ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. *2026;26(11):917-933.*

Modares Mechanical Engineering

DOI: 10.48311/mme.2026.121101.83037
journal homepage: mme.modares.ac.ir

Simulation of Temperature Distribution of Zirconia Sintering with Sinusoidal Laser Radiation using Non-Fourier Model DPL

Mohammad Ahmadi Syahkolorodi[1], Shahram Falahatkar[2*], Mehdi Borji Badaghi[1], Javad Rezapour[1]

[1] Department of Technical Engineering, La.C., Islamic Azad University, Lahijan, Iran
[2] Department of Technical Engineering, Fsh.C., Islamic Azad University, Fouman, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: June 10, 2026
Revised: July 16, 2026
Accepted: July 16, 2026
ePublished: September 03, 2026

ABSTRACT

In this study, to incorporate the laser function into the zirconia sintering process, the numerical modeling of laser irradiation employing a sinusoidal modulation function was simulated using a non-Fourier, dual-phase-lag model. The defined laser function ensures the irradiation heat flux remains within the range of 2 kW/cm^2, while the intensity is delivered in a pulsed manner, allowing for thermal relaxation intervals within the dental veneer. The laser beam exhibits a Gaussian spatial distribution with a beam radius of 2 mm. The equations were solved using the finite difference approximation method in MATLAB. To analyze the sintering process of a zirconia dental coping, a geometry based on actual dimensions was examined. A coordinate mapping technique was employed to generate a mesh for the geometry, accounting for all its complexities. Simulation results indicated that during the sintering process using a sinusoidal laser function, the temperature rises from ambient levels to 1600°C over approximately 140 minutes, followed by rapid cooling of the coping at an exponential rate. While rapid laser sintering is an attractive option due to the ability to raise temperatures quickly and reduce total processing time, it may induce steep temperature gradients. The significance of raising the temperature over a very short period approximately 3 hours, compared to the 10 hours required for standard processes lies in the reduction of production time and the increase in productivity.

Keywords: Sinusoidal Laser, Non-Fourier Equations, Sintering Furnace, Zirconia, Coordinate Mapping, Finite Differences

How to cite this article
Ahmadi Syahkolorodi M, Falahatkar Sh, Borji Badaghi M ,Rezapor J, Simulation of Temperature Distribution of Zirconia Sintering with Sinusoidal Laser Radiation using Non-Fourier Model DPL. Modares Mechanical Engineering; *2026;26(11):917-933.*

*Corresponding author's email: Sh.Falahatkar@iau.ac.ir
*Corresponding ORCID ID: 0000-0001-6370-7319

Copyright© 2026, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

شاپا: ۶۹۰۹-۲۴۷۶؛ مهندسی مکانیک مدرس، ۹۳۳-۹۱۷:(۱۱)۲۶;۱۴۰۵

مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.121101.83037

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir

شبیه سازی توزیع دمای سینترینگ زیرکونیا با تابش لیزر سینوسی توسط مدل غیرفوریه DPL

محمد احمدی سیاهکلرودی[۱]، شهرام فلاحتکار[۲]*، مهدی برجی بداغی[۱]، جواد رضاپور[۱]

[۱] گروه مهندسی مکانیک، واحد لاهیجان ، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

[۲] گروه مهندسی مکانیک، واحد فومن، دانشگاه آزاد اسلامی، فومن، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۰

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۴/۲۵

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۲۵

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۶/۱۲

چکیده

متن چکیده

در این پژوهش به جهت بکارگیری تابع لیزر در فرآیند سینترینگ زیرکونیا، مدل سازی عددی تابش لیزر با تابع مدولاسیون سینوسی توسط مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه شبیه سازی شده است. تابع تعریف شده برای این لیزر به گونه ای است که شار حرارتی تابش در محدوده مقادیر ۲ کیلو وات بر سانتی متر مربع باشد ولی این شدت تابش لیزر بصورت پالسی و با ایجاد فرصت آسایش حرارتی به روکش دندان بر آن تابیده می‌شود. توزیع مکانی پرتوهای لیزر گاوسی و شعاع پرتو ۲ میلی متر است. حل معادلات به وسیله تقریب تفاضلات محدود توسط نرم افزار متلب انجام شده است. به منظور تحلیل فرآیند سینترینگ روکش زیرکونیا، هندسه‌ای از روکش دندان با ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. توسط روش نگاشت مختصاتی، هندسه مسئله با تمام پیچیدگی‌های آن شبکه بندی خواهد شد. در این پژوهش نتایج شبیه‌سازی نشان داد که در فرآیند سینترینگ با تابع لیزر سینوسی، دما در مدت حدود ۱۴۰ دقیقه از دمای محیط به ۱۶۰۰ درجه افزایش پیدا می کند و سپس خنک شدن روکش نیز سریع و با شیب نمایی اتفاق می‌افتد. سینترینگ سریع با لیزر به دلیل امکان افزایش سریع دما و کاهش زمان کلی فرایند، گزینه‌ای جذاب خواهد بود، ولی ممکن است باعث ایجاد گرادیان دمایی شدید شود. اهمیت موضوع افزایش دما در زمان بسیار کوتاه حدودا ۳ ساعت نسبت به فرآیندهای عادی با مدت زمان ۱۰ ساعت، در کاهش زمان تولید و افزایش بهره‌وری است.

کلیدواژه‌ها: لیزر سینوسی، معادلات غیرفوریه، کوره سینترینگ، زیرکونیا، نگاشت مختصاتی، تفاضلات محدود

نحوه ارجاع به این مقاله

احمدی سیاهکلرودی محمد، فلاحتکار شهرام، برجی بداغی مهدی، رضاپور جواد، شبیه سازی توزیع دمای سینترینگ زیرکونیا با تابش لیزر سینوسی توسط مدل غیرفوریه DPL، مهندسی مکانیک مدرس، ۹۳۳-۹۱۷:(۱۱)۲۶;۱۴۰۵

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Sh.Falahatkar@iau.ac.ir

*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: 0000-0001-6370-7319

Copyright© 2026, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

۱- مقدمه

قانون فوریه را می‌توان برای حصول توزیع دما در ماده و مقدار انتشار گرما از آن بکار برد و اعتبار مدل فوریه توسط آزمایش‌هاي متعدد به اثبات رسیده است. اما تکنولوژي‌هاي جدید مانند پالس‌های کوتاه لیزر از مرتبه پیکوثانیه و روش‌های جدید ساخت و تولید که امکان تولید ورق‌های بسیار نازک برای صنایع الکترونیکی و حرارتی را فراهم می‌کند، نیاز به مطالعه فرایند انتقال گرما در مقیاس‌های کوچک زمانی و مکانی را افزایش داده است.

در سال‌های اخیر، با گسترش کاربرد فرآیندهای گرمایش سریع، لیزر، سامانه‌های نانومقیاس و کاربردهای زیست‌پزشکی، محدودیت‌های مدل کلاسیک انتقال حرارت فوریه بیش از پیش آشکار شده است. در چنین شرایطی، به دلیل وجود تأخیر زمانی بین شار حرارتی و گرادیان دما، مدل‌های انتقال حرارت غیرفوریه، به‌ویژه مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه، به عنوان جایگزینی مناسب برای توصیف دقیق‌تر انتقال حرارت گذرا مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند.

در زمینه کاربردهای دندان پزشکی، فلاحتکار و همکاران [۱] در مطالعه خود یک لیزر پالس کوتاه دندانپزشکی با مشخصات پرتو گاوسی را به طور معمول به سطح بالایی یک عضو معدنی یعنی دندان انسان برای درمان ریشه اعمال کردند. وی یک روش عددی تفاضل محدود برای حل معادله انتقال حرارت وابسته به زمان را شبیه سازی کرد. در حوزه کاربردهای زیست‌پزشکی، مانگکل و همکاران [۲] با مقایسه سه مدل انتقال حرارت پنس، غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه و تعادل حرارتی موضعی در فرآیند ابلیشن مایکروویوی بافت زنده، نشان دادند که مدل تعادل حرارتی موضعی بیشترین انطباق را با نتایج آزمایشگاهی دارد، در حالی که مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه نسبت به تغییرات تخلخل و زمان تأخیر حرارتی حساسیت بالایی از خود نشان می‌دهد. نتایج این پژوهش بیانگر آن است که لحاظ نمودن اثرات غیرفوریه برای پیش‌بینی دقیق میدان دما و ناحیه تخریب حرارتی در بافت‌های زیستی ضروری است. در ادامه همین مسیر، پریچافانکل و همکاران [۳] عملکرد مدل زیست‌حرارتی کلاسیک و مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه را در تحلیل گرمایش لیزری پالسی و پیوسته در پوست انسان مقایسه کردند. نتایج نشان داد که مدل زیست‌حرارتی کلاسیک دمای سطح، میزان آسیب حرارتی، تنش و تغییر شکل بافت را به طور قابل توجهی بیش‌برآورد می‌کند، در حالی که مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه رفتار حرارتی و مکانیکی واقع‌بینانه‌تری ارائه می‌دهد. این پژوهش اهمیت استفاده از مدل‌های غیرفوریه را در طراحی پروتکل‌های درمانی مبتنی بر لیزر نشان می‌دهد. در زمینه تشخیص پزشکی نیز هاروات [۴] با توسعه یک مدل المان مرزی مبتنی بر انتقال حرارت غیرفوریه برای بافت‌های چندلایه، نشان داد که در نظر گرفتن زمان‌های آسایش حرارتی موجب افزایش دقت شبیه‌سازی ترموگرافی دینامیکی و بهبود قابلیت تشخیص تومورهای پوستی می‌شود. نتایج این مطالعه بیانگر نقش مهم مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه در توصیف واقع‌بینانه انتقال حرارت در ساختارهای پیچیده زیستی است. علاوه بر کاربردهای زیستی، مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه به طور گسترده در تحلیل انتقال حرارت در سامانه‌های میکرو و نانومقیاس نیز مورد استفاده قرار گرفته است. ژانگ و همکاران [۵] دو روش تفاضل محدود فشرده با مرتبه بالا و الگوریتم ضمنی با جهت متناوب را برای حل معادلات مرتبه دوم غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه توسعه دادند. نتایج نشان داد که روش پیشنهادی علاوه بر پایداری عددی، دقت مرتبه چهارم مکانی و مرتبه دوم زمانی را فراهم می‌کند. همچنین مقایسه بین مدل‌های مرتبه اول و دوم غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه در گرمایش لیزری گاوسی متحرک نشان داد که مدل مرتبه دوم قادر است اثرات تأخیر حرارتی را با دقت بیشتری پیش‌بینی کند. در پژوهشی دیگر، وو ای و شو [۶] با توسعه روش عددی مبتنی بر گلرکین، انتقال حرارت غیرفوریه در مقیاس میکرو و نانو را شبیه‌سازی کردند. نتایج ضمن تأیید همگرایی و پایداری روش، نشان داد که پارامترهای زمان تأخیر تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر انتشار موج حرارتی داشته و مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه قادر است رفتار موجی انتقال حرارت را که در مدل فوریه قابل مشاهده نیست، به خوبی بازسازی کند.

سلیمان و شمالی [۷] نیز با معرفی مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه غیرموضعی برای بررسی انتقال حرارت در ترانزیستورهای سیلیکونی نشان دادند که لحاظ کردن اثرات غیرموضعی موجب افزایش دقت پیش‌بینی میدان دما در سامانه‌های میکرو و نانومقیاس می‌شود. نتایج این مطالعه بیانگر آن است که هندسه قطعه و پارامترهای غیرموضعی تأثیر مستقیمی بر توزیع دما و عملکرد حرارتی تجهیزات الکترونیکی دارند. در حوزه منابع حرارتی متحرک، چن و همکاران [۸] پاسخ حرارتی یک صفحه دوبعدی تحت اثر منبع حرارتی متحرک با مسیرهای بیضوی را بر اساس مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه به صورت تحلیلی بررسی کردند. نتایج نشان داد که مسیر حرکت منبع، سرعت زاویه‌ای و پارامترهای زمان تأخیر، تأثیر چشمگیری بر بیشینه دما و نحوه انتشار گرما دارند و رفتار حرارتی حاصل با منابع حرارتی دارای مسیر مستقیم تفاوت اساسی دارد.

