

## Temperature Control of Different Conductors using a Reduced-Order Model-Based Internal Model Controller

Mahdi Ahmadi\*<sup>id</sup>, Mohammad-Amin Karimi

Faculty of Electrical and Computer Engineering, Esfarayen University of Technology, Esfarayen, North-Khorasan, Iran

### ARTICLE INFO

**Article Type**  
Original Research

**Article History**  
Received: January 11, 2026  
Revised: March 31, 2026  
Accepted: April 05, 2026  
ePublished: May 16, 2026

### ABSTRACT

This paper focuses on designing a controller to regulate the temperature of a horizontal metal bar with varying thermal conductivities by manipulating the heat flux. To this end, the governing partial differential equations of the bar are first discretized using the finite difference method, resulting in a set of ordinary differential equations that establish a state-space representation for the system. The high order of the resulting state-space model leads to a complex final controller, so reduced-order transfer function parameters are determined for different conductivity values using an optimization-based approach. Open-loop simulation results show that the obtained low-order models achieve over 99% accuracy for various conductivity cases. Internal model controllers are then designed for different conductivity scenarios using these reduced-order models and applied to the original system. Simulation results indicate that the designed internal model controller exhibits enhanced performance in tracking the desired reference input and rejecting disturbances compared to other methods. The system output effectively follows the desired temperature profile with appropriate speed, minimal overshoot, and zero steady-state error.

**Keywords:** Conductive Heat Transfer System, Horizontal Metal Bar, Finite Difference Method, Model Order Reduction, Temperature Control, Internal Model Controller.

### How to cite this article

Ahmadi M, Karimi M.A , Temperature Control of Different Conductors using a Reduced-Order Model-Based Internal Model Controller. Modares Mechanical Engineering; 2026;26(07):571-581.

\*Corresponding author's email: mahdiahmadi.ee@gmail.com

\*Corresponding ORCID ID: 0000-0003-0954-9895



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.



شاپا: ۲۴۷۶-۷۹۰۹؛ مهندسی مکانیک مدرس. ۵۸۱-۵۷۱:۵۷۱(۰۷):۲۶(۰۵)۱۴۰۵

# مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.118761.82932

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir



## کنترل دمای رساناهای مختلف با استفاده از کنترل کننده مدل داخلی طراحی شده مبتنی بر یک مدل کاهش مرتبه یافته

مهدی احمدی\*<sup>ID</sup>، محمدمبین کریمی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، خراسان شمالی، ایران

### چکیده

این مقاله بر طراحی کنترل کننده برای کنترل دمای یک میله فلزی افقی با رسانایی‌های متفاوت و با استفاده از تغییر شار حرارتی متمرکز است. برای این منظور ابتدا معادلات با مشتقات جزئی حاکم بر میله با استفاده از روش تفاضل محدود به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی تبدیل می‌شود که نمایش فضای حالت را برای سیستم تحت مطالعه نتیجه می‌دهد. با توجه به بالا بودن مرتبه سیستم تحت مطالعه در فرم فضای حالت، پارامترهای تابع تبدیل کاهش مرتبه یافته برای رسانایی‌های متفاوت و با استفاده از یک روش بهینه‌سازی استخراج می‌شوند که نتایج حاصل از شبیه‌سازی حلقه باز نشان می‌دهند مدل‌های مرتبه پایین بدست آمده برای رسانایی‌های مختلف دارای دقتی بیش از 99% می‌باشند. سپس با استفاده از مدل‌های مرتبه پایین بدست آمده، کنترل کننده‌های مدل داخلی برای حالات مختلف رسانایی طراحی شده و به سیستم اصلی اعمال می‌شوند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهند که کنترل کننده مدل داخلی طراحی شده توانسته است در مقایسه با دیگر مراجع عملکرد مطلوبی را در ردیابی ورودی مرجع و دفع اثر اغتشاش از خود به نمایش بگذارد به نحوی که خروجی سیستم توانسته است دمای مطلوب را با سرعتی مناسب، با فراجهدی کوچک و بدون خطای حالت ماندگار دنبال کند.

**کلیدواژه‌ها:** سیستم انتقال حرارت هدایتی، میله فلزی افقی، روش تفاضل محدود، کاهش مرتبه مدل، کنترل دما، کنترل کننده مدل داخلی.

### اطلاعات مقاله

#### نوع مقاله

مقاله پژوهشی

#### تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۲۱

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۱/۱۱

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۱/۱۶

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۲/۲۶

### نحوه ارجاع به این مقاله

احمدی مهدی، کریمی محمدمبین، کنترل دمای رساناهای مختلف با استفاده از کنترل کننده مدل داخلی طراحی شده مبتنی بر یک مدل کاهش مرتبه یافته، مهندسی مکانیک مدرس. ۵۸۱-۵۷۱:۵۷۱(۰۷):۲۶(۰۵)۱۴۰۵

\*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mahdiahmadi.ee@gmail.com

\*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: 0000-0003-0954-9895



Copyright© 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

## ۱- مقدمه

برای انتقال حرارت هدایتی یا رسانش گرمایی، انتقال انرژی درون ماده یا نواحی مجاور آن در تماس فیزیکی مستقیم به سبب اختلاف دما و بدون هرگونه حرکت ماکروسکوپی یا انتقال مکانیکی جرمی ماده است [۱]. این پدیده در طراحی سیستم‌های مدیریت حرارتی مانند باتری‌های لیتیومی با سرمایه‌ش هیبریدی [۲]، خودروهای الکتریکی با چسب‌های رسانای حرارتی [۳] و قطعات الکترونیک قدرت مبتنی بر چاپ سه بعدی [۴] کاربرد دارد. در مقیاس میکروسکوپی، این انتقال ناشی از ارتعاشات شبکه‌ای و الکترون‌های آزاد بوده که در جامدات غیرفلزی عمدتاً توسط فونون‌ها و در فلزات توسط هر دو مکانیزم انجام می‌شود [۱]. برای تحلیل و بیان ریاضی ماهیت این پدیده و همچنین برآورد کمی نرخ انتقال حرارت در حالت پیوسته از قانون فوریه و فرضیات کلیدی شامل انتقال دیفیوژنی، همگنی، تعادل موضعی، رسانایی خطی و مقیاس بزرگ‌تر از طول آزاد ذرات استفاده می‌شود [۱]. این چارچوب نظری، مبنای طراحی و تحلیل سیستم‌های حرارتی مانند باتری‌های استوانه‌ای [۵]، صفحات مایع خنک‌شونده [۶] و مدل‌های پیش‌بین بهینه‌سازی برای باتری خودروهای برقی [۷] است. طبق این قانون، نرخ انتقال تابع گرادیان دما، سطح مؤثر و ضریب رسانایی است. همچنین بر اساس قانون دوم ترمودینامیک، گرما به صورت طبیعی در جهت کاهش دما جریان می‌یابد که در این معادله با یک جمله منفی مدل می‌شود [۸]. این انتقال، در مواد ناهمسانگرد به صورت تانسور مرتبه دوم و در مقیاس نانو با بهره‌گیری از معادله بولتزمن- فنون ( Boltzmann Transport Equation)، توصیف می‌شود [۹].

معادله حرارت  $T(x, y, z, t)$ ، یک معادله با مشتقات جزئی سه بعدی و وابسته به زمان است که از قانون بقای انرژی بر روی یک عنصر دیفرانسیلی استخراج می‌شود و تغییرات دما را برحسب رسانش، تولید گرما و خواص ترمودینامیکی ماده توصیف می‌کند [۱۰]. برای داشتن پاسخ یکتا باید شرایط مرزی دیریکله (دما معلوم)، نویمن (شار حرارتی معلوم) و رایبن (ارتباط با محیط از طریق همرفت یا تشعشع) تعریف شوند [۱۱] و از آنجا که بیان این شرایط در معادله حاکم به هندسه مسئله وابسته است، فرم این معادله برای سهولت در دستگاه‌های مختصات کارتیزین، استوانه‌ای و کروی بیان می‌شود. با این حال در شرایط خاص، اگر دما ثابت باشد یا تنها در یک جهت (برای مثال فقط در جهت  $x$ ) تغییر کند، این معادله به فرم‌های ساده‌تری مانند لاپلاس، پواسون یا حالات تک بعدی تقلیل می‌یابد [۱۲، ۱۳].

