگ طلایی در شکل (۱) نشان داده شده است، از n لینک صلب شامل $arm 7$ تا $arm n+6$ تشکیل شده است.



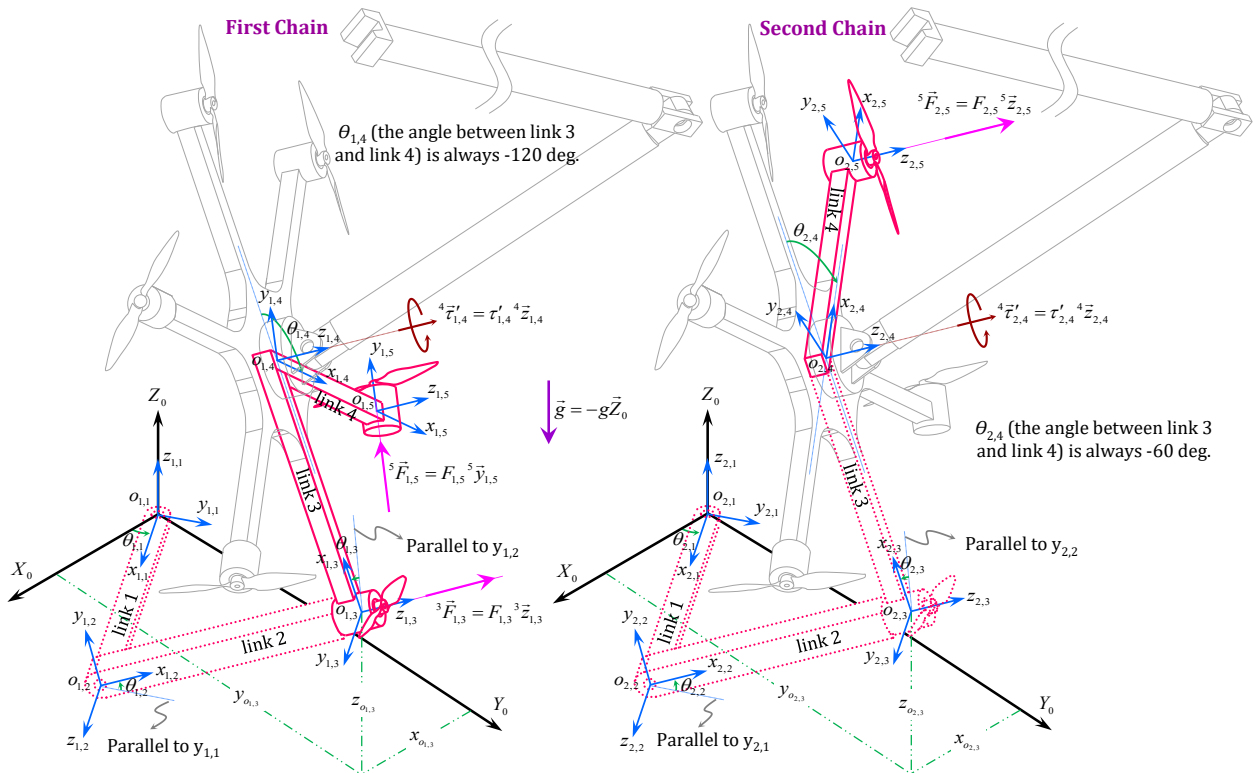
شکل ۱ یک پرنده بدون سرنشین شش-روتوره به همراه بازوی مکانیکی n درجه آزادی نصب شده بر روی آن
 Fig. 1 A six-rotor unmanned aerial vehicle equipped with an n -degree-of-freedom robotic manipulator mounted on its base.

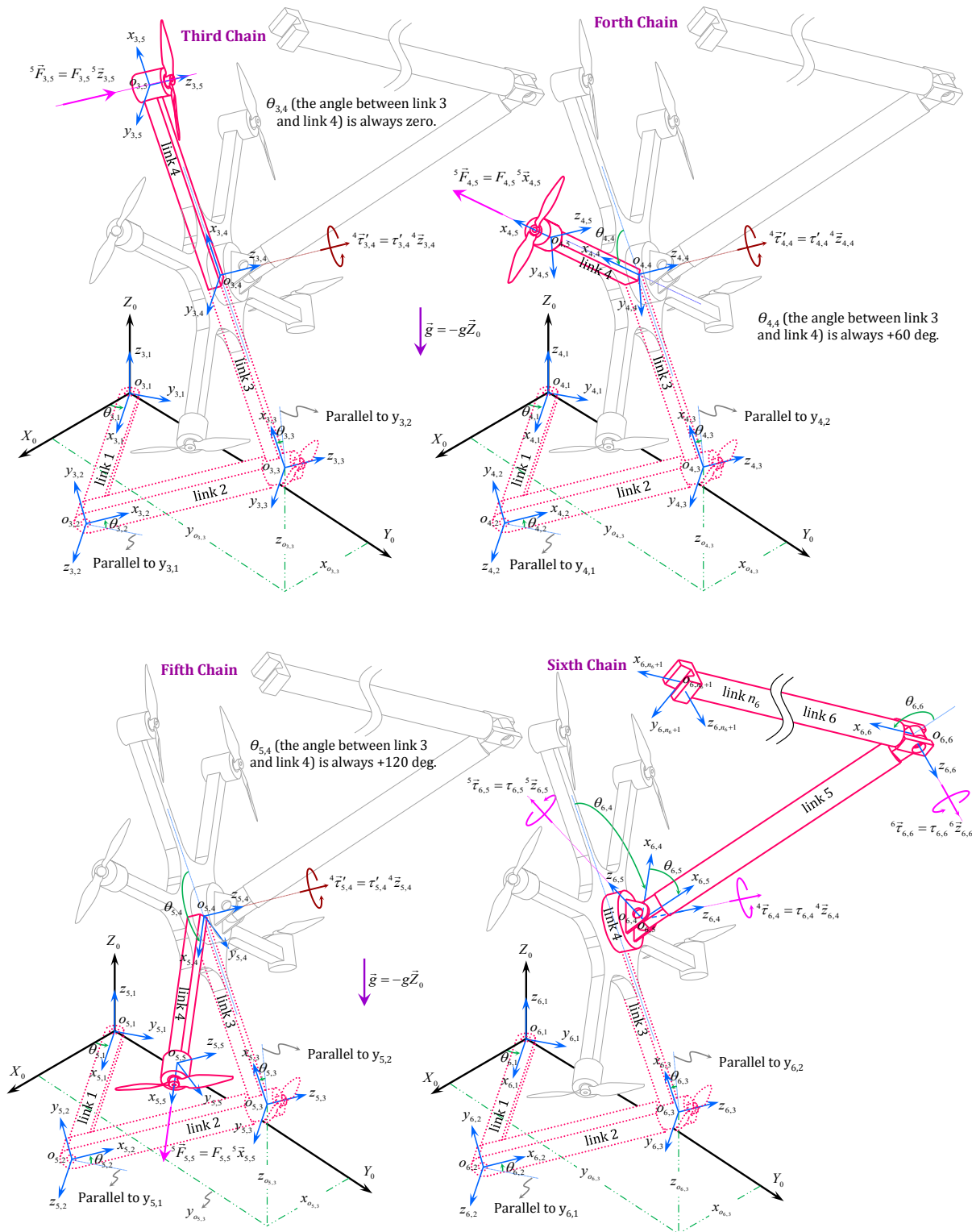
زنجیره) ختم می‌گردد. دیگر آنکه برخی از لینک‌ها در هر زنجیره به صورت نقطه چین رسم شده‌اند. این امر یا به دلیل مجازی بودن این لینک‌ها است (لینک‌های اول و دوم در هر زنجیره که فاقد هرگونه جرم و طولی هستند و همانگونه که پیشتر گفته شد تنها برای توصیف ملموس‌تر جهتگیری ربات مورد استفاده قرار گرفته‌اند)، و یا به دلیل آنکه جرم آن لینک پیشتر در زنجیره‌ای دیگر حساب شده و لذا در دیگر زنجیره‌ها باید صفر در نظر گرفته شود (لینک سوم در زنجیره‌های دوم تا ششم). نکته دیگر در این شکل نامگذاری پارامترهای موجود در هر زنجیره است. برای این منظور، هر پارامتر با یک زیرنویس همراه است که آن زیرنویس از دو عدد که توسط یک کاما از هم جدا شده‌اند، تشکیل شده است. عدد اول زیرنویس به شماره زنجیره و عدد دوم زیرنویس به شماره آن پارامتر در زنجیره ذکر شده اشاره می‌کند. به طور مثال منظور از دستگاه مختصات محلی $x_{j,i}y_{j,i}z_{j,i}$ دستگاهی است که مطابق با قرارداد پیشنهاد شده توسط دناویت و هارتنبرگ به لینک i از زنجیره j اختصاص یافته است؛ و یا $\theta_{j,i}$ بیانگر زاویه دوران مفصل $o_{j,i}$ است که به مفصل i از زنجیره j اشاره دارد. نکته آخر در این شکل، نحوه مواجهه با نیروی پیشرانه موتورها است.

بدلیل پیچیدگی ساختار این سیستم رباتیکی، تحلیل دینامیکی آن بسیار پیچیده و دشوار است. لذا برای تحلیل سیستماتیک این سیستم رباتیکی بهتر است تا آن را به تعدادی زنجیره باز رباتیکی تقسیم کنیم. رابطه (۱) لینک‌های موجود در هر زنجیره را نشان می‌دهد.

- FirstChain:** $arm - 1 \rightarrow arm0 \rightarrow arm1 \rightarrow arm2$
- SecondChain:** $arm - 1 \rightarrow arm0 \rightarrow arm1 \rightarrow arm3$
- ThirdChain:** $arm - 1 \rightarrow arm0 \rightarrow arm1 \rightarrow arm4$
- ForthChain:** $arm - 1 \rightarrow arm0 \rightarrow arm1 \rightarrow arm5$
- FifthChain:** $arm - 1 \rightarrow arm0 \rightarrow arm1 \rightarrow arm6$
- SixthChain:** $arm - 1 \rightarrow arm0 \rightarrow arm1 \rightarrow arm7$
 $\rightarrow \dots \rightarrow armn + 6$

برای آنکه درک بهتری نسبت به تقسیم‌بندی صورت گرفته داشته باشیم، تمامی شش زنجیره باز سینماتیکی ارائه شده در رابطه (۱)، با رنگ قرمز در شکل (۲) رسم شده است. با توجه به این شکل می‌توان نتیجه گرفت که در تقسیم‌بندی سیستم رباتیکی مورد مطالعه، تمامی زنجیره‌های باز سینماتیکی از مفصل ابتدایی آغاز شده، و به یکی از موتورهای نصب شده در انتهای هر بازوی پایه پرند، و یا به عملگر نهایی بازوی مکانیکی نصب شده بر روی این پایه پرند ختم شده است. چند نکته در ارتباط با شکل (۲) حائز اهمیت است. اول آنکه نامگذاری لینک‌های موجود در هر زنجیره به صورت سیستماتیک از شماره ۱ آغاز شده و به n_j (تعداد لینک‌های موجود در آن





شکل ۲ تقسیم‌بندی منیپولاتور پرنده بدون سرنشین نشان داده شده در شکل (۱) به شش زنجیره باز رباتیکی
 Fig. 2 Decomposition of the unmanned aerial manipulator shown in Fig. 1 into six open robotic chains.

