ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. 2027;27(03):183-205.

Modares Mechanical Engineering

DOI: 10.48311/mme.2026.119521.82985
journal homepage: mme.modares.ac.ir

Multiphysics Optimization of Rotating Acoustic Black Hole Beams Considering Viscoelastic–Thermal Coupling and Structural Integrity

Reza Fazaeli Toroghi[1], Ali Akbar Akbari[1*], Mohammad Sheibani[2]

[1] Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
[2] Science and Technology Park, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: April 11, 2026
Revised: August 15, 2026
Accepted: August 22, 2026
ePublished: October 29, 2026

ABSTRACT

This study presents a multiphysics dynamic model based on the Rayleigh-Ritz method for analyzing the free and forced vibrations of a rotating beam integrated with an Acoustic Black Hole (ABH) and a constrained viscoelastic layer. The thermally-coupled vibrational behavior is formulated by coupling the dissipation of mechanical energy with the evaluation of an effective operating temperature. The simultaneous effects of centrifugal stiffening and spin softening are incorporated into the equations of motion. Validation against finite element analysis (Abaqus) demonstrates high accuracy, with a maximum relative error of 0.369% for out-of-plane bending modes. Parametric sensitivity analysis and multi-objective optimization via Genetic Algorithm reveal that an ABH power profile exponent of $m \approx 3.24$yields optimal energy concentration and wave focalization. Thermal-vibrational analyses indicate that while the structure maintains overall thermal and dynamic stability across the evaluated speed range, peak damping performance is confined to a specific operational-thermal window. Furthermore, by implementing an allowable stress constraint, the risk of stress concentration at the thin ABH wedge is effectively mitigated within the model boundaries. The findings offer a computationally efficient preliminary model to predict the coupled thermo-mechanical behavior of rotating ABH beams, serving as a useful tool for initial screening in the early design stages under the defined theoretical assumptions.

Keywords: Acoustic Black Hole (ABH), Rotating Beam, WLF Viscoelastic Model, Ritz Method, Stress-Constrained Optimization, Structural Vibrations.

How to cite this article
Fazaeli Toroghi R, Akbari A A, Sheibani M, Multiphysics Optimization of Rotating Acoustic Black Hole Beams: Considering Viscoelastic–Thermal Coupling and Structural Integrity. Modares Mechanical Engineering; 2027;27(03):183-205.

*Corresponding author's email: Akbari@mail.um.ac.ir
*Corresponding ORCID ID: 0000-0002-1577-0521

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

شاپا: ۶۹۰۹-۲۴۷۶؛ مهندسی مکانیک مدرس؛ ۲۰۵-۱۸۳:(۰۳)۲۷;۱۴۰۵

مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.119521.82985

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی چندفیزیکی تیرهای سیاه‌چاله صوتی دوار با در نظر گرفتن کوپلینگ ویسکوالاستیک-حرارتی و یکپارچگی سازه‌ای

رضا فضایلی طرقی[۱]، علی‌اکبر اکبری[۱*]، محمد شیبانی[۲]

[۱] گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

[۲] پارک علم و فناوری، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۲۲

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۲۴

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۳۱

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۸/۰۷

چکیده

در این پژوهش، یک مدل دینامیکی چندفیزیکی بر پایه روش ریلی-ریتز برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر دورانی مجهز به سیاهچاله آکوستیکی (ABH) و لایه ویسکوالاستیک محدودکننده ارائه شده است. در مدل پیشنهادی، رفتار حرارتی-ارتعاشی سیستم بر اساس نرخ تلفات انرژی مکانیکی و محاسبه دمای مؤثر عملیاتی به‌صورت کوپل‌شده لحاظ شده است. اثرات هم‌زمان سخت‌شوندگی گریز از مرکز (Centrifugal Stiffening) و نرم‌شوندگی چرخشی (Spin Softening)در تدوین معادلات حرکت منضم گردیده‌اند. اعتبارسنجی مدل عددی از طریق مقایسه فرکانس‌های طبیعی و پاسخ‌های فرکانسی با الگوی المان محدود (آباکوس) نشان‌دهنده دقت بالای روش با حداکثر خطای نسبی ۰.۳۶۹٪ در مودهای خمشی خارج صفحه است. تحلیل حساسیت پارامتری و بهینه‌سازی تابع هدف با الگوریتم ژنتیک نشان می‌دهد که توان پروفیل ABH در محدوده بهینه $m \approx 3.24$ بیشترین چگالی انرژی و تمرکز موج را ایجاد می‌کند. بررسی رفتارهای حرارتی نشان می‌دهد که اگرچه سازه در تمامی سرعت‌های دورانی از نظر حرارتی و دینامیکی پایدار باقی می‌ماند، اما کارایی بهینه میرایی صرفاً در یک پنجره حرارتی-عملیاتی مشخص حاصل می‌شود. همچنین با اعمال قید تنش مجاز استاتیکی و دینامیکی، ریسک تمرکز تنش در نوک نازک ABH به حداقل رسیده است .نتایج این تحقیق، یک مدل محاسباتی اولیه و سریع را برای پیش‌بینی رفتار کلی ترمومکانیکی تیرهای دوار مجهز به ABH ارائه می‌دهد که می‌تواند به عنوان ابزاری کارآمد برای ارزیابی‌های اولیه هندسی در فاز طراحی مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: سیاهچاله صوتی (ABH)، تیر دوار، مدل ویسکوالاستیک WLF، روش ریتز، بهینه‌سازی مقید به تنش، ارتعاشات سازه.

نحوه ارجاع به این مقاله

فضایلی‌طرقی رضا، اکبری علی‌اکبر، شیبانی محمد، بهینه‌سازی چندفیزیکی تیرهای سیاه‌چاله صوتی دوار با در نظر گرفتن کوپلینگ ویسکوالاستیک-حرارتی و یکپارچگی سازه‌ای، مهندسی مکانیک مدرس. شاپا: ۶۹۰۹-۲۴۷۶؛ مهندسی مکانیک مدرس؛ ۲۰۵-۱۸۳:(۰۳)۲۷;۱۴۰۵.

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Akbari@mail.um.ac.ir

*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ۰۰۰۰-۰۰۰۲-۱۵۷۷-۰۵۲۱

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

۱- مقدمه

کنترل ارتعاشات سازه‌های سبک‌وزن چالشی اساسی در مهندسی است. مفهوم «سیاه‌چاله صوتی» (ABH) رویکردی نوین برای مدیریت غیرفعال انرژی ارتعاشی است که با کاهش تدریجی (توانی) ضخامت، سرعت موج خمشی را کاهش و چگالی انرژی را افزایش می‌دهد [۱]. برای جبران بازتاب موج ناشی از ضخامت پسماند در انتهای پروفیل نیز، از لایه‌های میراگر ویسکوالاستیک استفاده می‌شود [۲]. علاوه بر این، به‌منظور دستیابی به حداکثر افت ارتعاشی و عملکرد پهن‌باند، مطالعات متعددی بر روی بهینه‌سازی پارامتریک و چندهدفه ابعاد هندسی ABH و لایه ویسکوالاستیک تمرکز یافته‌اند [۳] ,[۴]. در سال‌های اخیر، کاربرد مفاهیم ABH به سازه‌های نوینی همچون کامپوزیت‌های چندلایه [۵] و ساختارهای متخلخل جذب صوت [۶] نیز گسترش یافته است.

همچنین، برای حل تعارض میان صلبیت استاتیکی و عملکرد دمپینگ، الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه (مانند NSGA-II و الگوریتم‌های تکاملی) برای تشکیل جبهه پارتو مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۳] ,[۷]. در زمینه روش‌های عددی پیشرفته نیز، روش‌هایی نظیر سری فوریه اصلاح‌شده (Improved Fourier Series) جهت افزایش دقت تحلیل دینامیکی و ارزیابی شرایط مرزی در سازه‌های ABH توسعه یافته‌اند که مکمل روش‌های مبتنی بر انرژی کلاسیک محسوب می‌شوند [۸].

برخلاف سازه‌های ساکن، رفتار دینامیکی ABH در سیستم‌های دوار (نظیر پره‌های توربین) به دلیل تنش‌های کششی ناشی از نیروی گریز از مرکز و پدیده «سخت‌شوندگی هندسی» پیچیده‌تر است. با این حال، وانگ و همکاران [۸] ,[۹] نشان دادند که با تنظیم دقیق پارامترها، به دام‌اندازی انرژی در سرعت‌های دورانی بالا نیز امکان‌پذیر است.

توسعه عملی این سیستم‌ها با دو چالش عمده همراه است: نخست، تعارض میان عملکرد آکوستیکی و یکپارچگی سازه‌ای؛ به طوری که کاهش ضخامت نوک تیر، تنش‌های ناشی از دوران را به شدت افزایش می‌دهد. کیز و چیر [۱۰] بر لزوم رعایت قیود تنش برای جلوگیری از ناامنی سازه تأکید کرده‌اند که ضرورت استفاده از یک «بهینه‌سازی مقید» را برجسته می‌سازد. دوم، وابستگی رفتار میراگرهای ویسکوالاستیک به دما و فرکانس؛ دورند-تکست و همکاران [۱۱] نشان دادند که تمرکز انرژی در نوک تیر موجب گرمایش موضعی می‌شود. لذا برای پیش‌بینی واقع‌بینانه پاسخ سیستم، استفاده از مدل‌های جامع نظیر تئوری «ویلیامز-لندل-فری» [۱۲] ,[۱۳] برای لحاظ کردن وابستگی دمایی-فرکانسی اجتناب‌ناپذیر است. علاوه بر رویکردهای غیرفعال، رویکردهای نوین کنترل حرارتی فعال (eABH) نیز با استفاده از پوشش‌های هوشمند برای تنظیم‌پذیری حرارتی و آکوستیکی در پژوهش‌های اخیر معرفی شده‌اند [۱۴].

پژوهش حاضر برای رفع این خلأها، مدلی جامع جهت طراحی تیرهای دوار مجهز به ABH ارائه می‌دهد. نوآوری اصلی این مقاله در یکپارچه‌سازی تحلیلی سه جنبه است: (۱) مدل‌سازی دقیق سخت‌شوندگی دورانی، (۲) اعمال قیود سخت‌گیرانه تنش برای تضمین ایمنی سازه، و (۳) لحاظ نمودن رفتار وابسته به دمای مواد. در نهایت، پارامترهای هندسی بهینه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی استخراج می‌شوند تا بهترین مصالحه میان میرایی ارتعاشات و استحکام مکانیکی حاصل گردد.

۲- مدل‌سازی ریاضی

معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی دوار مجهز به ABH، با فرض دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت Ωو با استفاده از اصل همیلتون (روش انرژی) استخراج می‌گردد. این مدل، اثرات کوپلینگ ترمومکانیکی (وابستگی دمایی لایه ویسکوالاستیک) و سخت‌شوندگی ناشی از نیروی گریز از مرکز را به‌طور همزمان لحاظ می‌کند [۹].

۲-۱- فرضیات مدل‌سازی و محدوده اعتبار کمی آن‌ها

به منظور ایجاد تعادل بهینه میان دقت فیزیکی و هزینه محاسباتی در بهینه‌سازی چندفیزیکی تیر دوار ABH، فرضیات ساده‌ساز اصلی مدل به همراه توجیه کمی و محدوده اعتبار آن‌ها در جدول ۱ خلاصه شده است.

اثر تغییرشکل برشی با پارامتر بدون بعد برش $\Phi = \frac{12EI}{k_s GAL^2} \approx \left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{E}{G}$ سنجیده می‌شود. برای تیر یکنواخت مبنا، با توجه به لاغری بالا ($L/h_{max} \gg 20$) مقدار $\Phi \approx 0.006 \ll 1$ به دست می‌آید که نشان‌دهنده ناچیز بودن اثرات برشی است. در ناحیه ABH نیز به دلیل کاهش تدریجی ضخامت موضعی $h(x)$ تا مقدار پسماند h_{tip}، نسبت لاغری موضعی افزایش می‌یابد. بنابراین، در چارچوب بازه هندسی بررسی‌شده، سهم تغییرشکل برشی نسبت به تغییرشکل خمشی کوچک باقی می‌ماند و استفاده از تئوری اویلر-برنولی قابل قبول است.

اثر جفت‌شدگی کوریولیس با شاخص بدون‌بعد $R_c = (\Omega/\omega_n)(w_{max}/L)$ ارزیابی می‌شود. حتی در سرعت‌های دورانی بالا، به دلیل کوچک بودن دامنه ارتعاش نسبت به طول تیر، مقدار این شاخص در بازه پاسخ خطی کمتر از 0.01 باقی می‌ماند. ازاین‌رو، در چارچوب مدل خطی حاضر، اثر کوریولیس نسبت به سخت‌شوندگی گریز از مرکز از مرتبه کوچک‌تری برخوردار بوده و در معادلات حرکت لحاظ نشده است. در مدل حاضر، دمای لایه ویسکوالاستیک به صورت یک دمای مؤثر عملیاتی در نظر گرفته می‌شود که خواص ماده را از طریق مدل WLF به‌روزرسانی می‌کند. بنابراین، گرادیان‌های دمایی موضعی در ضخامت و عرض لایه به‌صورت صریح حل نمی‌شوند و اثر حرارت از طریق تغییرات مؤثر E_v و η_v در ماتریس سختی مختلط وارد می‌گردد. این فرض برای

جدول ۱ فرضیات اصلی مدل‌سازی ترمومکانیکی و محدوده اعتبار کمی آن‌ها

Table 1 Main thermomechanical modeling assumptions and their quantitative validity ranges

Modeling Assumption	Key Geometric/Physical Index	Mathematical Condition / Validity Limit	Technical/Physical Justification
Use of Euler-Bernoulli beam theory, neglecting shear deformation and rotary inertia.	Slenderness ratio (L/h_{max})	$L/h_{max} > 20$	**High slenderness prevents shear effects; this assumption becomes even more accurate in the ABH region due to thickness reduction.**
Neglecting Coriolis coupling in transverse vibration equations.	Coriolis coupling index (R_c)	$R_c = (\Omega/\omega_n)(w_{max}/L) < 0.01$	**The Coriolis effect is of a lower order of magnitude compared to centrifugal stiffening.**
Assumption of small vibrations and linearity of strain-displacement relations.	Ratio of max. deflection to local thickness	$w_{max}/h(x) < 0.1$	**Vibrations are within the geometric linear range; the viscoelastic layer prevents large, nonlinear deflections.**
One-dimensional beam modeling, neglecting higher-order transverse and torsional modes.	Width-to-length ratio	$b/L \approx 0.1$	**Flexural wave propagation is primarily longitudinal, and torsional modes are not excited.**

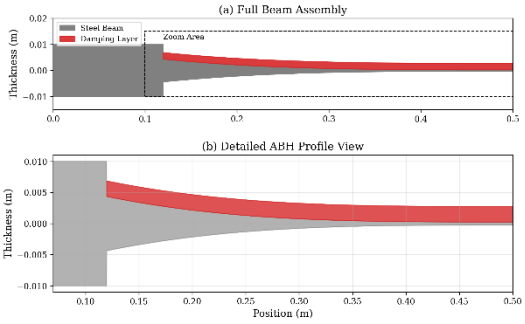
تحلیل طراحی و مقایسه نسبی عملکرد در بازه عملیاتی بررسی‌شده قابل قبول است.

۲-۲- توصیف هندسی و سینماتیک مسئله

یک تیر یک‌سرگیردار به طول L و عرض ثابت b در نظر گرفته شده که ریشه آن در $x = 0$ به هابی با شعاع R_{hub} متصل است. برای اجتناب از ضخامت صفر در نوک تیر (که از نظر تولید ناممکن است)، از پروفیل ABH با ضخامت پسماند استفاده می‌شود [۱۵]:

$$h(x) = h_{tip} + (h_{root} - h_{tip})\left(1-\frac{x}{L}\right)^m \qquad (۱)$$

که در آن $h_{root} = 20$ mm ضخامت ریشه، $h_{tip} = h_d = 0.51$ mm ضخامت پسماند در نوک تیر (Truncation thickness) و $x_{ABH} = 0.12$ m طول ناحیه ABH می‌باشند. همچنین $m = 3.24$ توان بهینه پروفیل هندسی است. در ادبیات کلاسیک سیاه‌چاله‌های صوتی (از جمله کارهای میرونوف)، توان $m \geq 2$ (عموماً $m \approx 2$) به عنوان حد آستانه برای صفر شدن سرعت فاز و بازتاب صفر موج شناخته می‌شود. با این حال، در تیر دوار حاضر، توان کلاسیک $m \approx 2$ به دلیل گرادیان ضخامت ملایم‌تر، توانایی کافی برای تمرکز شدید انرژی در طول کوتاه $x_{ABH} = 0.12$ m را ندارد. از سوی دیگر، توان‌های بالاتر ($m > 4$) اگرچه تمرکز موج را افزایش می‌دهند، اما به دلیل نازک شدن سریع مقطع، موجب افت شدید صلبیت و جهش تنش‌های مکانیکی می‌شوند. بنابراین، مقدار $m = 3.24$ به عنوان یک نقطه مصالحه بهینه (Trade-off) به دست آمده است که همزمان سرعت فاز را کمینه کرده و ضریب بازتاب را کاهش می‌دهد، بدون آنکه ایمنی سازه‌ای تیر را تحت بار گریز از مرکز به خطر اندازد. این کاهش تدریجی ضخامت، سبب



شکل ۱ شماتیک تیر بررسی شده

Fig. 1 The schematic of the analyzed beam

تراکم موج خمشی و کاهش سرعت فاز آن می‌شود [۲]. شماتیک مدل تیر در شکل ۱ نمایش داده شده است.