در برخی فرآیندهای صنعتی، دستیابی به عملکرد بهینه مستلزم کنترل دقیق میدان دما در اجسام جامد با رسانایی متفاوت است. در مطالعات [۱۴، ۱۵]، کنترل مرزی دما در سیستم‌های غیرخطی با خواص حرارتی تابع دما با استفاده از روش گرادیان مزدوج بررسی

شده است. در [۱۶] کنترل‌کننده پیش‌بین مدل ( Model Predictive Control, MPC) غیرخطی با خطی‌سازی تطبیقی و یادگیری تقویتی (Soft Actor-Critic, SAC) مدل آزاد برای مدیریت حرارت باتری به کار رفته است اما به دلیل فرض جرم واحد و نادیده‌گرفتن عدم قطعیت‌ها و توزیع غیریکنواخت دما، تعمیم‌پذیری آن محدود است. مشابه آن، در [۱۷] رویکرد خطی‌سازی ورودی - خروجی برای کنترل گسترده معادله پخش غیرخطی ارائه شده است که طراحی کنترل‌کننده به طور مستقیم بر اساس معادله مشتقات جزئی و بدون ساده‌سازی انجام می‌شود. در کار پیشگامانه [۱۸] یک مدل رگرسیون پویا با در نظر گرفتن هندسه پیچیده و شرایط محیطی متغیر همراه با فرآیندهای گاوسی برای پیش‌بینی دمای سطح و بهینه‌سازی آنی چندمکانی مبتنی بر داده‌های دوربین مادون قرمز پیشنهاد شده است، اما پیچیدگی محاسباتی مانع از پیاده‌سازی عملی می‌شود.

پژوهش [۱۹] با الهام از اصول کنترل‌کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی (Proportional-Integral-Derivative, PID) و داده‌های دمایی محدود، شار حرارتی مرزی مجهول را تخمین می‌زند و نسبت به روش‌های پیچیده مبتنی بر فیلتر کالمن، عملکرد ضد اغتشاش قوی‌تری دارد؛ با این حال به دلیل وابستگی شدید به روش‌های بهینه‌سازی پارامتر، مدل ساده تک بعدی و ماهیت معکوس مسئله هدایت حرارتی ناپایا، مستعد واگرایی در برابر خطای اندازه‌گیری است. در [۲۰] پایش دمای هادی‌های خطوط هوایی با حسگرهای مادون قرمز و داده‌های تجربی انجام شده است اما فاقد هرگونه طراحی کنترلی و تحلیل پایداری است. در ادامه، [۲۱] با رویکرد کنترل پیشرفته فرآیند، مدل لایه‌ای و کنترل مدل مبنای تغییرات دینامیک فرآیند را به صورت آنلاین شناسایی و پارامترهای کنترل‌کننده را بازتنظیم می‌کند.

در [۲۲] روش‌های تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده PID شامل زیگلر - نیکولز و چین - رونز - ریزویک در یک سیستم حرارتی آموزشی مبتنی بر آردینو مقایسه شده است که روش دوم با توپولوژی PI-D عملکرد بهتری دارد. با این حال، مدل مرتبه اول آن، مسائل پیشرفته را پوشش نمی‌دهد. در [۲۳]، یک کنترل‌کننده مرزی بازخوردی برای انتقال حرارت در میله رسانا با شرایط مرزی نویمن طراحی شده است. کار [۲۴] با روش‌شناسی سیستماتیک به تنظیم پارامترهای MPC در مدل حرارتی ساختمان با لحاظ عدم قطعیت‌ها می‌پردازد. در مقابل، [۲۵] با استفاده از کنترل‌کننده PID در سیستم‌های ذخیره‌ساز انرژی حرارتی نهان، رفتار دینامیکی را توصیف می‌کند اما فاقد هرگونه استراتژی کارآمد در سیستم‌های غیرخطی و دارای تاخیر است.

پارامترهای کنترل‌کننده PID به طور ویژه برای سیستم انتقال حرارت هدایتی در یک جسم افقی با ضرایب نفوذ حرارتی متفاوت در پژوهش [۲۶] طراحی شده است که با مدل‌سازی فضای حالت، حل عددی معادلات انتقال حرارت و تبدیل معادلات دیفرانسیل

برساند.

در ادامه، توصیف سیستم تحت مطالعه و کاهش مرتبه آن در بخش دوم ارائه می‌شوند. توصیف کنترل‌کننده IMC و طراحی آن برای سیستم انتقال حرارت در بخش سوم ارائه خواهند شد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در بخش چهارم گزارش می‌شوند. در پایان نیز بخش پنجم، نتایج حاصل از پژوهش را جمع‌بندی می‌نماید.

## ۲- توصیف سیستم

### ۲-۱ توصیف سیستم به روش تفاضل محدود

بخش حاضر، مدل فیزیکی سیستم متشکل از یک جسم رسانای افقی دلخواه با خواص حرارتی یکنواخت و یک سازوکار اعمال شار حرارتی کنترل شده موضعی را توصیف می‌کند. تابع توزیع دما در یک جسم افقی به طول  $L$  با اعمال  $Q(t)$  (شار حرارتی  $(W/m^3)$ ) در یک گره و در دستگاه مختصات متعامد کارتزین را می‌توان در قالب یک مسأله مرزی همگن با شرایط اولیه و مرزی دیریکله به صورت:

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + bQ(t) \\ T(0,t) = T_0 \\ T(L,t) = T_L \\ T(x,0) = T_\infty \\ t \geq 0; 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1)$$

نوشت [۱۲، ۱۳] که در این معادله دیفرانسیل جزئی تک بعدی،  $\alpha$  و  $b$  به ترتیب ضریب نفوذ حرارتی ( $m^2/s$ ) و ضریب تبدیل توان حرارتی ورودی به افزایش دما ( $kg/ms^2 \cdot ^\circ C$ ) هستند و به صورت‌های (۲) و (۳) تعریف می‌شوند.

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{\rho C_p} \quad (3)$$

همچنین  $C_p$  ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت ( $J/kg^\circ C$ )،  $\rho$  چگالی ( $kg/m^3$ ) و  $k$  ضریب انتقال حرارت هدایتی ( $W/m^\circ C$ ) را نشان می‌دهند. هرچه چگالی یا ظرفیت حرارتی ویژه ماده‌ای بیشتر باشد، برای رسیدن به یک افزایش دمای معین، به حرارت بیشتری نیاز دارد که در این صورت، ضریب  $b$  کوچک‌تر می‌شود.  $\alpha$  نیز به عنوان ضریب نفوذ حرارتی، یک خاصیت فیزیکی مهم در علم انتقال حرارت است که توانایی یک ماده در انتقال انرژی گرمایی را نسبت به توانایی آن در ذخیره‌سازی انرژی گرمایی نشان می‌دهد. هرچه مقدار  $\alpha$  کوچک‌تر باشد، نشان‌دهنده این است که ماده به کندی حرارت را منتقل کرده و زمان بیشتری برای رسیدن به تعادل حرارتی نیاز دارد و بالعکس [۳۴]. مقادیر پارامترهای فیزیکی و شرایط مرزی سیستم تحت مطالعه در جدول ۱ گزارش شده‌اند [۲۶].

جدول ۱ مقادیر ضرایب، پارامترهای فیزیکی و شرایط مرزی سیستم.

Table 1 Variables, physical parameters, and boundary conditions of system.