پنجم اثری از نیروی پیشرانه اولین موتور مشاهده نمی‌گردد. این بدان دلیل است که اثر موتور اول در اولین زنجیره لحاظ شده است و لذا در دیگر زنجیره‌ها به صورت غیرفعال (نقطه‌چین) رسم شده است. زنجیره ششم اگرچه فاقد هرگونه

به عبارت دقیق‌تر، اگر موتوری در بیش از یک زنجیره ظاهر شده باشد، اثر آن تنها باید در اولین زنجیره‌ای که ظاهر شده در نظر گرفته شود. به طور مثال در زنجیره اول اثر دو نیروی پیشرانش مشاهده می‌گردد، این در حالی است که در زنجیره‌های دوم تا

امکان حرکت آزادانه در فضا را دارند، شرایط برای استخراج معادلات حرکت این شش زنجیره مهیا می‌گردد. روش انتخاب شده در این مقاله برای استخراج معادلات حرکت این شش زنجیره باز سینماتیکی، فرمولاسیون گیبس-اپل است. در این روش برخلاف فرمولاسیون لاگرانژ که به محاسبه انرژی جنبشی سیستم می‌پردازد، انرژی شتاب سیستم و یا همان تابع گیبس محاسبه می‌گردد. پیشتر شافعی و شافعی انرژی شتاب زامین زنجیره باز سینماتیکی متشکل از n_j لینک صلب با پایه متحرک را مطابق رابطه زیر ارائه نمودند:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{2} B_{j,oi} \dot{\theta}_{j,i}^T \cdot \ddot{\theta}_{j,i} - \dot{\theta}_{j,i}^T \cdot B_{j,1i} \dot{\omega}_{j,i} - \dot{\theta}_{j,i}^T \cdot \dot{\omega}_{j,i} B_{j,1i} \dot{\omega}_{j,i} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_{j,i}^T \cdot (B_{j,2i} + B_{j,3i}) \dot{\omega}_{j,i} + \dot{\omega}_{j,i}^T \cdot \dot{\omega}_{j,i} (B_{j,2i} + B_{j,3i}) \dot{\omega}_{j,i} + \text{ineffective terms} \quad (2)$$

که در آن ضرایب ثابت $B_{j,oi}$, $B_{j,1i}$, $B_{j,2i}$, $B_{j,3i}$ بیانگر خصوصیات جرمی و نحوه توزیع این جرم در طول لینک است که به‌طور مبسوط در مرجع [۵۰] معرفی شده‌اند.

اثری از نیروی پیشرانه موتورها است، اما مفاصل بازوی مکانیکی نصب شده بر روی پایه پرنده این ربات تحت اثر گشتاور فعال موتورها قرار دارند. در بخش بعد نیروی تعمیم‌یافته حاصل از این نیروها و گشتاورها جهت بکارگیری در معادلات دینامیکی محاسبه می‌گردد. ولی پیش از آن، به ماتریس ژاکوبین مفاصل هر زنجیره نیاز داریم. برای این منظور اگر بردار موقعیت مفصل $\theta_{j,i}$ نسبت به دستگاه مرجع جهانی $X_0 Y_0 Z_0$ را $\vec{\theta}_{j,i} = \{x_{j,i} \ y_{j,i} \ z_{j,i}\}^T$ بنامیم، و نیز اگر بردار مختصات‌های تعمیم‌یافته زنجیره زام را با $\vec{\theta}_j = \{\theta_{j,1} \ \theta_{j,2} \ \dots \ \theta_{j,n_j} \ x_{o_{j,3}} \ y_{o_{j,3}} \ z_{o_{j,3}}\}^T$ نشان دهیم، آنگاه ماتریس ژاکوبین این مفصل مطابق روابطی که در شکل (۳) ارائه شده است، محاسبه می‌گردد. در بخش بعد، از ماتریس فوق در محاسبه کار مجازی نیروی پیشرانه موتورها استفاده خواهد شد.

۳- استخراج معادلات حاکم بر دینامیک بازوی رباتیک با پایه پرنده

با تقسیم سازه منیپولاتور پرنده بدون سرنشین مورد مطالعه در این مقاله به شش زنجیره باز سینماتیکی که پایه هر یک از آنها

$J_{j,i}(\vec{\theta}_j) =$	$\frac{\partial x_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,1}}$	$\frac{\partial x_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,2}}$...	$\frac{\partial x_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,n}}$	$\frac{\partial x_{o_{j,i}}}{\partial x_{o_{j,3}}}$	$\frac{\partial x_{o_{j,i}}}{\partial y_{o_{j,3}}}$	$\frac{\partial x_{o_{j,i}}}{\partial z_{o_{j,3}}}$	$k = 1$
	$\frac{\partial y_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,1}}$	$\frac{\partial y_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,2}}$...	$\frac{\partial y_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,n}}$	$\frac{\partial y_{o_{j,i}}}{\partial x_{o_{j,3}}}$	$\frac{\partial y_{o_{j,i}}}{\partial y_{o_{j,3}}}$	$\frac{\partial y_{o_{j,i}}}{\partial z_{o_{j,3}}}$	$k = 2$
	$\frac{\partial z_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,1}}$	$\frac{\partial z_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,2}}$...	$\frac{\partial z_{o_{j,i}}}{\partial \theta_{j,n}}$	$\frac{\partial z_{o_{j,i}}}{\partial x_{o_{j,3}}}$	$\frac{\partial z_{o_{j,i}}}{\partial y_{o_{j,3}}}$	$\frac{\partial z_{o_{j,i}}}{\partial z_{o_{j,3}}}$	$k = 3$
	$t = 1$	$t = 2$...	$t = n_j$	$t = n_j + 1$	$t = n_j + 2$	$t = n_j + 3$	

شکل ۳ ماتریس ژاکوبین مفصل i ام واقع شده در زنجیره j ام

Fig. 3 Jacobian matrix of the m -th joint located in the m -th chain.

دیگر پارامترهای بکار رفته در رابطه (۲) عبارتند از $\dot{\omega}_{j,i}$ و $\ddot{\theta}_{j,i}$ که به ترتیب بیانگر شتاب زاویه‌ای لینک i ام در زنجیره زام، و شتاب خطی مفصل i ام در زنجیره زام هستند. بالانویس سمت چپ i در این دو متغیر اشاره به دستگاه مرجع محلی $x_{j,i} y_{j,i} z_{j,i}$ دارد که هر دوی آنها نسبت به این دستگاه توصیف شده‌اند. لازم به ذکر است در این مقاله، نماد \sim بر روی یک کمیت، به ماتریس پادمتقارن بردار مربوطه اشاره می‌کند. تابع گیبس منپولاتور پرنده بدون سرنشین نشان داده شده در شکل (۱)، از حاصل جمع تابع گیبس شش زنجیره رسم شده در شکل (۲)، مطابق رابطه زیر حاصل می‌گردد:

معادله (۴) از $n_6 + 38$ معادله دیفرانسیلی که سهم زنجیره‌های اول تا پنجم هر یک ۷ معادله، و سهم زنجیره ششم $n_6 + 3$ معادله می‌باشد، تشکیل شده است. از طرفی \vec{Q}_j در معادله فوق بیانگر بردار نیروهای تعمیم‌یافته زامین زنجیره باز سینماتیکی است. در ابتدا به محاسبه عبارت ظاهر شده در سمت چپ معادله (۴) می‌پردازیم. در این صورت داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{\theta}_j} = \vec{Q}_j \quad (4)$$

معادله (۴) از $n_6 + 38$ معادله دیفرانسیلی که سهم زنجیره‌های اول تا پنجم هر یک ۷ معادله، و سهم زنجیره ششم $n_6 + 3$ معادله می‌باشد، تشکیل شده است. از طرفی \vec{Q}_j در معادله فوق بیانگر بردار نیروهای تعمیم‌یافته زامین زنجیره باز سینماتیکی است. در ابتدا به محاسبه عبارت ظاهر شده در سمت چپ معادله (۴) می‌پردازیم. در این صورت داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\theta}_{j,i}} = \sum_{k=i+1}^{n_j} \frac{\partial k \dot{\theta}_{j,k}^T}{\partial \dot{\theta}_{j,i}} \cdot k \vec{S}_{j,k} + \sum_{k=i}^{n_j} \frac{\partial k \dot{\omega}_{j,k}^T}{\partial \dot{\theta}_{j,i}} \cdot k \vec{R}_{j,k} \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_{o_{j,3}}} = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\partial k \dot{\theta}_{j,k}^T}{\partial \dot{x}_{o_{j,3}}} \cdot k \vec{S}_{j,k}$$

$$S = \sum_{j=1}^6 S_j \quad (3)$$

معادلات دینامیکی حرکت با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل با مشتق‌گیری از تابع ارائه شده در رابطه (۳) نسبت به بردار

نمود. اکنون با شناسایی نیروهای اعمالی (اعم از فعال یا قیدی) بر زنجیره‌های تفکیک شده این سیستم رباتیکی، کار مجازی این نیروها به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\delta W_j = \begin{cases} \delta^0 \vec{r}_{j,3}^T \cdot {}^0 \vec{F}_{j,3} + \delta^0 \vec{r}_{j,5}^T \cdot {}^0 \vec{F}_{j,5} + \delta \vec{\theta}_j^T \cdot \vec{\tau}'_j & j = 1 \\ \delta^0 \vec{r}_{j,5}^T \cdot {}^0 \vec{F}_{j,5} + \delta \vec{\theta}_j^T \cdot \vec{\tau}'_j & j = 2, \dots, 5 \\ \delta \vec{\theta}_j^T \cdot \vec{\tau}'_j & j = 6 \end{cases} \quad (7)$$

که در آن بردار گشتاورهای فعال $\vec{\tau}'_j$ و نیز بردار گشتاورهای قیدی $\vec{\tau}'_j$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \vec{\tau}'_j = \vec{\zeta}_{j,4} \tau'_{j,4} & j = 1, \dots, 5 \\ \vec{\tau}'_j = \sum_{i=4}^{n_j} \vec{\zeta}_{j,i} \tau_{j,i} & j = 6 \end{cases} \quad (8)$$