از سوی دیگر، ژو و همکاران [۹] با توسعه یک مدل غیرخطی المان محدود برای ترموالاستیسیته غیرفوریه تحت گرمایش فوق سریع لیزری، اثر وابستگی هدایت حرارتی به مکان را بررسی کردند. نتایج نشان داد که این ویژگی موجب افزایش سرعت انتشار موج حرارتی و کاهش مقادیر بیشینه تنش و پاسخ‌های دینامیکی سازه می‌شود و در نتیجه نقش مهمی در تحلیل رفتار ترموالاستیکی مواد تحت گرمایش لیزری ایفا می‌کند. در زمینه رفتار مواد متخلخل نیز یانگ و همکاران [۱۰] شکست ترموالاستیک فوم‌های فلزی متخلخل

تحت شوک سرمایی را با استفاده از مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه مطالعه کردند. نتایج نشان داد که زمان‌های تأخیر حرارتی، چگالی نسبی فوم و طول ترک از مهم‌ترین عوامل مؤثر بر توزیع دما، تنش و رشد ترک بوده و مدل غیرفوریه توصیف دقیق‌تری از پاسخ گذرای این مواد نسبت به مدل فوریه ارائه می‌دهد. همچنین مقدم [۱۱] با ارائه یک مدل تحلیلی مبتنی بر مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه برای تعیین عمق نفوذ حرارتی در محیط نامتناهی نشان داد که افزایش نسبت زمان‌های تأخیر باعث افزایش عمق نفوذ حرارت می‌شود و این پارامتر یکی از عوامل کلیدی در کنترل فرآیندهای انتقال حرارت غیرفوریه محسوب می‌شود.

مرور مطالعات انجام‌شده نشان می‌دهد که بخش عمده تحقیقات اخیر بر توسعه مدل‌های غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه، ارائه روش‌های عددی دقیق‌تر، تحلیل انتقال حرارت در محیط‌های زیستی، مواد متخلخل، سامانه‌های میکرو و نانومقیاس و منابع حرارتی متحرک متمرکز بوده است. با این حال، بررسی هم‌زمان تأثیر نوع تابع توزیع انرژی منبع لیزر، توزیع دما و پاسخ گذرای مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه هنوز به صورت جامع مورد مطالعه قرار نگرفته است. از این‌رو، پژوهش حاضر با تمرکز بر تحلیل و عملکرد توزیع انرژی تابشی لیزر سینوسی در چارچوب مدل انتقال حرارت با تأخیر فاز دوگانه، درصدد پر کردن این خلأ پژوهشی و ارائه دیدگاهی دقیق‌تر نسبت به اثر شکل توزیع منبع حرارتی بر میدان دما و رفتار انتقال حرارت است. به جهت بهبود شرایط در فرآیند سینترینگ روکش‌های دندانی زیرکونیوم، مدل‌سازی عددی انتقال حرارت رسانش غیرفوریه، دیدگاه جدید و کاربردی را در این زمینه به ما خواهد داد. این شبیه سازی کمک خواهد کرد تا پیش بینی صحیحی را درباره‌ی توزیع دما در روکش دندانی و تحلیل آن داشته باشیم و در نتیجه تصمیم درست‌تری نسبت به شرایط فرآیند و تجهیزات کوره‌های سینترینگ داشته باشیم.

۲- شرح مسئله

در سال ۱۹۹۵ تزو [۱۲] یک معادله ساختاری کلی بین شار حرارتی و گرادیان دما مطرح کرد که رفتار های اساسی رسانش گرما از جمله پدیده نفوذ حرارت و موج حرارتی را در بر می‌گرفت. معادله پیشنهادی وی به صورت زیر است:

$$Q(r,t+\tau_q) = -K\vec{\nabla}T(r,t+\tau_T) \quad (۱)$$

k ضریب رسانایی حرارتی است در حالی که τ یک خاصیت ترموفیزیکی ماده است، زمان استراحت یا آسایش یا تاخیر فاز زمانی شارحرارتی است. این رابطه به مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه یعنی غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه مشهور شد که زمینه ساز تحقیقات بسیاری از محققان شد.

در این بخش معادلات انتقال حرارت هدایت غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه ارائه شده‌اند. مدل هدایت حرارتی غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه که به آن اشاره خواهد شد دارای دقت بالاتر نسبت به مدل های کلاسیک فوریه و مدل غیرفوریه غیرفوریه با یک تاخیر فاز است و به واقعیت فرآیند انتقال حرارت در مقیاس ریزساختارها نزدیک‌تر است.

معادلات یکبار تنها به کمک معادلات تفاضل محدود گسسته‌سازی می‌شوند و به کمک روش نگاشت مختصاتی به دستگاه مختصات محاسباتی انتقال پیدا کرده و سپس به کمک معادلات تفاضل محدود گسسته‌سازی می‌شوند.

گسسته‌سازی معادلات به صورت صریح بیان شده و از تفاضلات پیش‌رو و پس‌رو و میانی هم‌زمان در بخش‌های مختلف استفاده شده است.

قانون بقای انرژی [۱۳] به صورت زیر در دسترس است:

$$\rho C_p \frac{\partial \vec{T}(r,t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{q}(r,t) \quad (۲)$$

و همچنین قانون انتقال حرارت هدایت غیرفوریه [۱۲] به صورت زیر بدست آمده است :

$$\vec{q}(r,t+\tau_q) = -K\nabla\vec{T}(r,t+\tau_T) \quad (۳)$$

در هر دو سمت معادله فوریه بوسیله بسط تیلور مرتبه اول بسط معادلات را انجام می‌دهیم :

$$-\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_q\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) = -K\nabla^2\vec{T}(r,t) - K\tau_T\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\vec{T}(r,t) \quad (٤)$$

پس از مرتب‌سازی معادلات، به فرم نهایی معادله اصلاحی از فوریه، به عبارتی معادله گرمای غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه خواهیم رسید:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_q\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) +\alpha\tau_T\left(\frac{\partial^3 T}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^3 T}{\partial t\partial y^2}\right) \quad (۵)$$

مشتقات جزئی که در دو طرف معادله قرار دارند را به کمک معادلات تفاضل محدود پیشرو، پسرو و میانی فرمول‌بندی می‌کنیم و گسسته‌سازی معادلات را به فرم صریح تکمیل می‌کنیم.

با جایگذاری معادلات تفاضل محدود در معادله اصلی، فرمول‌بندی گسسته معادله گرمای غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه بدست خواهد آمد.

به منظور بکارگیری معادلات گرما در شرایط فیزیک مسئله برای روکش دندان قدامی شماره ۲ می‌بایست دستگاه مختصات اصلی مسئله به کمک روش نگاشت مختصاتی به دستگاه مختصات محاسباتی انتقال پیدا کند:

$$T(x,y) = T\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big) = T(\xi,\eta)$$
(٦)

با جایگذاری معادلات انتقال یافته به دستگاه محاسباتی که پارامترهای معادلات در پیوست آمده است، در معادله گرما غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه، به فرم زیر در دستگاه مختصات محاسباتی خواهیم رسید :

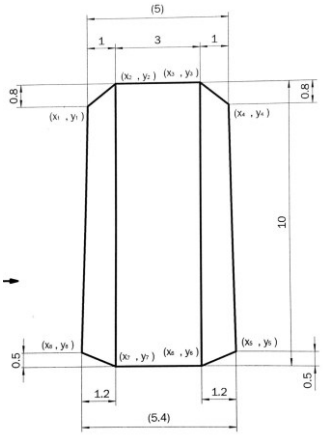
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha\left[\frac{1}{J^2}\left(q_1 T_{\xi\xi} - 2q_2 T_{\xi\eta} + q_3 T_{\eta\eta}\right) + (\nabla^2\xi)T_\xi + (\nabla^2\eta)T_\eta\right] + \alpha\tau_T \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{J^2}\left(q_1 T_{\xi\xi} - 2q_2 T_{\xi\eta} + q_3 T_{\eta\eta}\right) + (\nabla^2\xi)T_\xi + (\nabla^2\eta)T_\eta\right]$$
(۷)

به جهت گسسته سازی معادلات بدست آمده در دستگاه مختصات محاسباتی ابتدا تقریب‌های تفاضل محدود که در فرمول‌بندی بکار گرفته خواهند شد را بسط می‌دهیم و معادله تفاضل محدود مشتق زمانی مرتبه اول و پارامترهای انتقال و مشتقات مکانی مرتبه اول و دوم دما و مشتقات مرتبه دوم و مختلط پارامترهای انتقال را با تفاضل مرتبه اول پیش‌رو گسسته می‌کنیم.

مشتق زمانی معادله گسسته‌شده لاپلاسین دما در دستگاه مختصات محاسباتی به کمک تفاضلات محدود زمانی مرتبه اول پیش‌رو حل خواهد شد که البته از تفاضلات پسرو برای زمان استفاده می‌کنیم.

می‌توان با جاگذاری تفاضلات محدود بدست آمده که به طور کامل در پیوست آمده است، به فرمول نهایی معادله گرما غیر فوریه با تاخیر فاز دوگانه گسسته‌شده به کمک تفاضلات محدود در دستگاه مختصات محاسباتی دست پیدا کرد.

هندسه مورد بررسی یک روکش برای تاج دندان تک ریشه‌ای است. روکش تاج زیرکونیا برای دندان تک ریشه‌ای و قدامی نسبت به ارتفاع دندان از ضخامت کمی برخوردار است. با توجه به این ویژگی هندسی می‌توان آن را دوبعدی در نظر گرفت. ابعاد و مشخصه‌های هندسی فیزیک مسئله به شرح ذیل آورده شده است:

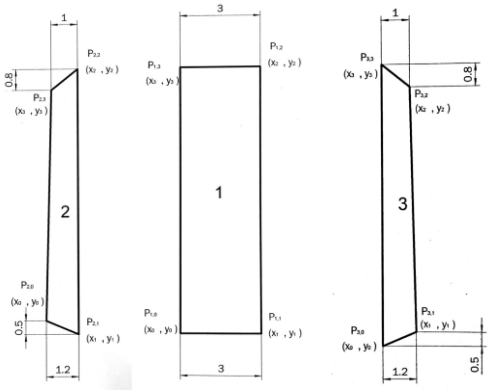


شکل ۱ ابعاد هندسه روکش دندانی

Fig. 1 Geometric dimensions of the dental crown

هندسه روکش دندانی دوبعدی در نظر گرفته شده است و به دلیل ضخامت کم، نسبت به محور z قرینه در نظر می‌گیریم. هندسه دندان قدامی شماره ۲ که در بالا مشاهده می‌شود به صورت بلوک در نظر گرفته می‌شود و توسط تکنیک درون‌یابی دوخطی برای سطوح (درون‌یابی دومرحله‌ای) یا به عبارتی دیگر نگاشت مختصاتی[۱۴،۱۵،۱۶] شبکه‌بندی خواهد شد.

در روش مورد حل بلوک هندسه دندان را به ۳ ناحیه جداگانه تقسیم می‌کنیم و برای هر کدام شبکه‌بندی را اجرا می‌کنیم. سپس نقاط را روی بلوک‌های جداگانه، به اختصار نامگذاری می‌کنیم. به صورت جداگانه برای هر ۳ بلوک، رابطه بین مختصات (x,y) و مختصات محاسباتی (ξ,η) را بدست می‌آوریم.



شکل ۲ بلوک های هندسه دندان

Fig. 2 Dental geometry blocks

هندسه مسئله از نظر ابعادی باید به گونه‌ای باشد که معادلات تفاضل محدود در مدل انتقال حرارت هدایت غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه، مورد تحلیل پایداری قرار گیرند و شرایط پایداری در معادلات ارضا شود.