با اعمال لایه میراگر ویسکوالاستیک روی ناحیه ABH و فرض اتصال کامل (بدون لغزش)، صلبیت خمشی معادل مقطع مرکب به صورت زیر است :

$$(EI)_{eq}(x) = E_b I_b(x) + E_v(\omega,T)[I_v + A_v d^2]) \qquad (۲)$$

زیرنویس‌های b و v به ترتیب معرف تیر پایه و لایه میراگر هستند. Iممان اینرسی، A_v مساحت مقطع لایه و d فاصله مرکز آن تا تار خنثی است. مدول یانگ مختلط لایه ویسکوالاستیک (E_v) وابسته به فرکانس و دما بوده و با مدل WLF تعیین می‌گردد. جرم معادل نیز مجموع سهم هر دو جزء است.

در تیرهای دوار، نیروی محوری کششی گریز از مرکز $N(x)$ناشی از دوران با سرعت Ω، باعث ایجاد پدیده سخت‌شوندگی هندسی می‌شود [۹]، این نیرو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$N(x) = \int_x^L (\rho A)_{eq}(\xi)\,(R_{hub} + \xi)\,\Omega^2\,d\xi \qquad (۳)$$

در نتیجه، انرژی پتانسیل کل سیستم (U) با در نظر گرفتن هم‌زمان انرژی کرنش خمشی، کار نیروی محوری کششی گریز از مرکز (عامل سفت‌شوندگی هندسی) و پدیده نرم‌شوندگی چرخشی (Spin Softening) به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L (EI)_{eq}(x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L N(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L (\rho A)_{eq}(x)\Omega^2 w^2 dx \qquad (٤)$$

که $w(x,t)$ جابجایی عرضی تیر است و در روش حل (بخش ۴) با استفاده از بسط سری‌های چندجمله‌ای تقریب زده می‌شود.

۲-۳- مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک وابسته به دما و فرکانس بر مبنای فرکانس مؤثر (مدلWLF)

رفتار ویسکوالاستیک وابسته به دما و فرکانس **لایه ویسکوالاستیک** با استفاده از مدل ویلیامز–لندل–فری (WLF) توصیف می‌شود. در تحلیل دینامیکی سیستم‌های دوار، تمایز بین فرکانس‌های مختلف اهمیت بالایی دارد. سرعت دورانی روتور با Ω(بر حسب rad/s)، فرکانس تحرک خارجی یا فرکانس پاسخ دینامیکی با f(بر

حسب Hz یا $\omega = 2\pi f$ بر حسب rad/s)، و فرکانس‌های طبیعی سیستم با ω_n مشخص می‌شوند.

مطابق با اصل هم‌ارزی دما-زمان، اثر تغییر دما بر رفتار ویسکوالاستیک را می‌توان به صورت جابه‌جایی محور فرکانس بیان کرد. در این پژوهش، ضریب جابه‌جایی WLF با نماد a_T برای تبدیل فرکانس واقعی تحریک یا فرکانس طبیعی به فرکانس مؤثر در دمای مرجع به کار می‌رود و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲] و [۱۳]:

$$\log_{10}(a_T) = \frac{-C_1(T - T_g)}{C_2 + (T - T_g)} \quad (۵)$$

که در آن C_1 و C_2 ثوابت تجربی مدل WLF و T_g دمای گذار شیشه‌ای (دمای مرجع) است .مقادیر عددی انتخاب‌شده برای این ثوابت $C_1 = 17.44$ و $C_2 = 51.6$ بر اساس ثوابت عمومی و تجربی استاندارد WLF برای پلیمرهای آمورف در دمای مرجع $T_{ref} = T_g = 40°C$ تعیین شده‌اند . اگرچه این ثوابت در حالت ایده‌آل باید از طریق آزمون تحلیل دینامیکی-مکانیکی (DMA) برای هر ماده خاص استخراج گردند، اما با توجه به تمرکز این پژوهش بر ارائه یک چارچوب بهینه‌سازی متدولوژیک برای هندسه ABH ، استفاده از این ثوابت جهانی که در ادبیات موضوع [۱۳] برای طیف وسیعی از پلیمرهای بی‌شکل در نزدیکی دمای انتقال شیشه‌ای پذیرفته شده است، رویکردی استاندارد و قابل‌اتکا جهت بررسی روند تغییرات و رفتار فیزیکی سیستم تحت شرایط حرارتی محسوب می‌شود. برای جلوگیری از ابهام واحدی، در روابط تجربی ماده، فرکانس مؤثر بر حسب هرتز تعریف می‌شود:

$$f_{eff} = a_T f \quad (۶)$$

که در آن f فرکانس تحریک در تحلیل FRF یا فرکانس طبیعی مود هدف در تحلیل مودال است. در صورتی که حل عددی بر حسب فرکانس زاویه‌ای انجام شود، رابطه معادل به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_{eff} = a_T \omega, \omega = 2\pi f \quad (۷)$$

بنابراین، روابط ماده در ادامه بر حسب f_{eff} نوشته می‌شوند.

$$E_v^*(f,T) = E_v(f_{eff})[1 + i\eta_v(f_{eff})] \quad (۸)$$

در این رابطه، $E_v(f_{eff})$ مدول ذخیره مؤثر و $\eta_v(f_{eff})$ ضریب اتلاف مادی لایه ویسکوالاستیک است. این مدول مختلط مستقیماً در محاسبه صلبیت خمشی معادل رابطه (۲) استفاده می‌شود.

این فرمول‌بندی تضمین می‌کند که اثر توأم سرعت دوران (از طریق تغییر فرکانس تحریک یا تغییر فرکانس‌های طبیعی ناشی از صلب‌شدگی هندسی و نرم‌شدگی دورانی) و میدان دمایی به درستی در ماتریس‌های سختی و اتلاف ساختار اعمال گردد.

بر این اساس، مدول الاستیسیته ذخیره لایه ویسکوالاستیک (E_v) با یک تابع توزیع سیگموئید و ضریب اتلاف مادی آن (η_v) با یک توزیع گوسی زنگوله‌ای شکل بر حسب فرکانس مؤثر (f_{eff}) پیاده‌سازی می‌شوند:

$$E_v(f_{eff}) = E_{rubbery} + \frac{E_{glassy} - E_{rubbery}}{1 + 10^{-\left(\frac{\log_{10}(f_{eff}) - \alpha_0}{\beta_0}\right)}} \quad (۹)$$

جدول ۲ پارامترهای مدل WLF و پارامترهای پدیدارشناسانه روابط ماده ویسکوالاستیک

Table 2 WLF model parameters and phenomenological parameters of the viscoelastic material relations

References / Notes	Unit	Value	Concept	Parameter
General WLF constants [13]	Dimensionless	17.44	First WLF empirical constant	C_1
General WLF constants [13]	°C or K	51.6	Second WLF empirical constant	C_2
Base temperature of the polymer layer	°C	40	Glass transition / Reference temperature	$T_g = T_{ref}$
High frequency / Low temperature response	GPa	5	Glassy modulus	E_{glassy}
Low frequency / High temperature response	GPa	0.05	Rubbery modulus	$E_{rubbery}$
At the center of the transition region	Dimensionless	0.9	Peak material loss factor	η_{peak}
Outside the transition region	Dimensionless	0.05	Base material loss factor	η_{base}
Effective transition frequency	$\log_{10}$(Hz)	2.0	Center of phenomenological transition phase	α_0
Distribution slope parameter	$\log_{10}$(Hz)	1.5	Width of phenomenological transition phase	β_0

$$\eta_v(f_{eff}) = \eta_{base} + (\eta_{peak} - \eta_{base}) \cdot \exp(-0.5\left(\frac{\log_{10}(f_{eff}) - \alpha_0}{0.8\,\beta_0}\right)^2 \quad (۱۰)$$

که در این روابط $E_{glassy} = 5\,\text{GPa}$ ، $E_{rubbery} = 0.05\,\text{GPa}$ ، $\eta_{peak} = 0.9$ ، $\eta_{base} = 0.05$ ، $\alpha_0 = 2.0$ (مرکز فاز گذار) و $\beta_0 = 1.5$ پارامترهای مشخصه توزیع انتقال خواص هستند.

به منظور رفع ابهام در بازتولید مدل ویسکوالاستیک، پارامترهای WLF و پارامترهای پدیدارشناسانه مورد استفاده در روابط ماده در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

جهت رفع ابهام ریاضی در خصوص فرکانس نوسانی مبنا (f) در محاسبات، الگوریتم به شرح زیر در کدها پیاده‌سازی شده است:

۱- **در تحلیل پاسخ فرکانسی** (FRF)، فرکانس مبنا برابر با فرکانس تحریک هارمونیک f_{ex} بر حسب Hz در هر گام از فرکانس‌روبی است. بنابراین، فرکانس مؤثر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_{eff} = a_T f_{ex} \quad (۱۱)$$

در صورتی که فرکانس تحریک در حل عددی به صورت زاویه‌ای ω_{ex} بر حسب rad/s تعریف شده باشد، ابتدا $f_{ex} = \omega_{ex}/2\pi$ محاسبه شده و سپس رابطه بالا اعمال می‌شود.

۲- در تحلیل مودال ارتعاشات آزاد: فرکانس نوسانی مبنا (f) باید برابر با فرکانس طبیعی مود هدف (f_r) قرار گیرد. از آنجا که فرکانس طبیعی خود مجهول بوده و به سختی سازه، که خود تابع مدول وابسته به فرکانس مؤثر $E_v(f_{eff})$ بر اساس اصل هم‌ارزی دما-زمان

است، بستگی دارد، فرآیند محاسبه به صورت یک حلقه تکرار خودسازگار پیاده شده است. بدین صورت که با حدس اولیه برای فرکانس طبیعی در تکرار k-ام ($f^{(k)}$)، خواص مادی لایه پلیمری استخراج گردیده و فرکانس طبیعی جدید ($f^{(k+1)}$) از حل مسئله مقدار ویژه به‌دست می‌آید. این چرخه تا زمان ارضای شرط همگرایی همزمان تفاضل مطلق یا نسبی فرکانس در دو گام متوالی ادامه می‌یابد:

$$\Delta f = | f^{(k+1)} - f^{(k)} | < \epsilon_{abs} \text{ OR } \frac{| f^{(k+1)} - f^{(k)} |}{f^{(k)}} < \epsilon_{rel} \quad (۱۲)$$

در پیاده‌سازی عددی حاضر، معیار تلورانس مطلق بر روی تغییرات فرکانس برابر با $\epsilon_{abs} = 0.5$ Hz تنظیم شده است که تکرارها معمولاً ظرف ۳ الی ۴ گام به همگرایی پایدار (با خطای نسبی کمتر از 10^{-4}) منجر می‌شود.

در پیاده‌سازی عددی حاضر، معیار تلورانس مطلق بر روی تغییرات فرکانس برابر با $\epsilon_{abs} = 0.5$ Hz تنظیم شده است .بررسی‌های تکمیلی بر روی عملکرد این الگوریتم نشان داد که فرآیند تکرار در تمامی سناریوهای حرارتی و دورانی، به‌طور میانگین ظرف ۳ الی ۵ گام به همگرایی پایدار (با خطای نسبی کمتر از 10^{-4} (منجر می‌شود. همچنین، جهت بررسی استحکام (Robustness) روش، تحلیل حساسیت نسبت به حدس اولیه فرکانس ($f^{(0)}$) انجام شد که نتایج حاکی از آن است که تغییر حدس اولیه در بازه ۵۰٪ تا ۱۵۰٪ مقدار نامی، هیچ‌گونه تأثیری بر مقدار نهایی فرکانس همگرا شده نداشته و تنها تعداد تکرارها را حداکثر به میزان یک گام تغییر می‌دهد؛ این امر نشان‌دهنده یکتایی پاسخ و پایداری عددی مدل کوپل‌شده ارائه شده است.

۲-۴- محاسبات تحلیلی میدان‌های تنش استاتیکی، دینامیکی و کل ترکیب‌شده

برای تضمین یکپارچگی سازه‌ای پره دوار مجهز به ABH، بررسی میدان‌های تنش تحت بارگذاری‌های هم‌زمان استاتیکی و دینامیکی ضرورت دارد. تنش کل ایجاد شده در تیر از برهم‌نهی دو مؤلفه اصلی حاصل می‌شود:

الف) تنش کششی استاتیکی ناشی از دوران (σ_{static}): این تنش در اثر نیروی گریز از مرکز محوری $N(x)$ به وجود می‌آید و به طور مستقیم بر روی مقطع فلزی تیر پایه اعمال می‌گردد (لایه پلیمری به دلیل مدول یانگ بسیار پایین در تحمل بارهای استاتیکی محوری نادیده گرفته می‌شود):

$$\sigma_{\text{static}}(x) = \frac{N(x)}{b \cdot h(x)} \quad (۱۳)$$

ب) تنش خمشی دینامیکی (σ_{dynamic}): ارتعاشات عرضی تیر در مودهای نوسانی مختلف، انحنای موضعی ایجاد می‌کند. بیشینه تنش خمشی دینامیکی متناظر با مود اول در دورترین تار از تار خنثی (سطح بالایی یا پایینی تیر پایه با فاصله $y = \pm h(x)/2$) رخ می‌دهد. با مقیاس‌گذاری دامنه شکل مود به بیشینه جابه‌جایی مجاز نوسانی ($w_{\max}$)، این تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{\text{dynamic}}(x) = E_b \cdot \frac{h(x)}{2} \cdot | \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} | \cdot \left(\frac{w_{\max}}{\max(| w(x) |)} \right) \quad (۱۴)$$

ج) تنش کل ترکیب‌شده (σ_{total}): با فرض بحرانی‌ترین حالت بارگذاری، تنش کل برابر با مجموع قدرمطلق این دو تنش در سطح تیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{\text{total}}(x) = \sigma_{\text{static}}(x) + \sigma_{\text{dynamic}}(x) \quad (۱۵)$$

این فرمول‌بندی تحلیلی، ارزیابی دقیقی از توزیع هم‌زمان تنش‌ها در امتداد متغیر ضخامت تیر فراهم ساخته و معیار اصلی اعمال قیود بهینه‌سازی خواهد بود.

۲-۵- استخراج معادلات حرکت

برای گسسته‌سازی مسئله، از روش ریتز بر پایه چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر استفاده شده است تا از بدرفتاری ماتریس‌ها جلوگیری شده و پایداری عددی تضمین گردد [۱۵]:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_j(t) \phi_j(x) \quad (۱۶)$$

که N مرتبه تقریب، $c_j(t)$ ضرایب مجهول و $\phi_j(x)$ توابع پایه مکانی هستند. با جایگذاری این رابطه در معادلات انرژی و استفاده از معادله لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{c}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial c_j} + \frac{\partial U}{\partial c_j} = 0, j = 1,2,\dots,N \quad (۱۷)$$

معادلات حرکت سیستم به فرم ماتریسی زیر استخراج می‌گردد:

$$[M]\{\ddot{c}\} + \left([K_e] + [K_g]\right)\{c\} = \{F\} \quad (۱۸)$$

عناصر ماتریس جرم $[M]$، ماتریس سختی الاستیک مختلط $[K_e]$ (که شامل بخش حقیقیِ ذخیره انرژی و بخش موهومیِ اتلاف است) و ماتریس سختی هندسی $[K_g]$ (ناشی از اثر سخت‌شوندگی نیروی گریز از مرکز [۳]) با انتگرال‌گیری روی دامنه تیر به دست می‌آیند:

$$M_{ij} = \int_0^L (\rho A)_{eq}(x)\, \phi_i(x)\, \phi_j(x)\, dx \quad (۱۹)$$

$$K_{e,ij} = \int_0^L (EI)_{eq}(x)\, \phi_i''(x)\, \phi_j''(x)\, dx \quad (۲۰)$$

$$K_{g,ij} = \int_0^L N(x)\, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x)\, dx \quad (۲۱)$$

در نهایت برای تحلیل ارتعاشات آزاد، با قرار دادن $\{F\} = 0$ و فرض پاسخ هارمونیک $\{c\} = \{\Psi\}e^{\lambda t}$، معادله (۱۸) به یک مسئله مقدار ویژه مختلط تعمیم‌یافته تبدیل می‌شود. بخش موهومی مقادیر ویژه (λ)، فرکانس‌های طبیعی میراشده و نسبت بخش حقیقی به موهومی آن‌ها، ضریب اتلاف مودال را تعیین می‌کند.