در رابطه (۸)، $\vec{\zeta}_{j,i}$ برداری ستونی با ابعاد $1 \times (n_j + 3)$ است که درایه i ام آن ۱، ولی بقیه عناصر آن ۰ هستند. همچنین منظور از $\delta \vec{\theta}_j$ تغییرات بردار $\vec{\theta}_j$ است که به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\delta \vec{\theta}_j = \{\delta \theta_{j,1} \quad \delta \theta_{j,2} \quad \dots \quad \delta \theta_{j,n_j} \quad \delta x_{o_{j,3}} \quad \delta y_{o_{j,3}} \quad \delta z_{o_{j,3}}\}^T \quad (9)$$

پیشتر در شکل (۳) ماتریس ژاکوبین معرفی گردید. یکی از مهمترین کاربردهای این ماتریس، ارتباط میان تغییرات در فضای مفاصل و تغییرات در فضای دکارتی است که توسط رابطه $\delta^0 \vec{r}_{o_{j,i}} = J_{j,i} \delta \vec{\theta}_j$ ماتریس دوران ${}^0 R_{j,i}$ امکان توصیف نیروی پیشرانه موتورها از دستگاه مختصات محلی $x_{j,i} y_{j,i} z_{j,i}$ به دستگاه مختصات جهانی $X_0 Y_0 Z_0$ توسط رابطه ${}^0 \vec{F}_{j,i} = {}^0 R_{j,i} {}^i \vec{F}_{j,i}$ امکان پذیر می‌گردد. با بکارگیری این دو رابطه و نیز قراردادی که برای نمایش نیروی پیشرانه موتورها ارائه گردید، معادله (۷) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\delta W_j = \begin{cases} \delta \vec{\theta}_j^T [J_{j,3}^T {}^0 R_{j,3} \vec{\theta}^3 F_{j,3} + J_{j,5}^T {}^0 R_{j,5} \vec{\theta}^2 F_{j,5} + \vec{\zeta}_{j,4} \tau'_{j,4}] & j = 1 \\ \delta \vec{\theta}_j^T [J_{j,5}^T {}^0 R_{j,5} \vec{\theta}^k F_{j,5} + \vec{\zeta}_{j,4} \tau'_{j,4}] & j = 2, \dots, 5 \\ \delta \vec{\theta}_j^T \left[\sum_{i=4}^{n_j} \vec{\zeta}_{j,i} \tau_{j,i} \right] & j = 6 \end{cases} \quad (10)$$

عبارت داخل کروشه در معادله (۱۰) بیانگر بردار نیروهای تعمیم‌یافته (اعم از فعال و غیرفعال) زنجیره‌های تشکیل‌دهنده مینیپولاتور پرنده بدون سرنشین مورد مطالعه در این مقاله است $(\vec{Q}_j; j = 1, \dots, 6)$.

با محاسبه اجزاء تشکیل‌دهنده معادله (۱۰)، نوبت به بازنویسی این معادله جهت تبدیل آن به فرم دینامیک مستقیم می‌رسد. دلیل این بازنویسی آماده‌سازی معادلات حرکت برای شبیه‌سازی آنها توسط کامپیوتر است. کل پروسه مورد نیاز جهت تبدیل فرم معکوس معادلات حرکت به فرم مستقیم آن، در کنار هم چیدن تمامی ترم‌هایی است که شامل شتاب‌های تعمیم‌یافته ${}^0 \ddot{x}_{o_{j,3}}, {}^0 \ddot{y}_{o_{j,3}}, {}^0 \ddot{z}_{o_{j,3}}, \theta_{j,i}; i = 1, \dots, n_j$ و نیز گشتاورهای قیدی غیرفعال $\tau'_{j,4}$ می‌شوند. با انجام این فرآیند،

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{y}_{o_{j,3}}} = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\partial k \dot{y}_{o_{j,k}}^T}{\partial \dot{y}_{o_{j,3}}} \cdot k \vec{\zeta}_{j,k}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{z}_{o_{j,3}}} = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\partial k \dot{z}_{o_{j,k}}^T}{\partial \dot{z}_{o_{j,3}}} \cdot k \vec{\zeta}_{j,k}$$

که در آن

$${}^k \vec{\zeta}_{j,k} = B_{j,0k} {}^k \dot{\theta}_{o_{j,k}} - B_{j,1k} {}^k \dot{\omega}_{j,k} - {}^k \dot{\omega}_{j,k} B_{j,1k} {}^k \dot{\omega}_{j,k}$$

$${}^k \vec{\zeta}_{j,k} = B_{j,1k} {}^k \dot{\theta}_{o_{j,k}} + (B_{j,2k} + B_{j,3k}) {}^k \dot{\omega}_{j,k} + {}^k \dot{\omega}_{j,k} (B_{j,2k} + B_{j,3k}) {}^k \dot{\omega}_{j,k} \quad (6)$$

در ادامه به بررسی سمت راست معادله (۱۰) یعنی بردار نیروهای تعمیم‌یافته زنجیره زام می‌پردازیم. پیش از آن باید کلیه نیروهای وارد بر این زنجیره اعم از نیروهای فعال و نیروهای قیدی را شناسایی نماییم. اولین نیروی فعال وارده، نیروی پیشرانه ایجاد شده توسط موتورهای نصب شده بر روی پایه ربات پرنده بدون سرنشین است. همانگونه که در این شکل مشاهده می‌گردد، این نیرو تنها می‌تواند دارای مؤلفه‌ای در امتداد یکی از محورهای اصلی دستگاه مختصات محلی $x_{j,i} y_{j,i} z_{j,i}$ باشد. لذا برای ارائه نظامند این نیرو، یک قرارداد در اینجا ارائه می‌گردد. مطابق این قرارداد، منظور از ${}^i \vec{F}_{j,i} = F_{j,i} \vec{\theta}^k$ نیروی پیشرانه اعمالی به مفصل i ام در زنجیره زام است، بگونه‌ای که به‌ازاء $k=1$ این نیرو در امتداد محور $\{0 \ 1 \ 0\}^T$ و به‌ازاء $k=2$ در امتداد محور $\{1 \ 0 \ 0\}^T$ و به‌ازاء $k=3$ در امتداد محور $\{0 \ 0 \ 1\}^T$ اعمال می‌گردد.

دیگر نیروی اعمالی به زنجیره‌های رباتیکی نشان داده شده در شکل (۲)، گشتاور قیدی اعمالی به مفاصل $j = 1, \dots, 5$ است که در مرکز پایه ربات پرنده بدون سرنشین قرار دارد. در واقع، همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، در این مقاله فرض بر آن است که بازوهای پایه پرنده ربات مورد مطالعه در این مقاله فاقد هرگونه دورانی نسبت به یکدیگر هستند. این بدان معناست که زوایای مقید $\theta_{5,4}, \theta_{4,4}, \theta_{3,4}, \theta_{2,4}, \theta_{1,4}$ و $\theta_{5,4}$ همواره باید به ترتیب زوایای ثابت $120^\circ, -120^\circ, -60^\circ, 0^\circ, +60^\circ$ و $+120^\circ$ درجه را اختیار نمایند. لازمه این امر آن است تا یک گشتاور قیدی همانند آنچه که با نماد ${}^4 \tau'_{j,4} = \tau'_{j,4} {}^4 \vec{z}_{j,4}$ در شکل (۲) نشان داده شده است، به مفاصل $j = 1, \dots, 5$ اعمال گردد. این همان گشتاور نیست که سبب می‌شود لینک‌های سوم و چهارم در زنجیره زام فاقد هرگونه حرکت دورانی نسبت به هم باشند. لازم به ذکر است انتخاب علامت پریم بر روی این گشتاور، تأکیدی بر مقید بودن آن است. بر خلاف این گشتاورهای قیدی زنجیره ششم از $n_6 - 3$ گشتاور فعال ${}^i \tau_{6,i} = \tau_{6,i} {}^i \vec{z}_{6,i}; i = 4, 5, \dots, n_6$ برخوردار است که به مفاصل بازوی مکانیکی نصب شده بر روی پایه پرنده اعمال می‌گردد. آخرین نیروی اعمالی شده به زنجیره‌های این سیستم رباتیکی، نیروی گرانش زمین است که بدون انجام هیچگونه محاسبه اضافی، می‌توان اثر آن را با اعمال شتاب $1g$ به پایه هر زنجیره در معادلات دینامیکی اعمال

$$\vec{F}_j^C = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{\Psi}_{j,3}^3 & \vec{\Psi}_{j,5}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{j,3} \\ F_{j,5} \end{Bmatrix} & j = 1 \\ \begin{bmatrix} \vec{\Psi}_{j,5}^k \\ 0 \end{bmatrix} F_{j,5} & j = 2, \dots, 5 \end{cases}$$

زنجره ششم که بازوی مکانیکی نصب شده بر روی پایه پرنده را نیز در بر می‌گیرد، فاقد هرگونه مفصل مقیدی است. لذا برای اینکه تأکید کنیم در اینجا با یک زنجره غیرمقید مواجه هستیم، لازم دیدیم تا یک بالانویس $N.C$ به سطر دوم معادله (۱۱) که بیانگر معادلات حرکت این زنجره است، اضافه کنیم. لازم به ذکر است که اضافه کردن این بالانویس به معنای تغییر در عناصر تشکیل‌دهنده این معادله نیست؛ بلکه این نمادگذاری تنها برای درک بهتر ماهیت غیرمقید این زنجره بکار گرفته شده است. در این صورت فرم نهایی معادلات دینامیک مستقیم برای ۶ زنجره رباتیکی نشان داده شده در شکل (۲) به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{cases} I_j^C(\vec{\theta}_j^C)\ddot{\vec{\theta}}_j^C = \vec{R}_j^C(\vec{\theta}_j^C, \dot{\vec{\theta}}_j^C) + \vec{F}_j^C & j = 1, \dots, 5 \\ I_j^{N.C}(\vec{\theta}_j^{N.C})\ddot{\vec{\theta}}_j^{N.C} = \vec{R}_j^{N.C}(\vec{\theta}_j^{N.C}, \dot{\vec{\theta}}_j^{N.C}) + \vec{F}_j^{N.C} & j = 6 \end{cases} \quad (17)$$

شکل‌های (۴) و (۵) نمایش گرافیکی معادله (۱۷) را برای یک مینیپولاتور سه لینکی که بر روی یک هگزاکوپتر نصب شده است، نشان می‌دهند.