Parameter	Value	Boundary Conditions	Value
$\alpha(m^2/s)$	[0.1 10]	$T_0(^\circ C)$	0
$b(kg/ms^2 \cdot ^\circ C)$	1	$T_L(^\circ C)$	30
$L(m)$	1	$T_\infty(^\circ C)$	25

جزئی به معادلات دیفرانسیل عادی با استفاده از روش تفاضل محدود، نشان‌دهنده کفایت استفاده از کنترل‌کننده PI برای دستیابی به عملکرد مطلوب در این سیستم است. در [۲۷] به منظور توسعه کنترل‌کننده‌های PID، مدل تجزیه و تحلیل حرارتی المان محدود به کار رفته است. روش‌های بهینه‌سازی شامل اصل ماکزیمم پونتریاگین، گرادیان و برنامه‌ریزی پویا در [۲۸] معرفی می‌شوند. این روش‌ها برای حل مسائل کنترل بهینه با قيود دیفرانسیلی و محدودیت‌های کنترلی در انتقال حرارت به کار می‌روند که نسبت به روش‌های عددی متداول المان محدود در [۲۷] جامع‌تر هستند. در پژوهش [۲۹] نیز کنترل فرآیند انتقال حرارت با بهره‌گیری از سازوکارهای گسسته و غیرخطی شامل تغییر فاز، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و حرکت مکانیکی در ادوات حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است.

اگر چه کنترل‌کننده PID دارای ساختاری ساده است و در میان محققین بسیار محبوب است اما کنترل مدل داخلی (Internal Model Control, IMC) نیز یک چارچوب نظری مبتنی بر دینامیک سیستم واقعی در طراحی سیستم‌های کنترلی پیشرفته است که با تکیه بر ادغام صریح از مدل ریاضی فرآیند در ساختار کنترل‌کننده با هدف خنثی‌سازی دینامیک سیستم استوار است و معکوس سازی پایدار و علی آن به همراه یک فیلتر پایین‌گذر، پایداری حلقه بسته، تنظیم پاسخ دینامیکی و مقاومت در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات را فراهم می‌کند [۳۰]. این رویکرد که در بسیاری از موارد، معادل کنترل‌کننده‌های مرسوم از PID است [۳۱، ۳۲] تنها با یک درجه آزادی (پارامتر فیلتر) میان سرعت پاسخ و مقاوم‌سازی، موازنه ایجاد کرده و علاوه بر کاربرد گسترده در فرآیندهای تک متغیره و چند متغیره، مبنای نظری توسعه MPC نیز محسوب می‌شود [۳۳].

در این مقاله، از روش طراحی کنترل‌کننده IMC برای کنترل دمای یک میله فلزی با رسانایی‌های متفاوت استفاده می‌شود. برای این منظور، ابتدا معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده و با استفاده از روش تفاضل محدود، معادلات با مشتقات جزئی به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی تبدیل شده و نمایش فضای حالت سیستم تحت مطالعه بدست می‌آید. سپس با استفاده از یک روش بهینه‌سازی، مدل مرتبه پایین برای سیستم تحت مطالعه تقریب زده می‌شود تا از پیچیدگی کنترل‌کننده IMC اجتناب گردد. در ادامه، چندین IMC برای حالات مختلف رسانایی طراحی شده و به سیستم اصلی اعمال می‌شوند. نوآوری اصلی این مقاله در کاهش مرتبه سیستم تحت مطالعه به منظور تسهیل طراحی کنترل‌کننده و طراحی و پیاده‌سازی کنترل‌کننده IMC با عملکرد مناسب است. برآیند حاصل از مقایسه نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی روش ارائه شده با دیگر مراجع نشان می‌دهد که کنترل‌کننده IMC توانسته است دمای سیستم تحت مطالعه را با سرعتی مناسب، بدون فرجهش زیاد و البته بدون خطای حالت ماندگار به دمای مطلوب

است.

$$\dot{T}_1 = \alpha \frac{T(t, x_3) - 2T(t, x_2) + T(t, x_1)}{\Delta x^2} + bQ(t, x_2) \quad (7)$$

$$\dot{T}_2 = \alpha \frac{T(t, x_4) - 2T(t, x_3) + T(t, x_2)}{\Delta x^2} + bQ(t, x_3) \quad (8)$$

$$\dot{T}_{10} = \alpha \frac{T(t, x_{11}) - 2T(t, x_{10}) + T(t, x_9)}{\Delta x^2} + bQ(t, x_{10}) \quad (9)$$

معادله (۱۰)، شکل کلی فضای حالت برای سیستم انتقال حرارت هدایتی را مدل می‌کند:

$$\dot{T} = AX + BQ + T_{dist} \quad (10)$$

در این مدل،  $X$  یک بردار حالت است که مجموعه دمای تمام گره‌های داخلی جسم رسانا را نمایش می‌دهد. ماتریس  $A$  (ماتریس سیستم)، ضرایب تأثیرپذیری دمای هر گره از گره‌های مجاور را در بر دارد که با استفاده از روش تفاضل محدود مشتق‌گیری شده است. ماتریس  $B$  (ماتریس ورودی)، نحوه تأثیر هر یک از ورودی‌های حرارتی  $Q$  را بر گره‌های مختلف و میزان این تأثیر (ضریب اثر) مشخص می‌کند.  $T_{dist}$  نیز بردار اختلالات خارجی است که اثر عوامل محیطی مانند شارهای حرارتی ناخواسته یا شرایط مرزی ثابت (نظیر  $T_1$  و  $T_{11}$ ) را نشان می‌دهد و به عنوان یک ورودی ناخواسته در سیستم عمل می‌کند. در این مدل با به کارگیری کنترل موضعی، ورودی حرارتی  $Q$  تنها به گره چهارم اعمال می‌شود که این امر منجر به اعمال یک شار حرارتی کنترل شده در نقطه مشخصی از میله شده و امکان تنظیم دمای کل سیستم را فراهم می‌کند. بدین ترتیب  $Q$  به صورت (۱۱) خواهد بود.

$$Q(t, x_i) = \begin{cases} Q(t) & i = 4 \\ 0 & i \neq 4 \end{cases} \quad (11)$$

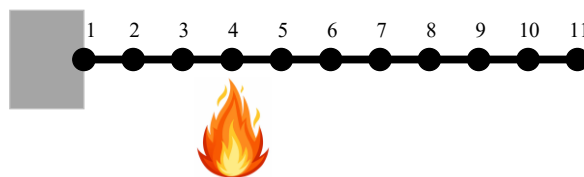
شکل ماتریسی گسسته شده معادله انتقال حرارت هدایتی در (۱۲) ارائه شده است. در این فرمول‌بندی، تغییرات دمای کلیه گره‌های داخلی در قالب یک سیستم معادلات خطی نمایش داده می‌شود. این فرم ماتریسی، امکان شبیه‌سازی عددی و طراحی کنترل‌کننده‌های دما را به صورت یکپارچه فراهم می‌کند.

$$\dot{T} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} X + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} Q \quad (12)$$

## ۲-۲ کاهش مرتبه مدل سیستم

مدل بدست آمده برای معادله انتقال حرارت در (۱۲) دارای تابع تبدیلی از مرتبه ۱۰ خواهد بود که موجب بالا رفتن مرتبه کنترل‌کننده IMC نهایی خواهد شد. برای رفع این مشکل می‌توان از روش‌های موجود برای کاهش مرتبه سیستم‌های دینامیکی مانند قطب‌های غالب، روش‌های تحقق بالانس شده، تجزیه مقادیر تکین هنکل (Hankel Singular Value Decomposition)، بهینه‌سازی و غیره استفاده کرد که در [۳۶] با جزئیات کامل مرور شده است. در این پژوهش، مدل مرتبه پایین برای طراحی کنترل‌کننده به صورت

معادله توصیف‌کننده توزیع دما در رساناهای مختلف که در رابطه (۱) نشان داده شده است؛ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که روش‌های مختلفی از جمله رانگ - کوتا، اویلر، تفاضل محدود، المان محدود و حجم محدود برای حل این دسته از معادلات در میان مراجع پیشنهاد شده است [۲۶، ۲۷، ۳۵]. از میان این روش‌ها، دو روش المان محدود و حجم محدود، روش‌های دقیق اما پیچیده‌ای هستند. در روش تفاضل محدود مطابق شکل ۱، میله رسانا به ۱۱ گره گسسته کوچک تقسیم شده است ( $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$ )؛ به طوری که هر گره نمایانگر یک جز دیفرانسیلی از طول رسانا است.