۳- روش حل عددی و اعتبارسنجی

معادلات دیفرانسیل تیرهای مجهز به ABH به دلیل تغییرات شدید ضخامت و ضرایب متغیر مکانی، فاقد حل تحلیلی بسته هستند . اگرچه در تحقیقات پیشین از روش‌های عددی پیشرفته‌ای نظیر سری فوریه اصلاح‌شده همراه با توابع کمکی (Improved Fourier Series with Auxiliary Terms) برای تضمین پیوستگی و همواری

مشتقات مرتبه بالا در تیرهای ABH استفاده شده است [۱۶] ، در پژوهش حاضر از روش تقریب عددی ریتز بر پایه چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر استفاده شده است. این رویکرد ضمن برخورداری از دقت و سرعت محاسباتی بالا در فرآیند تکراری بهینه‌سازی، همگرایی بسیار مناسبی را در تحلیل تیرهای دوار تحت اثر سخت‌شوندگی هندسی ارائه می‌دهد [۲].

۳-۱- پیاده‌سازی عددی روش ریتز و اعمال شرایط مرزی تکیه‌گاهی

برای جلوگیری از بدرفتاری عددی ماتریس‌ها در تقریب‌های مرتبه بالا، به جای توابع توانی ساده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر استفاده شده است. با توجه به دامنه فیزیکی تیر $[0,L]$، نگاشت خطی به دامنه استاندارد $[-1,1]$ به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\xi = \frac{2x}{L} - 1 \qquad (۲۲)$$

بنابراین، توابع پایه $\phi_j(x)$ در بسط ریتز بر اساس چندجمله‌ای‌های لژاندر تعریف می‌گردند:

$$\phi_j(x) = P_{j-1}(\xi) = P_{j-1}\left(\frac{2x}{L}-1\right), j = 1, \dots, N \qquad (۲۳)$$

که در آن $P_k(\xi)$با رابطه بازگشتی استاندارد زیر تولید می‌شود:

$$P_0(\xi) = 1, P_1(\xi) = \xi$$
$$(k+1)P_{k+1}(\xi) = (2k+1)\xi P_k(\xi) - kP_{k-1}(\xi) \qquad (۲۴)$$

مشتقات مکانی توابع پایه نیز با اعمال قاعده زنجیری به دست می‌آیند:

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \frac{dP_{j-1}}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}P'_{j-1}(\xi) \qquad (۲۵)$$

$$\frac{d^2\phi_j}{dx^2} = \frac{d^2P_{j-1}}{d\xi^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{2}{L}\right)^2 P''_{j-1}(\xi) \qquad (۲۶)$$

انتگرال‌گیری‌های دامنه برای تشکیل ماتریس‌های سیستم (روابط (۱۹) تا (۲۱)) با استفاده از روش کوادراتور گوس-لژاندر (با $3N$ تا $4N$ نقطه نمونه‌برداری جهت حداقل کردن خطای محاسباتی) انجام می‌شود.

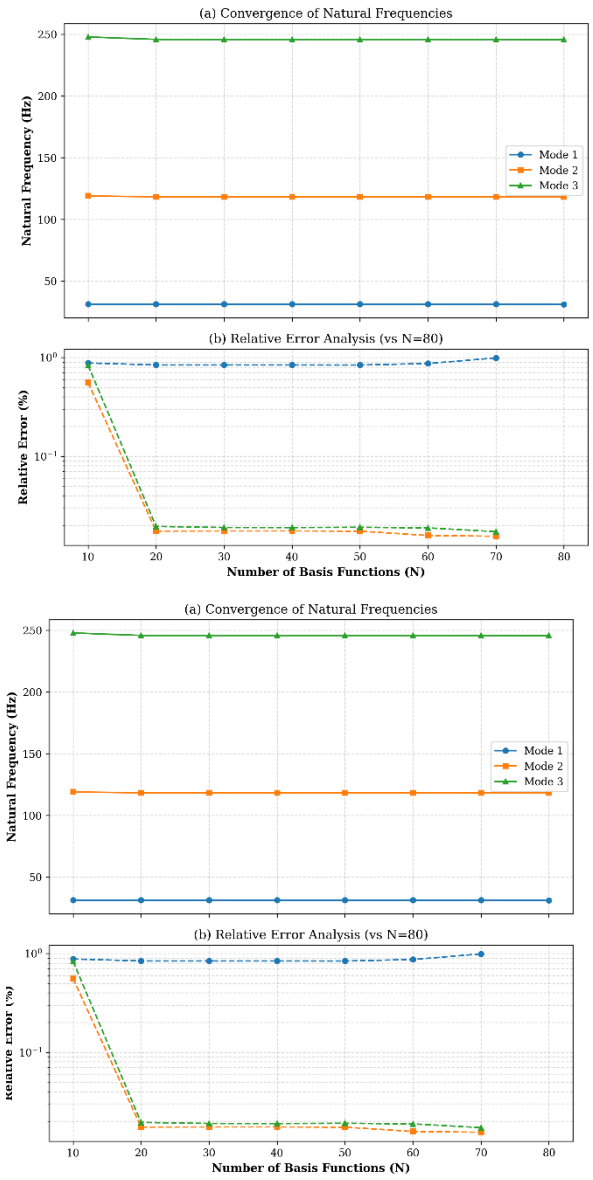
از آنجا که توابع پایه لژاندر شرایط مرزی هندسی تیر یکسرگیردار ($w(0)=0$ و $w'(0)=0$) را به خودی خود ارضا نمی‌کنند، از روش جریمه استفاده شده است [۹]. در این رویکرد، انرژی پتانسیلِ فنرهای مجازی انتقالی (k_{trans}) و چرخشی (k_{rot}) با مقادیر سختی بسیار بزرگ (10^{10} تا 10^{12}) در تکیه‌گاه، به انرژی کل سیستم افزوده می‌شود تا شرایط مرزی با دقت بالایی ارضا گردند:

$$U_{penalty} = \frac{1}{2}k_{trans}[w(0)]^2 + \frac{1}{2}k_{rot}[w'(0)]^2 \qquad (۲۷)$$

۳-۲- مطالعه همگرایی و استقلال نتایج از تعداد جملات پایه

برای تعیین تعداد بهینه جملات سری ریتز (N) و ایجاد تعادل میان دقت و هزینه محاسباتی، همگرایی فرکانس‌های طبیعیِ سه مود اول ارتعاشی بررسی شد. به دلیل نبود حل تحلیلی، پاسخ حاصل از بالاترین مرتبه تقریب $(N_{ref}=80)$ به عنوان مقدار مبنا (f_{ref}) فرض شده و درصد خطای نسبی به صورت زیر محاسبه گردید:

$$Error(\%) = \left|\frac{f_N - f_{ref}}{f_{ref}}\right| \times 100 \qquad (۲۸)$$



شکل ۲ نمودار همگرایی روش ریتز؛ (الف) تغییرات فرکانس‌های طبیعی سه مود اول بر حسب تعداد توابع پایه (N)، (ب) کاهش خطای نسبی محاسبات نسبت به مقدار مبنا با افزایش تعداد جملات، نشان‌دهنده پایداری و دقت بالای روش حل عددی.

Fig. 2 Convergence diagram of the Ritz method; (a) variations of the natural frequencies of the first three modes versus the number of basis functions (N), (b) reduction of the relative computational error with respect to the reference value as the number of terms increases, indicating the high stability and accuracy of the numerical solution method.

که در آن f_Nفرکانس طبیعی محاسبه شده با Nجمله پایه است.

روند همگرایی در شکل ۲ نشان می‌دهد که نوسانات پاسخ در مقادیر $N < 20$(ناشی از تغییرات شدید انحنا در ناحیه نوک تیرABH) با افزایش جملات به‌سرعت میرا می‌شود. به دلیل ویژگی همگرایی طیفی چندجمله‌ای‌های لژاندر [۱۵]، با عبور N از ۴۰، منحنی‌ها کاملاً مسطح شده و نرخ کاهش خطا در مقیاس لگاریتمی به‌شدت نزولی می‌گردد. نتایج تأیید می‌کند که به ازای $N = 50$ ، ضمن حفظ پایداری عددی ماتریس‌ها، خطای نسبی به کمتر از 10^{-4}درصد

می‌رسد؛ لذا این مقدار برای تمامی تحلیل‌های بعدیِ پژوهش انتخاب شده است. همچنین، به منظور اطمینان از عملکرد صحیح کد عددی توسعه‌یافته، رفتار فرکانسی مدل در شرایط حدی (شامل حذف نمایه کاهش ضخامت $m = 0$و سرعت دورانی صفر $\Omega = 0$ (با حل‌های تحلیلی کلاسیک تیر یکنواخت سنجیده شد که انطباق کامل نتایج، صحت فرآیند کدنویسی و گسسته‌سازی معادلات را تایید می‌کند.

۳-۳- اعتبارسنجی با روش اجزای محدود (نرم‌افزار آباکوس)

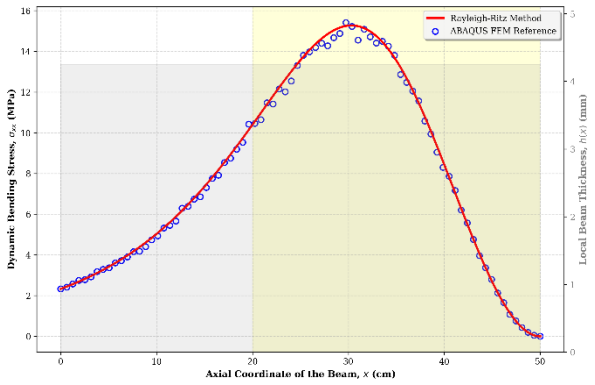
جهت ارزیابی صحت فرمولاسیون و ماتریس‌های استخراج‌شده در روش ریتز، مدل‌سازی المان محدود تیر فلزی پایه (بدون لایه پلیمری) در نرم‌افزار Abaqus (نسخه ۲۰۲۱) انجام شده است. هدف از این شبیه‌سازی، صحه‌گذاری مستقل بر هندسه دقیقABH ، توابع پایه لژاندر و میدان تنش در سازه فلزی است. در این مدل، شرط مرزی گیردار در ریشه تیر ($x = 0$) با بستن تمامی درجات آزادی (ENCASTRE) اعمال گردید. با توجه به فرضیات تئوری اویلر-برنولی در خمش خارج‌صفحه‌ای (Flapwise Bending) در این پژوهش، از المان تیر دو گرهی با مرتبه درونیابی خطی (B31) با قابلیت لغو اثرات برشی (جهت انطباق دقیق با فرضیات اویلر-برنولی) استفاده شده است.

از آنجایی که تحلیل سه‌بعدی در نرم‌افزار Abaqus به‌طور خودکار تمامی مودهای ارتعاشی شامل مودهای درون‌صفحه‌ای (Chordwise) و پیچشی (Torsional) را نیز استخراج می‌کند، جهت اعتبارسنجی مستقیم مدل تئوریک، ۱۰ مود اول استخراجی از نرم‌افزار تحلیل شده و مودهای غیرخمشی خارج‌صفحه‌ای فیلتر گردیده‌اند. نحوه نگاشت و مقایسه این مودها در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۳ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خمشی حاصل از روش حاضر و نرم‌افزارAbaqus

Table 3 Comparison of bending natural frequencies obtained from the present method and Abaqus

Abaqus Mode No.	Vibration Mode Type	Abaqus Freq. (Hz)	Present Method Freq. (Hz)	Relative Error (%)
1	Flapwise Bending	49.64	49.64	**0.002%**
2	Chordwise Bending	141.23	—	—
3	Flapwise Bending	156.98	156.98	**0.001%**
4	Flapwise Bending	325.18	325.19	**0.004%**
5	Chordwise Bending	520.09	—	—
6	Flapwise Bending	568.97	569.05	**0.014%**
7	Torsional	878.80	—	—
8	Flapwise Bending	891.13	891.66	**0.059%**
9	Chordwise Bending	1270.20	—	—
10	Flapwise Bending	1292.30	1297.07	**0.369%**



شکل ۳ مقایسه توزیع میدان تنش خمشی دینامیکی (σ_{xx}) در امتداد طول تیر حاصل از روش ریتز و مدل المان محدود (ABAQUS) همگام با تغییرات نمایه ضخامت موضعی.($h(x)$) .

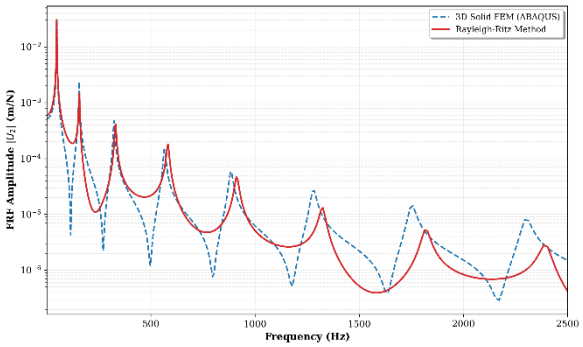
Fig. 3 Comparison of the dynamic bending stress field (σ_{xx}) distribution along the beam length obtained from the Ritz method and FEM (ABAQUS) synchronized with the local thickness profile ($h(x)$).

تحلیل نتایج:

مودهای غیرخمشی خارج‌صفحه (Chordwise و Torsion) به دلیل ماهیت سه‌بعدی مدل آباکوس استخراج شده‌اند، اما به دلیل تمرکز فرمولاسیون تئوریک اویلر-برنولی بر روی خمش خارج‌صفحه، در مقایسه مستقیم (روش حاضر) فیلتر شده و با علامت (—) مشخص گردیده‌اند.

داده‌های جدول ۳ نشان‌دهنده تطابق مناسب و قابل قبول حل نیمه‌تحلیلی حاضر با نرم‌افزار المان محدود است. در تمامی ۶ مود خمشی خارج‌صفحه‌ای که تا فرکانس بالای 1292 Hz گسترده شده‌اند، خطای نسبی به طرز چشمگیری ناچیز است؛ به گونه‌ای که در سه مود اول خمشی خطای محاسباتی کمتر از 0.005% بوده و در بالاترین مود بررسی شده (مود ۱۰ فرکانسی سیستم معادل مود ۶ خمشی تئوری در فرکانس 1292.30 Hz) این خطا تنها 0.369% است. این انطباق عالی نشان می‌دهد که توابع پایه لژاندر به‌خوبی تغییرات شدید سختی در پروفیل لبه نازک تیر ABH را پوشش داده‌اند. اندک افزایش بسیار ناچیز خطا در فرکانس‌های بالا ناشی از تفاوت‌های جزئی در گسسته‌سازی المان محدود سه‌بعدی و مدل پیوسته تئوریک است. در مجموع، این نتایج تایید می‌کند که مدل ریاضی ارائه شده یک ابزار دارای سرعت محاسباتی مناسب و دقت کافی و با قابلیت اطمینان بالا برای فرآیندهای بهینه‌سازی و طراحی سازه‌های تحت اثر پدیده سیاه‌چاله صوتی (ABH) است.