کوینتانیلا [۱۷] نشان داد که شرط پایداری تقریب تفاضلات محدود برای مدل غیرفوریه با تاخیر فاز دوگانه زمانی حاکم است که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$x = \frac{\tau_T}{\tau_q} > \frac{1}{2}$$
(۸)

در جدول ۱ نیز مشخصات ترموفیزیکی زیرکونیا و پارمترهای معادله آورده شده است:

جدول ۱ مشخصات ترموفیزیکی زیرکونیا [۱۸،۱۹]

Table 1 Thermophysical properties of zirconia

Number	Parameters	SI unit	value
1	Density(ρ)	kg/m³	**6100**
2	Specific heat capacity(C_p)	(J/kg.k)	**500**
3	Thermal Conductivity (k)	(W/m K)	**2.5**

۳- روش حل مسئله

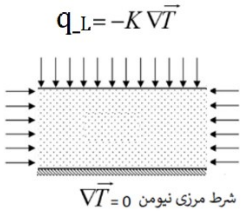
منبع حرارتی شار تابشی ناشی از لیزر فوق سریع طی فرآیند سینترینگ در مدت زمان بسیار کوتاهی و یا کوره‌های سینترینگ، به ماده اعمال خواهد شد.

معادلات انتقال حرارت درون روکش حل خواهد شد. شار حرارتی در نقطه اعمال حرارت به روکش به مقدار عملکردی حدودا ۱۶۰۰ درجه سیلسیوس است که از سمت لیزر اعمال می‌شود.

شرایط اولیه، بیان‌های ریاضیاتی برای مشاهدات تجربی و آزمایشگاهی هستند. در شرایط مسئله مورد بحث، دمای اولیه برای تمام نقاط محیط پیوسته مسئله یکسان و برابر با دمای محیط خواهد بود.

$$\lim_{t\to 0} T(\vec{r},t) = T_0(\vec{r}) \qquad (۹)$$

برای شرایط مرزی فرآیند مورد نظر مطابق شکل ۳ تنها در جهت پایین شرط مرزی نیومن (بدون انتقال حرارت در مرز) را داریم و در سه جهت دیگر تابش از سمت کوره اعمال می‌شود.



شکل ۳ شرایط مرزی

Fig. 3 Boundary conditions

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=h} = q_{-L} \qquad (۱۰)$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q_{-L} \qquad (۱۱)$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = q_{-L} \qquad (۱۲)$$

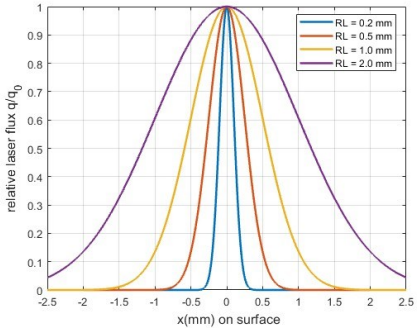
$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \qquad (۱۳)$$

در این شبیه سازی تعریف تابع لیزر یک توزیع گاوسی برای پرتوها با تغییر در شعاع پرتوهای تابشی در نظر گرفته شده است. بر طبق مدل گاوسی در نظر گرفته شده برای لیزر، تابع تغییرات شار سطحی ناشی از لیزر (q_L) بر حسب شعاع پرتوی لیزر (R_L) و شعاع هر نقطه از سطح تحت تابش (r) با رابطه ذیل تعریف شده است[۲۰،۲۱] و پروفیل گاوسی در شکل ٤ آورده شده است:

$$q_L = q_0 \exp\left(-r^2 / R_L^2\right) \qquad (۱٤)$$

برای اعمال لیزر تابیده شده با شدت تابش اولیه ۲ کیلووات بر سانتی متر مربع و با توزیع گاوسی پارامتر زمان بسیار مهم است. برای اینکه شار حرارتی لیزر بصورت گذرا با زمان و کسری از زمان شبیه سازی تعریف شود از تابع پله‌ای هوی ساید مطابق تابع (۱۵) بهره گرفته شده است:

$$f(x) = Heaviside(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.5 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \qquad (۱۵)$$



شکل ۴ تغییرات شار گوسی لیزر با شعاع های پرتو مختلف

Fig. 4 Changes in Gaussian laser flux with varying beam Radius

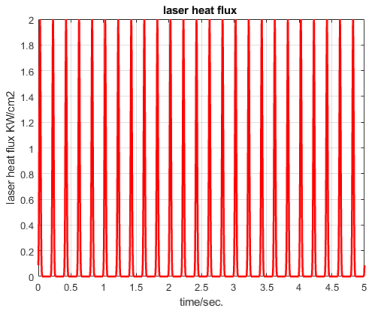
پروفیل لیزر مدولاسیون دامنه سینوسی به‌گونه‌ای است که شدت پالس‌ها حول یک مقدار میانگین به‌صورت نوسانی تغییر می‌کند. از نظر فیزیک چنین مدولاسیونی یعنی نمونه مرتباً بین سطوح انرژی بالاتر و پایین‌تر نوسان می‌کند.

در کاربردهای آزمایشگاهی و تحقیقاتی، این مدل برای مطالعهٔ پاسخ غیرخطی مواد نسبت به تغییرات دورهای انرژی بسیار مناسب است. در کاربردهای صنعتی میتوان از آن برای کنترل نرخ رشد دانه و جلوگیری از موضعی شدن حرارت بهره برد. مزیت عمدهٔ مدولاسیون سینوسی این است که می‌شود فرکانس و دامنهٔ نوسان را طوری انتخاب کرد که فرآیند دیفوزیون تقویت شود ولی نرخ رشد دانه محدود بماند. برای زیرکونیا، این روش می‌تواند کمک کند تا گرادیان دمایی کمتر تیز شود و بنابراین احتمال وقوع تبدیل فاز ناگهانی یا شکاف‌های ناشی از شوک حرارتی کاهش یابد. به‌علاوه، انفجار محلی و تبخیر کمتر رخ می‌دهد زیرا انرژی بالای پالس به‌صورت دوره‌ای فروکش می‌کند؛ بنابراین اگر هدف دستیابی به یکنواختی میکروساختاری و کنترل سایز دانه باشد، مدولاسیون سینوسی یک انتخاب مناسب است. نکتهٔ مهم این است که فرکانس مدولاسیون نسبت به زمان‌های مشخص انتشار حرارت در ماده باید تنظیم شود تا اثر مورد نظر را داشته باشد؛ اگر فرکانس خیلی بالا باشد، ماده فرصت انتشار حرارت نمی‌یابد و گرمایش به‌صورت تجمعی رفتار می‌کند؛ اگر خیلی پایین باشد، شبیه سری پالس‌های مجزا خواهد شد[۲۲،۲۳،۲۴].

تابع تعریف شده برای این لیزر مطابق شکل ۵ به گونه ای است که شار حرارتی تابش ۲ کیلو وات بر سانتی متر مربع باشد ولی این شدت تابش لیزر بصورت پالسی و با ایجاد فرصت آسایش حرارتی به روکش دندان بر آن تابیده میشود توزیع مکانی پرتوهای لیزر گاوسی و شعاع پرتو ۲ میلی متر است. بر طبق رابطه تعریف شده رابطه (۱٦) پرتوهای لیزر به تعداد ۵ مرتبه در هر ثانیه از فرایند شبیه سازی به سمت روکش دندان شلیک می‌شوند.

$$q_{-L} = q_L \sum_{n=1}^{6} \left(1 + 0.2\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right)\right) \times \left(heaviside(t - n\Delta T) - heaviside(t - n\Delta T - \tau)\right) \qquad (۱٦)$$

در معادله (۱۶) مقدار n بیانگر عدد شمارنده پالس لیزر و t زمان شبیه سازی است.

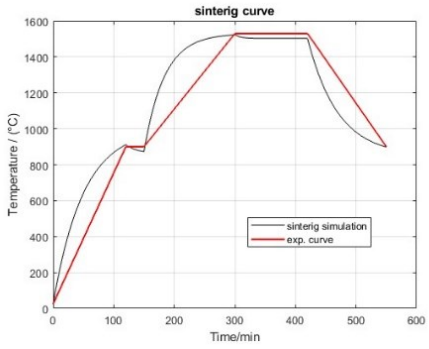


شکل ۵ شار لیزر در دوره زمانی ۵ ثانیه
Fig. 5 Laser flux over a 5-second period

۴- تفسیر و تحلیل نتایج

در این مطالعه، به منظور صحت‌سنجی مدل عددی سینترینگ زیرکونیا، پروفیل حرارتی حاصل از شبیه‌سازی عددی با پروفیل واقعی حاصل از داده‌های آزمایشگاهی [۲۵،۲۶،۲۷] کوره سینترینگ مورد مقایسه قرار گرفت. این مقایسه به درک بهتر از تطابق بین مدل تئوریک و رفتار واقعی ماده در شرایط تجربی کمک می‌کند.

سینترینگ روکش‌های سرامیکی بر پایه زیرکونیا به دلیل حساسیت بالا به تاریخچه حرارتی، نیازمند کنترل دقیق دما و نرخ گرمایش است. شبیه‌سازی عددی فرآیند سینترینگ، ابزاری مؤثر برای پیش‌بینی رفتار حرارتی و بهینه‌سازی پارامترهای فرآیند محسوب می‌شود. با این حال، اعتبار مدل عددی به دلیل تطابق مناسب با داده‌های آزمایشگاهی مطابق شکل ٦ قابل تأیید خواهد بود. داده‌های آزمایشگاهی معمولاً به‌دلیل محدودیت ابزار اندازه‌گیری و روش‌های کنترل، رفتاری ساده‌تر و عمدتاً خطی از خود نشان می‌دهند.



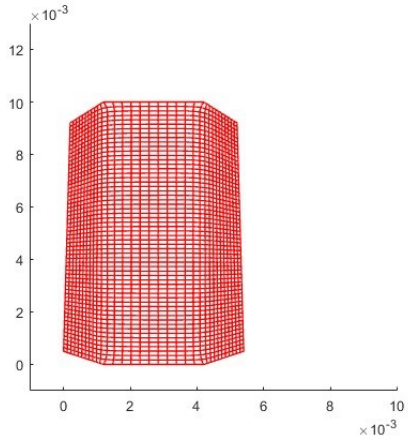
شکل ۶ صحت سنجی مدل عددی در مقایسه با داده های آزمایشگاهی
Fig. 6 Validation of the numerical model against experimental data

برای مقایسه نتایج حاصل از این شبیه سازی عددی با داده های آزمایشگاهی، خطای استاندارد محاسبه شد در قالب جدول ۲ گزارش شده است. با توجه به نتایج حاصل از این پژوهش، در این مقایسه خطای استاندارد در محدوده مقادیر ۰ تا ٤ درصد مشاهده شده است. فلذا با توجه به اینکه درصد خطاهای گزارش شده کمتر از ۱۰ درصد است، این مقایسه می تواند کاربردی باشد.

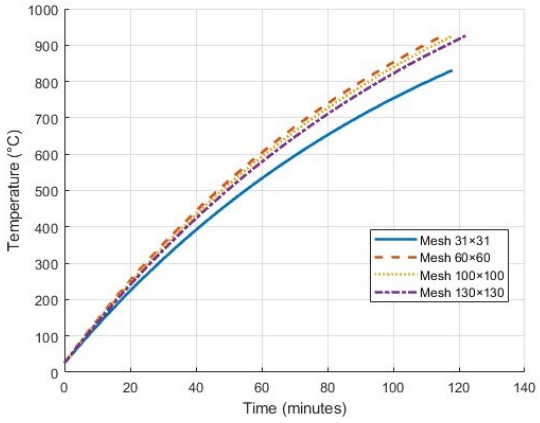
جدول ۲ خطای استاندارد گزارش شده در مقایسه با داده های آزمایشگاهی
Table 2 reported Standard error against experimental data

Number	Temperature at five points during the sintering, corresponding to exp. data (°c)	(°c) Exp. date	Standard error (%)
1	25	25	**0**
2	906	900	**4**
3	1517	1520	**0.6**

در این تحقیق، چندین شبکه‌ی مختلف شامل ۳۱×۳۱، ۶۰×۶۰، ۱۰۰×۱۰۰ و ۱۳۰×۱۳۰ مورد بررسی قرار گرفتند تا اثر اندازه شبکه بر نتایج حرارتی ارزیابی شود. این مقایسه‌ی شبکه‌ای به‌عنوان یک تحلیل حساسیت مش شناخته می‌شود.