شکل ۱ شماتیکی از مدل گسسته سیستم مورد مطالعه.

Fig.1 A scheme for discrete model of the system.

در این روش، معادله پیوسته انتقال حرارت (۱) به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی تبدیل می‌شود که هر یک تغییرات زمانی دما در نقاط گره‌ای مشخص از میله را نشان می‌دهند. به این ترتیب، هر معادله، تغییرات دما در یک گره را به دمای گره‌های مجاور و شار حرارتی اعمال شده مرتبط می‌سازد. در (۴) و (۵) به همین منظور، دامنه مسئله به چندین گره کوچک تقسیم شده و به ترتیب، مشتقات جزئی مراتب اول و دوم مکانی با استفاده از تقریب‌های تفاضلی مرکزی در نقطه  $i$  جایگزین می‌شوند.

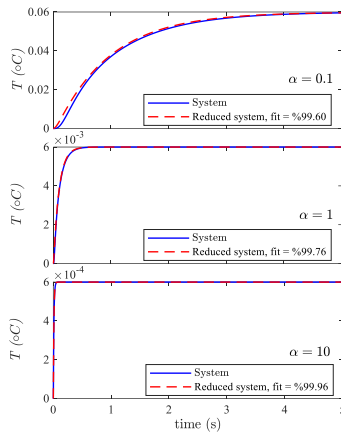
$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{T(t, x_{i+1}) - T(t, x_i)}{\Delta x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = \frac{T(t, x_{i+1}) - 2T(t, x_i) + T(t, x_{i-1}))}{\Delta x^2}, \quad i = 2, 3, \dots, 10 \quad (5)$$

با استفاده از روش حل صریح معادله دیفرانسیل شامل متغیر مستقل از زمان، بسط معادلات وابسته به مکان در زمان جلوتر و با تقریب عددی شیب دما بین دو گره در (۴)، فرمول‌بندی تقریب تفاضلی مرکزی برای مشتق دوم مکانی در (۵) و ترکیب آن با معادله دیفرانسیل جزئی (۱)، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک معادله دیفرانسیل معمولی به فرم (۶) بازنویسی می‌شود که تغییرات زمانی دما در هر گره را به صورت مجزا توصیف می‌کند.

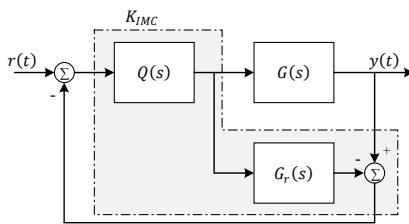
$$\frac{\partial T(t, x_i)}{\partial t} = \alpha \frac{T(t, x_{i+1}) - 2T(t, x_i) + T(t, x_{i-1}))}{\Delta x^2} + bQ(t, x_i), i = 2, 3, \dots, 10 \quad (6)$$

به عنوان نمونه از دستگاه (۶)، معادلات نرخ دما در گره‌های داخلی، میانمی و انتهایی میله، به ترتیب در (۷)، (۸) و (۹) ارائه شده‌اند. در این روابط، دمای گره دهم به دمای گره نهم و یازدهم وابسته است که در اینجا، گره یازدهم نشان‌دهنده شرط مرزی انتهایی سیستم بوده و مقدار آن از پیش مشخص شده است. این ساختار، وابستگی متقابل دمای بین گره‌های مجاور را نشان می‌دهد که در قالب یک زنجیره کوپله شده از معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی شده



شکل ۲ مقایسه پاسخ پله سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته برای سه حالت مختلف  $\alpha$ .

Fig.2 Comparison of step response for primary system and reduced order model in three different cases of  $\alpha$ .



شکل ۳ طرح کلی روش طراحی IMC.

Fig.3 General scheme for designing of IMC.

نوشته می‌شود که  $h$  برابر با تعداد صفرهای نامنیم فاز سیستم  $G_r(s)$  است. همچنین  $\xi_j$  نیز  $z$  امین صفر RHP است. بدین ترتیب  $G_r(s)$  به گونه‌ای تعریف می‌شود که  $G_r(s) = G_{r+}(s)G_{r-}(s)$  در

$$G_{r+}(s) = \prod_{j=1}^h (s - \xi_j) \quad (16)$$

شکل ۳،  $Q(s)$  بایستی پایدار، علی، سره و یا اکیداً سره باشد. بنابراین  $Q(s)$  به صورت:

$$Q(s) = \bar{Q}(s)f(s) \quad (17)$$

تعریف می‌شود که  $\bar{Q}(s) = G_{r-}^{-1}(s)$ . همچنین برای دستیابی به  $Q(s)$  با مشخصات مذکور،  $f(s)$  اضافه می‌شود که در حالت کلی به صورت رابطه (۱۸) در نظر گرفته می‌شود.  $n_f$  به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته می‌شود تا  $Q(s)$  حداقل سره باشد.  $\lambda$  پارامتر تنظیم بوده و اگر  $\frac{Q(\infty)}{Q(0)} \leq 20$  پاسخ دارای سرعت مناسبی خواهد بود.

$$f(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^{n_f}} \quad (18)$$

در نهایت، بر اساس شکل ۳ کنترل‌کننده  $K_{IMC}$  به صورت (۱۹) خواهد بود.

$$K_{IMC} = \frac{Q(s)}{1 - G_r(s)Q(s)} \quad (19)$$

با توجه به ساختار در نظر گرفته شده برای مدل کاهش مرتبه یافته در (۱۳) و پایداری مدل‌های بدست آمده برای هر سه حالت  $\alpha$  در جدول ۲، رابطه  $G_r(s) = G_{r-}(s)$  برای هر سه حالت  $\alpha$  برقرار خواهد بود. بدین ترتیب، تابع تبدیل  $Q(s)$  برای هر سه حالت  $\alpha$  به صورت:

$$Q(s) = \frac{s^2 + a_1s + a_2}{k_r(\lambda s + 1)^2} \quad (20)$$

(۱۳) در نظر گرفته می‌شود که از مرتبه ۲ می‌باشد و لازم است با روشی مناسب پارامترهای مدل مرتبه پایین شامل  $k_r$ ،  $a_1$ ،  $a_2$  و شناسایی شوند. برای تعیین پارامترهای مدل کاهش یافته نیز از روش‌های بهینه‌سازی استفاده می‌شود که تابع بهینه نیز به صورت (۱۴) در نظر گرفته شده است که در آن  $y(t)$  و  $y_r(t)$  به ترتیب خروجی سیستم اصلی و خروجی مدل کاهش مرتبه یافته می‌باشند.

$$G_r(s) = \frac{k_r}{s^2 + a_1s + a_2} \quad (13)$$

$$\min_{\{k_r, a_1, a_2\}} \text{ISE} = \int_0^t |y(t) - y_r(t)|^2 dt \quad (14)$$

پس از انجام بهینه‌سازی برای سه حالت مختلف  $\alpha = 1$ ،  $\alpha = 0.1$  و  $\alpha = 10$ ، نتایج حاصله برای پارامترها و مدل کاهش مرتبه یافته در جدول ۲ گزارش شده است که مشاهده می‌شود هر سه مدل بدست آمده دارای قطب‌های حلقه باز پایدار می‌باشند. همچنین مقایسه پاسخ پله حلقه باز سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته برای سه حالت مذکور نیز در شکل ۲ نشان داده شده است. با دقت در این شکل مشاهده می‌شود که پاسخ‌های پله بدست آمده برای هر سه حالت مختلف  $\alpha$  دارای دقتی بیش از ۹۹٪ می‌باشند که این موضوع، استفاده از مدل‌های مرتبه پایین بدست آمده را برای طراحی کنترل‌کننده مجاز خواهد کرد. برای محاسبه دقت تخمین از روش میانگین مربعات خطای نرمالیزه شده (Normalized Mean Square Error, NMSE) به صورت:

$$\text{fit} = 1 - \frac{\|y_r - y\|^2}{\|y_r - \text{mean}(y_r)\|^2} \times 100 \quad (15)$$

استفاده شده است که در آن،  $\|\cdot\|$  نرم ۲ است؛  $y_r$  پاسخ سیستم اصلی و  $y$  پاسخ مدل دینامیکی تخمین زده شده است؛ و  $\text{fit}$  میزان نزدیکی پاسخ سیستم اصلی به مدل دینامیکی تخمینی را به درصد بیان می‌کند.