در ادامه با ترکیب مناسب معادلات حرکت زنجره‌های رباتیکی تفکیک شده در شکل (۲)، می‌توان معادلات حرکت سیستم هیبرید نشان داده شده در شکل (۱) را استخراج نمود. ترکیب معادلات حرکت این زنجره‌های رباتیکی که فرم گرافیکی آن بیشتر در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شد، باید بگونه‌ای باشد تا در معادلات حرکت سیستم اصلی، کوپلینگ دینامیکی میان این زنجره‌ها در نظر گرفته شده باشد. مانند هر سیستم رباتیکی دیگری، معادلات حرکت این سیستم هیبرید، دارای فرمتی به شکل زیر است:

$$I_H(\vec{\theta}_H)\ddot{\vec{\theta}}_H = \vec{R}_H(\vec{\theta}_H, \dot{\vec{\theta}}_H) + \vec{F}_H \quad (18)$$

که در آن $I_H(\vec{\theta}_H)$ ماتریس اینرسی سیستم هیبرید نشان داده شده در شکل (۱) است. همچنین \vec{R}_H و \vec{F}_H به ترتیب بردار ترم‌های باقیمانده دینامیکی و بردار نیروهای تعمیم‌یافته وارد بر این سیستم هیبرید هستند. در واقع زیرنویس H در این معادله، برای تأکید بر این حقیقت است که در اینجا با یک سیستم رباتیکی هیبرید متشکل از پایه پرنده و بازوی مکانیکی متصل به آن مواجه هستیم. به منظور تشکیل عناصر سازنده معادله (۱۸)، باید ارتباط میان شتاب‌های تعمیم‌یافته سیستم هیبرید با شتاب‌های تعمیم‌یافته اجزاء تفکیک شده این سیستم تعیین گردد. با مقایسه شکل‌های (۱) و (۲) به راحتی می‌توان به ارتباط میان این شتاب‌های تعمیم‌یافته پی برد.

معادلات حرکت جهت امور مربوط به شبیه‌سازی کامپیوتری به فرم زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{cases} I_j(\vec{\theta}_j)\ddot{\vec{\theta}}_j - \vec{\zeta}_{j,4}\tau'_{j,4} = \vec{R}_j(\vec{\theta}_j, \dot{\vec{\theta}}_j) + \vec{F}_j & j = 1, \dots, 5 \\ I_j(\vec{\theta}_j)\ddot{\vec{\theta}}_j = \vec{R}_j(\vec{\theta}_j, \dot{\vec{\theta}}_j) + \vec{F}_j & j = 6 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن $I_j(\vec{\theta}_j)$ ماتریس اینرسی زامین زنجره باز رباتیکی پایه متحرک نشان داده شده در شکل (۲)، و $\vec{R}_j(\vec{\theta}_j, \dot{\vec{\theta}}_j)$ بردار ترم‌های باقیمانده دینامیکی (برداري فاقد هرگونه اثری از شتاب‌های تعمیم‌یافته سیستم) این زنجره هستند. از طرفی بردار نیروهای تعمیم‌یافته فعال \vec{F}_j برای این شش زنجره باز رباتیکی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\vec{F}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{\Psi}_{j,3}^3 & \vec{\Psi}_{j,5}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{j,3} \\ F_{j,5} \end{Bmatrix} & j = 1 \\ \vec{\Psi}_{j,5}^k F_{j,5} & j = 2, \dots, 5 \\ \sum_{i=4}^n \vec{\zeta}_{j,i}\tau_{j,i} & j = 6 \end{cases} \quad (12)$$

که در آن

$$\vec{\Psi}_{j,i}^k = J_{j,i}^T \mathbf{0} R_{j,i} \vec{\theta}^k \quad (13)$$

سطر اول معادله (۱۱) بیانگر معادلات دینامیک مستقیم ۵ زنجره اول تشکیل‌دهنده پایه پرنده این ربات بدون سرنشین است. هر یک از این ۵ زنجره نیز شامل ۷ معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم (۴ معادله مربوط به حرکت دورانی مفاصل موجود در زنجره زام، و ۳ معادله مربوط به حرکت انتقالی پایه متحرک همان زنجره)، و لی ۸ مجهول می‌شود ($\theta_{j,i}; i = 1, \dots, 4$ ، ${}^0x_{o_{j,3}}$ ، ${}^0y_{o_{j,3}}$ ، ${}^0z_{o_{j,3}}$ و $\tau'_{j,4}$). لذا برای تعیین این ۸ مجهول، به یک معادله دیگر احتیاج است. این معادله که از عدم دوران مفصل مقید در آن زنجره استنتاج می‌شود، به صورت زیر ارائه می‌گردد:

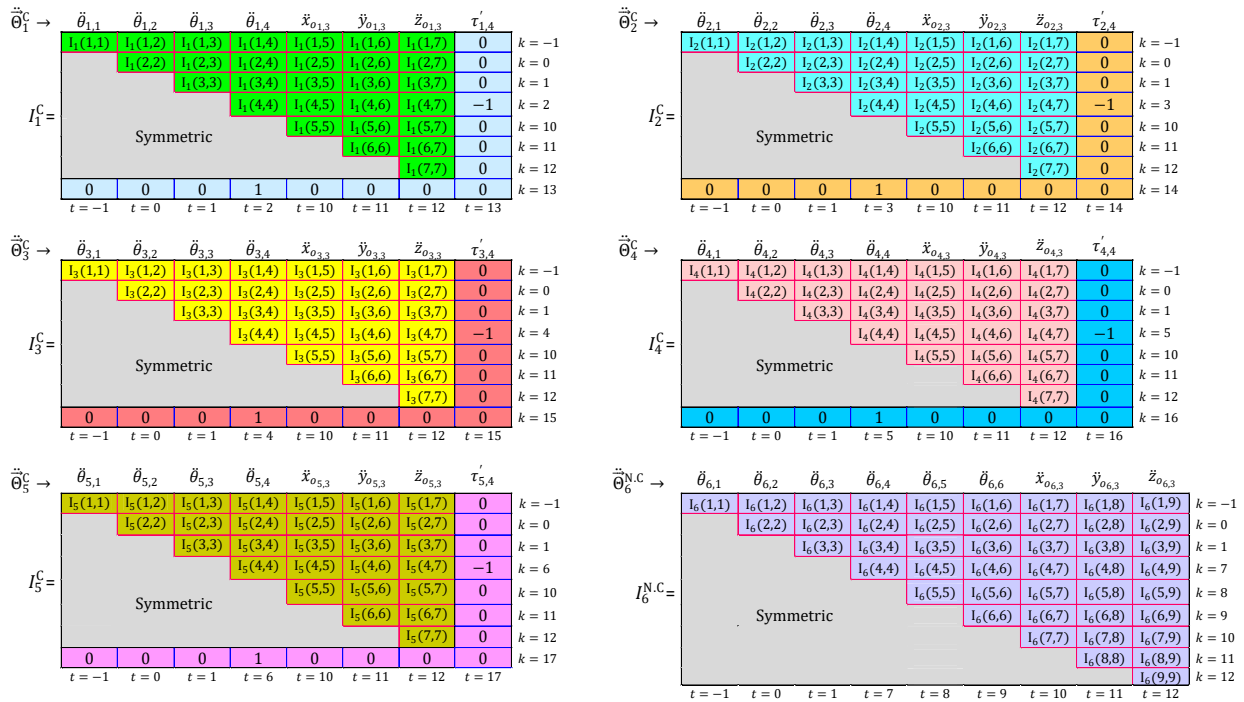
$$\vec{\theta}_{j,4} = 0 \Rightarrow \vec{\zeta}_{j,4}^T \cdot \vec{\theta}_j = 0 \quad j = 1, \dots, 5 \quad (14)$$

از ترکیب سطر اول معادله (۱۱) با معادله (۱۴) معادلات دینامیک مستقیم ۵ زنجره تشکیل‌دهنده پایه پرنده مطابق رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} I_j(\vec{\theta}_j) & -\vec{\zeta}_{j,4} \\ \vec{\zeta}_{j,4}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vec{\theta}}_j \\ \tau'_{j,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_j(\vec{\theta}_j, \dot{\vec{\theta}}_j) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{F}_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

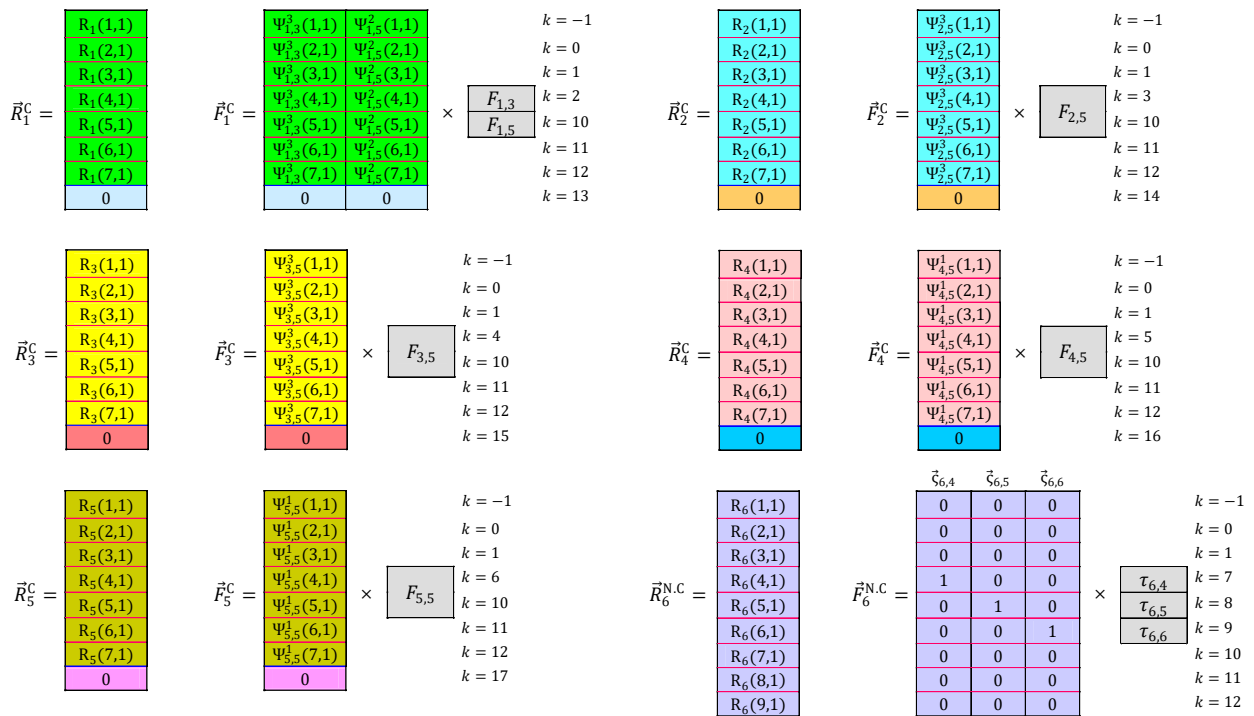
که در آن $I_j^C(\vec{\theta}_j)$ ماتریس اینرسی زامین زنجره باز رباتیکی پایه متحرک است که یکی از مفاصل آن یعنی $o_{j,4}$ فاقد هرگونه حرکت دورانی است. همچنین $\vec{R}_j^C(\vec{\theta}_j, \dot{\vec{\theta}}_j)$ بردار ترم‌های باقیمانده دینامیکی این زنجره است. بالانویس C در این معادله، برای تأکید بر مقید بودن این ۵ زنجره استفاده شده است. از سوی دیگر، بردار شتاب‌های تعمیم‌یافته $\ddot{\vec{\theta}}_j^C$ و نیز بردار نیروهای تعمیم‌یافته فعال \vec{F}_j^C در معادله (۱۵) عبارتند از:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\theta}}_j^C &= \{\ddot{\theta}_{j,1} \quad \ddot{\theta}_{j,2} \quad \ddot{\theta}_{j,3} \quad \ddot{\theta}_{j,4} \quad \ddot{x}_{o_{j,3}} \quad \ddot{y}_{o_{j,3}} \quad \ddot{z}_{o_{j,3}} \quad \tau'_{j,4}\}^T \\ &= \{\ddot{\theta}_{j,1} \quad \ddot{\theta}_{j,2} \quad \ddot{\theta}_{j,3} \quad \ddot{\theta}_{j,4} \quad \ddot{x}_{o_{j,3}} \quad \ddot{y}_{o_{j,3}} \quad \ddot{z}_{o_{j,3}} \quad \tau'_{j,4}\}^T \end{aligned} \quad (16)$$