شکل ۷) شبکه بندی هندسه مورد حل
Fig. 7 Meshing of the geometry under analysis



شکل ۸ نمودار چک گرید و بررسی استقلال از شبکه در ژئومتری حل
Fig. 8 Grid check diagram and grid independence check in solution geometry

نتایج شبیه‌سازی نشان داد که شبکه‌ی ۳۱×۳۱ به دلیل تعداد کم گره‌ها و ابعاد بزرگ المان‌ها، نتایج نسبتاً پرخطاتری ارائه می‌دهد. منحنی دمایی این مش فاصله‌ی بیشتری با منحنی واقعی فرآیند سینترینگ دارد و نسبت به شبکه‌های دقیق‌تر، رفتار نرم و

پیوسته‌ی مورد انتظار را نشان نمی‌دهد. اما از مش ۶۰×۶۰ به بعد، کیفیت شبیه‌سازی به شکل قابل توجهی بهبود می‌یابد. در شبکه‌ی ۶۰×۶۰، تغییرات دما در طول فرآیند بسیار هموارتر و طبیعی‌تر ظاهر می‌شود و اختلاف آن با شبکه‌های ۱۰۰×۱۰۰ ۱۳۰×۱۳۰ بسیار ناچیز است. این موضوع نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که از این نقطه به بعد، افزایش تعداد گره‌ها تنها منجر به سنگین‌تر شدن محاسبات می‌شود.

افزایش تعداد گره‌ها باعث افزایش حجم محاسبات، نیاز بیشتر به حافظه و در نهایت افزایش زمان اجرای شبیه‌سازی می‌شود. در بسیاری از نرم‌افزارهای تخصصی، افزایش مش از ۶۰ به ۱۳۰ می‌تواند زمان محاسبات را تا دو برابر یا بیشتر افزایش دهد، در حالی‌که اثر آن بر دقت تنها در حد چند درصد یا حتی کمتر است. چنین افزایشی نه از نظر علمی و نه از نظر عملی توجیه‌پذیر نیست، مگر در شرایطی که تحلیل فوق‌العاده دقیق یا وابسته به جزئیات بسیار ریز باشد. با درنظرگرفتن تمام این عوامل، شبکه‌ی ۶۰×۶۰ به‌عنوان گزینه‌ای بهینه انتخاب شد.

یکی از نتایج پیش‌بینی شده قانون فوریه این است که در طول فرآیند انتشار گرما، اثر منبع گرمایی بلافاصله در همه جای محیط صرف نظر از فاصله تا منبع قابل مشاهده است. ازآنجایی که انتقال گرما توسط حاملان انرژی مانند الکترون‌ها و فوتون‌ها انجام می‌گیرد و سرعت انتشار آنها از سرعت انتشار نور بسیار کمتر است، بنابراین غیرممکن است که پاسخ به شار گرمایی ناگهانی در یک بخش از ماده، بلافاصله در تمام نقاط دیگر آن احساس شود. این تناقض در نیم قرن گذشته توجه شدید محافل علمی را در بیان یک مدل مناسب برای توصیف سرعت محدود انتشار گرما به خود جلب کرده است.

در بیان کلاسیک علم انتقال حرارت، جریان انتقال حرارت رسانش نوعی انتقال انرژی است که به واسطه گرادیان دما در یک ماده صورت می‌گیرد و مکانیزم فیزیکی آن را فعالیت تصادفی اتمی یا مولکولی تشکیل می‌دهد. این تئوری کلاسیک هدایت حرارتی که در واقع آن را با عنوان قانون هدایت فوریه نام می‌برند، شار حرارتی را مستقیما با گرادیان دما به صورت خطی مرتبط می‌سازد. قانون فوریه یک قانون پدیده‌شناسی است، یعنی از پدیده‌های تجربی استخراج می‌گردد. بر مبنای مدل فوریه، حرارت در محیط هادی با سرعت بی‌نهایت منتشر می‌شود. این قانون در مواردی شبیه انتقال حرارت گذرا در بازه‌های زمانی خیلی کوچک، انتقال گرما در دماهای خیلی پایین نزدیک صفر مطلق مانند کاربردهای کرایجنیک، در فرآیند پردازش مواد به کمک لیزر، تابش موج‌های الکترومغناطیسی با شدت بالا، انتقال حرارت با نرخ زیاد در محیط‌های رقیق و انتقال حرارت در ساختارهایی در ابعاد میکرون نتایج غیر قابل قبولی را ارائه می‌نماید. علت این امر ناسازگاری مدل هدایت فوریه با فیزیک واقعی انتشارحرارت می‌باشد.

ساختار غیرهمگن ماده باعث ایجاد یک تأخیر در پاسخ بین شار گرما و گرادیان دما می‌گردد. این تأخیر می‌تواند نمایانگر زمان لازم جهت ایجاد جریان انرژی برای تبادل حرارت بین اجزا ساختاری ماده باشد. در طی این تأخیر، شار گرمایی به تدریج خود را با آنچه فوریه بیان می‌کند تطبیق می‌دهد. فوریه بر این باور است که شار حرارتی به طور خیلی ناگهانی و سریع خود را با تغییرات گرادیان دما منطبق می‌سازد. معادله ریاضی حاکم بر هدایت سهموی گرما در مدل فوریه با فرض بی‌نهایت بودن سرعت انتشار حرارت در ماده بیانگر این است که بین شار حرارتی و گرادیان دما هیچ‌گونه تأخیر زمانی وجود ندارد. به عبارت دیگر به محض ایجاد گرادیان دما، شار حرارتی نیز خود را با آن هماهنگ می‌کند. مدل هدایت غیرفوریه، سرعت انتشار حرارت را محدود فرض می‌کند و این حقیقت را در بر دارد که بین گرادیان دما و شار حرارتی تأخیر وجود دارد. به عبارت دیگر مدت زمانی طول می‌کشد تا حرارت از یک طرف جسم به طرف دیگر آن انتقال یابد.

در شبیه‌سازی انتقال حرارت غیر فوریه دوفازی، دو تاخیر زمانی مهم یعنی تاخیر در انتقال حرارت (τ_q) و تاخیر در تغییر دمای ماده (τ_T) وجود دارد که باعث می‌شود گرما به صورت موجی (نه به صورت لحظه‌ای) وارد ماده شود و این مسئله نقش بسیار مهمی در کنترل توزیع دما دارد. این تاخیرها باعث می‌شوند افزایش دمای سطح سریع اتفاق بیفتد ولی گرمای عمیق‌تر با تأخیر منتقل شود.

پدیده انتقال حرارت موجی باعث می‌شود گرادیان دمایی داخل روکش بسیار شدید باشد و تنش‌های حرارتی در لایه‌های نزدیک به سطح ایجاد شود، اما به دلیل تأخیر انتقال گرما، احتمال ایجاد ترک ناگهانی کاهش می‌یابد و فرآیند به صورت تدریجی کنترل می‌شود. کیو و تین [۲۹، ۲۸] با دقت یک مدل دو مرحله‌ای هذلولوی را از معادله انتقال بولتزمن استخراج کردند که حرارت الکترون‌ها را به وسیله معادله ذیل ارائه داد:

$$C_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \nabla . q - G(T_e - T_l) \qquad (۱۷)$$

$$\frac{1}{{C_E}^2}\frac{\partial^2 T_l}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha_E}\frac{\partial T_l}{\partial t} - \frac{\alpha_E}{{C_E}^2}\frac{\partial(\nabla^2 T_l)}{\partial t} = \nabla^2 T_l \qquad (۱۸)$$

T_e و T_L دمای مجزای فونون‌ها و الکترون‌ها است.

C_e ظرفیت حرارتی ویژه الکترون گاز است. G یکی از کلیدی‌ترین پارامترهای حاکم بر نرخ تغییرات فرآیند آسایش حرارتی الکترون-فونون است و می‌تواند از تئوری الکترون آزاد محاسبه شود. رابطه‌ای تخمینی برای G به صورت ذیل نوشته شده است:

$$G = \frac{\pi^2 m_e n_e \upsilon^2}{6\tau(T_e)T_e} \qquad (۱۹)$$

در جاییکه $\tau(T_e)$ تاخیر فاز زمانی الکترون‌ها مابین برخورد الکترونی و در دمای T_e است و n_e عدد دانسیته الکترون آزاد به ازای هر واحد حجم است و m_e جرم الکترون آزاد است و υ سرعت صوت است.

مدل DPL شکل کاملا مشابهی با مدل دومرحله‌ای کیو و تین [۲۹، ۲۸] دارد، با مقایسه ضرایب ثابت دو مدل، خواص میکروسکوپیک تاخیر فاز های زمانی گرادیان و شار حرارتی، به صورت ذیل ارائه شده است:

$$\tau_T = \frac{\alpha_e}{{C_E}^2} \to \frac{C_l}{G} \quad (۲۰)$$

$$\tau_q = \frac{\alpha_e}{{C_E}^2} \to \frac{C_e C_l}{G(C_e + C_l)} \quad (۲۱)$$

در نهایت به جهت شبیه سازی مدل عددی در این تحقیق با توجه به مدل دو مرحله‌ای کیو و تین [۲۹، ۲۸] و مطابق خواص ترموفیزیکی زیرکونیا [۱۹، ۱۸] و نیز به استناد نتایج مقالات منتشر شده [۳۱، ۳۰]، به مقادیر ثابت‌های تاخیر فاز زمانی گرادیان و شار حرارتی، به شرح جدول ۳ دست خواهیم یافت:

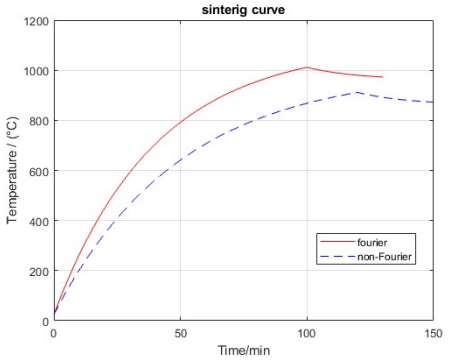
جدول ۳ ثابت تاخیر فازهای زمانی گرادیان و شار حرارتی
Table 3 Time-lag constants for the gradient and heat flux

Number	Parameters	SI unit	value
1	Time-phase lag of Temperature gradient()	ps	3
2	Time-phase lag of heat flux()	ps	7

با توجه به استفاده از مدل دوفازی و پارامترهای تاخیر، این تنش‌ها در زمان‌های اولیه به شکل تاخیری ظاهر می‌شوند که در مدل‌های فوریه این تأخیر دیده نمی‌شود. این مسئله اهمیت مدل غیر فوریه را در تحلیل‌های حرارتی و مکانیکی در فرآیندهای سینتر با لیزر نشان می‌دهد.

در مدل انتقال حرارت فوریه واکنش ماده به تابش لیزر بدون تأخیر زمانی است. این باعث می‌شود که تنش‌های حرارتی هم زودتر و در شدت بیشتری ظاهر شوند، که به واقعیت نزدیک نیست چون مواد واقعی معمولاً پاسخ تأخیری دارند.

مدل غیر فوریه دوفازی با لحاظ کردن دو زمان تأخیر مختلف، نمایش بهتری از فرآیند واقعی انتقال حرارت و تجمع انرژی دارد که برای بهینه‌سازی فرآیند سینتر و جلوگیری از خرابی‌های حرارتی بسیار مهم است. در شکل ۹ روند توزیع دما درون روکش را در مقایسه بین مدل کلاسیک و غیر فوریه مشاهده می‌کنیم.



شکل ۹ اختلاف دما مدل فوریه و غیر فوریه
Fig. 9 Temperature Difference: Fourier vs. Non-Fourier Models

شبیه‌سازی انتقال حرارت غیر فوریه با تاخیر فاز دوگانه، توزیع دمایی و تنش حرارتی را به شکلی دقیق‌تر نسبت به مدل‌های کلاسیک فوریه نمایش می‌دهد. این مدل کمک می‌کند که فرآیند سینتر روکش زیرکونیا با کنترل دقیق‌تر پارامترها مثل زمان‌های تاخیر بهینه شود و از خرابی‌های حرارتی پیشگیری گردد.