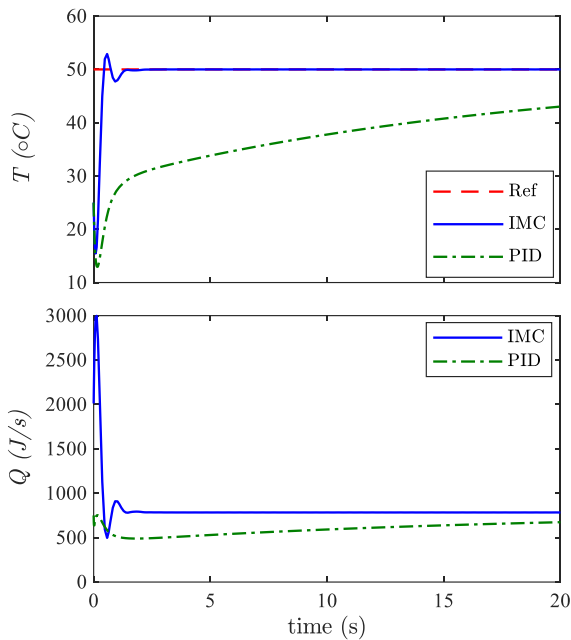
جدول ۲ مشخصات مدل‌های کاهش مرتبه یافته برای معادله انتقال حرارت برای سه حالت مختلف  $\alpha$ .

Table 2 Specifications of the reduced order models for heat transfer system in different three cases of  $\alpha$ .

$\alpha$	Open Loop Poles	Reduced Order Model
0.1	$p_1 = -19.72, p_2 = -1.05$	$G_r(s) = \frac{1.243}{s^2 + 20.77s + 20.75}$
1	$p_1 = -197.85, p_2 = -10.45$	$G_r(s) = \frac{12.4}{s^2 + 208.3s + 2067}$
10	$p_1 = -1011.6, p_2 = -105.4$	$G_r(s) = \frac{63.96}{s^2 + 1117s + 1.066 \times 10^5}$

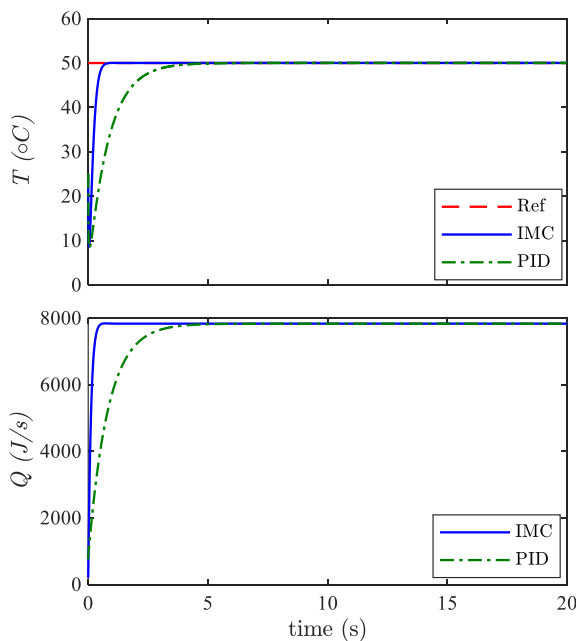
### ۳- طراحی کنترل‌کننده مدل داخلی

طرح کلی روش طراحی IMC در شکل ۳ نشان داده شده است. سیستم نشان داده شده پایدار است اگر و تنها اگر  $G(s)$  پایدار باشد (اگر  $G(s) = G_r(s)$ ) [۳۷]. بر اساس [۳۷]،  $G_r(s)$  شامل دو قسمت است:  $G_{r+}(s)$  و  $G_{r-}(s)$ .  $G_{r+}(s)$  شامل همه صفرهای نیم صفحه راست از صفحه مختلط (Right Half Plane) است و به صورت رابطه:



شکل ۴ ردیابی ورودی مرجع برای حالت  $\alpha = 0.1$ .

Fig.4 Set-point tracking for case of  $\alpha = 0.1$ .



شکل ۵ ردیابی ورودی مرجع برای حالت  $\alpha = 1$ .

Fig.5 Set-point tracking for case of  $\alpha = 1$ .

کنترل‌کننده PID طراحی شده در [۲۶] بسیار کند عمل کرده است و دارای خطای حالت ماندگار نیز می‌باشد. همچنین در هر دو روش، سیگنال کنترل در محدوده قابل قبولی تغییر کرده است و دارای جهش‌های ناگهانی نمی‌باشد.

خواهد شد که در آن از پارامتر  $\lambda$  به عنوان یک پارامتر قابل طراحی توسط کاربر برای رسیدن به عملکرد مناسب حلقه بسته استفاده خواهد شد. در نتیجه بر اساس رابطه (۱۸)، کنترل‌کننده IMC نهایی به صورت:

$$K_{IMC} = \frac{s^2 + a_1s + a_2}{k_r s(\lambda^2 s + 2\lambda)} \quad (۲۱)$$

خواهد شد که در آن پارامترهای  $k_r$ ،  $a_1$ ،  $a_2$  بر اساس مقادیر مختلف  $\alpha$  در جدول ۲ گزارش شده‌اند. همچنین مقدار پارامتر  $\lambda$  برای هر سه حالت، برابر با  $\lambda = 0.1$  در نظر گرفته شده است تا سرعت مناسب برای پاسخ حلقه بسته مهیا گردد و از طرف دیگر سیگنال کنترل روان بوده و از جهش ناگهانی آن جلوگیری گردد.

برای نمایش مزیت کاهش مرتبه مدل سیستم اصلی در طراحی کنترل‌کننده، تابع تبدیل کنترل‌کننده‌های IMC طراحی شده به ازای مقادیر  $\alpha = 0.1$ ،  $\alpha = 1$ ، و  $\alpha = 10$  به ترتیب در روابط ۲۲ تا ۲۴ آورده شده است که با  $\bar{K}_{IMC}$  نمایش داده شده‌اند. با دقت در توابع تبدیل این سه کنترل‌کننده مشاهده می‌شود که صورت و مخرج هر سه آن‌ها از مرتبه ۹ است در حالیکه صورت و مخرج در کنترل‌کننده طراحی شده بر مبنای مدل کاهش مرتبه یافته از مرتبه ۲ می‌باشند. بدین ترتیب تعداد ضرایب موجود در کنترل‌کننده طراحی شده از ۱۹ به ۵ کاهش یافته است که موجب کاهش ۷۵٪ میزان حافظه مورد نیاز در شبیه‌سازی می‌گردد. همچنین مدت زمان لازم برای شبیه‌سازی حلقه بسته برای یک بازه زمانی ۲۰ ثانیه‌ای که نتایج آن در بخش بعدی به تفصیل آورده خواهد شد، حدود ۳۰٪ کاهش می‌یابد. در نتیجه برای کاربردهای عملی، استفاده از کنترل‌کننده IMC طراحی شده بر مبنای مدل مرتبه پایین با میکروکنترلرهای رده قیمتی پایین‌تر مانند ARM نیز امکان‌پذیر خواهد بود که موجب کاهش هزینه‌های عملیاتی می‌گردد.