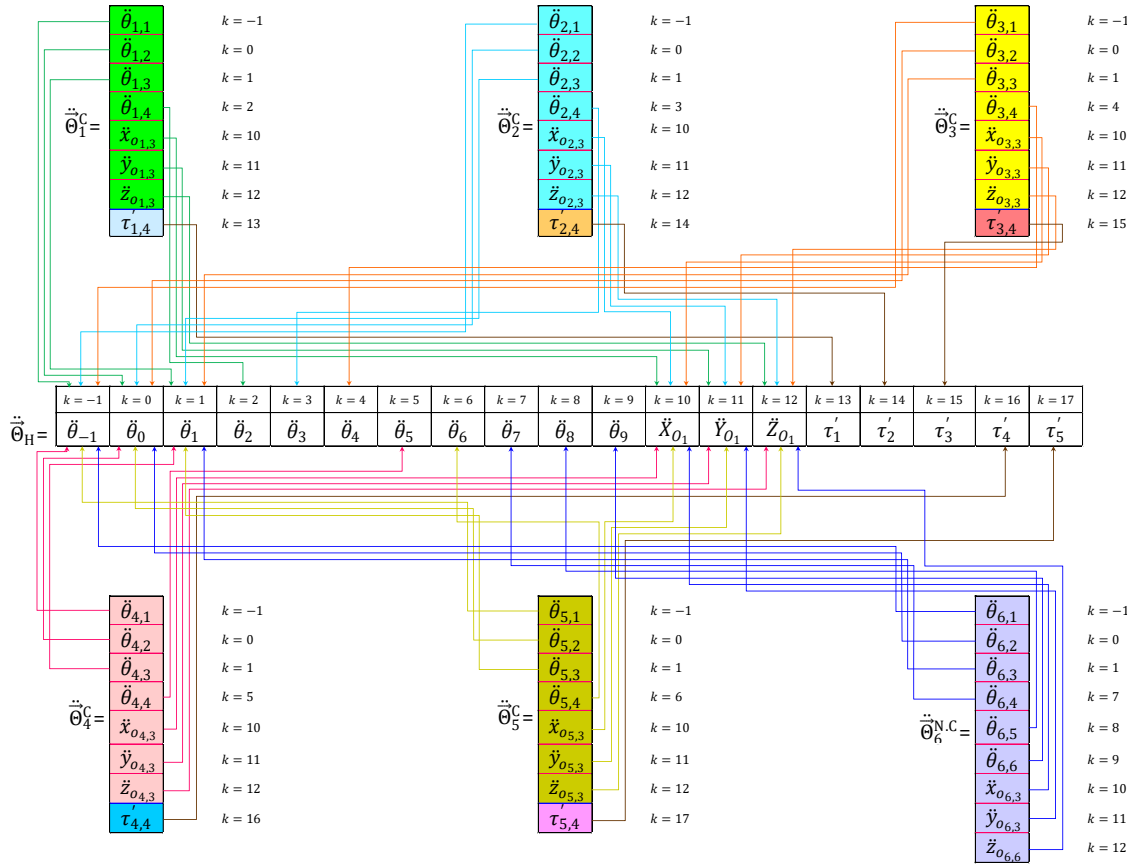
شکل ۴ ماتریس اینرسی و بردار شتاب‌های تعمیم‌یافته برای زنجیره‌های رباتیکی مقید و غیرمقید یک منیپولاتور سه لینکی که بر روی یک هگزاکوپتر نصب شده است.

Fig. 4 Inertia matrix and generalized acceleration vector for the constrained and unconstrained robotic chains of a three-link manipulator mounted on a hexacopter.

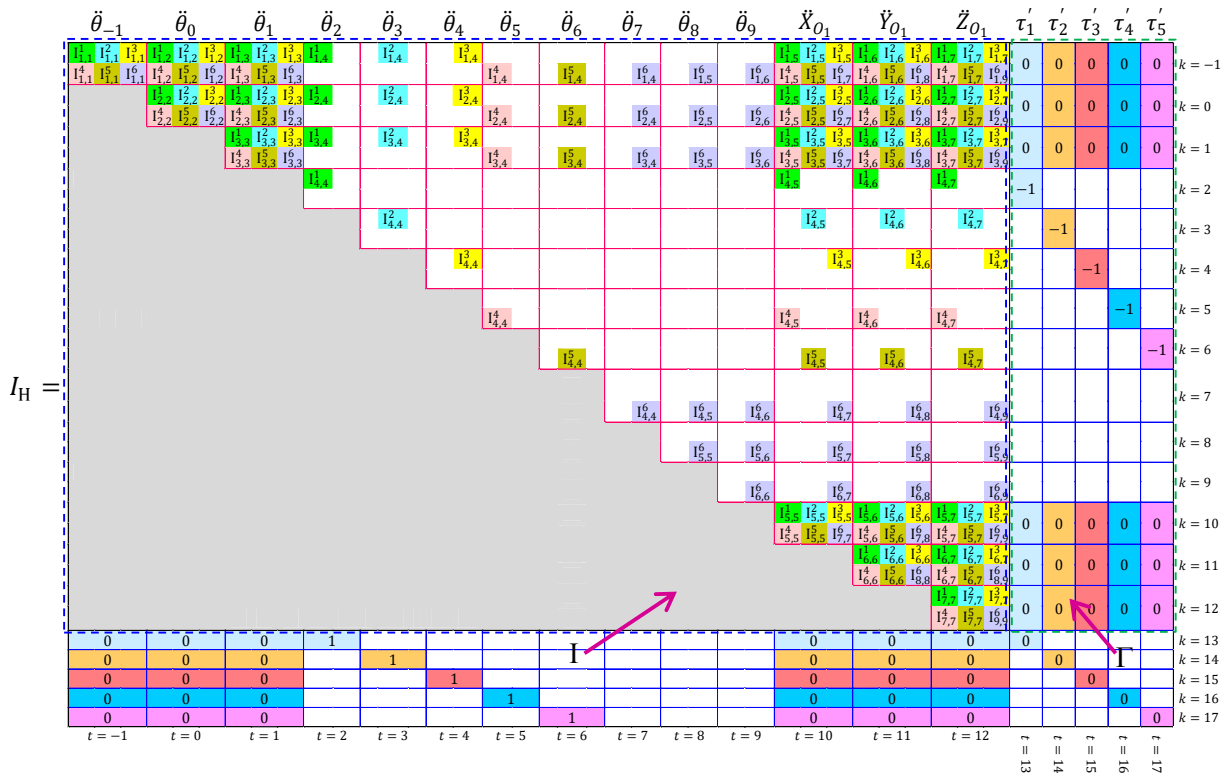


شکل ۵ بردار ترم‌های باقی‌مانده دینامیکی و نیز بردار نیروهای تعمیم‌یافته برای زنجیره‌های رباتیکی مقید و غیرمقید یک منیپولاتور سه لینکی که بر روی یک هگزاکوپتر نصب شده است.

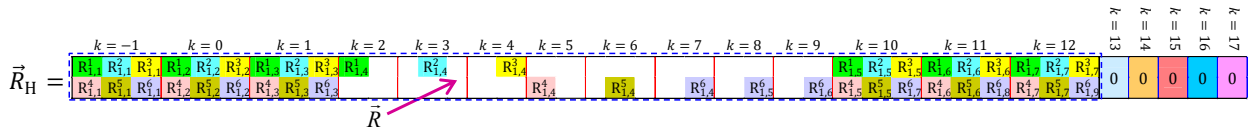
Fig. 5 Vector of residual dynamic terms and generalized force vector for the constrained and unconstrained robotic chains of a three-link manipulator mounted on a hexacopter.



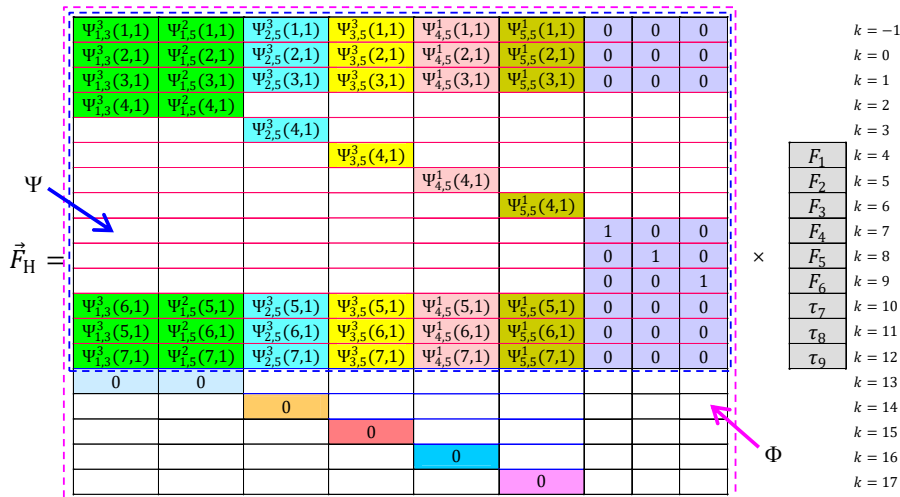
شکل ۶ ارتباط میان شتاب‌های تعمیم‌یافته سیستم هیبرید با شتاب‌های تعمیم‌یافته اجزاء تفکیک شده این سیستم
 Fig. 6 Relationship between the generalized accelerations of the hybrid system and the generalized accelerations of its decomposed components



شکل ۷ ماتریس اینرسی سیستم هیبرید که از ترکیب ماتریس‌های اینرسی زنجیره‌های رباتیکی مقید و غیرمقید ایجاد شده است.
 Fig. 7 The inertia matrix of the aerial robotic manipulator, constructed by combining the inertia matrices of the constrained and unconstrained robotic chains.