مدل انتقال حرارت غیر فوریه دوفازی با در نظر گرفتن تاخیر در انتقال حرارت، نقش بسیار مهمی در تحلیل فرآیند سینتر روکش زیرکونیا دارد. این مدل، رفتار واقعی مواد سرامیکی را بهتر شبیه‌سازی می‌کند و به ما کمک می‌کند تا فرآیند گرمایش و پالس‌های لیزر به گونه‌ای باشد که کیفیت روکش افزایش یافته و عمر آن طولانی‌تر شود.

در فرآیندهای تولید سرامیک‌های دندانی، به ویژه زیرکونیا، سینترینگ نقش بسیار مهمی در تعیین خواص مکانیکی، چگالی و دوام روکش‌ها دارد. انتخاب روش مناسب سینترینگ می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر کیفیت نهایی قطعه داشته باشد. در این مطالعه، روش سینترینگ با لیزر مورد بررسی قرار گرفته است. روش سینترینگ لیزر به دلیل توانایی افزایش سریع دما و کاهش زمان کلی فرآیند، گزینه‌ای جذاب برای کاهش زمان تولید است، اما گرادیان‌های حرارتی شدیدی ایجاد می‌کند که ممکن است منجر به تنش‌های داخلی و ترک در سرامیک شود.

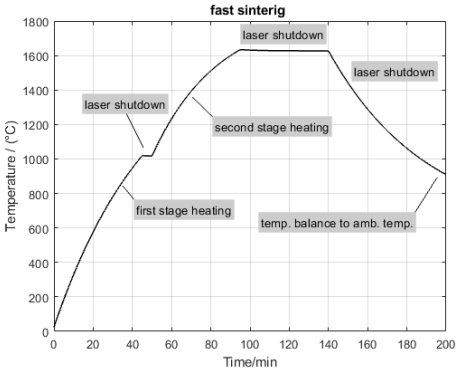
هدف این مطالعه توزیع دما، نرخ گرمایش و خنک شدن و زمان رسیدن به دماهای مشخص در فرآیند سینترینگ لیزر برای روکش زیرکونیوم دندان است تا تأثیر آن‌ها بر کیفیت و یکپارچگی بررسی شود.

تابع تعریف شده برای این لیزر به گونه ای است که شار حرارتی تابش در محدوده مقادیر ۲ کیلو وات بر سانتی متر مربع باشد ولی این شدت تابش لیزر بصورت پالسی و با ایجاد فرصت آسایش حرارتی به روکش دندان بر آن تابیده میشود توزیع مکانی پرتوهای لیزر همچنان گاوسی و شعاع پرتو ۲ میلی متر است. پرتوهای لیزر به تعداد ۵ مرتبه در ثانیه اول از فرایند شبیه سازی به سمت روکش دندان شلیک می‌شوند.

نمودار توزیع دما در فرآیند سینترینگ با تابش لیزر نشان داد که در فرآیند سریع، دما در مدت کوتاهی از دمای محیط به حدود ۱۰۰۰ درجه افزایش یافته و پس از یک توقف کوتاه با کاهش بسیار کمی مواجه می‌شود، سپس مجدداً تا ۱۶۰۰ درجه بالا می‌رود و نهایتاً به دمای محیط بازمی‌گردد. این نشان می‌دهد که فرآیند لیزر دارای شیب‌های دمایی شدید و گرادیان‌های حرارتی بالا است. سینترینگ سریع با لیزر به دلیل امکان افزایش سریع دما و کاهش زمان کلی فرایند، گزینه‌ای جذاب برای کاهش زمان تولید است، ولی ممکن است باعث ایجاد گرادیان دمایی شدید و تنش‌های حرارتی شود.

نتایج مطابق شکل ۱۰ نشان می‌دهد که در فرآیند سریع، دماهای هدف مانند ۱۰۰۰ و ۱۶۰۰ درجه به ترتیب در زمان بسیار کوتاهی نسبت به فرآیندهای عادی رسیدند. این موضوع اهمیت فرآیند

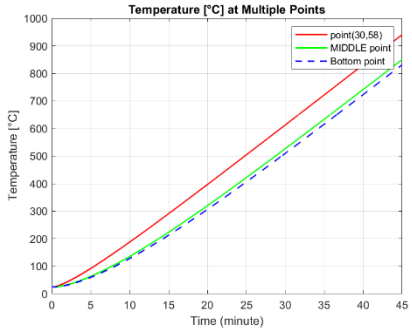
سریع را در کاهش زمان تولید و افزایش بهره‌وری نشان می‌دهد. با این حال، گرادیان‌های دمایی بالا می‌تواند تنش‌های داخلی بیشتری ایجاد کند.



شکل ۱۰ توزیع دما تابش لیزر بر روی سطح بالایی روکش زیرکونیا

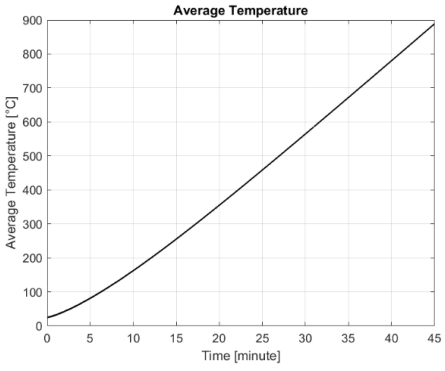
Fig. 10 Laser radiation temperature distribution on the upper surface of the zirconia crown

نتایج بدست آمده از شبیه سازی تا مرحله اول گرمایش و رساندن دمای روکش در بالای سطح تا پیک دمایی در سطح بالایی روکش در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ و شکل ۱۳ آورده شده است :



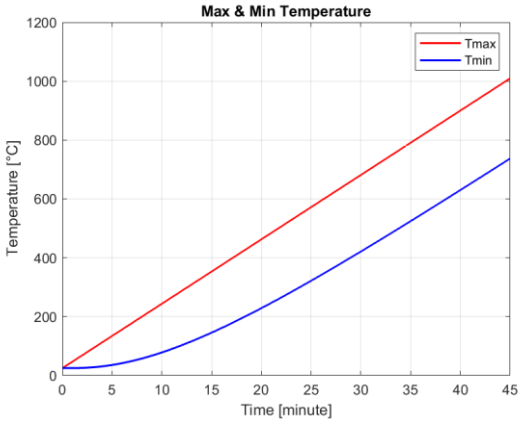
شکل ۱۱ توزیع دما در سه نقطه بالایی، میانی و پایین تا مرحله اول گرمایش

Fig. 11 Temperature distribution at the top, middle, and bottom points up to the first heating step



شکل ۱۲ نمودار دمای میانگین تا مرحله اول گرمایش

Fig. 12 Average temperature graph up to the first heating step



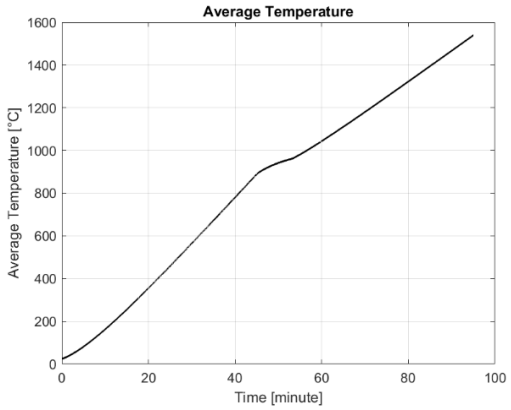
شکل ۱۳ دمای حداقل و حداکثر تا مرحله اول گرمایش

Fig. 13 Minimum and maximum temperatures up to the first heating step

در مرحله نخست فرآیند سینترینگ، روکش زیرکونیا از دمای محیط تحت شار حرارتی لیزر قرار گرفته و به تدریج تا دمای حدود ۱۰۰۰ درجه سانتی‌گراد گرم می‌شود. مطابق شکل ۱۱، روند افزایش دما در هر سه نقطه اندازه‌گیری شده (سطح بالایی، مرکز و سطح پایینی) تقریباً یکنواخت و پیوسته است، اما شیب افزایش دما در سطح بالایی بیشتر از دو نقطه دیگر مشاهده می‌شود. این رفتار ناشی از تماس مستقیم سطح فوقانی با منبع گرمایی است. در نتیجه انرژی ابتدا در این ناحیه جذب شده و سپس به وسیله رسانش حرارتی به بخش‌های داخلی و سطح زیرین منتقل می‌شود. اختلاف دمای مشاهده شده بین سه نقطه در ابتدای فرآیند بیانگر تشکیل گرادیان حرارتی در ضخامت روکش است. این گرادیان برای آغاز فرآیند طبیعی است، زیرا زمان کافی برای توزیع کامل انرژی در کل حجم قطعه وجود ندارد. با ادامه گرمایش، فاصله بین منحنی‌ها کاهش یافته و بیانگر یکنواخت‌تر شدن میدان دمایی در داخل قطعه است. مطابق شکل ۱۲، میانگین دمای روکش روندی کاملاً صعودی و بدون نوسان دارد. عدم وجود افت یا جهش ناگهانی در منحنی نشان می‌دهد که برنامه حرارتی انتخاب شده از پایداری مناسبی برخوردار بوده و انتقال حرارت در طول گرمایش به صورت تدریجی انجام می‌شود. این موضوع اهمیت زیادی دارد، زیرا افزایش ناگهانی دما می‌تواند منجر به ایجاد تنش‌های حرارتی و شروع ترک‌های ریز در سرامیک زیرکونیا شود. شکل ۱۳ تغییرات دمای حداقل و حداکثر را نشان می‌دهد. فاصله میان این دو منحنی معرف میزان ناهمگنی میدان دمایی است. در ابتدای فرآیند این اختلاف نسبتاً زیاد است، زیرا انرژی هنوز در تمام حجم قطعه توزیع نشده است. اما با ادامه گرمایش، آهنگ افزایش دمای حداقل بیشتر شده و اختلاف دو منحنی به صورت نسبی کاهش می‌یابد. این رفتار نشان‌دهنده عملکرد مناسب هدایت حرارتی زیرکونیا در انتقال انرژی از سطح به داخل قطعه است. در مجموع، نتایج مرحله اول نشان می‌دهد که برنامه گرمایش اولیه توانسته بدون ایجاد تغییرات شدید دمایی، شرایط لازم برای شروع

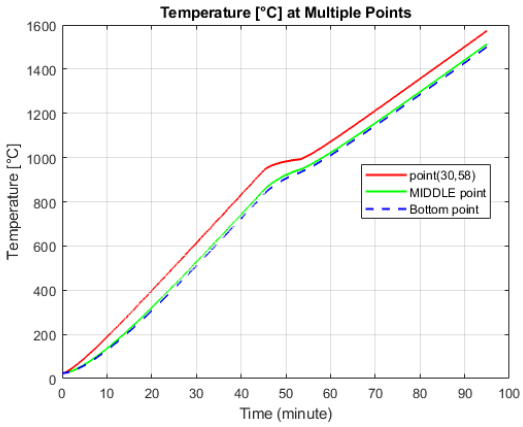
سینترینگ را فراهم کند و از ایجاد تنش‌های حرارتی مخرب جلوگیری نماید.