#### ۴- نتایج شبیه‌سازی

کنترل‌کننده طراحی شده در بخش قبل به سیستم اصلی اعمال شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی در محیط Simulink در این بخش گزارش شده است. نتایج حاصل از ردیابی ورودی مرجع پله و به ازای  $\alpha = 0.1$ ،  $\alpha = 1$ ، و  $\alpha = 10$  به ترتیب در شکل‌های ۴ تا ۶ نشان داده شده است. همچنین برای مقایسه، کنترل‌کننده PID طراحی شده در [۲۶] نیز شبیه‌سازی شده و نتایج حاصله در شکل‌های ۴ تا ۶ گزارش شده‌اند. با دقت در شکل ۴ مشاهده می‌شود که برای حالتی که  $\alpha = 0.1$  است، روش طراحی کنترل‌کننده IMC توانسته است با فراجهدی در حدود ۱۰٪، زمان نشست در حدود ۱.۳ ثانیه و بدون خطای حالت ماندگار به دمای مطلوب  $50^\circ\text{C}$  برسد در حالی‌که

$$\bar{K}_{IMC} = \frac{s^9 + 180s^8 + 1.36e04s^7 + 5.6e05s^6 + 1.37e07s^5 + 2e08s^4 + 1.72e09s^3 + 7.92e09s^2 + 1.65e10s + 1e10}{(1e03s^5 + 1e05s^4 + 3.6e06s^3 + 5.6e07s^2 + 3.5e08s + 6e08)(\lambda s + 1)^4 - 1} \quad (۲۲)$$

$$\bar{K}_{IMC} = \frac{s^9 + 1800s^8 + 1.36e06s^7 + 5.6e08s^6 + 1.37e11s^5 + 2e13s^4 + 1.72e15s^3 + 7.92e16s^2 + 1.65e18s + 1e19}{(1e06s^5 + 1e09s^4 + 3.6e11s^3 + 5.6e13s^2 + 3.5e15s + 6e16)(\lambda s + 1)^4 - 1} \quad (۲۳)$$

$$\bar{K}_{IMC} = \frac{s^9 + 1.8e04s^8 + 1.36e08s^7 + 5.6e11s^6 + 1.37e15s^5 + 2e18s^4 + 1.72e21s^3 + 7.92e23s^2 + 1.65e26s + 1e28}{(1e09s^5 + 1e13s^4 + 3.6e16s^3 + 5.6e19s^2 + 3.5e22s + 6e24)(\lambda s + 1)^4 - 1} \quad (۲۴)$$

PID و به ویژه در دو حالت  $\alpha = 0.1$  و  $\alpha = 10$  از خود نشان داده است.

برای ارزیابی عملکرد حلقه بسته در برابر اغتشاش، تغییر ضریب نفوذ حرارتی در ثانیه دهم برای هر سه حالت  $\alpha$  مورد بررسی قرار گرفته است و نتیجه در شکل ۷ گزارش شده است. فرض می‌شود که در ثانیه دهم، مقدار ضریب نفوذ حرارتی برای  $\alpha = 0.1$  از 0.1 به 0.2، برای  $\alpha = 1$  از 1 به 2، و برای  $\alpha = 10$  از 10 به 8 تغییر می‌کند. با دقت در این شکل می‌توان عملکرد مناسب کنترل‌کننده IMC در برابر PID را به خوبی ملاحظه کرد به نحوی که اثر اغتشاش بر خروجی سیستم در مدت زمان کوتاه‌تری خنثی شده و خروجی سیستم مجدداً توانسته است بدون خطای حالت ماندگار به ورودی مطلوب بازگردد. علاوه بر این، مقایسه کمی عملکرد حلقه بسته توسط مقادیر IAE برای این حالت که در جدول ۴ گزارش شده است، مؤید عملکرد بهتر روش طراحی IMC در برابر PID می‌باشد.

برای بررسی بیشتر عملکرد حلقه بسته تحت کنترل‌کننده طراحی شده IMC، ردیابی ورودی مرجع سینوسی نیز برای هر سه حالت  $\alpha$  بررسی شده و نتایج حاصله در شکل ۸ نشان داده شده است. از آنجایی که این موضوع سابقاً در [۲۶] مورد توجه واقع نشده و نتایج آن گزارش نشده است، جهت رعایت انصاف، تنها نتایج حاصل از اعمال کنترل‌کننده طراحی شده در پژوهش حاضر گزارش می‌گردد. ورودی مرجع سینوسی با میانگین دمای مطلوب  $50^\circ\text{C}$  و نوسانات  $\pm 5^\circ\text{C}$  حول آن به سیستم حلقه بسته اعمال شده است. با دقت در این شکل مشاهده می‌شود که کنترل‌کننده طراحی شده IMC توانسته است در مدت زمان کوتاهی (۱/۸۱ ثانیه برای  $\alpha=0.1$ ، ۱/۷۳ ثانیه برای  $\alpha=1$  و ۱/۶۴ ثانیه برای  $\alpha=10$ ) به ورودی مرجع سینوسی برسد و آن را بدون خطای حالت ماندگار پیروی کند. همچنین مقدار IAE برای سه حالت مختلف  $\alpha=0.1$ ،  $\alpha=1$ ، و  $\alpha=10$  به ترتیب برابر ۱/۴۲، ۰/۸۹، و ۰/۸۶ می‌باشند که مؤید عملکرد مطلوب کنترل‌کننده طراحی شده به روش IMC در ردیابی ورودی مرجع سینوسی است.

**جدول ۳** مقایسه کمی مقادیر IAE حاصل از اعمال دو کنترل‌کننده IMC و PID.

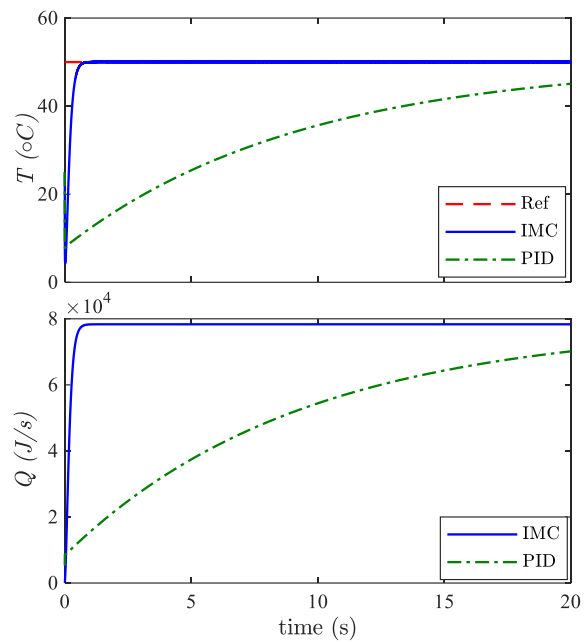
**Table 3** Comparison of IAE values for IMC and PID controllers.

$\alpha$	IAE	
	IMC	PID
$\alpha = 0.1$	1.5	21.09
$\alpha = 1$	0.55	2.06
$\alpha = 10$	0.5	28.06

**جدول ۴** مقایسه کمی مقادیر IAE حاصل از اعمال دو کنترل‌کننده IMC و PID در مواجهه با اغتشاش.

**Table 4** Comparison of IAE values for IMC and PID controllers in disturbance rejection.

$\alpha$	IAE	
	IMC	PID
$\alpha = 0.1$	1.67	21.94
$\alpha = 1$	1.00	3.98
$\alpha = 10$	0.63	22.60



**شکل ۶** ردیابی ورودی مرجع برای حالت  $\alpha = 10$ .  
**Fig.6** Set-point tracking for case of  $\alpha = 10$ .

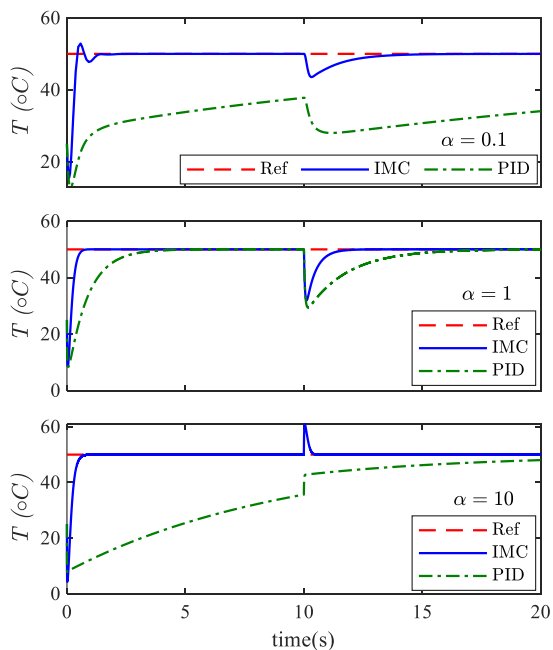
همچنین در حالتی که  $\alpha = 1$  است، هر دو کنترل‌کننده IMC و PID توانسته‌اند ورودی مطلوب را بدون خطای حالت ماندگار و با سرعتی مناسب ردیابی کنند. در مقایسه عملکردی مشاهده می‌شود که سرعت ردیابی کنترل‌کننده IMC نسبت به PID بهتر می‌باشد به طوری که دارای زمان نشست در حدود یک ثانیه بوده و پاسخ روش PID دارای زمان نشست در حدود چهار ثانیه است. همچنین سیگنال کنترل در این حالت نیز در محدوده قابل قبول خود تغییر کرده و هیچ گونه جهش ناگهانی ندارد.