شکل ۸ بردار ترم‌های باقی‌مانده دینامیکی سیستم هیبرید ایجاد شده از ترکیب بردار ترم‌های باقی‌مانده دینامیکی زنجیره‌های رباتیکی مقید و غیرمقید.
Fig. 8 Vector of residual dynamic terms of the hybrid system obtained by combining the residual dynamic term vectors of the constrained and unconstrained robotic chains.



شکل ۹ بردار نیروهای تعمیم‌یافته سیستم هیبرید که از ترکیب بردار نیروهای تعمیم‌یافته زنجیره‌های رباتیکی مقید و غیرمقید ایجاد شده است.
Fig. 9 Vector of generalized forces of the hybrid system obtained by combining the generalized force vectors of the constrained and unconstrained robotic chains.

شکل (۷) نشان داده شده است، ایجاد می‌گردد. لازم به ذکر است به دلیل کمبود جا، درایه $I_j(k, t)$ در این ماتریس به صورت فشرده I_{kt}^j نوشته شده است. برای ایجاد بردارهای \vec{F}_H و \vec{R}_H نیز فرآیند مشابهی انجام می‌شود. به طور مثال، با مشاهده شکل (۸) به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که چگونه درایه‌های بردار \vec{R}_H^C سطرهای $k = -1, k = 0, k = 1, k = 6, k = 10, k = 11$ ، کمبود جا، درایه $R_j(k, 1)$ به صورت فشرده $R_{k,1}^j$ نوشته شده است.

در تشکیل بردار نیروهای تعمیم‌یافته سیستم هیبرید (شکل (۹)) از ارتباط میان نیروها و گشتاورهای فعال سیستم هیبرید و زنجیره‌های تفکیک شده این سیستم استفاده شده است. این ارتباط که از مقایسه شکل‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود، به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & \tau_7 & \tau_8 & \tau_9 \end{Bmatrix}^T$$

Trust forces and active torques in the main system

$$= \begin{Bmatrix} F_{1,3} & F_{1,5} & F_{2,5} & F_{3,5} & F_{4,5} & F_{5,5} & \tau_{6,4} & \tau_{6,5} & \tau_{6,6} \end{Bmatrix}^T$$

Trust forces and active torques in the chains

در پایان لازم به ذکر است که بخش‌هایی از شکل‌های (۷) تا (۹) تحت عنوان ماتریس I، ماتریس Γ ، ماتریس Ψ ، ماتریس Φ و بردار \vec{R} نامگذاری شده‌است. در بخش بعد خواهیم دید که چگونه این پارامترها در حل مسئله دینامیک معکوس بکار گرفته می‌شوند.

به طور مثال شتاب‌های تعمیم‌یافته زنجیره شماره ۵ یعنی $\theta_{5,1}, \theta_{5,2}, \theta_{5,3}, \theta_{5,4}, \dot{\theta}_{o_{5,3}}, \ddot{\theta}_{o_{5,3}}, \dot{x}_{o_{5,3}}, \ddot{x}_{o_{5,3}}, \dot{z}_{o_{5,3}}, \ddot{z}_{o_{5,3}}$ و $\tau_{5,4}$ به ترتیب معادل شتاب‌های تعمیم‌یافته $\theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_6, \dot{\theta}_{o_1}, \ddot{\theta}_{o_1}, \dot{z}_{o_1}, \ddot{z}_{o_1}$ در سیستم هیبرید هستند. در شکل (۶) کلیه ارتباطات میان شتاب‌های تعمیم‌یافته سیستم هیبرید با زنجیره‌های تفکیک شده این سیستم، توسط پیکان‌هایی به تصویر کشیده شده است. اکنون با دانستن ارتباط میان شتاب‌های تعمیم‌یافته سیستم هیبرید با نمونه معادل آن در زنجیره‌های رباتیکی تفکیک شده، به راحتی می‌توان ماتریس اینرسی I_H را به کمک ماتریس‌های اینرسی زنجیره‌های مقید و غیرمقید نشان داده شده در شکل (۴) ایجاد نمود. برای توضیح چگونگی ایجاد این ماتریس، به طور نمونه شتاب‌های تعمیم‌یافته زنجیره شماره ۵ در شکل (۶) را در نظر بگیرید. همانگونه که در این شکل مشاهده می‌گردد، شتاب‌های تعمیم‌یافته این زنجیره با آن دسته از شتاب‌های تعمیم‌یافته سیستم هیبرید که در خانه‌های $k = -1, k = 0, k = 1, k = 6, k = 10, k = 11, k = 12, k = 17$ قرار گرفته‌اند، معادل هستند. لذا درایه‌های ماتریس اینرسی این زنجیره یعنی I_5^C تنها باید در سطرهای $k = -1, k = 0, k = 1, k = 6, k = 10, k = 11, k = 12, k = 17$ و نیز در ستون‌های $t = 1, t = 6, t = 10, t = 11, t = 12, t = 17$ و ماتریس اینرسی I_H قرار گیرند. با تکرار این پروسه برای تمام زنجیره‌های رباتیکی، ماتریس اینرسی سیستم هیبرید مطابق آنچه که در

۴- ارائه نتایج حاصل از شبیه‌سازی منیپولاتور نصب شده بر روی پایه پرنده

پیش از شبیه‌سازی معادلات حرکت ربات هیبرید مورد مطالعه در این مقاله، باید مسیر مطلوب برای مرکز پایه پرنده و نیز عملکرد نهایی منیپولاتور نصب شده بر روی این پایه تعیین گردد. برای نقطه O_2 مسیری مارپیچ با معادلات پارامتریک زیر انتخاب می‌گردد:

$$\begin{aligned} X_{O_2}^d &= 2e^{-0.05t} \cos t \\ Y_{O_2}^d &= 2e^{-0.05t} \sin t \\ Z_{O_2}^d &= e^{0.1t} \end{aligned} \quad (20)$$

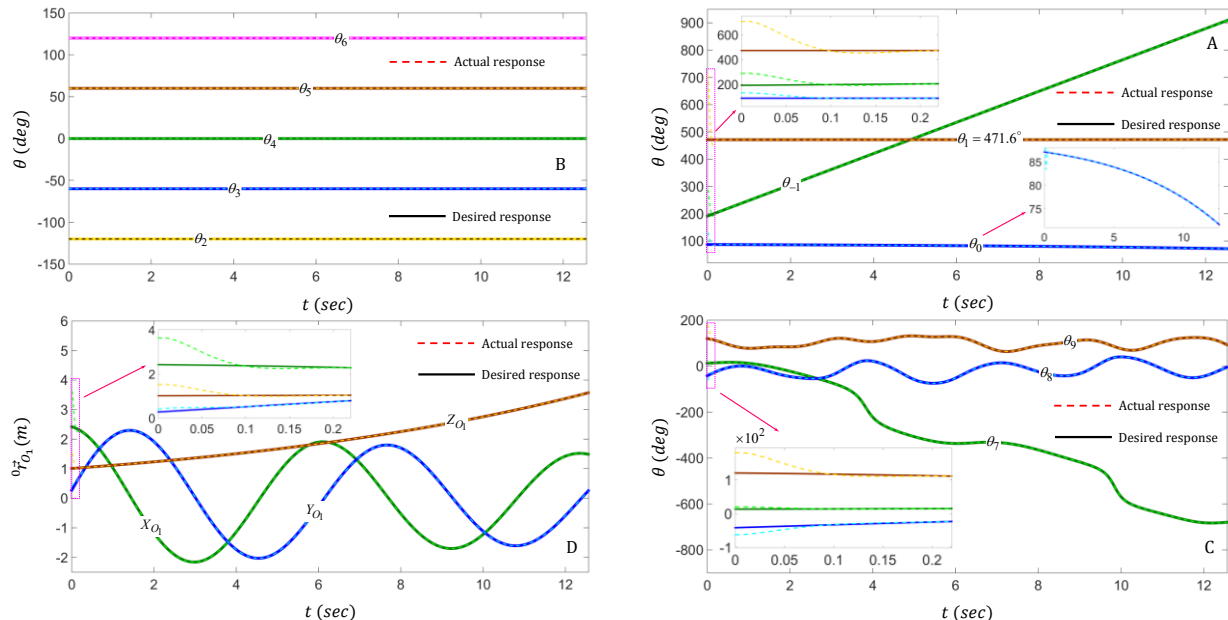
حال آنکه برای عملکرد نهایی منیپولاتور نصب شده بر روی این پایه پرنده مسیری با معادلات پارامتریک زیر انتخاب می‌گردد:

$$\begin{aligned} X_{O_2}^d &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \\ Y_{O_2}^d &= -2 \\ Z_{O_2}^d &= -2 \sin(2t) \end{aligned} \quad (21)$$

پارامترهای فیزیکی برای شبیه‌سازی این سیستم رباتیکی در جدول ۱ مشخص شده اند.