نتایج بدست آمده از شبیه سازی تا مرحله سوم سینترینگ و رساندن دمای روکش تا دمای ۱۶۲۰ درجه سیلسیوس در شکل ۱۴ و شکل ۱۵ آورده شده است:



شکل ۱۴ نمودار دمای میانگین تا مرحله دوم گرمایش

Fig. 14 Average temperature graph up to the second heating step

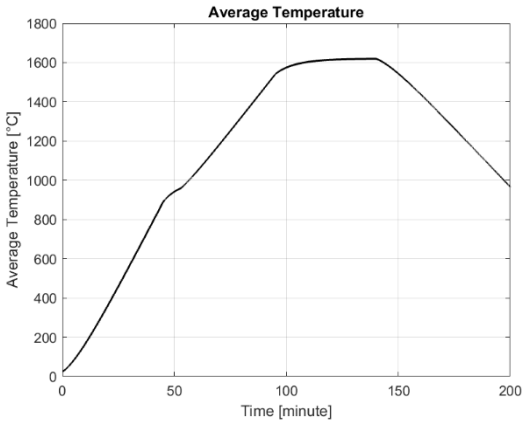


شکل ۱۵ توزیع دما در سه نقطه بالایی، میانی و پایین تا مرحله دوم گرمایش

Fig. 15 Temperature distribution at the top, middle, and bottom points up to the second heating step

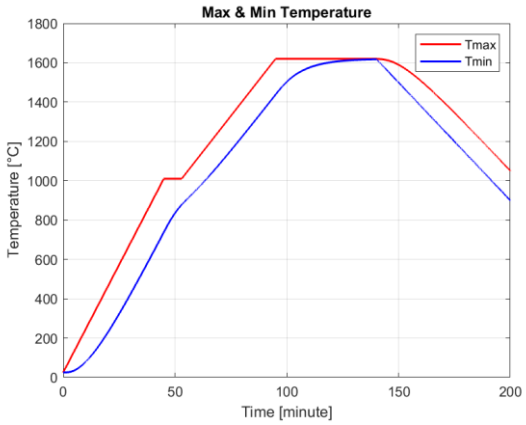
در مرحله دوم، دمای روکش به تدریج تا حدود ۱۶۲۰ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد که دمای مناسب برای تکمیل فرآیند سینترینگ زیرکونیا محسوب می‌شود. مطابق شکل ۱۴، میانگین دمای قطعه با روندی یکنواخت و تقریباً خطی افزایش یافته و بدون ناپایداری به دمای هدف می‌رسد. این رفتار نشان می‌دهد که نرخ انتقال انرژی با نرخ اتلاف حرارت در تعادل مناسبی قرار داشته و کنترل فرآیند گرمایش به خوبی انجام شده است. نبود تغییرات ناگهانی در منحنی بیانگر آن است که میدان حرارتی در طول فرآیند پایدار باقی مانده و خطر شوک حرارتی کاهش یافته است. مطابق شکل ۱۵، اختلاف دمای نقاط مختلف نسبت به مرحله اول کمتر شده است. این موضوع بیانگر آن است که با افزایش زمان گرمایش، انرژی فرصت کافی برای انتشار در تمام حجم روکش را پیدا کرده و گرادیان دمایی کاهش یافته است. نزدیک شدن دمای سه نقطه به یکدیگر یکی از مهم‌ترین شاخص‌های یکنواختی فرآیند سینترینگ است. در دماهای نزدیک به ۱۶۰۰ درجه سانتی‌گراد، پدیده‌های نفوذ اتمی با سرعت بیشتری انجام می‌شوند. بنابراین هرچه توزیع دما یکنواخت‌تر باشد، رشد گردن بین ذرات، کاهش تخلخل و افزایش دانسیته نیز یکنواخت‌تر خواهد بود. در نتیجه انتظار می‌رود خواص مکانیکی روکش شامل استحکام خمشی، سختی و مقاومت به شکست در سراسر قطعه بهبود یابد. از سوی دیگر، اگر اختلاف دمای نقاط مختلف زیاد باقی می‌ماند، بخشی از قطعه زودتر وارد مرحله تراکم کامل شده و بخش دیگر هنوز در مرحله اولیه باقی می‌ماند که این موضوع موجب ایجاد تنش‌های داخلی و کاهش کیفیت نهایی می‌شد. نتایج حاضر نشان می‌دهد که چنین وضعیتی در شبیه‌سازی مشاهده نشده است.

نتایج بدست آمده از شبیه سازی تا مرحله پنجم سینترینگ و سرمایش روکش در شکل ۱۶ و شکل ۱۷ و شکل ۱۸ آورده شده است.



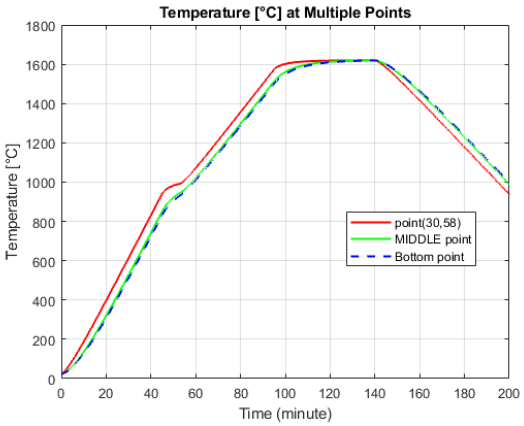
شکل ۱۶ نمودار دمای میانگین در حین مرحله سرمایش

Fig. 16 Average temperature graph during the cooling phase



شکل ۱۷ دمای حداقل و حداکثر در حین مرحله سرمایش

Fig. 17 Minimum and maximum temperatures during the cooling phase



شکل ۱۸ توزیع دما در سه نقطه بالایی، میانی و پایین در حین مرحله سرمایش

Fig. 18 Temperature distribution at the top, middle, and bottom points during the cooling phase

مرحله سرمایش از حساس‌ترین مراحل فرآیند سینترینگ سرامیک‌های دندانی محسوب می‌شود، زیرا بخش عمده تنش‌های پسماند در این مرحله ایجاد می‌شوند. مطابق شکل ۱۶، میانگین دمای قطعه روندی کاملاً نزولی و پیوسته دارد. کاهش دما بدون نوسان یا افت ناگهانی بیانگر کنترل مناسب فرآیند سرمایش است. این موضوع اهمیت زیادی دارد، زیرا سرمایش سریع می‌تواند باعث ایجاد تنش‌های کششی و تشکیل ترک در سرامیک شود. شکل ۱۷ تغییرات دمای حداقل و حداکثر را در طول سرمایش نشان می‌دهد. در ابتدای سرمایش اختلاف این دو مقدار نسبتاً زیاد است، زیرا سطح خارجی سریع‌تر گرما را از دست می‌دهد، در حالی که بخش‌های داخلی هنوز دمای بالاتری دارند. با گذشت زمان، اختلاف بین دو منحنی کاهش یافته و در انتهای فرآیند تقریباً به صفر نزدیک می‌شود که نشان‌دهنده برقراری تعادل حرارتی در کل حجم قطعه است. شکل ۱۸ نیز تغییرات دمای سه نقطه مختلف را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که هر سه منحنی با شیبی مشابه کاهش یافته و اختلاف دمای آن‌ها به تدریج کمتر می‌شود. این رفتار بیانگر آن است که انتقال حرارت در مرحله سرمایش نیز به صورت یکنواخت انجام شده و احتمال ایجاد تنش‌های حرارتی مخرب کاهش یافته است. کاهش تدریجی گرادیان دمایی در این مرحله اهمیت زیادی دارد، زیرا مانع از ایجاد اختلاف انقباض حرارتی بین بخش‌های مختلف روکش می‌شود. در نتیجه، احتمال ایجاد تابیدگی، تغییر شکل هندسی و ترک‌های ریز به حداقل می‌رسد و دقت ابعادی روکش حفظ می‌شود.

تحلیل نتایج بررسی نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که میدان دمایی در طول سه مرحله اصلی فرآیند سینترینگ دارای رفتار پایدار، یکنواخت و قابل کنترل بوده است. در مرحله اول گرمایش، گرادیان دمایی طبیعی ناشی از جذب انرژی در سطح ایجاد می‌شود، اما با ادامه فرآیند این اختلاف کاهش می‌یابد. در مرحله دوم، توزیع دما در سراسر روکش تقریباً یکنواخت شده و قطعه بدون ناپایداری به دمای سینترینگ حدود ۱۶۲۰ درجه سانتی‌گراد می‌رسد که شرایط مناسبی برای تراکم کامل و کاهش تخلخل فراهم می‌کند. در نهایت، مرحله سرمایش نیز با کاهش تدریجی دما و کاهش اختلاف حرارتی بین نقاط مختلف همراه است که از ایجاد تنش‌های پسماند، ترک و تغییر شکل جلوگیری می‌کند. بنابراین، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که سیکل حرارتی طراحی‌شده قادر است فرآیند سینترینگ روکش دندانی زیرکونیا را با توزیع دمای مناسب، حداقل گرادیان حرارتی و بیشترین یکنواختی حرارتی انجام دهد و زمینه دستیابی به خواص مکانیکی مطلوب و کیفیت بالای روکش نهایی را فراهم سازد.

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، رفتار حرارتی فرآیند سینترینگ لیزری روکش زیرکونیا با استفاده از تابع زمانی سینوسی به روش شبیه‌سازی عددی مورد بررسی قرار گرفت. هدف اصلی، تحلیل روند تغییرات دما، ارزیابی قابلیت تابع سینوسی در کنترل تاریخچه حرارتی فرآیند و بررسی تأثیر آن بر نرخ گرمایش و سرمایش بود. به همین منظور، تابع تابش لیزر به‌گونه‌ای طراحی شد که سه مرحله اصلی فرآیند شامل گرمایش، نگهداری در دمای بالا و سرمایش را شبیه‌سازی کند و پاسخ حرارتی روکش در طول کل چرخه سینترینگ مورد ارزیابی قرار گیرد.

نتایج شبیه‌سازی نشان داد که دمای روکش از دمای محیط در مدت حدود ۱۴۰ دقیقه به دمای سینترینگ ۱۶۰۰ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد. این روند بیانگر نرخ گرمایش بالای فرآیند لیزری در مقایسه با روش‌های متداول است. همچنین پس از پایان مرحله گرمایش، کاهش دما با رفتاری نزدیک به تابع نمایی انجام شده و نرخ سرمایش در مدت کوتاهی افزایش می‌یابد. این موضوع نشان می‌دهد که فرآیند سینترینگ لیزری دارای تاریخچه حرارتی بسیار پویا بوده و تغییرات دمایی با شیب‌های قابل توجهی رخ می‌دهد. بررسی نمودارهای دمایی نشان داد که کل چرخه حرارتی فرآیند در حدود ۳ ساعت تکمیل می‌شود؛ در حالی که در فرآیندهای متداول سینترینگ کوره‌ای، دستیابی به همین دمای نهایی و تکمیل چرخه حرارتی معمولاً به حدود ۱۰ ساعت زمان نیاز دارد. بنابراین، استفاده از لیزر موجب کاهش حدود ۷۰ درصدی زمان فرآیند شده و این موضوع از دیدگاه صنعتی می‌تواند منجر به افزایش قابل توجه بهره‌وری، کاهش زمان تولید، کاهش مصرف انرژی و افزایش ظرفیت تولید قطعات سرامیکی شود. این مزیت یکی از مهم‌ترین دستاوردهای استفاده از سینترینگ لیزری در مقایسه با روش‌های مرسوم محسوب می‌شود.

از سوی دیگر، نتایج نشان داد که افزایش سریع دما و سرمایش سریع، اگرچه زمان فرآیند را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهد، اما موجب ایجاد گرادیان‌های حرارتی نسبتاً زیاد در روکش می‌شود. اختلاف دمای موضعی در مدت زمان کوتاه می‌تواند تنش‌های

حرارتی قابل توجهی ایجاد کند که در صورت کنترل نشدن، احتمال تشکیل ترک، ایجاد ریزترک، کاهش استحکام اتصال روکش و حتی تغییرات نامطلوب ریزساختاری را افزایش خواهد داد. بنابراین، دستیابی هم‌زمان به سرعت بالای فرآیند و کیفیت مناسب قطعه، مستلزم انتخاب بهینه پارامترهای تابش لیزر شامل شدت تابش، زمان اعمال انرژی، نرخ گرمایش، نرخ سرمایش و مدت نگهداری در دمای سینترینگ است.

یکی دیگر از نتایج مهم این پژوهش، بررسی رفتار تابع زمانی سینوسی بود. نتایج نشان داد که این تابع از رفتار کاملاً پایدار و تکرارپذیر برخوردار است؛ به‌گونه‌ای که پس از هر بار شروع مجدد فرآیند، شکل موج بدون تغییر نسبت به سیکل اولیه تکرار می‌شود. این ویژگی بیانگر آن است که تابع سینوسی فاقد رفتار تصادفی بوده و تنها تابع زمان است. در نتیجه، امکان پیش‌بینی دقیق تاریخچه حرارتی، کنترل بهتر فرآیند و تکرارپذیری مناسب شرایط سینترینگ فراهم می‌شود که از دیدگاه طراحی فرآیندهای صنعتی اهمیت زیادی دارد.