برای حالتی که  $\alpha = 10$  است، مشابه با حالت  $\alpha = 0.1$ ، کنترل‌کننده طراحی شده به روش IMC عملکرد بسیار بهتری نسبت به PID از خود نشان داده است؛ به طوری که خروجی سیستم توانسته است در مدت زمانی در حدود یک ثانیه، بدون فراجاهش و فروجهش و خطای حالت ماندگار، دمای مطلوب  $50^\circ\text{C}$  را ردیابی کند در حالی که خروجی سیستم در روش طراحی کنترل‌کننده PID دارای سرعتی بسیار کند بوده و دارای خطای حالت ماندگار نیز می‌باشد. سیگنال کنترل نیز برای هر دو روش کنترل‌کننده IMC و PID نه تنها در محدوده قابل قبول قرار دارد، بلکه جهش ناگهانی نداشته و لذا در دسترس بوده و قابل پیاده‌سازی است.

برای مقایسه کمی بهتر، مقدار میانگین مجموع قدرمطلق خطای ردیابی به صورت:

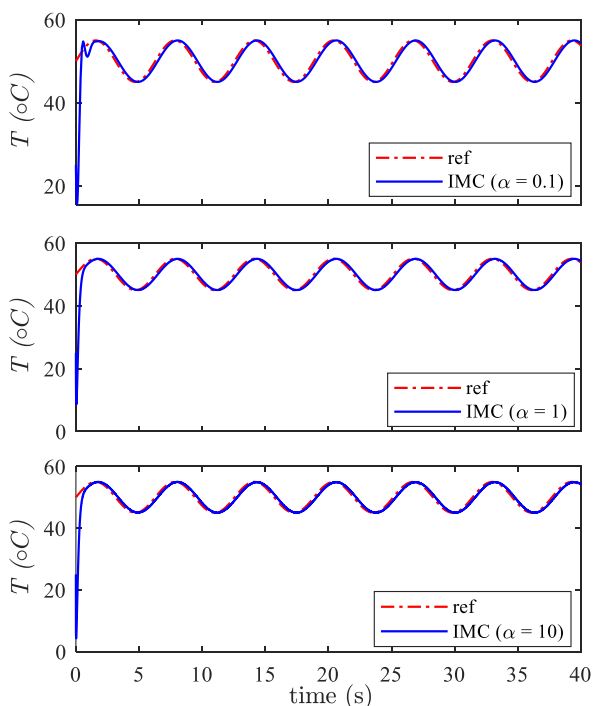
$$IAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |r(t) - y(t)| \quad (25)$$

و برای هر سه حالت  $\alpha$  محاسبه می‌گردد که در آن  $N$  تعداد داده‌های خروجی در دسترس است. نتایج بدست آمده در جدول ۳ جمع‌بندی شده است. با دقت در این جدول مشاهده می‌شود که روش کنترل‌کننده IMC عملکرد مطلوب‌تری نسبت به روش کنترل‌کننده



شکل ۷ مقایسه عملکرد کنترل‌کننده‌های IMC و PID در مواجهه با اغتشاش.

Fig.7 Comparison of disturbance rejection for IMC and PID controllers.



شکل ۸ ردیابی ورودی مرجع سینوسی توسط کنترل‌کننده طراحی شده به روش IMC.

Fig.8 Tracking of a sinusoidal reference input by the IMC controller.

## منابع

- [1] G. V. K. H. Aschemann, A. Rauh, and V. V. Saurin, "Approaches to control design and optimization in heat transfer problems," *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 49, no. 3, pp. 380–391, 2010. doi:10.1134/S106423071003007X.

## ۵- جمع‌بندی

در این مقاله، یک سیستم انتقال حرارت در یک میله فلزی افقی با رسانایی‌های متفاوت مورد مطالعه و تحلیل واقع شد. با استفاده از روش عددی تفاضل محدود، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر سیستم دینامیکی به یک نمایش فضای حالت با مرتبه ۱۰ تبدیل گردید تا مبنای مناسبی برای تحلیل و طراحی کنترل‌کننده فراهم شود. برای تسهیل در طراحی کنترل‌کننده به روش IMC و جلوگیری از پیچیدگی‌های محاسباتی، ابتدا با استفاده از یک روش بهینه‌سازی مناسب، نمایش مرتبه پایین‌تری از سیستم استخراج شد که نتایج حاصل از شبیه‌سازی حلقه باز، بردقت و عملکرد موفق این مدل کاهش مرتبه یافته صحه گذاشتند (دقتی بیش از 99% در مقایسه با پاسخ سیستم اصلی در سه حالت برای  $\alpha$ ). سپس، کنترل‌کننده IMC برای سه حالت مختلف رسانایی در سیستم تحت مطالعه طراحی شده و به سیستم اصلی اعمال شدند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی طراحی کنترل‌کننده IMC و مقایسه عملکرد آن‌ها با یک کنترل‌کننده PID کلاسیک که در مرجع دیگر گزارش شده بود، عملکرد برتر و مناسب روش ارائه شده در این پژوهش را در ردیابی ورودی مرجع (حدود ۴ تا ۵۶ برابر کمتر در مقادیر IAE) و دفع اثر اغتشاش (حدود ۴ تا ۳۵ برابر کمتر در مقادیر IAE) به وضوح نشان می‌دهند. به طوری که دمای میله فلزی توانسته است در مدت زمانی کوتاه‌تر، بدون فراجش زیاد و بدون خطای حالت ماندگار به دمای مطلوب و پایدار مورد نظر برسد و در آن باقی بماند. علاوه بر این، سیگنال کنترل تولید شده توسط این کنترل‌کننده نیز همواره در محدوده عملیاتی و قابل قبول خود باقی مانده و رفتاری آرام، پایدار و بدون جهش‌ها یا نوسانات ناگهانی دارد. این ویژگی‌ها باعث می‌شود تا طرح پیشنهادی از پایداری و قابلیت اطمینان بالایی برخوردار باشد و لذا برای پیاده‌سازی در محیط‌های عملی و واقعی قابل استفاده خواهد بود.

برای کارهای پژوهشی آتی پیشنهاد می‌شود روش ارائه شده در این مقاله با یک روش تخمین مقدار ضریب نفوذ حرارتی تلفیق گردد تا بتوان به صورت بلادرنگ و بدون دانش اولیه نسبت به مقدار ضریب نفوذ حرارتی، پارامترهای کنترل‌کننده را بروزسانی کرد و عملکرد مناسب حلقه بسته را تضمین نمود.