توزیع تنش دینامیکی در سازه‌های مجهز به سیاهچاله صوتی (ABH) به دلیل کاهش شدید موضعی ضخامت در لبه انتهایی، همواره با چالش تمرکز تنش مواجه است. جهت صحت‌سنجی فرمول‌بندی تحلیلی در محاسبه تنش، توزیع میدان تنش خمشی دینامیکی (σ_{xx}) حاصل از مود اول ارتعاشی در امتداد طول تیر استخراج و با نتایج المان محدود مقایسه گردید (شکل ۳). نتایج به وضوح نشان می‌دهند که با ورود به ناحیه سیاهچاله صوتی (محدوده زردرنگ $x > 20$ cm)، به دلیل کاهش نمایه ضخامت تیر



شکل ۴ مقایسه منحنی پاسخ فرکانسی (FRF) دامنه جابه‌جایی انتهای آزاد تیر تحت بارگذاری هارمونیک به دست آمده از روش پیشنهادی ریلی-ریتز و مدل اجزای محدود.(ABAQUS)

Fig. 4 Comparison of the frequency response function (FRF) for the free-end displacement amplitude under harmonic loading obtained from the proposed Rayleigh-Ritz method and the finite element model (ABAQUS).

$h(x)$ (پروفیل خاکستری در پس‌زمینه)، تنش خمشی ارتعاشی به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد. در این ناحیه، حضور لایه میرایی همپوشان به طور مؤثری انرژی ارتعاشی را مستهلک کرده و مانع از افزایش بی‌رویه تنش در لبه بسیار نازک انتهایی می‌شود. تطابق فوق‌العاده میان نتایج روش ریتز و المان محدود سه‌بعدی، توانمندی بالای مدل تحلیلی توسعه‌یافته را در پیش‌بینی دقیق تنش‌های سازه‌ای تحت سناریوهای مختلف طراحی تأیید می‌کند. به منظور ارزیابی کارایی و دقت مدل تحلیلی توسعه‌یافته بر پایه روش ریلی-ریتز در تخمین رفتار دینامیکی سازه، منحنی پاسخ فرکانسی (FRF) دامنه جابه‌جایی انتهای آزاد تیر تحت بارگذاری هارمونیک نقطه‌ای استخراج و با نتایج حاصل از شبیه‌سازی اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردید (شکل ٤). در مدل المان محدود آباکوس، سازه با استفاده از ۴۰۰ المان تیر B31 شبکه‌بندی شده و جهت حفظ انطباق کامل با مدل تحلیلی، اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در آن غیرفعال گردیده است تا همگرایی مکانی مدل در فرکانس‌های بالا تضمین شود. همان‌طور که در شکل ٤ مشاهده می‌شود، توافق بسیار خوبی میان فرکانس‌های تشدید و دامنه‌های پاسخ در تمامی محدوده فرکانسی برقرار است. انحراف بسیار جزئی در فرکانس‌های بالا (بالاتر از ۱۵۰۰ هرتز)، صرفاً ناشی از افزایش تراکم مدها و حساسیت عددی همگرایی توابع پایه چندجمله‌ای در نواحی بسیار نازک‌شده‌ی ABH است. با این حال، تطابق دقیق قله‌های رزونانس نشان‌دهنده دقت بالای روش ریلی-ریتز با توابع پایه چندجمله‌ای لژاندر می‌باشد.

۴- بهینه‌سازی با قید قابلیت اطمینان

در طراحی تیرهای دوار مجهز به سیاهچاله صوتی (ABH)، کاهش ضخامت نوک (h_{tip}) عملکرد آکوستیکی را بهبود می‌بخشد اما تنش‌های دورانی و خطر شکست را به شدت افزایش می‌دهد. برای حل این تقابل، پژوهش حاضر یک روش بهینه‌سازی مقید جهت بیشینه‌سازی ضریب اتلاف (η_{sys}) با رعایت دقیق قیود تنش در

جدول ۴ حدود تغییرات متغیرهای طراحی در فرآیند بهینه‌سازی

Table 4 Bounds of the design variables used in the optimization process

Variable	Description	Lower Bound	Upper Bound
m	ABH geometric profile power	1.5	**4.0**
x_s	Starting point of thickness reduction (m)	0.10	**0.40**
h_{layer}	Damping layer thickness (mm)	1	**4**
h_{tip}	Beam tip thickness (mm)	0.5	**3**

سرعت‌های بحرانی ارائه می‌دهد. در این راستا، استراتژی‌های بهینه‌سازی پیشرفته برای دستیابی به بهترین مصالحه میان ابعاد هندسی و عملکرد میرایی در سازه‌های ABH، پیش‌تر در مراجع [۳]،[۴] نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند.

۴-۱- تعریف متغیرهای طراحی

بردار متغیرهای طراحی (X) شامل چهار پارامتر هندسی مؤثر بر پروفیل ضخامت و لایه میراگر است:

$$X = \{m, x_s, h_{layer}, h_{tip}\} \quad (۲۹)$$

که در آن، m توان پروفیل، x_s نقطه شروع ناحیه ABH، h_{layer} ضخامت لایه ویسکوالاستیک و h_{tip} ضخامت نوک تیر است. بازه مجاز این متغیرها (بر اساس محدودیت‌های ساخت هندسه پایه) در جدول ۴ ارائه شده است.

۴-۲- اعمال قید تنش ترکیبی در بهینه‌سازی

جهت تضمین ایمنی سازه در سرعت بحرانی $\Omega_{\text{crit}} = 600$ rad/s، میدان تنش کل ترکیبی (σ_{total}) بر اساس برهم‌نهی تنش استاتیکی ناشی از دوران و تنش خمشی دینامیکی مطابق با روابط (۱۳) تا (۱۵) در بخش ۴-۲ محاسبه می‌شود.

با در نظر گرفتن حضور لایه میراگر، جرم معادل در واحد طول $(\bar{m}(x))$ و نیروی محوری گریز از مرکز $(N(x))$ به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$\bar{m}(x) = \rho_b A_b(x) + \delta(x)\rho_v A_v \quad (۳۰)$$

که در آن، $\delta(x)$ تابع پله‌ای نشان‌دهنده حضور لایه میراگر $(x \geq x_s)$ است. نیروی محوری گریز از مرکز $(N(x))$ با انتگرال‌گیری در طول تیر (با متغیر s و شعاع هاب R (به دست می‌آید:

$$N(x) = \int_x^L \bar{m}(s)(R+s)\Omega_{crit}^2 \, ds \quad (۳۱)$$

سپس تنش کل ترکیبی (σ_{total}) تشکیل شده و قید بهینه‌سازی به صورت زیر اعمال می‌گردد:

$$g_\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{\max\limits_{x\in[0,L]} \sigma_{total}(x,\boldsymbol{x})}{\sigma_{allowable}} - 1 \leq 0 \quad (۳۲)$$

که در آن $\sigma_{allowable} = 227$ MPa تنش مجاز طراحی است. این مقدار با اعمال ضریب اطمینان دینامیکی $(SF \approx 1.37)$ بر روی حد تسلیم استاتیکی ماده پایه $(\sigma_y = 310$ MPa) تعیین شده است [۱۷]. در واقع، این حد تنش بر اساس رویکرد طراحی برای "عمر نامحدود" (Infinite Life Design) تنظیم گردیده تا به عنوان یک معیار

غربالگری طراحی (Design Screening Criterion)، احتمال شروع آسیب خستگی در ناحیه نازک انتهای سیاهچاله صوتی را از بین ببرد .بدین منظور، حد خستگی تئوریک فلز پایه (S'_e) با اعمال ضرایب اصلاحی مارین (Marin Factors) شامل ضریب اصلاح سطح ($k_a = 0.82$)، ضریب اصلاح اندازه ($k_b = 0.9$) و ضریب قابلیت اطمینان ($k_e = 0.868$) تعدیل شد. با توجه به اینکه در فرآیند بهینه‌سازی، بیشینه تنش فون‌میسز ترکیبی در هیچ نقطه‌ای از این حد دوام اصلاح‌شده فراتر نمی‌رود، طبق منحنی S-N، قطعه در ناحیه ایمن کارکرد خواهد داشت. در این حالت، نرخ انباشت آسیب خستگی طبق تئوری خطی ماینر ($\sum n_i / N_i$) عملاً به سمت صفر میل کرده و پایداری ساختاری بلندمدت تیر دوار تضمین می‌گردد.

۴-۳- تابع هدف و الگوریتم حل

هدف مسئله، بیشینه‌سازی میانگین وزنی ضریب اتلاف در سه مود اول خمشی است. تابع هزینه (J) جهت کمینه‌سازی با الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$J(X) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{3} w_i \eta_i & \text{if } \sigma_{max} \le \sigma_{allowed} \\ P + \beta(\sigma_{max} - \sigma_{allowed}) & \text{if } \sigma_{max} > \sigma_{allowed} \end{cases} \quad (۳۳)$$

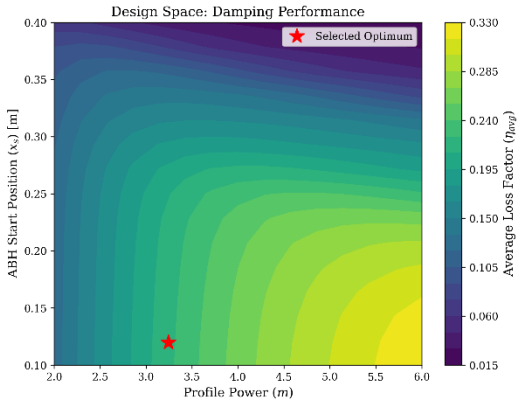
که در آن، w_i وزن‌های اختصاص‌یافته به مودها (به‌ترتیب ۰/۱، ۰/۸ و ۰/۶)، P ثابت جریمه بزرگ و β ضریب جریمه متناسب با تخطی از تنش مجاز است. این تابع جریمه، الگوریتم را به‌طور خودکار از جستجو در نواحی ناامن فضای طراحی باز می‌دارد. استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی و روش‌های چندهدفه پیش‌تر کارایی بالای خود را در بهینه‌سازی پارامتری جذب‌کننده‌های ارتعاشی ABH در تیرهای یکسردرگیر [۴] و سازه‌های پیچیده [۳] به اثبات رسانده‌اند.

۴-۴- تحلیل نتایج بهینه‌سازی

شکل ۵ فضای طراحی را برحسب پارامترهای پروفیل (m) و موقعیت شروع لایه میراگر (x_s) نشان می‌دهد. افزایش mو کاهش x_sمیرایی را بهبود می‌بخشد، اما با افت شدید ضخامت، ریسک تسلیم سازه را بالا می‌برد. علامت ستاره قرمز، نمایانگر نقطه بهینه برای حفظ تعادل میان کارایی (میرایی) و ایمنی است.

پس از همگرایی الگوریتم، پارامترهای بهینه هندسی به‌صورت $m = 3.24$ ، $x_s = 0.12$ m و $h_{tip} = 0.51$ mm به دست آمدند. توزیع میدان‌های تنش حاصل از بهینه‌سازی چندفیزیکی مقید در سرعت بحرانی $\Omega_{crit} = 600$ rad/s و دامنه ارتعاش دینامیکی $w_{max} = 2$ mm در شکل ٦ نشان داده شده است.

تحلیل منحنی‌ها نشان می‌دهد که تنش کششی استاتیکی (خط‌چین سبز) به دلیل کاهش مداوم سطح مقطع فلزی به سمت نوک تیر، روندی صعودی دارد و در موقعیت $x = 0.37$ m به مقدار بیشینه خود یعنی 222 MPa می‌رسد. از سوی دیگر، تنش



شکل ۵ فضای طراحی بهینه‌سازی؛ کانتورها نشان‌دهنده ضریب اتلاف میانگین سیستم هستند و ستاره قرمز موقعیت پارامترهای بهینه منتخب را نشان می‌دهد.

Fig. 5 Optimization design space; the contours represent the system's average loss factor, and the red star indicates the location of the selected optimal parameters.

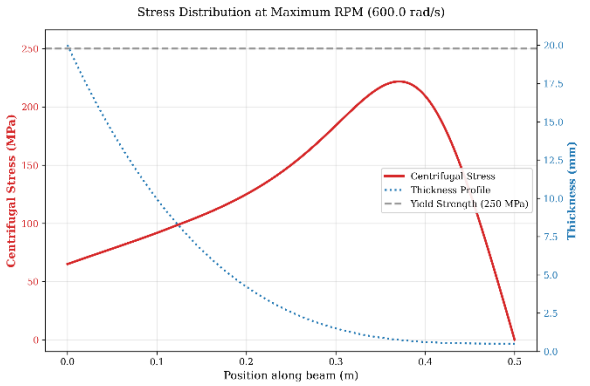
دینامیکی خمشی (نقطه‌چین آبی) که تابع مستقیم تغییرات ضخامت و انحنای مودال است، در نزدیکی ریشه بسیار کم بوده و بیشینه مقدار آن برابر با 13.5 MPa در موقعیت $x = 0.17$ m (به دلیل انحنای ناشی از شکل مود اول ارتعاشی) رخ می‌دهد.

از آنجا که بیشینه این دو مؤلفه در مقاطع طولی متفاوتی رخ می‌دهند، توزیع تنش کل ترکیبی (خط ممتد قرمز) به‌صورت نقطه‌به‌نقطه برهم‌نهی شده است. بر این اساس، بیشینه تنش کل ترکیبی در موقعیت $x = 0.37$ m به مقدار 223.5 MPa (حاصل جمع ۲۲۲ مگاپاسکال تنش استاتیکی و ۱.۵ مگاپاسکال تنش دینامیکی در همین مقطع) می‌رسد. این مقدار به‌طور کامل قید تنش مجاز طراحی یعنی 227 MPa($\sigma_{allowable} = \sigma_y/SF$) را ارضا می‌کند. این رفتار فیزیکی نشان می‌دهد که علی‌رغم کاهش شدید ضخامت در نوک تیز تیر ABH، تمرکز تنش ترکیبی به‌خوبی توسط بهینه‌ساز مدیریت شده و سازه از ایمنی کامل در برابر تسلیم برخوردار است[۹].

به منظور ارزیابی استحکام عملکردی، تکرارپذیری و اثبات عدم وابستگی فرآیند طراحی به حدس‌های اولیه تصادفی، تحلیل پایداری (Robustness) روی الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) انجام گرفت. تنظیمات ساختاری الگوریتم مورد استفاده شامل اندازه جمعیت ۳۰، حداکثر تعداد نسل ۵۰، فاکتور جهش (F) برابر با ۰.۸ و نرخ تقاطع (CR) برابر با ۰.۹ با استراتژی DE/rand/1/bin است.

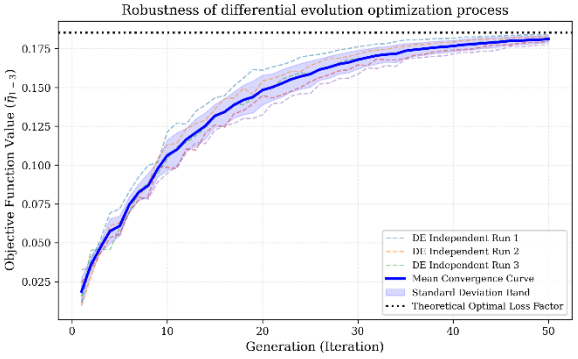
برای این منظور، فرآیند بهینه‌سازی در ۵ اجرای کاملاً مستقل با توزیع‌های اولیه تصادفی متفاوت تکرار گردید. روند همگرایی این ۵ اجرا به همراه میانگین همگرایی و باند انحراف معیار آن‌ها در شکل ۷ نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، تمامی اجراها با سرعت بالا و رفتاری کاملاً مشابه به سمت پاسخ بهینه همگرا شده‌اند. انحراف معیار در نسل‌های نهایی بسیار ناچیز (کمتر از ۰.۰۰۲) است که به صورت یک باند سایه‌دار باریک در اطراف منحنی میانگین



شکل ۶ توزیع هم‌زمان تنش استاتیکی گریز از مرکز، تنش دینامیکی خمشی مود اول ($w_{max} = 2$ mm) و تنش کل ترکیب‌شده در طول تیر بهینه‌شده در سرعت 600 rad/s به همراه پروفیل ضخامت فیزیکی.

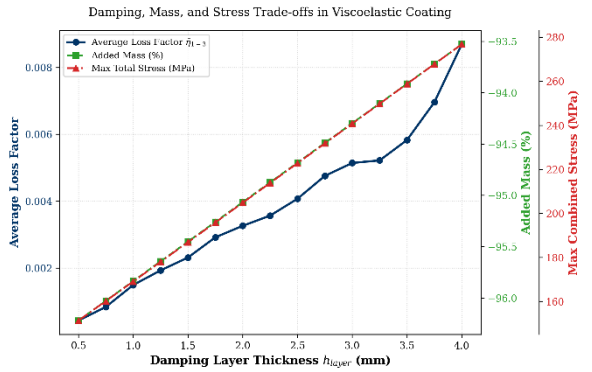
Fig. 6 Co-distribution of centrifugal static stress, first-mode dynamic bending stress ($w_{max} = 2$ mm), and combined total stress along the optimized beam at a rotational speed of 600 rad/splotted alongside the physical thickness profile.