تحلیل نتایج همچنین نشان داد که کنترل دقیق پارامترهای فرآیند نقش تعیین‌کننده‌ای در یکنواختی میدان دمایی دارد. در صورتی که انرژی لیزر بیش از حد افزایش یابد یا نرخ گرمایش بسیار زیاد باشد، احتمال ایجاد تمرکز حرارتی و گرادیان‌های شدید دمایی افزایش می‌یابد. در مقابل، تنظیم مناسب توان لیزر و زمان‌بندی تابش می‌تواند توزیع دما را یکنواخت‌تر کرده، از تمرکز بیش از حد انرژی جلوگیری کند و احتمال ایجاد تنش‌های حرارتی را کاهش دهد. بنابراین، طراحی مناسب تاریخچه زمانی تابش لیزر یکی از عوامل کلیدی در دستیابی به سینترینگ موفق روکش‌های زیرکونیایی محسوب می‌شود.

به طور کلی، نتایج این پژوهش نشان داد که استفاده از تابع زمانی سینوسی در فرآیند سینترینگ لیزری، ضمن فراهم کردن افزایش دما تا ۱۶۰۰ درجه سانتی‌گراد در مدت حدود ۱۴۰ دقیقه و کاهش زمان کل فرآیند به حدود ۳ ساعت، قابلیت مناسبی برای کنترل تاریخچه حرارتی فرآیند دارد. در مقایسه با سینترینگ متداول که حدود ۱۰ ساعت زمان نیاز دارد، این روش از نظر کاهش زمان تولید و افزایش بهره‌وری مزیت قابل توجهی ارائه می‌دهد. با این وجود، نرخ‌های بالای گرمایش و سرمایش می‌توانند موجب ایجاد گرادیان‌های حرارتی و تنش‌های پسماند شوند؛ از این‌رو، بهینه‌سازی پارامترهای تابش لیزر برای دستیابی هم‌زمان به سرعت بالا، تراکم مناسب، یکنواختی ریزساختار و حداقل تنش حرارتی ضروری است.

این شبیه‌سازی نتیجه داد که شدت تابش بالا باعث افزایش سریع دما می‌شود ولی احتمال شوک حرارتی و ترک افزایش می‌یابد. پالس‌های کوتاه و پرقدرت دمای بالایی ایجاد می کنند ولی باید فاصله زمانی مناسب باشد تا دما یکنواخت شود. در تابش گوسی (توزیع فضایی) تابش متمرکز باعث تمرکز گرما در یک نقطه و احتمال آسیب می‌شود. باید شدت و زمان‌بندی تابش لیزر به گونه‌ای تنظیم شود که دما به آرامی و یکنواخت افزایش یابد و دما در همه نقاط روکش نزدیک به هم باشد. پالس‌های کوتاه و قوی می‌توانند باعث گرادیان دمایی شدید شوند، اما با فاصله زمانی مناسب می‌توان اثرات منفی را کاهش داد.

همچنین افزایش مدت زمان نگهداری در دمای بالا باعث تراکم بهتر و خواص مکانیکی بهتر می‌شود ولی زمان تولید را افزایش می‌دهد. تغییرات ناگهانی دما (گرمایش یا سرمایش سریع) باعث تنش و ترک می‌شوند گرمایش و سرمایش باید کنترل شده و به آرامی انجام شود.

پالس‌های لیزر با دوره ۵ ثانیه باعث می‌شوند گرما به صورت متناوب وارد روکش شود. این نوسانات دمایی اگر به خوبی تنظیم نشوند، ممکن است باعث خستگی حرارتی شوند. اما با تنظیم دقیق زمان پالس و شدت لیزر، می‌توان توزیع دما را یکنواخت کرد و از تجمع بیش از حد حرارت جلوگیری نمود. به منظور کاهش شوک حرارتی و خستگی حرارتی، بهتر است شدت تابش یا فرکانس پالس‌ها کاهش یابد تا گرما به آرامی به داخل نفوذ کند.

تابش لیزر به صورت پالس باعث نوسانات حرارتی متناوب می‌شود. در هر پالس دمای سطح افزایش یافته و سپس کمی کاهش می‌یابد ولی به دلیل فاصله کم پالس‌ها، گرما به تدریج در ماده تجمع می‌یابد تا به دمای سینتر برسد. شدت تابش گرمایی، کنترل مستقیم روی سرعت افزایش دما دارد.

فرکانس پالس‌ها و دوره خاموشی فاصله بین پالس‌ها زمان کافی برای خنک شدن سطح فراهم می‌کند، در صورت کوتاه بودن فاصله، تجمع حرارتی زیاد می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی نشان داد مدل سینوسی پایداری بالایی در شکل موج دارد و رفتار آن‌ها پس از روشن شدن مجدد دقیقاً مشابه با رفتار آغازین آن‌ها است. این بازتولید کامل رفتار نشان می‌دهد که این مدل‌ها فاقد حافظه هستند و صرفاً تابع زمان نسبی هستند؛ بنابراین پس از هر توقف، شکل موج با وفاداری کامل تکرار می‌شود. این رفتار به خوبی نشان می‌دهد که لیزرهایی که از نویز، عدم قطعیت یا تغییرات رندوم پیروی نمی‌کنند، ماهیت قابل پیش‌بینی خود را حفظ می‌کنند.

برآیند این تحلیل نشان می‌دهد که این مدل لیزر با رفتار دوره‌ای و قطعی، مناسب‌ترین گزینه برای کاربردهایی هستند که پایداری، تکرارپذیری و قابلیت پیش‌بینی بالا مورد نیاز است.

فهرست علائم

t	زمان(s)
k	ضریب رسانایی هدایت حرارتی(w/k.m)
Q	شار حرارتی(w/cm^2)
$\vec{\nabla}T$	گرادیان دما(s)
ρ	چگالی(kg/m^3)
C_p	گرمای ویژه(J/kg.k)

τ_q	ثابت تاخیر فاز زمانی شار حرارتی(ps)
τ_T	ثابت تاخیر فاز زمانی گرادیان دما (ps)
q_L	شار لیزر(kw/cm²)
R_L	شعاع پرتوی لیزر(mm)
r	شعاع سطح تابش(mm)
α	ضریب نفوذ گرمایی(m²/s)
T_e	دمای فونون (^{0}c)
T_L	دمای الکترون(^{0}c)
C_e	ظرفیت حرارتی ویژه الکترون گاز(J/kg.k)

تعارض منافع: این مقاله از نتایج حاصل از رساله دکتری نویسنده اول استخراج شده است. هیچ تعارض منافع دیگری برای اظهار وجود ندارد.

منابع تأمین مالی: این پژوهش هیچ گونه گرنت مشخصی از آژانس های تأمین مالی در بخش های عمومی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است

نقش نویسندگان:

محمد احمدی سیاهکلرودی (نویسنده اول - دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک تبدیل انرژی)

شهرام فلاحتکار (نویسنده مسئول – استاد راهنما اول)

مهدی برجی (نویسنده همکار - استاد راهنما دوم)

جواد رضاپور (نویسنده همکار – استاد مشاور)

پیوست

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t}+O(\Delta t) \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t}=\frac{T_{i,j}^{n+1}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}+O(\Delta t)^2 \quad (۲)$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\tau_q\frac{T_{i,j}^{n+1}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2}=\alpha\left(\frac{T_{i+1,j}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right)+\alpha\tau_T\left(\frac{T_{i+1,j}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i-1,j}^{n+1}-T_{i+1,j}^{n}+2T_{i,j}^{n}-T_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2\Delta t}+\frac{T_{i,j+1}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j-1}^{n+1}-T_{i,j+1}^{n}+2T_{i,j}^{n}-T_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2\Delta t}\right) \quad (۳)$$

$$\rightarrow J=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} \quad (٤)$$

$$T_x=\frac{1}{J}\left(T_\xi y_\eta-T_\eta y_\xi\right) \quad (٥)$$

$$T_y=\frac{1}{J}\left(T_\eta x_\xi-T_\xi x_\eta\right) \quad (٦)$$

$$J=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi \quad (٧)$$

$$q_1={x_\eta}^2+{y_\eta}^2 \quad (٨)$$

$$q_2=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta \quad (٩)$$

$$q_3={x_\xi}^2+{y_\xi}^2 \quad (١٠)$$

$$J_\xi=x_{\xi\xi}y_\eta+x_\xi y_{\eta\xi}-x_{\eta\xi}y_\xi-x_\eta y_{\xi\xi} \quad (١١)$$

$$J_\eta=x_{\xi\eta}y_\eta+x_\xi y_{\eta\eta}-x_{\eta\eta}y_\xi-x_\eta y_{\xi\eta} \quad (١٢)$$

$$\rightarrow\nabla^2T=\frac{1}{J^2}\left(q_1T_{\xi\xi}-2q_2T_{\xi\eta}+q_3T_{\eta\eta}\right)+(\nabla^2\xi)T_\xi+(\nabla^2\eta)T_\eta \quad (١٣)$$

$$\nabla^2\xi=\frac{1}{J^3}\left[J\left(x_{\xi\eta}x_\eta-x_{\eta\eta}x_\xi-y_{\eta\eta}y_\xi+y_{\xi\eta}y_\eta\right)-q_1J_\xi+q_2J_\eta\right] \quad (١٤)$$

$$\nabla^2\eta=\frac{1}{J^3}\left[J\left(x_{\xi\eta}x_\xi-x_{\xi\xi}x_\eta-y_{\xi\xi}y_\eta+y_{\xi\eta}y_\xi\right)+q_2J_\xi-q_3J_\eta\right] \quad (١٥)$$

$$\rightarrow\nabla^2\xi=\frac{1}{J^3}\left[q_1\left(x_\eta y_{\xi\xi}-y_\eta x_{\xi\xi}\right)-2q_2\left(x_\eta y_{\xi\eta}-y_\eta x_{\xi\eta}\right)+q_3\left(x_\eta y_{\eta\eta}-y_\eta x_{\eta\eta}\right)\right] \quad (١٦)$$

$$\rightarrow\nabla^2\eta=\frac{1}{J^3}\left[q_1\left(y_\xi x_{\xi\xi}-x_\xi y_{\xi\xi}\right)-2q_2\left(y_\xi x_{\xi\eta}-x_\xi y_{\xi\eta}\right)+q_3\left(y_\xi x_{\eta\eta}-x_\xi y_{\eta\eta}\right)\right] \quad (١٧)$$

$$\rightarrow\nabla^2\xi=\frac{1}{\left[\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)-\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right]^3}\times\left[\left(\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right)\left(\frac{\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)}{\Delta\eta}\frac{\left(y_{i+1,j}^n-2y_{i,j}^n+y_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}-\frac{\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)}{\Delta\eta}\frac{\left(x_{i+1,j}^n-2x_{i,j}^n+x_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}\right)\right]-2\left[\left(\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)+\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right)\left(\frac{\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)\left(y_{i+1,j+1}^n-y_{i,j+1}^n-y_{i+1,j}^n+y_{i,j}^n\right)}{\Delta\eta\Delta\xi}-\frac{\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)\left(x_{i+1,j+1}^n-x_{i,j+1}^n-x_{i+1,j}^n+x_{i,j}^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right)\right]+\left[\left(\left(\frac{x_{i+1}^n-x_i^n}{\Delta\xi}\right)^2+\left(\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{\Delta\xi}\right)^2\right)\left(\frac{\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)}{\Delta\eta}\frac{\left(y_{i,j+1}^n-2y_{i,j}^n+y_{i,j-1}^n\right)}{(\Delta\eta)^2}-\frac{\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)}{\Delta\eta}\frac{\left(x_{i,j+1}^n-2x_{i,j}^n+x_{i,j-1}^n\right)}{(\Delta\eta)^2}\right)\right] \quad (١٨)$$