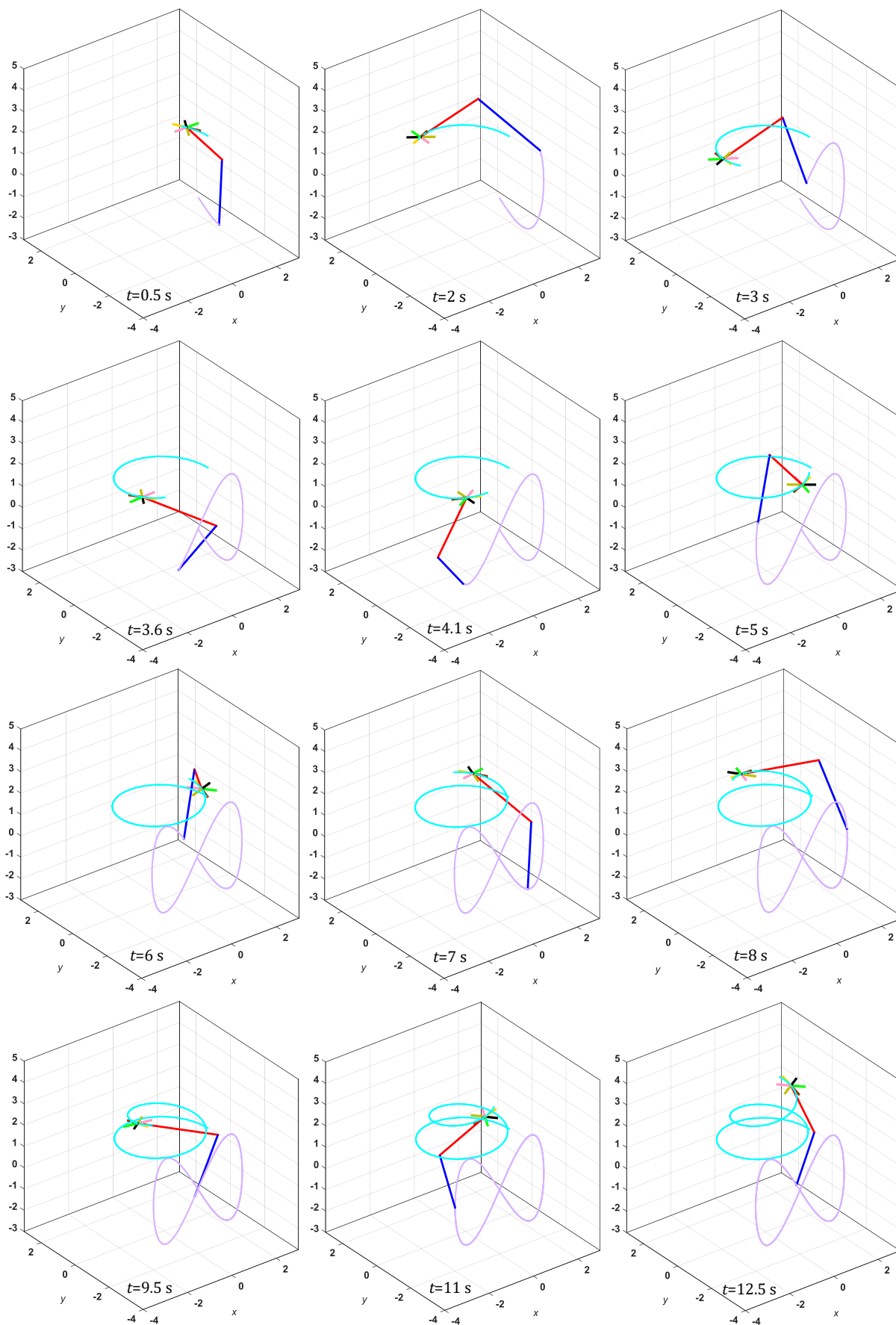
جدول ۱ پارامترهای فیزیکی استفاده شده برای شبیه‌سازی سیستم رباتیکی

Descriptions	Parameter	unit
Length of Virtual Links	$l_{-1} = l_0 = 0$	m
Length of Flying-Base Links	$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = 0.5$	m
Length of Manipulator Links	$l_7 = 0; l_8 = l_9 = 3$	m
Mass per Unit Length of Virtual Links	$\mu_{-1} = \mu_0 = 0$	Kg/m
Mass per Unit Length of Flying-Base Links	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 1$	Kg/m
Mass per Unit Length of Manipulator Links	$\mu_7 = 0; \mu_8 = \mu_9 = 1$	Kg/m
Earth's Gravitational Acceleration	$g = 9.81$	m/s ²
Moment of Inertia of the End-Effector Links about the Center of Mass	$B_{33}, B_{34}, B_{37}, B_{310} = \begin{bmatrix} 212 & 0 & 0 \\ 0 & 21.2 & 0 \\ 0 & 0 & 190.8 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$	Kgm ²



شکل ۱۰ مختصات‌های تعمیم‌یافته سیستم شامل موقعیت‌های زاویه‌ای مفاصل غیرقید (بخش‌های A و C)، موقعیت‌های زاویه‌ای مفاصل مقید (بخش B)، و موقعیت مفصل O_1 نسبت به دستگاه مختصات اینرسی $X_0Y_0Z_0$ (بخش D) در دو حالت مطلوب و واقعی

Fig. 10 Generalized coordinates of the system, including the angular positions of the unconstrained joints (Sections A and C), the angular positions of the constrained joints (Section B), and the joint position with respect to the inertial coordinate frame (Section D), shown for both the desired and actual cases.



شکل ۱۱ شبیه‌سازي حرکت منیپولاتور با پایه پرنده بر روی مسیر مطلوب

Fig. 11 Simulation of the aerial robotic manipulator's movement along the desired trajectories.

منابع

- [1] H. Bonyan Khamseh, F. Janabi-Sharifi, and A. Abdessameud, "Aerial manipulation: A literature survey," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 107, pp. 221–235, 2018. doi: 10.1016/j.robot.2018.06.012
- [2] F. Ruggiero, V. Lippiello, and A. Ollero, "Aerial manipulation: A literature review," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 1957–1964, 2018. doi: 10.1109/lra.2018.2808541
- [3] A. Khalifa and M. Fanni, "Experimental implementation of a new non-redundant 6-DOF quadrotor manipulation system," *ISA Transactions*, vol. 104, pp. 345–355, 2020. doi: 10.1016/j.isatra.2020.05.013
- [4] H. Lee and H. J. Kim, "Estimation, control, and planning for autonomous aerial transportation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 4, pp. 3369–3379, 2017. doi: 10.1109/tie.2016.2598321
- [5] N. Pouliot, P. Richard, and S. Montambault, "LineScout technology opens the way to robotic inspection and maintenance of high-voltage power lines," *IEEE Power and Energy Technology Systems Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 1–11, 2015. doi: 10.1109/jpets.2015.2395388
- [6] L. Wang and Z. Zhang, "Automatic detection of wind turbine blade surface cracks based on UAV-taken images," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 9, pp. 7293–7303, 2017. doi: 10.1109/tie.2017.2682037
- [7] P. Ramon-Soria, B. Arrue, and A. Ollero, "Grasp planning and visual servoing for an outdoors aerial dual manipulator," *Engineering*, vol. 6, no. 1, pp. 77–88, 2020.
- [8] Y. Bae, J. Shin, S. Lee, and H. Kim, "Field experiment of photonic radar for low-RCS target detection and high-resolution image acquisition," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 63559–63566, 2021. doi: 10.1109/access.2021.3075388.
- [9] S. Goli, D. F. Kurtulus, L. M. Alhems, et al., "Experimental study on efficient propulsion system for multicopter UAV design applications," *Results in Engineering*, vol. 20, Art. no. 101555, 2023. doi: 10.1016/j.rineng.2023.101555.
- [10] P. E. Pounds, D. R. Bersak, and A. M. Dollar, "Stability of small-scale UAV helicopters and quadrotors with added payload mass under PID control," *Autonomous Robots*, vol. 33, nos. 1–2, pp. 129–142, 2012. doi: 10.1007/s10514-012-9280-5
- [11] M. Orsag, C. M. Korpela, S. Bogdan, and P. Y. Oh, "Hybrid adaptive control for aerial manipulation," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 73, no. 1, pp. 693–707, 2014. doi: 10.1007/s10846-013-9936-1
- [12] M. Kobilarov, "Nonlinear trajectory control of multi-body aerial manipulators," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 73, no. 1, pp. 679–692, 2014. doi: 10.1007/s10846-013-9934-3

برای ارائه درک واضح‌تری از حرکت کلی سیستم، به‌جای پاسخ زمانی موقعیت زاویه‌ای مفاصل، حرکت آن نسبت به دستگاه مختصات اینرسی رسم شده است. شکل (۱۱) مسیر مطلوب مرکز پایه پرنده و عملگر نهایی بازوی مکانیکی نصب شده را در دوازده زمان مختلف نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که چگونه پیکربندی ربات با دنبال کردن مسیرهای مطلوب از پیش تعریف شده، تغییر می‌یابد. یکی از ویژگی‌های قابل توجه در این شکل، جهت‌گیری پایه پرنده است که به طور مداوم با جهت‌گیری مطلوب تعریف شده هم‌تراز می‌شود. به طور خاص، بازوی دوم پایه پرنده (که با رنگ زرد نشان داده شده است) در تمام مدت زمان حرکت، مماس بر مسیر باقی می‌ماند. این هم‌ترازی، توانایی سیستم را در حفظ جهت‌گیری صحیح در طول حرکت نشان می‌دهد.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک فرآیند استاندارد جهت استخراج معادلات حرکت منیپولاتورهایی که بر روی یک پایه پرنده نصب شده‌اند، استخراج گردید. مهمترین ویژگی روش ارائه شده در این مقاله عمومیت آن است. بگونه‌ای که می‌توان تمامی منیپولاتورهای پرنده در این کلاس را فارغ از تعداد لینک‌های تشکیل‌دهنده آن مدل‌سازی نمود. در این مدل‌سازی تلاش شد تا قیود هولونومیک حاکم بر پایه پرنده (که همان عدم دوران بازوهای تشکیل‌دهنده این پایه نسبت به هم است) به نحو سیستماتیک و منظمی در ماتریس اینرسی و بردار ترم‌های باقی‌مانده دینامیکی لحاظ گردد. در این راستا، برای دنبال کردن راحت‌تر فرآیند صورت گرفته برای تولید معادلات حرکت، تمامی این مراحل به‌صورت گرافیکی ارائه شد. همچنین برای آنکه نشان دهیم معادلات استخراج شده از توانایی لازم جهت شبیه‌سازی مانورهای پیچیده در فضای سه بعدی برخوردار هستند، دو مسیر مطلوب یکی برای پایه پرنده و دیگری برای عملگر نهایی منیپولاتور نصب شده بر روی آن تعریف گردید.

تعارض منافع: تعارض منافی برای اظهار وجود ندارد.

تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

- [24] E. Altug, J. P. Ostrowski, and R. Mahony, "Control of a quadrotor helicopter using visual feedback," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 2002, pp. 72–77. doi: [10.1109/robot.2002.1013341](https://doi.org/10.1109/robot.2002.1013341)
- [25] G. Loianno and V. Kumar, "Cooperative transportation using small quadrotors using monocular vision and inertial sensing," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 2, pp. 680–687, 2017. doi: [10.1109/lra.2017.2778018](https://doi.org/10.1109/lra.2017.2778018)
- [26] K. Oishi and T. Jimbo, "Autonomous cooperative transportation system involving multi-aerial robots with variable attachment mechanism," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2021, pp. 6322–6328. doi: [10.1109/iro51168.2021.9636145](https://doi.org/10.1109/iro51168.2021.9636145)
- [27] T. Chen, J. Shan, and H. H. T. Liu, "Transportation of payload using multiple quadrotors via rigid connection," *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2022, Art.no.2486561, 2022. doi: [10.1155/2022/2486561](https://doi.org/10.1155/2022/2486561)
- [28] H. Nguyen, S. Park, J. Park, and D. Lee, "A novel robotic platform for aerial manipulation using quadrotors as rotating thrust generators," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 2, pp. 353–369, 2018. doi: [10.1109/tro.2018.2791604](https://doi.org/10.1109/tro.2018.2791604)
- [29] A. Tagliabue, M. Kamel, R. Siegwart, and J. Nieto, "Robust collaborative object transportation using multiple MAVs," *International Journal of Robotics Research*, vol. 38, no. 9, pp. 1020–1044, 2019. doi: [10.1177/0278364919854131](https://doi.org/10.1177/0278364919854131)
- [30] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano, "Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no.4, pp.510–516, 2004. doi: [10.1109/tcst.2004.825052](https://doi.org/10.1109/tcst.2004.825052)
- [31] H. Lee, H. Kim, W. Kim, and H. J. Kim, "An integrated framework for cooperative aerial manipulators in unknown environments," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 2307–2314, 2018. doi: [10.1109/lra.2018.2807486](https://doi.org/10.1109/lra.2018.2807486)
- [32] H. Lee, H. Kim, and H. J. Kim, "Planning and control for collision-free cooperative aerial transportation," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 15, no.1, pp.189–201, 2018. doi: [10.1109/tase.2016.2605707](https://doi.org/10.1109/tase.2016.2605707)
- [33] S. Kim, H. Seo, J. Shin, and H. J. Kim, "Cooperative aerial manipulation using multirotors with multi-DOF robotic arms," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol.23,no.2,pp.702–713, 2018. doi: [10.1109/tmech.2018.2792318](https://doi.org/10.1109/tmech.2018.2792318)
- [34] H. Kim, H. Seo, C. Y. Son, H. Lee, S. Kim, and H. J. Kim, "Cooperation in the air: A learning-based approach for efficient motion planning of aerial manipulators," *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 25, no. 4, pp. 76–85, 2018. doi: [10.1109/mra.2018.2866766](https://doi.org/10.1109/mra.2018.2866766)
- [35] R. W. Beard, T. W. McLain, D. D. Kingston, and D. Johanson, "Hierarchical cooperative control framework of multiple quadrotor manipulator systems," in *Proc.*
- [13] A. Gawel, M. Kamel, T. Novkovic, *et al.*, "Aerial picking and delivery of magnetic objects with MAVs," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 2017, pp.5746–5752. doi: [10.1109/icra.2017.7989675](https://doi.org/10.1109/icra.2017.7989675)
- [14] J. Thomas, G. Loianno, J. Polin, K. Sreenath, and V. Kumar, "Toward autonomous avian-inspired grasping for micro aerial vehicles," *Bioinspiration & Biomimetics*, vol. 9, no. 2, Art. no. 025010, 2014. doi: [10.1088/1748-3182/9/2/025010](https://doi.org/10.1088/1748-3182/9/2/025010)
- [15] S. Kim, S. Choi, and H. J. Kim, "Aerial manipulation using a quadrotor with a two-DOF robotic arm," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2013, pp.4990–4995. doi: [10.1109/iro5.2013.6697077](https://doi.org/10.1109/iro5.2013.6697077)
- [16] H. Lee and H. J. Kim, "Estimation, control, and planning for autonomous aerial transportation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 4, pp. 3369–3379, 2016. doi: [10.1109/tie.2016.2598321](https://doi.org/10.1109/tie.2016.2598321)
- [17] C. Korpela, M. Orsag, and P. Y. Oh, "Towards valve turning using a dual-arm aerial manipulator," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2014, pp.3411–3416. doi: [10.1109/iro5.2014.6943037](https://doi.org/10.1109/iro5.2014.6943037)
- [18] A. E. Jimenez-Cano, J. Braga, G. Heredia, and A. Ollero, "Aerial manipulator for structure inspection by contact from the underside," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2015, pp. 1879–1884. A. E. Jimenez-Cano, J. Braga, G. Heredia, and A. Ollero, "Aerial manipulator for structure inspection by contact from the underside," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2015, pp. 1879–1884. doi: [10.1109/iro5.2015.7353623](https://doi.org/10.1109/iro5.2015.7353623)
- [19] M. I. Sanchez, J. A. Acosta, and A. Ollero, "Integral action in first-order closed-loop inverse kinematics: Application to aerial manipulators," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 2015, pp. 5297–5302. doi: [10.1109/icra.2015.7139938](https://doi.org/10.1109/icra.2015.7139938)
- [20] A. Suarez, G. Heredia, and A. Ollero, "Lightweight compliant arm with compliant finger for aerial manipulation and inspection," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2016, pp. 4449–4454. doi: [10.1109/iro5.2016.7759655](https://doi.org/10.1109/iro5.2016.7759655)
- [21] A. Santamaria-Navarro, P. Grosch, V. Lippiello, J. Solà, and J. Andrade-Cetto, "Uncalibrated visual servo for unmanned aerial manipulation," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, no. 4, pp. 1610–1621, 2017. doi: [10.1109/tmech.2017.2682283](https://doi.org/10.1109/tmech.2017.2682283)
- [22] A. Suarez, G. Heredia, and A. Ollero, "Physical-virtual impedance control in ultralightweight and compliant dual-arm aerial manipulators," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 2553–2560, 2018. doi: [10.1109/lra.2018.2809964](https://doi.org/10.1109/lra.2018.2809964)
- [23] A. Mohiuddin, T. Tarek, Y. Zweiri, and D. Gan, "A survey of single and multi-UAV aerial manipulation," *Unmanned Systems*, vol. 8, no. 2, pp. 119–147, 2020. doi: [10.1142/s2301385020500089](https://doi.org/10.1142/s2301385020500089)

- approach," *Multibody System Dynamics*, pp. 1–30, 2024. doi: [10.1007/s11044-023-09964-y](https://doi.org/10.1007/s11044-023-09964-y)
- [47] R. Fazel, A. M. Shafei, and S. R. Nekoo, "A general formulation for dynamic path planning and closed-loop tracking of multi-rigid-link bipedal robotic systems," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 46, no.14, pp. 1–30, 2024. doi: [10.1007/s40430-023-04562-7](https://doi.org/10.1007/s40430-023-04562-7)
- [48] R. Fazel, A. M. Shafei, and S. R. Nekoo, "Kinematic analysis of flexible bipedal robotic systems," *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 45, no.5, pp. 795–818, 2024. doi: [10.1007/s10483-024-3081-8](https://doi.org/10.1007/s10483-024-3081-8)
- [49] A. M. Shafei, R. Fazel, and S. R. Nekoo, "Dynamic modeling and nonlinear finite-time optimal control of biped robot locomotion: asymptotic motion control removes impact modeling," *International Journal of Dynamics and Control*, Vol. 13, no.9, 327, 2025. doi: [10.1007/s40435-025-01835-y](https://doi.org/10.1007/s40435-025-01835-y)
- [50] A. M. Shafei and H. R. Shafei, "A systematic method for the hybrid dynamic modeling of open kinematic chains confined in a closed environment," *Multibody System Dynamics*, vol. 38, no. 1, pp. 21–42, 2016. doi: [10.1007/s11044-015-9496-1](https://doi.org/10.1007/s11044-015-9496-1)
- IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 2015, pp. 4656–4662. doi: [10.1109/icra.2015.7139844](https://doi.org/10.1109/icra.2015.7139844)
- [36] F. Caccavale, G. Giglio, G. Muscio, and F. Pierri, "Cooperative impedance control for multiple UAVs with a robotic arm," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2015, pp. 2366–2371. doi: [10.1109/iros.2015.7353697](https://doi.org/10.1109/iros.2015.7353697)
- [37] V. Mata, S. Provenzano, J. I. Cuadrado, and F. Valero, "Serial-robot dynamics algorithms for moderately large number of joints," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, no. 7, pp. 739–755, 2002. doi: [10.1016/s0094-114x\(02\)00030-7](https://doi.org/10.1016/s0094-114x(02)00030-7)
- [38] V. Mata, S. Provenzano, J. I. Cuadrado, and F. Valero, "Inverse dynamic problem in robots using Gibbs–Appell equations," *Robotica*, vol. 20, no. 1, pp. 59–67, 2002. doi: [10.1017/s0263574701003502](https://doi.org/10.1017/s0263574701003502)
- [39] A. M. Shafei and H. R. Shafei, "Dynamic modeling of tree-type robotic systems by combining 3×3 rotation and 4×4 transformation matrices," *Multibody System Dynamics*, vol. 44, no. 4, pp. 367–395, 2018. doi: [10.1007/s11044-018-09642-4](https://doi.org/10.1007/s11044-018-09642-4)
- [40] A. M. Shafei and M. M. Riahi, "The effects of mode shapes on the temporal response of flexible closed-loop linkages under impulse excitation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 178, Art. no. 109256, 2022. doi: [10.1016/j.ymssp.2022.109256](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109256)
- [41] A. M. Shafei and H. Mirzaeinejad, "A novel recursive formulation for dynamic modeling and trajectory tracking control of multi-rigid-link robotic manipulators mounted on a mobile platform," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 235, no. 7, pp. 1204–1217, 2021. doi: [10.1177/0959651820973900](https://doi.org/10.1177/0959651820973900)
- [42] A. M. Shafei and H. Mirzaeinejad, "A general formulation for managing trajectory tracking in non-holonomic moving manipulators with rotary-sliding joints," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 99, pp. 729–746, 2020. doi: [10.1007/s10846-019-01143-6](https://doi.org/10.1007/s10846-019-01143-6)
- [43] A. Zahedi, A. M. Shafei, and M. Shamsi, "Application of hybrid robotic systems in crop harvesting: Kinematic and dynamic analysis," *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 209, Art. no. 107724, 2023. doi: [10.1016/j.compag.2023.107724](https://doi.org/10.1016/j.compag.2023.107724)
- [44] A. Zahedi, A. M. Shafei, and M. Shamsi, "Kinetics of planar constrained robotic mechanisms with multiple closed loops: An experimental study," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 183, Art. no. 105250, 2023. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2023.105250](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2023.105250)
- [45] R. Fazel, A. M. Shafei, and S. R. Nekoo, "A new method for finding the proper initial conditions in passive locomotion of bipedal robotic systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 130, Art.no.107693, 2024. doi: [10.1016/j.cnsns.2023.107693](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107693)
- [46] R. Fazel, A. M. Shafei, and S. R. Nekoo, "Dynamic modeling and closed-loop control design for humanoid robotic systems: Gibbs–Appell formulation and SDRE