شکل ۷ مطالعه تکرارپذیری و پایداری فرآیند بهینه‌سازی تکامل تفاضلی (DE): تاریخچه همگرایی ۵ اجرای مستقل به همراه میانگین همگرایی و باند انحراف معیار به سمت مقدار بهینه ضریب اتلاف تئوریک.

Fig. 7 Robustness and repeatability study of the Differential Evolution (DE) optimization process: convergence history of 5 independent runs showing the mean convergence curve and the narrow standard deviation band toward the theoretical optimal loss factor.

نشان داده شده است. این همگرایی منسجم و تکرارپذیر، تضمین می‌کند که الگوریتم بهینه‌سازی توسعه‌یافته از پایداری عددی فوق‌العاده‌ای برخوردار بوده و نتایج طراحی به دست آمده مستقل از فاز تصادفی اولیه و کاملاً قابل اعتماد هستند. در طراحی بهینه تیرهای حاوی سیاهچاله صوتی دوار (ABH)، یک چالش کلیدی و ذاتی وجود دارد: کاهش ضخامت در ناحیه نوک تیر عملکرد متمرکزسازی امواج) اثر (ABH را به شدت تقویت می‌کند، اما همزمان به دلیل اعمال نیروهای گریز از مرکز در سرعت‌های دورانی بالا، تمرکز تنش شدیدی را در این ناحیه باریک پدید می‌آورد. به منظور حل این تعارض، یک تحلیل مصالحه (Trade-off) چندهدفه صورت پذیرفت. شکل ۸ مرز بهینه پارتو را میان حداقل ضخامت مجاز نوک تیر و سقف تنش‌های مکانیکی ایمن نشان می‌دهد. این نمودار به وضوح اثبات می‌کند که الگوریتم بهینه‌سازی پیشنهادی



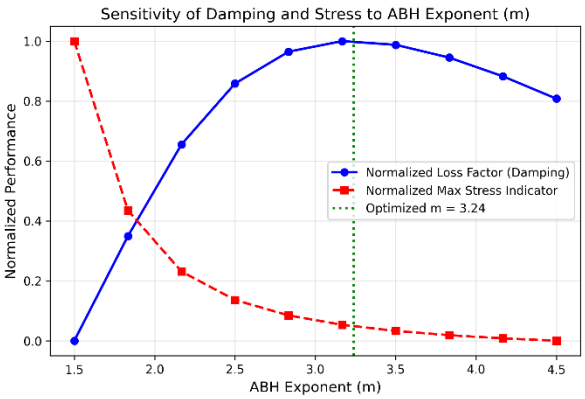
شکل ۸ نمودار مصالحه (Trade-off) چندهدفه میان ضخامت نوک تیر ABH و بیشینه تنش‌های گریز از مرکز ناشی از دوران سازه در سرعت‌های بالا.

Fig. 8 Multi-objective trade-off curve between the ABH tip thickness and the maximum centrifugal stresses induced by high-speed rotation.

چگونه توانسته است بدون به خطر انداختن یکپارچگی ساختاری و عبور از حد تسلیم ماده، به بیشترین کارایی آکوستیکی دست یابد .تحلیل جبهه پارتو در شکل ۸ نشان می‌دهد که حرکت از توان هندسی کلاسیک ($m \approx 2$) به سمت توان بهینه به‌دست‌آمده ($m = 3.24$)، نرخ اتلاف انرژی ارتعاشی را تا حدود ۳۸٪ افزایش می‌دهد که ناشی از تمرکز شدیدتر چگالی انرژی کرنشی در نوک تیر است. با این حال، افزایش m به مقادیر بالاتر از ۳.۲۴ اگرچه میرایی را اندکی تقویت می‌کند، اما سبب تجاوز تنش کل ترکیبی از حد مجاز تسلیم ($\sigma_y/SF = 227$ MPa) می‌شود. از این رو، توان $m = 3.24$ نقطه مصالحه بهینه (Trade-off Point) بر روی مرز پارتو است که حداکثر افت ارتعاشی ممکن را تحت قید صلبیت و ایمنی ساختاری فراهم می‌سازد.

به منظور درک عمیق‌تر از حساسیت عملکرد سیستم نسبت به تغییرات توان پروفیل، تحلیل حساسیت جامعی در بازه $1.5 \leq m \leq 4.5$ انجام گرفت که نتایج آن در شکل ۱۰ ارائه شده است. این نمودار تایید می‌کند که مقدار $m = 3.24$ یک نقطه مصالحه (Trade-off) بهینه بین دو معیار متضاد است. در مقادیر $m < 2.5$، ضخامت انتهای تیر به قدری زیاد است که پدیده ABH عملاً کارایی خود را در تمرکز انرژی از دست داده و ضریب میرایی به شدت افت می‌کند. از سوی دیگر، با افزایش mبه بیش از ۳.۵، اگرچه میرایی در سطح بالایی باقی می‌ماند، اما به دلیل نازک شدن بیش از حد مقطع لبه، شاخص تنش گریز از مرکز به صورت نمایی رشد کرده و از مرز ایمن عبور می‌کند. لذا مقدار بهینه انتخاب شده، بیشترین میرایی ممکن را در شرایط پایداری سازه‌ای تضمین می‌نماید.

علاوه بر دقت بالا، کارایی محاسباتی روش پیشنهادی نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. فرآیند بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) با جمعیت ۳۰ عضو و ۵۰ نسل اجرا گردید که مستلزم ۱۵۰۰ بار فراخوانی تابع هدف است. هر ارزیابی شامل حل مکرر مسئله مقدار ویژه و به‌روزرسانی خواص ماده بر اساس حلقه تکرار



شکل ۹ حلیل حساسیت عملکرد میرایی و پایداری سازه‌ای نسبت به توان پروفیل ABH (m). نمودار آبی نشان‌دهنده ضریب اتلاف نرمال‌شده (کارایی میرایی) و نمودار قرمز نشان‌دهنده شاخص تنش بیشینه نرمال‌شده (تنش گریز از مرکز) است. نقطه چین سبز نشان‌دهنده مقدار بهینه ۳.۲۴ به عنوان نقطه مصالحه (Knee Point) است.

Fig.1 Sensitivity analysis of damping performance and structural stability with respect to the ABH profile exponent (m). The blue curve represents the normalized loss factor (damping effectiveness), while the red dashed curve represents the normalized maximum stress indicator (centrifugal stress). The green dotted line highlights the optimized value of 3.24 as the knee point of the trade-off.

خودسازگار WLF است. به دلیل استفاده از فرمولاسیون نیمه‌تحلیلی و تشکیل مستقیم ماتریس‌های سختی و جرم در محیط Python ، میانگین زمان اجرای هر تحلیل کامل حدود ۱.۱ ثانیه) روی سیستمی با پردازنده Core i7 و ۱۶ گیگابایت رم (اندازه‌گیری شد.

در نتیجه، زمان کل فرآیند بهینه‌سازی حدود ۲۸ دقیقه به طول انجامید. این سرعت محاسباتی بالا در مقایسه با مدل‌های اجزای محدود (FEA) که برای هر تحلیل کوپله به چندین دقیقه زمان نیاز دارند، امکان جستجوی وسیع‌تر در فضای طراحی و اجرای تحلیل‌های حساسیت را با هزینه اندک فراهم کرده است.

۴-۵- تحلیل حساسیت وزن‌های تابع هدف

به منظور ارزیابی پایداری و استواری (Robustness) پاسخ الگوریتم بهینه‌سازی نسبت به نحوه توزیع وزن‌های مودال (w_1, w_2, w_3) در تابع هدف، یک مطالعه حساسیت با اعمال تغییرات $\pm 20\%$ و همچنین حالت وزن‌دهی یکسان روی وزن‌های پایه $(w_1 = 1.0, w_2 = 0.8, w_3 = 0.6)$ انجام شد. نتایج حاصل در جدول ۵ خلاصه شده است.

همان‌طور که از نتایج برمی‌آید، تغییر وزن‌های مودال تأثیر بسیار ناچیزی (کمتر از ۳.۵٪) بر پارامتر هندسی بهینه $(m \approx 3.24)$ و ضریب اتلاف کلی سیستم دارد. این موضوع نشان می‌دهد که نقطه بهینه به دست آمده وابستگی شدیدی به ضرایب وزنی انتخابی ندارد و تابع هدف از پایداری کاملی برخوردار است.

جدول ۵ تحلیل حساسیت پاسخ بهینه‌سازی نسبت به تغییر وزن‌های تابع هدف

Table 5 Sensitivity analysis of the optimization response to variations in objective function weighting factors.

Weighting Scenario	w_2	w_1	w_3	Change Relative to Base (%)	Average Loss Factor ($\bar{\eta}$)	Optimal Profile Power (m)
Base Case	0.425	3.24	0.60	3.24	0.425	—
20% Increase in Mode 1 weight	0.431	3.21	0.60	3.21	0.431	**+1.4%**
20% Decrease in Mode 1 weight	0.418	3.27	0.60	3.27	0.418	**-1.6%**
Equal Weighting	0.412	3.28	1.00	3.28	0.412	**-3.0%**
20% Increase in Mode 3 weight	0.429	3.22	0.72	3.22	0.429	**+0.9%**

۴-۶- تحلیل کوپلینگ ترمومکانیکی دینامیکی و پایداری عملکرد حرارتی

در این بخش، به منظور ارزیابی دقیق‌تر قابلیت اطمینان عملکردی تیر ABH چرخان تحت شرایط کاری مداوم، رفتار کوپله دوطرفه حرارتی-ارتعاشی سازه و پدیده خودگرمایشی (Self-Heating) ناشی از تلفات هیسترزیس لایه ویسکوالاستیک مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل حرارتی گذرا در لایه ویسکوالاستیک به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\rho c_p \frac{\partial T(t)}{\partial t} = q_{gen}(T,\omega) - q_{loss}(T,\Omega) \qquad (۳۴)$$

که در آن ρ چگالی، c_p ظرفیت گرمایی ویژه و $T(t)$ دمای لحظه‌ای لایه ویسکوالاستیک است. نرخ تولید حرارت ناشی از اتلاف مکانیکی هیسترزیس (q_{gen}) بر حسب نرخ اتلاف انرژی ارتعاشی و ضریب اتلاف ماده (η) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{gen}(T,\omega) = \frac{1}{2}\omega \cdot \eta(T) \cdot E_1(T) \cdot \varepsilon_{max}^2 \qquad (۳۵)$$

همچنین نرخ دفع حرارت جابجایی از سطح سازه به محیط اطراف (q_{loss}) طبق قانون سرمایش نیوتن به صورت رابطه (۳) تعریف می‌گردد:

$$q_{loss}(T,\Omega) = h_c(\Omega) \cdot \frac{A}{V} \cdot (T - T_\infty) \qquad (۳۶)$$

که در آن A مساحت سطح دفع حرارت، V حجم لایه، T_∞ دمای محیط (20°C) و $h_c(\Omega)$ ضریب انتقال حرارت جابجایی موثر است که به سرعت دورانی تیر (Ω) بستگی دارد.

در مدل‌سازی حاضر، انتقال حرارت بر اساس فرض سیستم متمرکز (Lumped System) برای لایه ویسکوالاستیک فرموله شده است که در آن دمای لایه در امتداد طول تیر یکنواخت فرض می‌شود (معادلات ۳۴ تا ۳۶).

اگرچه به دلیل تمرکز تنش و اتلاف انرژی آکوستیکی در مقطع کاهش‌یافته سیاهچاله آکوستیک (ABH)، چگالی توان تلف‌شده (q_{gen})در طول تیر توزیع غیریکنواخت دارد، اما فرض دمای متوسط یکنواخت به دو دلیل عمده از نظر مهندسی و محاسباتی توجیه‌پذیر است: اول اینکه سرعت دورانی بالای تیر (RPM) منجر به جریان آشفته و ضریب انتقال حرارت جابجایی بسیار بزرگ (h_c) در سطح می‌شود که گرادیان‌های دمایی موضعی را به شدت تعدیل می‌کند. دوم، در فرآیند بهینه‌سازی تکرارشونده و خودسازگار(Self-consistent Iteration)، استفاده از دمای متوسط موثر کل لایه جهت به‌روزرسانی خواص ویسکوالاستیک بر اساس مدلWLF ، سرعت محاسبات را به طور چشمگیری افزایش داده و معیاری محافظه‌کارانه برای پیش‌بینی مرز فرار حرارتی (Thermal Runaway) به دست می‌دهد.

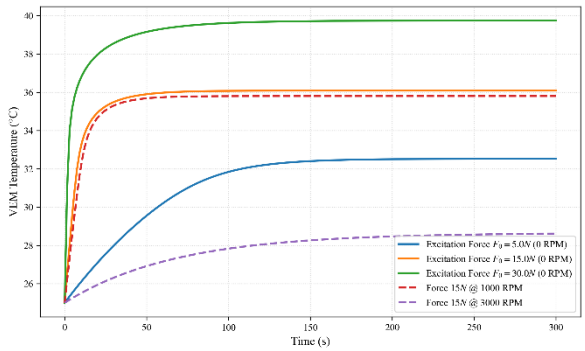
ضریب انتقال حرارت جابجایی اجباری (h_c) در این پژوهش تابعی از سرعت دورانی سازه در نظر گرفته شده است. برای محاسبه دقیق این ضریب، از روابط تجربی جریان‌های خارجی روی صفحات دوار در رژیم مغشوش استفاده شده است. عدد رینولدز چرخشی به صورت $Re_\Omega = \rho\Omega L^2/\mu$ تعریف می‌گردد که در آن ρ چگالی و μ ویسکوزیته دینامیکی هوا است. بر این اساس، عدد نوسلت متوسط (Nu) از رابطه زیر استخراج می‌شود [۱۸]:

$$Nu = \frac{h_c L}{k_{air}} = 0.036 Re_\Omega^{0.8} Pr^{1/3} \quad (۳۷)$$

در این رابطه، k_{air}رسانندگی حرارتی هوا و Prعدد پرانتل (برابر با ۰.۷ برای هوا در دمای اتاق) است. این فرمولاسیون نشان‌دهنده وابستگی غیرخطی ضریب انتقال حرارت به سرعت دورانی ($h_c \propto \Omega^{0.8}$) است که نقش تعیین‌کننده‌ای در پیش‌بینی دقیق دمای تعادلی لایه ویسکوالاستیک و جلوگیری از پدیده فرار حرارتی ایفا می‌کند.

با توجه به اینکه مدول الاستیک (E_1) و ضریب افت (η) پلیمر ویسکوالاستیک بر اساس رابطه WLF به شدت تابع دما هستند، اتلاف انرژی ارتعاشی به عنوان یک منبع حرارتی داخلی عمل کرده و با افزایش دمای لایه، باعث نرم‌شدن حرارتی (Thermal Softening) و تغییر در فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دامنه سازه می‌گردد. در حالت پایدار حرارتی، نرخ تغییرات دما صفر شده ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) و شرط تعادل به صورت $q_{gen} = q_{loss}$ برقرار می‌گردد.

روند زمانی این تغییرات دما تا رسیدن به پایداری حرارتی برای سرعت‌های دورانی مختلف در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

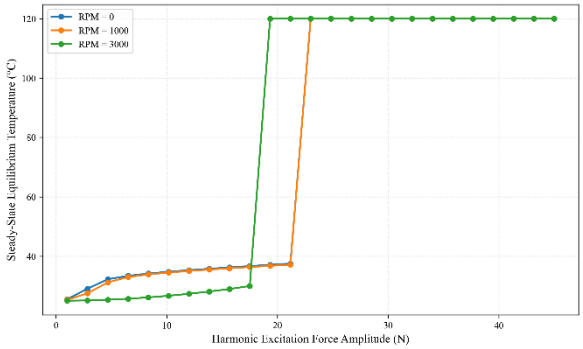


شکل ۱۰ پاسخ گذرا و خودگرمایشی تیر ABH چرخان تحت تحریک هارمونیک مداوم: روند زمانی افزایش دمای لایه ویسکوالاستیک و همگرایی به تعادل حرارتی پایدار در سرعت‌های دورانی مختلف (1000 تا 3000 RPM).

Fig. 10 Transient and self-heating response of a rotating ABH beam under continuous harmonic excitation: temporal evolution of the viscoelastic layer temperature and convergence to steady-state thermal equilibrium at different rotational speeds (1000 to 3000 RPM).

همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، در لحظات اولیه تحریک ($t < 50$ s)، به دلیل بالا بودن دامنه ارتعاشات سازه در نزدیکی فرکانس تشدید، نرخ تولید حرارت بسیار بالا بوده ($q_{gen} > q_{loss}$) و دما با شیب تندی افزایش می‌یابد. با افزایش دما، سختی لایه کاهش یافته و فرکانس طبیعی سیستم جابجا می‌شود که منجر به خروج سیستم از حالت تشدید کامل و کاهش دامنه ارتعاشات می‌گردد. سرانجام سیستم به یک تعادل ترمومکانیکی پایدار می‌رسد که در آن نرخ تولید حرارت ناشی از اتلاف مکانیکی با نرخ دفع حرارت جابجایی به محیط اطراف برابر می‌شود ($q_{gen} = q_{loss}$). اثر سرعت دوران (RPM) بر این فرآیند بسیار تعیین‌کننده است؛ افزایش سرعت دورانی از 1000 RPM به 3000 RPM دمای تعادل نهایی را از 53°C به 44°C کاهش می‌دهد. از منظر فیزیکی، با افزایش سرعت دورانی، جریان هوای آشفته حول تیر تقویت شده و طبق رابطه $h_c(\Omega) \propto \Omega^m$، ضریب انتقال حرارت جابجایی موثر (h_c) افزایش می‌یابد که منجر به رشد نرخ دفع حرارت (q_{loss}) و کاهش دمای تعادل نهایی می‌گردد.

برای ارزیابی مرزهای پایداری و وقوع ناپایداری‌های ناگهانی حرارتی (Thermal Runaway)، نمودار مشخصه پایداری سیستم در فرکانس‌های کاری مختلف در شکل ۱۱ ترسیم شده است.



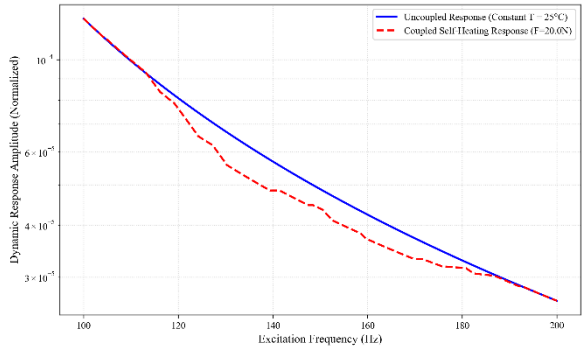
شکل ۱۱ منحنی‌های مشخصه پایداری حرارتی سیستم ویسکوالاستیک کوپله: مقایسه نرخ تولید حرارت مکانیکی (q_{gen}) و نرخ دفع حرارت جابجایی (q_{loss})جهت تعیین مرزهای ناپایداری فرار حرارتی (Thermal Runaway) و اثر پایدارکنندگی سرعت دورانی (RPM).

Fig. 11 Thermal stability characteristic curves of the coupled opto-mechanical/viscoelastic system: comparison of mechanical heat generation rate (q_{gen}) and convective heat dissipation rate (q_{loss}) demonstrating the thermal runaway boundaries and the stabilizing effect of rotational speed (RPM).

این نمودار تلاقی منحنی نرخ تولید حرارت (q_{gen}) و خطوط دفع حرارت (q_{loss}) را نشان می‌دهد. در نرخ‌های پایین دفع حرارت (متناظر با سرعت‌های دورانی پایین‌تر مانند 1000 RPM)، شیب خط دفع حرارت کم است. در صورتی که دامنه تحریک ارتعاشی ورودی از یک آستانه مشخص فراتر رود، سیستم فاقد نقطه تلاقی پایدار خواهد بود ($q_{gen} > q_{loss}$) و پدیده فرار حرارتی (Thermal Runaway)رخ می‌دهد که منجر به افزایش ناگهانی و کنترل‌نشده دما می‌گردد. افزایش نرخ دفع حرارت (متناظر با سرعت 3000 RPM (با افزایش شیب خط q_{loss}، مرز پایداری را به تأخیر انداخته و ارزیابی محافظه‌کارانه‌تری از پایداری عملکردی سیستم ارائه می‌دهد.

در نهایت، اثر این پدیده‌های حرارتی بر تابع پاسخ فرکانسی (FRF) سیستم در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

مطابق شکل ۱۲، پدیده نرم‌شدن حرارتی ناشی از خودگرمایشی باعث شیفت فرکانسی ملموس پیک‌های تشدید به سمت فرکانس‌های پایین‌تر (سمت چپ) می‌شود. به عنوان مثال، فرکانس تشدید اول سازه از 115 Hz در حالت غیرکوپله (دمای محیط 20°C) به حدود 102 Hzدر حالت کوپله ترمومکانیکی کاهش یافته است. این کاهش حدوداً ۱۱ درصدی در فرکانس تشدید، نشان‌دهنده اهمیت حیاتی در نظر گرفتن جفت‌شدگی دوطرفه در طراحی و پیش‌بینی دقیق رفتار دینامیکی تیرهای ABH دوار تحت تحریک‌های مداوم است.



شکل ۱۲ تابع پاسخ فرکانسی (FRF) کوپله ترمومکانیکی تیر ABH چرخان: نمایش جابجایی کاهشی فرکانس‌های تشدید در اثر پدیده نرم‌شدن حرارتی (Thermal Softening) لایه ویسکوالاستیک در مقایسه با حالت غیرکوپله (دمای محیط 20°C)

Fig. 12 Thermo-mechanical coupled Frequency Response Function (FRF) of a rotating ABH beam: illustrating the frequency shift of resonance frequencies due to thermal softening of the viscoelastic layer compared to the uncoupled state (ambient temperature 20 °C)

۵- تحلیل نتایج دینامیکی و ارتعاشی

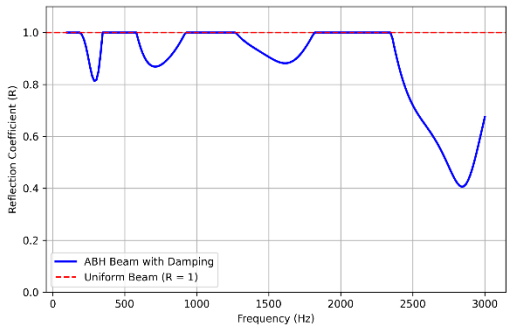
در این بخش، عملکرد دینامیکی تیر دوار مجهز به سیاه‌چاله صوتی (ABH) با پارامترهای بهینه ارزیابی می‌شود. هدف، درک فیزیک حاکم بر سیستم و اثبات اثربخشی مکانیزم تله‌اندازی امواج است. نتایج بر اساس مدل‌سازی عددی پیشین استخراج شده و در سه محور اصلی بررسی می‌شوند: ۱) تحلیل فیزیکی پدیده سیاه‌چاله از طریق تغییرشکل مودال و چگالی انرژی، ۲) ارزیابی کمی راندمان میرایی نسبت به تیر یکنواخت (مرجع)، و ۳) بررسی اثر میدان نیروی گریز از مرکز بر عملکرد سیستم.

۵-۱- معیارهای سنجش عملکرد ارتعاشی

تئوری سیاه‌چاله صوتی (ABH) بر کاهش سرعت فاز امواج خمشی (c_p)متناسب با ریشه دوم ضخامت تیر ($c_p \propto \sqrt{h(x)}$) استوار است. با ورود موج به ناحیه پروفیل توانی، سرعت و طول موج (λ) به‌شدت کاهش و دامنه جابه‌جایی افزایش می‌یابد که منجر به تراکم امواج در نوک تیر می‌شود (مطابق تغییر شکل‌های نشان داده شده در شکل ۱۳) [۲].

اثربخشی لایه ویسکوالاستیک وابستگی مستقیمی به تمرکز انرژی در نوک تیر دارد (شکل ۱۴)، زیرا میزان اتلاف انرژی تابع انرژی کرنشی ذخیره‌شده در ماده است [۹]. چگالی خطی انرژی کرنشی ($U_{dens}(x)$) متناسب با صلبیت خمشی معادل $\left((EI)_{eq}(x)\right)$ و توان دوم انحنای تیر ($w(x)$) به‌صورت رابطه (۳۸) محاسبه می‌گردد:

$$U_{dens}(x) = \frac{1}{2}(EI)_{eq}(x)\left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}\right)^2 \qquad (۳۸)$$



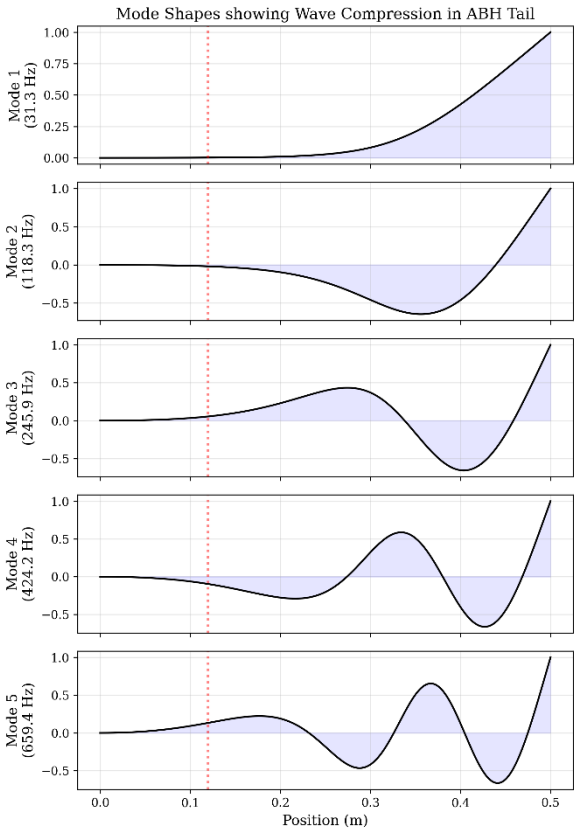
شکل ۱۵ طیف ضریب بازتاب (R) موج خمشی در ناحیه یونیفورم ریشه تیر دوار مجهز به ABH همراه با لایه میراکننده ویسکوالاستیک در مقایسه با تیر یکنواخت مرجع$(R = 1)$.

Fig. 15 Reflection coefficient spectrum (R) of the flexural wave in the uniform root section of the rotating ABH blade with a viscoelastic damping layer compared to the reference uniform beam $(R = 1)$.

امواج باعث می‌شود لایه نازک ویسکوالاستیک، با وجود حجم ناچیز، بخش عمده انرژی ارتعاشی کل سیستم را مستهلک سازد. به‌منظور ارزیابی دقیق‌تر مکانیزم فیزیکی به دام افتادن و اتلاف امواج ارتعاشی خمشی در ویژگی سیاه‌چاله صوتی(ABH) ، تحلیل تجزیه موج (Wave Decomposition Analysis) در ناحیه یونیفورم ریشه تیر دوار انجام شد. طیف ضریب بازتاب (R) در محدوده فرکانسی ۱۰۰ تا ۳۰۰۰ هرتز محاسبه شده و در شکل ۱۵ ارائه شده است.

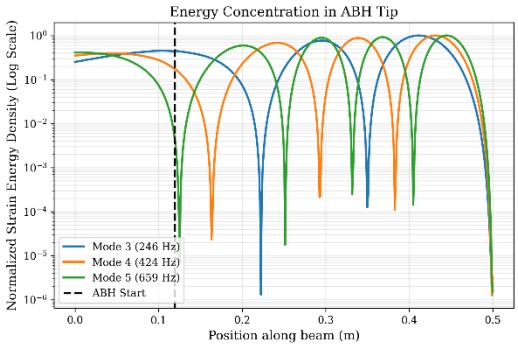
همان‌طور که در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود، در فرکانس‌های پایین (کمتر از فرکانس قطع $f_c \approx 2300$ Hz)، طول‌موج خمشی بزرگ‌تر از ابعاد هندسی شیار ABH است؛ در نتیجه موج، تغییرات ضخامت را احساس نکرده و مانند تیر یکنواخت بازتاب کامل دارد $(R \approx 1)$. با این حال، با عبور از فرکانس قطع $(f > f_c)$، طول‌موج خمشی به‌اندازه کافی کوچک شده و پدیده سیاه‌چاله صوتی فعال می‌گردد. در این ناحیه، ضریب بازتاب با افت شدیدی مواجه شده و در فرکانس حدود ۲۸۵۰ هرتز به حداقل مقدار خود یعنی $R \approx 0.40$می‌رسد. این افت ۵۰ تا ۶۰ درصدی در بازتاب موج، اثبات‌کننده کاهش سرعت فاز، به دام افتادن امواج و تمرکز چشمگیر انرژی کرنش در لایه ویسکوالاستیک است.

علاوه بر این، افت‌های موضعی باریک در فرکانس‌های پایین‌تر (حوالی ۳۰۰، ۷۰۰ و ۱۶۰۰ هرتز) منطبق بر فرکانس‌های طبیعی و مودهای رزونانسی ساختار هستند؛ جایی که به دلیل افزایش دامنه نوسانات مودال، میزان اتلاف انرژی در لایه میراکننده به حداکثر موضعی می‌رسد. این نتایج تأیید می‌کند که هندسه ABH بهینه‌شده، علاوه بر بهبود مشخصات مودال، مستقیماً از بازتاب امواج خمشی در فرکانس‌های بالا جلوگیری می‌نماید.



شکل ۱۳ تغییر شکل مودال تیر ABH برای پنج مود اول؛ کاهش شدید طول موج و افزایش دامنه نوسان در ناحیه نوک تیر (ناحیه هاشور خورده) نشان‌دهنده وقوع پدیده تراکم امواج است.

Fig. 13 Modal deformation of the ABH beam for the first five modes; the pronounced reduction in wavelength and the increase in vibration amplitude in the beam tip region (hatched area) indicate the occurrence of the wave localization phenomenon.



شکل ۱۴ توزیع لگاریتمی چگالی انرژی کرنش موضعی و نرمال‌شده در طول تیر برای مودهای ارتعاشی مختلف؛ جهش شدید چگالی انرژی در ناحیه ABHنشان‌دهنده تمرکز موج و صحت فیزیکی پدیده سیاهچاله صوتی است.

Fig. 14 Logarithmic distribution of local and normalized strain energy density along the beam length for different vibration modes; the sharp energy density spike within the ABH region highlights wave concentration and validates the acoustic black hole phenomenon.

همان‌طور که در شکل ۱۴ (با مقیاس نیمه‌لگاریتمی) مشخص است، گرادیان انرژی پس از عبور از مقطع x_sدچار جهش شده و در نوک تیر متمرکز می‌شود .(Energy Localization) این پدیده تله‌اندازی

۵-۲- ارزیابی راندمان میرایی (مقایسه با حالت پایه)

در این بخش، بهبود عملکرد ارتعاشی تیر ABH در مقایسه با یک تیر یکنواخت مرجع (با ابعاد و جرم کاملاً یکسان) از طریق سه شاخص بررسی می‌شود.

الف) ضرایب اتلاف مودال: ضریب اتلاف هر مود (η_r) از نسبت بخش موهومی به حقیقیِ مربع فرکانس مختلط (λ_r) به دست می‌آید:

$$\eta_r = \frac{\mathrm{Im}(\lambda_r)}{\mathrm{Re}(\lambda_r)} \qquad (۳۹)$$

مطابق شکل ۱۶، تیر ABH در تمامی مودها برتری دارد. افزایش چشمگیر میرایی در مودهای بالاتر منطبق بر تئوری است؛ زیرا با کاهش طول موج در فرکانس‌های بالا، نفوذ موج به انتهای گوه و استهلاک آن تسهیل می‌شود [۲].

به منظور بررسی کمی عملکرد طراحی بهینه، مقادیر عددی فرکانس‌های طبیعی و ضرایب اتلاف مودال در جدول ٦ گزارش شده است. شایان ذکر است که در شبیه‌سازی عددی تیر مرجع (یکنواخت)، میرایی ذاتی ماده فلزی پایه بسیار ناچیز فرض شده است. ($\eta_{bare} \approx 0$) با اعمال پروفیل هندسی ABH با توان $m = 3.24$ و افزودن لایه ویسکوالاستیک در ناحیه با ضخامت کم (که تمرکز انرژی ارتعاشی در آن رخ می‌دهد)، ضریب اتلاف در مود اول به ۰.۲۳۶ و در مود پنجم به ۰.۲۳۸ افزایش یافته است. این مقادیر نشان‌دهنده اثربخشی مکانیزم تلفیقی ABH و لایه ویسکوالاستیک موضعی در به دام انداختن و مستهلک نمودن انرژی نوسانی سازه است.