$$\rightarrow\nabla^2\eta=\frac{1}{\left[\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)-\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right]^3}\left[\left(\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right)\left(\frac{\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi}\frac{\left(x_{i+1,j}^n-2x_{i,j}^n+x_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}-\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)}{\Delta\xi}\frac{\left(y_{i+1,j}^n-2y_{i,j}^n+y_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}\right)\right]-2\left[\left(\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right)\left(\frac{\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi}\frac{\left(x_{i+1,j}^n-2x_{i,j}^n+x_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}-\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)}{\Delta\xi}\frac{\left(y_{i+1,j}^n-2y_{i,j}^n+y_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}\right)\right]+\left[\left(\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right)\left(\frac{\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi}\frac{\left(x_{i+1,j}^n-2x_{i,j}^n+x_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}-\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)}{\Delta\xi}\frac{\left(y_{i+1,j}^n-2y_{i,j}^n+y_{i-1,j}^n\right)}{(\Delta\xi)^2}\right)\right] \quad (١٩)$$

$$\nabla^2T=\frac{1}{\left[\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)-\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right]^2}\left\{\left[\left(\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right)\left(\frac{T_{i+1,j}^n-2T_{i,j}^n+T_{i-1,j}^n}{(\Delta\xi)^2}\right)\right]-2\left[\left(\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)+\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right)\left(\frac{T_{i+1,j+1}^n-T_{i,j+1}^n-T_{i+1,j}^n+T_{i,j}^n}{\Delta\xi\Delta\eta}\right)\right]+\left[\left(\left(\frac{x_{i+1}^n-x_i^n}{\Delta\xi}\right)^2+\left(\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{\Delta\xi}\right)^2\right)\left(\frac{T_{i,j+1}^n-2T_{i,j}^n+T_{i,j-1}^n}{(\Delta\eta)^2}\right)\right]\right\}+(\nabla^2\xi)\frac{T_{i+1}^n-T_i^n}{\Delta\xi}+(\nabla^2\eta)\frac{T_{j+1}^n-T_j^n}{\Delta\eta} \quad (٢٠)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\vec{T}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\left[\frac{\left(x_{i+1}^n-x_i^n\right)\left(y_{j+1}^n-y_j^n\right)-\left(x_{j+1}^n-x_j^n\right)\left(y_{i+1}^n-y_i^n\right)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right]^2}\right.$$

$$\left\{\left[\left(\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right)\left(\frac{T_{i+1,j}^n-2T_{i,j}^n+T_{i-1,j}^n}{(\Delta\xi)^2}\right)\right]\right.$$
$$-2\left[\left(\frac{(x_{i+1}^n-x_i^n)(x_{j+1}^n-x_j^n)+(y_{i+1}^n-y_i^n)(y_{j+1}^n-y_j^n)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right)\left(\frac{T_{i+1,j+1}^n-T_{i,j+1}^n-T_{i+1,j}^n+T_{i,j}^n}{\Delta\xi\Delta\eta}\right)\right]$$
$$\left.+\left[\left(\left(\frac{x_{i+1}^n-x_i^n}{\Delta\xi}\right)^2+\left(\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{\Delta\xi}\right)^2\right)\left(\frac{T_{i,j+1}^n-2T_{i,j}^n+T_{i,j-1}^n}{(\Delta\eta)^2}\right)\right]\right\}$$
$$+(\nabla^2\xi)\frac{T_{i+1}^n-T_i^n}{\Delta\xi}+(\nabla^2\eta)\frac{T_{j+1}^n-T_j^n}{\Delta\eta}\Bigg] \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\vec{T}=\frac{1}{\left[\frac{(x_{i+1}^n-x_i^n)(y_{j+1}^n-y_j^n)-(x_{j+1}^n-x_j^n)(y_{i+1}^n-y_i^n)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right]^2}$$
$$\times\left\{\left[\left(\frac{x_{j+1}^n-x_j^n}{\Delta\eta}\right)^2+\left(\frac{y_{j+1}^n-y_j^n}{\Delta\eta}\right)^2\right]\left[\frac{T_{i+1,j}^n-T_{i+1,j}^{n-1}-2T_{i,j}^n+2T_{i,j}^{n-1}+T_{i-1,j}^n-T_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta\xi^2\Delta t}\right]\right.$$
$$-2\left[\frac{(x_{i+1}^n-x_i^n)(x_{j+1}^n-x_j^n)+(y_{i+1}^n-y_i^n)(y_{j+1}^n-y_j^n)}{\Delta\xi\Delta\eta}\right]$$
$$\left[\frac{T_{i+1,j+1}^n-T_{i+1,j+1}^{n-1}-T_{i,j+1}^n+T_{i,j+1}^{n-1}-T_{i+1,j}^n+T_{i+1,j}^{n-1}+T_{i,j}^n-T_{i,j}^{n-1}}{\Delta\xi\Delta\eta\Delta t}\right]$$
$$\left.+\left[\left(\frac{x_{i+1}^n-x_i^n}{\Delta\xi}\right)^2+\left(\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{\Delta\xi}\right)^2\right]\left[\frac{T_{i,j+1}^n-T_{i,j+1}^{n-1}-2T_{i,j}^n+2T_{i,j}^{n-1}+T_{i,j-1}^n-T_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta\eta^2\Delta t}\right]\right\}$$
$$+(\nabla^2\xi)\frac{T_{i+1}^n-T_{i+1}^{n-1}-T_i^n+T_i^{n-1}}{\Delta\xi\Delta t}+(\nabla^2\eta)\frac{T_{j+1}^n-T_{j+1}^{n-1}-T_j^n+T_j^{n-1}}{\Delta\eta\Delta t} \quad (۲۲)$$

$$G=\frac{\pi^4(n_e\upsilon k_B)^2}{k} \quad (۲۳)$$

$$\upsilon=\frac{k}{2\pi h}(6\pi^2 n_a)^{\frac{1}{3}}T_D \quad (۲۴)$$

$$\alpha_e=\frac{k}{C_e+C_l} \quad (۲۵)$$

$$C_E=\sqrt{\frac{KG}{C_eC_l}} \quad (۲۶)$$

منابع

[1] S. Falahatkar, A. Nouri-Borujerdi, A. Mohammadzadeh, M. Najafi, Evaluation of heat conduction in a laser irradiated tooth with the threephase-lag bio-heat transfer model, Thermal Science and Engineering Progress 7 (2018) 203-212, doi : 10.1016/j.tsep.2018.06.012.

[2] Vannakorn Mongkol, Phadungsak Rattanadecho, Wutipong Preechaphonkul, Kambiz Vafai, Comparative analysis of heat transfer and thermal damage of living biological tissue incorporating local thermal non-equilibrium, dual-phase-lags, and bioheat equations, Journal of Thermal Biology, December 2025, Volume 134. doi : 10.1016/j.jtherbio.2025.104343.

[3] Wutipong Preechaphonkul, Vannakorn Mongkol, Patcharapit Promoppatum, Viritpon Srimaneepong, Comparative analysis of repetitive pulsed and continuous laser heating in multi layered skin: Bioheat vs. dual-phase lag model perspective, International Journal of Thermofluids, Volume 29, September 2025. doi : 10.1016/j.ijft.2025.101371.

[4] I.D. Horvat, Numerical modeling of non-Fourier bioheat transfer in multilayer biological tissue using BEM to simulate dynamic thermography in skin tumor diagnostics, Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 179, Part A, October 2025. doi : 10.1016/j.enganabound.2025.106408.

[5] Xin Zhang, Xiaohua Zhang, Two high-order compact alternating direction implicit difference methods for second-order dual-phase-lag model of microscale heat transfer problem International Communications in Heat and Mass Transfer, November 2025, Volume 168. doi : 10.1016/j.icheatmasstransfer.2025.109414.

[6] Weiping Wu, Chi-Wang Shu , Numerical simulations of non-Fourier heat transfer using local discontinuous Galerkin methods, Applied Thermal Engineering, 15 December 2025, Volume 281, Part 2. doi:10.1016/j.applthermaleng.2026.130547.

[7] Sharif A. Sulaiman, Zahra Shomali, The non-local Dual Phase Lag model of heat conduction in a silicon metal-oxide-semiconductor field-effect transistor, International Communications in Heat and Mass Transfer, June 2025, Volume 165, Part B. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2025.109034.

[8] Kaiyuan Chen, Zhicheng Hu, Yixin Xu, Thermal analysis of dual-phase-lag model in a two-dimensional plate subjected to a heat source moving along elliptical trajectories, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 244, July 2025. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2025.126880.

[9] Huili Guo, Zhipeng Xu, Fulin Shang, Nonlinear time-domain FEM method to non-Fourier thermoelasticity with space-dependent thermal conductivity and impact responses of laser-heated 2D metallic plate, International Communications in Heat and Mass Transfer, December 2025, Volume 169, Part A. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2025.109556.

[10] Wenzhi Yang, Xueyang Zhang, Zhijun Liu, Chuanbin Yu, Zengtao Chen, Thermoelastic fracture analysis of porous metal foams under cold shock using the dual-phase-lag model, Case Studies in Thermal Engineering, Volume 76, December 2025. doi: 10.1016/j.csite.2025.107355.

[11] Ali Jabari Moghadam, Characterizing the thermal penetration depth of non-Fourier heat conduction in an infinite medium, International Communications in Heat and Mass Transfer, February 2025, Volume 161. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2024.108522.

[12] D.Y. Tzou, A unified field approach for heat conduction from macro to Microscales, ASME Journal of heat transfer, 117 (1995) 8–16. doi:10.1115/1.2822329.

[13] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., & Lavine, A. S. Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.

[14] Fletcher, C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[15] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., & Mastin, C. W. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications, North-Holland, New York, 1985.

[16] Hoffmann, K. A. Computational Fluid Dynamics, Vol. 1, Engineering Education System, Wichita, KS, USA, 2000.

[17] Quintanilla, R. Exponential stability in the dual-phase-lag heat conduction theory. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 27 (2002), 217–227.

[18] Green, D. J., Hannink, R. H. J., & Swain, M. V. Transformation Toughening of Ceramics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1989.

[19] Kingery, W. D., Bowen, H. K., & Uhlmann, D. R. Introduction to Ceramics, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1976.

[20] Svelto, O. Principles of Lasers, 5th ed., Springer, New York, 2010.
[21] Powell, J. Laser Processing of Materials: Fundamentals, Applications and Developments, Springer, Cham, Switzerland, 2017.
[22] Steen, W. M., & Mazumder, J. Laser Material Processing, 4th ed., Springer, London, 2012.
[23] Kaplan, A. F. H. Modeling of Pulsed Laser Heating and Melting. Applied Surface Science, 186 (2002), 188–197.
[24] Modest, M. F. Radiative Heat Transfer, 4th ed., Academic Press, Cambridge, MA, 2021.
[25] Sirona InLab Dental Zirconia Block. Dental Laboratorio. Available at: https://www.dentallaboratorio.com/product/sirona-inlab-dental-zirconia-block (Accessed: 25 July 2026).
[26] Sintering Zirconia Blocks: What You Need to Know. Zahn Dental. Available at: https://www.zahndent.com/sintering-zirconia-blocks-what-you-need-to-know (Accessed: 25 July 2026).
[27] Effect of Sintering Temperature on the Color of 3D Monolithic Zirconia. Bloomden Bioceramics. Available at: https://www.bloomden.com/blog/Effect-of-Sintering-Temperature-on-the-Color-of-3D-Monolithic-Zirconia (Accessed: 25 July 2026).
[28]Qiu, T. Q., Tien, C. L., 1992, Short-pulse laser heating on metals, International Journal of Heat and Mass Transfer, 35, pp. 719-726. doi:10.1016/0017-9310(92)90131-B.
[29]Qiu, T. Q., Tien, C. L., 1993, Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals, ASME Journal of Heat Transfer, 115, pp. 835-841.
[30] Quintanilla, R., A Well-Posed Problem for the Three-Dual-Phase-Lag Heat Conduction, Journal of Thermal Stresses, 32, 1270-1278, 2009. doi:10.1080/01495730903310599.
[31] A. Massaguer et al., Method of obtaining dual-phase-lag times in aggregate porous materials with a nonhomogeneous inner structure, Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 150(19):15251-15260. doi : 10.1007/s10973-025-14605-x.