**تأییدیه اخلاقی:** محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

**تعارض منافع:** هیچ تعارض منافی برای اظهار وجود ندارد.

- [17] A. M. a. J.-P. Corriou, "Distributed control of nonlinear diffusion systems by input-output linearization," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, no. 3, pp. 389-405, Aug 2012. doi:10.1002/rnc.2892.
- [18] S. F. F. Wang, F. Ju, K. Rowe, and N. Hofmann, "Print Surface Thermal Modeling and Layer Time Control for Large-Scale Additive Manufacturing," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 18, no. 1, pp. 244-254, Jan 2021. doi:10.1109/TASE.2020.3001047.
- [19] P. X. S. Wan, K. Wang, J. Yang, and S. Li, "Real-time estimation of thermal boundary of unsteady heat conduction system using PID algorithm," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 153, Jul 2020. doi:10.1016/j.ijthermalsci.2020.106395.
- [20] R. L. P. Castro, M. Manana, M. J. Martin, and D. del Campo, "Infrared Temperature Measurement Sensors of Overhead Power Conductors," *Sensors*, vol. 20, no. 24, Dec 2020. doi:10.3390/s20247126.
- [21] J. P. H. Mu, Y. Li, F. He, C. Xia, and Z. Pan, "Layer-by-layer model-based adaptive control for wire arc additive manufacturing of thin-wall structures," *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 33, no. 33, pp. 1165-1180, Apr 2022. doi:10.1007/s10845-022-01920-5.
- [22] I. B. Q. A. W. L. Torres, J. B. Menezes Filho, and A. G. Costa Junior, "Mathematical modeling and PID controller parameter tuning in a didactic thermal plant," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, no. 7, pp. 1250-1256, Jul 2017. doi:10.1109/TLA.2017.7959343.
- [23] N. B. a. S. Kuntanapreeda, "Backstepping boundary control: An application to rod temperature control with Neumann boundary condition," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 228, no. 5, pp. 295-302, Feb 2014. doi:10.1177/0959651813520146.
- [24] M. V. M. Luzzi, and M. Lemma, "A tuning methodology of Model Predictive Control design for energy efficient building thermal control," *Journal of Building Engineering*, vol. 21, pp. 28-36, Jan 2019. doi:10.1016/j.jobe.2018.09.022.
- [25] J. L. Z. Zhang, N. Zhang, X. Cao, Y. Yuan, M. Sultan, and S. Attia, "Dynamic discharging performance of a latent heat thermal energy storage system based on a PID controller," *Journal of Energy Storage*, vol. 71, Nov 2023. doi:10.1016/j.est.2023.107911.
- [26] S. F. A. Oudi, M. Hosseini, and Y. Davoodbeygi, "Adjustment of optimal parameters to control the temperature in different conductors," *Journal of Modeling in Engineering*, vol. 22, no. 77, pp. 107-116, Aug 2024. doi:10.22075/jme.2023.28427.2336.
- [27] T. G. A. a. C. Pupaza, "The development of PID temperature controllers based on FEM thermal analysis," *MATEC Web of Conferences*, vol. 342, Jul 2021. doi:10.1051/mateconf/202134206008.
- [28] J. Kacprzyk, *Optimal Control in Thermal Engineering: Studies in Systems, Decision and Control*. Warsaw, Poland: Springer Polish Academy of Sciences, 2021, pp. 89-160.
- [29] T. S. K. Klinar, M. Muñoz Rojo, and A. Kitanovski, "Fluidic and mechanical thermal control devices," *Advanced Electronic Materials*, vol. 7, no. 3, Dec 2020. doi:10.1002/aelm.202000623.
- [30] Y. Z. P. Chen, J. Wang, A. T. Azar, I. A. Hameed, I. K. Ibraheem, N. A. Kamal, and F. A. Abdulmajeed, "Adaptive internal model control based on parameter adaptation," [2] Z. C. C. Pan, Q. Tang, Z. He, L. Wang, H. Li, and W. Zhou, "Heat Dissipation Improvement of Lithium Battery Pack with Liquid Cooling System Based on Response-Surface Optimization," *Journal of Energy Engineering*, vol. 148, no. 4, May 2022, Art no. 04022028. doi:10.1061/(ASCE)EY.1943-7897.0000845.
- [3] J. S. Z. Lyu, Z. Li, X. Li, H. Yan, and L. Chen, "A compact hybrid battery thermal management system for enhanced cooling," *Dec 2024*. doi:10.48550/arXiv.2412.00999.
- [4] T. O. I. Winfield, J. Madril, M. Matthews, and G. Romero, "High-performance cooling for power electronics via electrochemical additive manufacturing," *IEEE Micro*, vol. 44, no. 3, pp. 48-54, May-Jun 2024. doi:10.1109/MM.2024.3360255.
- [5] M. K. Kisomi, "Thermal Management of Lithium-Ion Batteries: A Comparative Study of Phase Change Materials and Air-Cooling Systems Equipped with Fins," *Mar 2025*. doi:10.48550/arXiv.2503.10244.
- [6] Y. Y. R. Li, F. Liang, J. Liu, and X. Chen, "Investigation on Battery Thermal Management Based on Enhanced Heat Transfer Disturbance Structure within Mini-Channel Liquid Cooling Plate," *Electronics*, vol. 12, no. 4, p. 832, Feb 2023. doi:10.3390/electronics12040832.
- [7] T. C. A. Mahmood, G. de Boer, J. Voss, and H. Thompson, "Heat Transfer Modeling and Optimal Thermal Management of Electric Vehicle Battery Systems," *Energies*, vol. 17, no. 18, p. 4575, 2024. doi:10.3390/en17184575.
- [8] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2013, pp. 1-432.
- [9] R. B. W. a. D. G. Cahill, "Anisotropic failure of Fourier theory in time-domain thermoreflectance experiments," *Nature Communications*, vol. 5, Oct 2014. doi:10.1038/ncomms6075.
- [10] W. G. Faris, *Lectures on Partial Differential Equations*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2004, pp. 49-69.
- [11] D. L. Powers, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, 5th ed ed. Boston, MA, USA: Elsevier Academic Press, 2006.
- [12] A. Y. C. G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, and K.-H. Hoffmann, "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 433, no. 2, pp. 1243-1260, Jan 2016. doi:10.1016/j.jmaa.2015.08.049.
- [13] D. W. Hahn and M. N. Özisik, *Heat Conduction*, 3rd ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2012.
- [14] R. A. Meric, "Finite element analysis of optimal heating of a slab with temperature dependent thermal conductivity," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 22, no. 10, pp. 1347-1353, Oct 1979. doi:10.1016/0017-9310(79)90197-2.
- [15] R. A. Meric, "Finite element and conjugate gradient methods for a nonlinear optimal heat transfer control problem," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 12, pp. 1851-1863, 1979. doi:10.1002/nme.1620141207.
- [16] Z. W. K. Li, T. Q. Dinh, and J. Yoon, "Reinforcement learning-based hyperparameter tuning for adaptive model predictive controllers in battery thermal management," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 74, no. 8, pp. 10459-10470, Aug 2025. doi:10.1109/TVT.2025.3552968.

Electronics, vol. 11, no. 23, Nov 2022. doi:10.3390/electronics11233842.

[31] P. R. M. Ahmadi, and M. Haeri, "A multi-model control of nonlinear systems: A cascade decoupled design procedure based on stability and performance," Transactions of the Institute of Measurement and Control, vol. 42, no. 7, pp. 1271–1280, Jul 2020. doi:10.1177/0142331219888368.

[32] M. A. a. M. Haeri, "A systematic decomposition approach of nonlinear systems by combining gap metric and stability margin," vol. 43, no. 9, pp. 2006–2017, Sep 2021. doi:10.1177/0142331221989009.

[33] M. Ahmadi, "Nonlinearity measure for nonlinear dynamic systems using a multimodel framework," J. Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 20, no. 4, Apr 2025. doi:10.1115/1.4067913.

[34] N. Burger, A. Laachachi, M. Ferriol, M. Lutz, V. Toniazzo, and D. Ruch, "Review of thermal conductivity in composites: Mechanisms, parameters and theory," Progress in Polymer Science, vol. 61, pp. 1-28, 2016/10/01/ 2016. doi:10.1016/j.progpolymsci.2016.05.001.

[35] Kendall Atkinson, Weimin Han, and David E. Stewart, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2009.

[36] R. Kumar and A. Sikander, "Review and analysis of model order reduction techniques for high-dimensional complex systems," Microsystem Technologies, vol. 30, no. 9, pp. 1177-1190, 2024. doi:10.1007/s00542-023-05605-8.

[37] M. Morari and E. Zafiriou, Robust process control. Morari, 1989.