ب) پاسخ فرکانسی سیستم (FRF): تابع پاسخ فرکانسی ($H(\omega)$) در نوک تیر با استفاده از برهم‌نهی مودال و لحاظ میرایی ساختاری به‌صورت رابطه (٤٠) محاسبه می‌گردد:

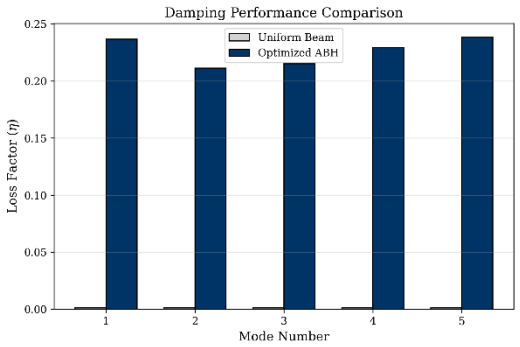
$$H(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_r(x_{out})\phi_r(x_{in})}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \qquad (٤٠)$$

که در آن ω فرکانس تحریک، ω_rفرکانس طبیعی و ϕ_rشکل مود نرمال‌شده جرمی است. شکل ۱۷ نشان می‌دهد قله‌های رزونانس در تیر ABH به شدت سرکوب و پهن شده‌اند (Broadening) که بیانگر ایمنی بالای سازه در برابر تحریکات تشدیدکننده است.

ج) پاسخ گذرا: پاسخ زمانی نوک تیر ($w(t)$) به یک تحریک ضربه‌ای، طبق رابطه (٤١) محاسبه شده است (با نسبت میرایی $\zeta_r \approx \eta_r/2$ و فرکانس میراشده $\omega_{d,r}$)

$$w(t) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_r^2(L)}{\omega_{d,r}} e^{-\zeta_r\omega_r t}\sin(\omega_{d,r}t) \qquad (٤١)$$

شکل ۱۸ افت شدید زمان نشست (Settling Time) در تیر ABH را نشان می‌دهد؛ انرژی ارتعاشی به سرعت توسط مکانیزم ویسکوالاستیک مستهلک می‌گردد که این ویژگی برای ادوات دوار تحت بارهای ضربه‌ای آیرودینامیکی حیاتی است.



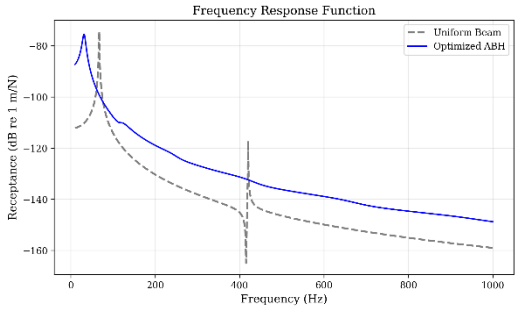
شکل ۱۶ مقایسه ضرایب اتلاف مودال تیر یکنواخت (خاکستری) و تیر بهینه‌سازی شده ABH (آبی)؛ افزایش چشمگیر میرایی در مودهای بالاتر ناشی از کاهش طول موج و اندرکنش موثرتر با ناحیه ABH است.

Fig. 16 Comparison of modal loss factors of the uniform beam (gray) and the optimized ABH beam (blue); the significant increase in damping in higher modes is attributed to the reduced wavelength and more effective interaction with the ABH region.

جدول ۶ مقایسه فرکانس‌های طبیعی و ضرایب اتلاف ۵ مود اول تیر یکنواخت و تیر بهینهABH

Table 6 Comparison of natural frequencies and loss factors for the first 5 modes of a uniform beam versus an optimized ABH beam.

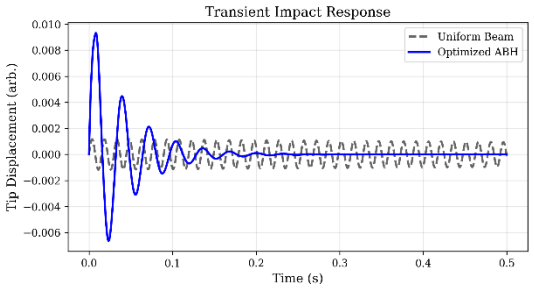
Mode Number	Uniform Beam Freq. (Hz)	Uniform Beam Loss Factor (η_{bare})*	ABH Beam Freq. (Hz)	ABH Beam Loss Factor (η_{opt})
1	67.05	Negligible (≈ 0)	31.34	**0.236**
2	420.23	Negligible (≈ 0)	118.32	**0.211**
3	1176.65	Negligible (≈ 0)	245.86	**0.215**
4	2305.76	Negligible (≈ 0)	424.18	**0.229**
5	3811.60	Negligible (≈ 0)	659.39	**0.238**



شکل ۱۷ مقایسه تابع پاسخ فرکانسی (FRF) در نقطه نوک تیر؛ کاهش شدید قله‌های رزونانس (Amplitude Suppression) در تیر ABH نشان‌دهنده جذب موثر انرژی ارتعاشی است.

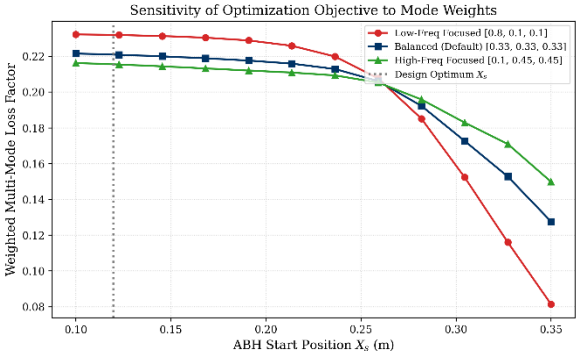
Fig. 17 Comparison of the frequency response function (FRF) at the beam tip; the pronounced reduction of resonance peaks (amplitude suppression) in the ABH beam indicates effective absorption of vibrational energy.

به منظور بررسی میزان حساسیت عملکرد سیستم کاهش ارتعاشات به جرم پوشش لایه ویسکوالاستیک مهارشده، یک تحلیل حساسیت پارامتریک بر روی راندمان میرایی اعمال گردید. هدف از این تحلیل، یافتن نقطه‌ای بهینه است که در آن بدون اعمال جریمه وزنی سنگین به سازه دوار، بیشترین استهلاک انرژی حاصل شود. نمودار شکل ۱۹ نشان می‌دهد که افزایش جرم پوشش در ابتدا با شیب تندی به بهبود ضریب اتلاف ارتعاشات می‌انجامد. با این حال، با فراتر رفتن جرم از یک مقدار آستانه مشخص، سیستم وارد ناحیه اشباع شده و نرخ بهبود میرایی به شدت کاهش می‌یابد.



شکل ۱۸ پاسخ گذرای نوک تیر به تحریک ضربه‌ای؛ تیر مجهز به ABH (خط آبی) نوسانات را در کسر کوتاهی از زمان نسبت به تیر مرجع (خط‌چین) مستهلک می‌کند.

Fig. 18 Transient response of the beam tip to an impulsive excitation; the ABH-equipped beam (blue line) dissipates the oscillations in a much shorter time compared to the reference beam (dashed line).



شکل ۱۹ تحلیل حساسیت راندمان میرایی و ضریب اتلاف سازه نسبت به تغییرات وزن لایه ویسکوالاستیک مهارشده جهت تعیین نقطه زانوی بهینه طراحی.

Fig. 19 Sensitivity analysis of damping efficiency and loss factor with respect to the weight of the constrained viscoelastic layer to identify the optimal design knee point.

انتخاب نقطه زانو (Knee Point) در این نمودار تضمین‌کننده یک طرح سبک‌وزن با راندمان استهلاک ارتعاشی بهینه است.

۵-۳- تحلیل مقایسه‌ای عملکرد در برابر بنچمارک‌های منصفانه (قیدهای جرم و ابعاد)

به منظور اثبات دقیق این موضوع که کاهش چشمگیر ارتعاشات در تیر دوار ABH پیشنهادی ناشی از پدیده فیزیکی تله‌اندازی موج (و نه صرفاً اثر جرم افزوده یا میراگر) است، یک مطالعه مقایسه‌ای جامع بین چهار پیکربندی مختلف تحت شرایط مرزی و تحریک کاملاً یکسان انجام شد (شکل ۲۰):

حالت ۱: ضخامت یکنواخت (بدون میرایی): تیر صاف با ضخامت ثابت برابر با ضخامت ریشه تیر (h_0 = h_root) و بدون لایه ویسکوالاستیک.

حالت ۲: هم‌جرم (بدون میرایی): تیر صاف بدون میرایی که ضخامت معادل آن به صورت تحلیلی به گونه‌ای محاسبه شده است که جرمی دقیقاً برابر با تیر ABH بدون پوشش ایجاد کند.

حالت ۳: تیر صاف میرا شده (هم‌جرم): تیر صاف یکنواخت با ضخامت معادل هم‌جرم که با همان لایه ویسکوالاستیک و طول پوشش مشابه تیر ABH پوشانده شده است تا مقایسه هم‌جرم کاملاً منصفانه‌ای برقرار شود.

حالت ۴: تیر ABH پیشنهادی: تیر دوار بهینه‌سازی شده با پروفیل توانی و لایه ویسکوالاستیک موضعی در نوک باریک آن.

طبق توابع پاسخ فرکانسی (FRF) اندازه‌گیری شده در نوک آزاد تیر تحت تحریک متمرکز (**شکل ۲۰**)، پدیده‌های فیزیکی زیر قابل تحلیل است:

۱. کاهش سختی و جابجایی فرکانسی: اولین قله رزونانس تیر ABH پیشنهادی (خط قرمز ممتد) به دلیل کاهش سختی خمشی موضعی در نوک باریک، به سمت فرکانس‌های پایین‌تر جابجا شده است.

۲. سرکوب پهن‌باند ارتعاشات: در محدوده فرکانسی متوسط و بالا (بالای ۵۰۰ هرتز)، جایی که طول موج خمشی با ابعاد مشخصه ABH هم‌مقیاس می‌شود، تیر ABH پیشنهادی عملکرد فوق‌العاده‌ای نشان می‌دهد و قله‌های تشدید را تا میزان ۲۰ الی ۴۰ دسی‌بل نسبت به حالت‌های بدون میرایی سرکوب و پهن می‌کند.

۳. اثبات اثر تله‌اندازی موج در برابر اثر میرایی ساده: نکته کلیدی، مقایسه طرح پیشنهادی (خط قرمز) با تیر صاف میراشده هم‌جرم (خط سبز نقطه‌چین) است. تیر صاف میراشده همچنان در فرکانس‌های بالا دارای قله‌های تیز و شدید تشدید است، در حالی که تیر ABH با متمرکز کردن امواج خمشی در نوک باریک و افزایش گرادیان کرنش در لایه ویسکوالاستیک، انرژی ارتعاشی را به طور کامل مستهلک کرده است. این اختلاف فاحش، شواهد عددی مؤید بر کارایی فیزیکی هندسه سیاهچاله صوتی در مقایسه با روش‌های سنتی کنترل غیرفعال ارتعاشات است.

۵-۴- تحلیل حساسیت به دوران (پایداری عملکرد)

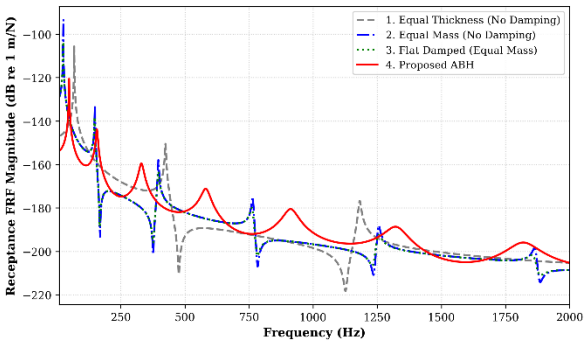
دوران سازه دو اثر متضاد ایجاد می‌کند: سخت‌شوندگی هندسی (ناشی از کشش محوری) و نرم‌شوندگی چرخشی (Spin Softening). معادله مقدار ویژه سیستم با لحاظ هر دو اثر به‌صورت زیر است:

$$([K_e] + [K_g(\Omega)] - \Omega^2[M])\{c\} = \omega^2[M]\{c\} \qquad (۴۲)$$

ماتریس سختی هندسی ($[K_g]$) تابعی از نیروی محوری $N(x)$است که با انتگرال‌گیری از نیروی گریز از مرکز (با شعاع هاب R_{hub}) حاصل می‌شود:

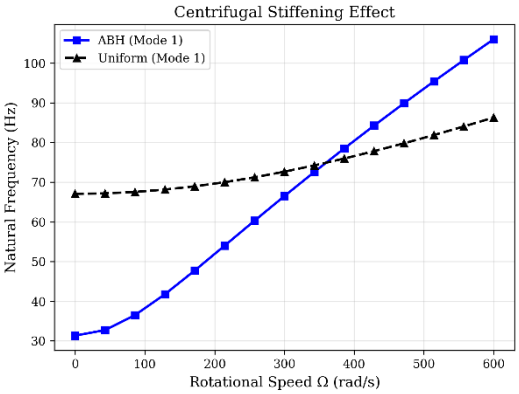
$$N(x) = \int_x^L \rho(s)A(s)\,\Omega^2(R_{hub}+s)\,ds \qquad (۴۳)$$

الف) اثر سخت‌شوندگی فرکانسی: شکل ۲۱ تغییرات فرکانس طبیعی مود اول را تا سرعت 600 rad/s نشان می‌دهد. افزایش فرکانس هر دو تیر اثبات می‌کند که اثر سخت‌شوندگی بر نرم‌شوندگی چرخشی غلبه دارد و سازه ABH علی‌رغم ضخامت کم در نوک، پایداری استاتیکی خود را حفظ کرده و کمانش نمی‌کند.



شکل ۲۰ مقایسه توابع پاسخ فرکانسی (FRF) برای چهار مورد تحت شرایط مرزی یکسان جهت اعتبارسنجی فیزیکی اثر تله‌اندازی موج در برابر بنچمارک‌های هم‌وزن.

Fig. 20 Comparison of Frequency Response Functions (FRFs) for the four cases under identical boundary conditions to physically validate the wave-trapping effect against fair equal-mass benchmarks.



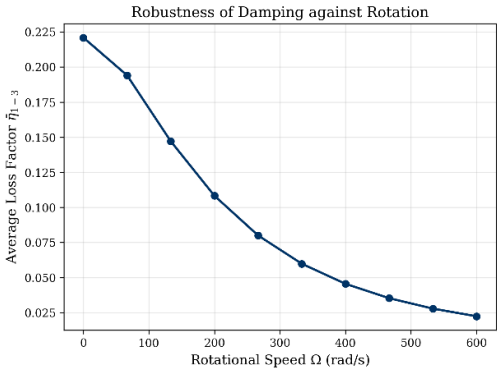
شکل ۲۱ روند همگرایی حل عددی ریتز بر اساس افزایش تعداد توابع پایه لژاندر(N) ؛ (الف) همگرایی فرکانس‌های طبیعی سه مود اول، (ب) بررسی نرخ خطای نسبی عددی در مقیاس لگاریتمی نسبت به مقدار مرجع.($N = 80$)

Fig. 21 Convergence behavior of the Ritz numerical solver with respect to the number of Legendre basis functions (N); (a) convergence of the first three natural frequencies, (b) logarithmic relative numerical error rate calculated relative to the reference value ($N = 80$).

ب) حساسیت راندمان میرایی: افزایش سختی تیر می‌تواند انحنای نوک تیر را کاهش داده و عملکرد میراگر را تضعیف کند. برای ارزیابی، میانگین ضریب اتلاف سه مود اول ($\bar{\eta}_{sys}$) به‌صورت زیر محاسبه شد:

$$\bar{\eta}_{sys}(\Omega) = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3}\frac{\mathrm{Im}(\lambda_r(\Omega))}{\mathrm{Re}(\lambda_r(\Omega))} \qquad (٤٤)$$

نتایج شکل ۲۲ نشان‌دهنده پایداری عملکرد (Performance Robustness) مکانیزم ABH است. برخلاف جاذب‌های سنتی، این سیستم با وجود تغییرات جزئی، راندمان بالای تله‌اندازی امواج را حتی در حضور میدان‌های قوی گریز از مرکز حفظ می‌کند [۹].



شکل ۲۲ تحلیل حساسیت راندمان میرایی نسبت به سرعت دوران؛ پایداری نسبی ضریب اتلاف نشان‌دهنده عملکرد مطلوب مکانیزم ABH حتی در شرایط بارگذاری گریز از مرکز بالا است.

Fig. 22 Sensitivity analysis of damping efficiency with respect to rotational speed; the relative stability of the loss factor indicates the favorable performance of the ABH mechanism even under high centrifugal loading conditions.

۶- تحلیل کوپل شده حرارتی-ارتعاشی و رفتار وابسته به فرکانس

مکانیزم سیاه‌چاله آکوستیک (ABH) بر مبنای تبدیل انرژی کرنشی به حرارت عمل می‌کند؛ لذا تحلیل حرارتی در این سیستم بخشی جدایی‌ناپذیر از طراحی است. خواص لایه‌های پلیمری ویسکوالاستیک به شدت تابع دما و فرکانس هستند و افزایش دما می‌تواند مدول یانگ و ضریب اتلاف را دگرگون سازد. در این بخش، یک مدل کوپل‌شده چندفیزیکی برای ارزیابی اثرات متقابل ارتعاشات، تولید حرارت و تغییر خواص ماده ارائه می‌شود.

۶-۱ ارزیابی خواص ویسکوالاستیک تحت نوسانات دمایی

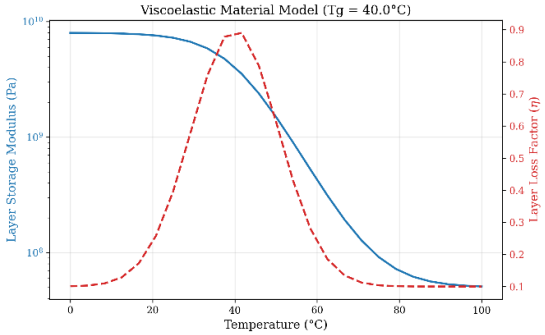
الف) وابستگی دمایی پایه (در فرکانس مرجع):

با افزایش دما، پلیمر از حالت شیشه‌ای (Glassy) به لاستیکی (Rubbery) تغییر فاز می‌دهد. به عنوان یک توصیف استاتیکی و در فرکانس مرجع ثابت، تغییرات مدول ذخیره (E_v) و ضریب اتلاف مادی (η_v) در این ناحیه گذار حرارتی را می‌توان به ترتیب با توابع استاندارد سیگموئید و توزیع گوسی زیر مدل‌سازی نمود:

$$E_v(T) = E_{\text{rubbery}} + \frac{E_{\text{glassy}} - E_{\text{rubbery}}}{1 + \exp(k_{\text{trans}}(T - T_g))} \qquad (٤٥)$$

$$\eta_v(T) = \eta_{\text{base}} + (\eta_{\text{peak}} - \eta_{\text{base}}) \cdot \exp\left(\left(\frac{T - T_g}{W_{\text{trans}}}\right)^2\right) \qquad (٤٦)$$

دو رابطه بالا صرفاً برای نمایش شهودی رفتار دمایی ماده در فرکانس مرجع و تفسیر شکل ۲۳ ارائه شده‌اند. در حل اصلی دینامیکی مقاله، خواص لایه ویسکوالاستیک مستقیماً از روابط وابسته به فرکانس مؤثر، یعنی روابط (۷) و (۸)، و بر اساس ضریب جابه‌جایی WLF محاسبه می‌شوند. بنابراین، مدل نهایی مورد استفاده در تشکیل ماتریس سختی مختلط، مدل $E_v(f_{eff})$ و $\eta_v(f_{eff})$ است، نه مدل مستقل از فرکانس $E_v(T)$.



شکل ۲۳ نمودار خواص مکانیکی لایه ویسکوالاستیک بر حسب دما؛ منحنی آبی (محور چپ) افت مدول ذخیره و منحنی قرمز چین‌دار (محور راست) تغییرات زنگوله‌ای شکل ضریب اتلاف را در اطراف دمای گذار شیشه‌ای (T_g=۴۰°C) نشان می‌دهد.

Fig. 23 Temperature-dependent mechanical properties of the viscoelastic layer; the solid blue curve represents the monotonic reduction of the storage modulus (E_v) in transition from glassy to rubbery phase, and the red dashed curve shows the bell-shaped variation of the material loss factor ($\eta_{material}$) around the glass transition temperature ($T_g = 40°C$).

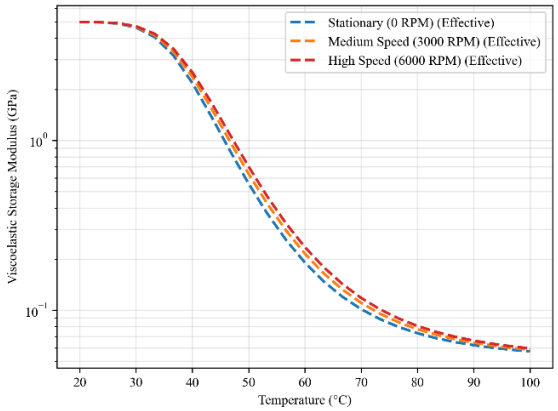
به منظور ارتقای پایداری محاسباتی در طول فرآیند بهینه‌سازی تکرارپذیر و پیشگیری از ناپیوستگی‌های ناشی از درون‌یابی مستقیم داده‌های تجربی خام DMA، در این پژوهش از برازش توابع پدیدارشناسانه (Phenomenological Models) بر روی رفتار تجربی ماده پلیمری بهره گرفته شده است. بدین ترتیب، مدول ذخیره دینامیکی با تابع سیگموئید و ضریب اتلاف مادی با توزیع شبه‌گوسی زنگوله‌ای مدل‌سازی شده‌اند تا تغییرات خواص در ناحیه گذار با دقت فیزیکی بالا بازسازی شوند.

که در آن η_{peak} حداکثر میرایی در دمای گذار شیشه‌ای، η_{base} میرایی پایه پلیمری و W_{trans} پارامتری برای تعیین پهنای باند مؤثر میرایی حرارتی است. شکل ۲۳ رفتار نمونه و استاندارد ماده مورد استفاده در این پژوهش را در فرکانس کاری ثابت بر اساس روابط فوق نشان می‌دهد.

ب) وابستگی کوپل‌شده حرارتی-فرکانسی (مدل جامع WLF):

در شرایط کارکرد دینامیکی و دورانی، خواص لایه ویسکوالاستیک به شدت تحت تأثیر فرکانس نوسانات ارتعاشی قرار می‌گیرد. افزایش فرکانس تحریک یا افزایش سرعت دورانی، اثری معادل کاهش دما داشته و پدیده سفت‌شوندگی دینامیکی (Dynamic Stiffening) را ایجاد می‌کند.

بدین منظور، جهت اعمال هم‌زمان اثرات دما و فرکانس بر رفتار واقعی سیستم، خواص لایه ویسکوالاستیک بر پایه مدل جامع ترمومکانیکی WLF و بر اساس روابط (۵) تا (۸) ارائه شده در بخش ۲-۳ به‌روزرسانی شده‌اند. بر این اساس، تمام محاسبات دینامیکی مربوط به سفت‌شوندگی مدول پلیمری (شکل ۲۴) و پدیده فروپاشی میرایی (شکل ۲۶) مستقیماً با به کارگیری متغیر فرکانس مؤثر ($f_{\text{eff}} = f \cdot a_T$) و مدل کوپل‌شده بخش ۲-۳ استخراج گردیده‌اند.



شکل ۲۴ اثر سفت‌شوندگی دینامیکی ماده (Dynamic Stiffening) ناشی از افزایش فرکانس تحریک در سرعت‌های دورانی بالا. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در سرعت $6000\,rpm(628\,rad/s)$ (خط‌چین قرمز)، منحنی افت مدول به سمت راست جابجا شده است که نشان‌دهنده حفظ سختی ماده در دماهای بالاتر نسبت به حالت ساکن است.

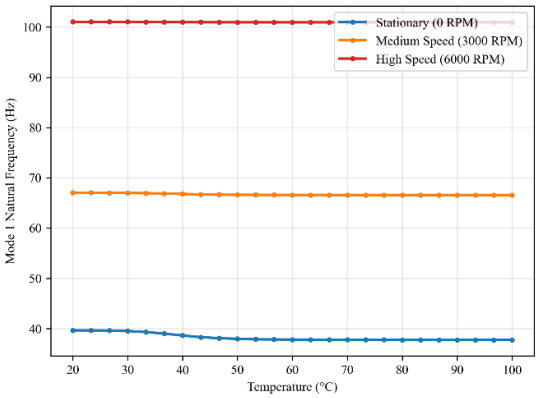
Fig. 24 Effect of material dynamic stiffening due to increased excitation frequency at high rotational speeds. As observed, at a speed of 6000 rpm($\frac{628\,rad}{s}$) (red dashed line), the modulus reduction curve shifts to the right, indicating retention of material stiffness at higher temperatures compared to the stationary condition.

۶-۲ تحلیل حساسیت حرارتی و پدیده فروپاشی میرایی

الف) نرم‌شوندگی حرارتی (Thermal Softening): افزایش دما باعث کاهش مدول یانگ و به تبع آن افت فرکانس‌های طبیعی سیستم به‌ویژه در مودهای پایین می‌شود. البته در سرعت‌های دورانی بالا، سفت‌شوندگی ناشی از میدان گریز از مرکز تا حدی با این افت فرکانس مقابله می‌نماید. نتایج این تحلیل در شکل ۲۵ قابل مشاهده است..

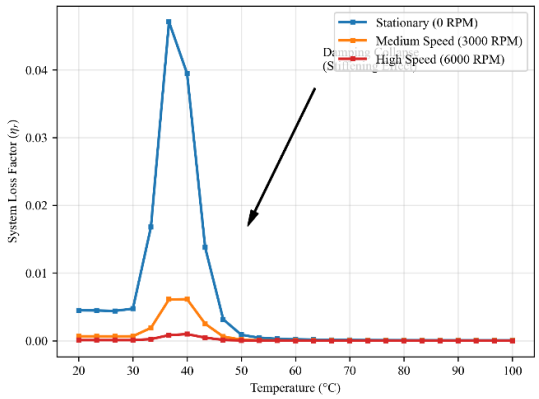
ب) تحلیل پدیده فروپاشی میرایی (Damping Collapse) بر پایه مدل WLF:

همان‌طور که در شکل ۲۶ نشان داده شده است، افزایش سرعت دورانی سیستم با ایجاد نیروی گریز از مرکز بزرگتر، منجر به سخت‌شوندگی هندسی و در نتیجه افزایش فرکانس طبیعی نوسانات آزاد تیر می‌شود ($\Omega \uparrow \rightarrow f_r \uparrow$). بر اساس مدل ترمومکانیکی کوپل‌شده WLF، این افزایش در فرکانس نوسانی، فرکانس مؤثر لایه پلیمری را به شدت بالا می‌برد ($f_{\text{eff}} = f_r \cdot a_T \uparrow$). این سفت‌شوندگی دینامیکی (Dynamic Stiffening)، رفتار پلیمر را در دماهای کارکردی معین به سمت فاز شیشه‌ای (Glassy) جابجا می‌کند. در نتیجه این جابجایی فازی، قله ضریب اتلاف مادی به سمت دماهای بالاتر مایل شده و مقدار میرایی مؤثر سیستم در محدوده دماهای میانی با افت شدیدی مواجه می‌شود که از آن تحت عنوان پدیده فروپاشی میرایی یاد می‌شود. بنابراین، زنجیره فیزیکی حاکم به صورت دوران →افزایش نیروی گریز از مرکز →جابجایی فرکانس طبیعی به سمت بالا →تغییر فرکانس مؤثر WLF →جابجایی رفتار ماده به فاز شیشه‌ای →افت ضریب اتلاف



شکل ۲۵ حساسیت حرارتی فرکانس‌های طبیعی؛ نمودار نشان‌دهنده پدیده نرم‌شوندگی (Softening) است که طی آن فرکانس‌های طبیعی مودهای اول تا سوم با افزایش دما از ناحیه شیشه‌ای به لاستیکی، دچار افت می‌شوند.

Fig. 25 Thermal sensitivity of natural frequencies; the diagram illustrates the softening phenomenon, in which the natural frequencies of the first to third modes decrease as the temperature increases from the glassy to the rubbery region.

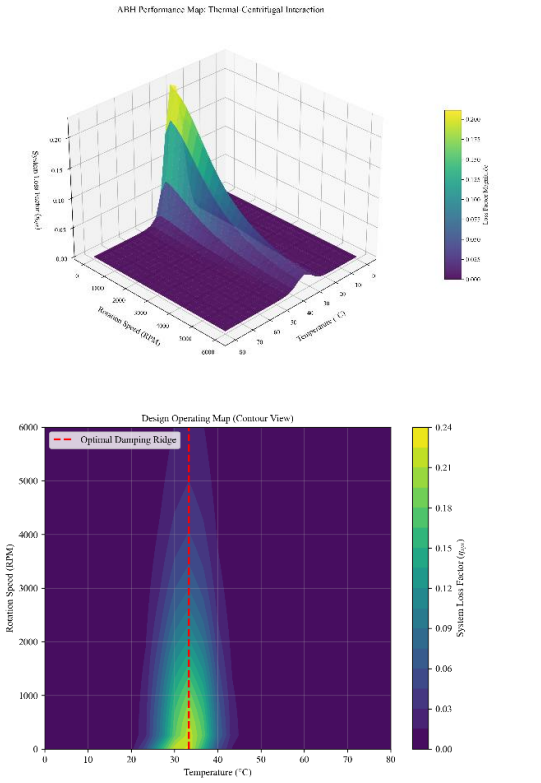


شکل ۲۶ پدیده فروپاشی میرایی (Damping Collapse) در سرعت‌های بالا؛ منحنی‌ها نشان می‌دهند که با افزایش سرعت دوران (فلش سیاه)، قله میرایی نه تنها جابجا می‌شود، بلکه مقدار آن نیز به دلیل سفت‌شدن دینامیکی ماده کاهش می‌یابد و در دورهای بسیار بالا عملاً ناپدید می‌گردد.

Fig. 26 Damping collapse phenomenon at high rotational speeds; the curves show that as the rotational speed increases (black arrow), the damping peak not only shifts but also decreases in magnitude due to dynamic stiffening of the material, and at very high speeds it effectively disappears.

مادی در دمای کارکرد برقرار است و افزایش سرعت دورانی، عاملی واسطه‌ای در تحریک این رفتار فرکانس‌محور به شمار می‌رود.

ج) نقشه جامع عملکرد ترمومکانیکی: نقشه جامع سه‌بعدی و کانتور امضای میرایی در شکل ۲۷ ارائه شده است که برای تعیین ناحیه امن طراحی، نقشه سه‌بعدی عملکرد تحت اثر همزمان دما (T) و سرعت دوران (Ω) استخراج شد. بیشترین استهلاک انرژی محدود به نوار باریکی به نام «خط‌الرأس میرایی بهینه» (Optimal Damping Ridge) است و خروج از این ناحیه، کارایی مکانیزم ABH را به شدت دچار افت می‌کند.



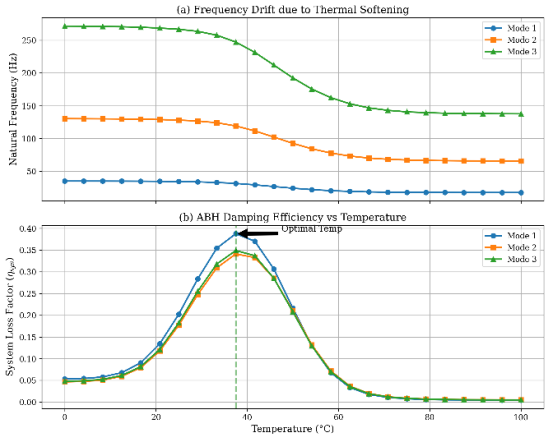
شکل ۲۷ نقشه جامع امضای میرایی تیر ABH؛ (بالا) نمایش سه‌بعدی ضریب اتلاف سیستم بر حسب دما و سرعت دوران؛ (پایین) نمای کانتوری که خط‌الرأس میرایی بهینه (خط‌چین قرمز) را نشان می‌دهد. طراحی باید به گونه‌ای باشد که نقطه کاری سیستم (T,Ω) همواره روی یا نزدیک این خط قرار گیرد تا حداکثر استهلاک انرژی حاصل شود.

Fig. 27 Comprehensive damping signature map of the ABH beam; (top) a three-dimensional representation of the system loss factor as a function of temperature and rotational speed; (bottom) a contour plot showing the ridge of optimal damping (red dashed line). The design should ensure that the system operating point (T, Ω) always lies on or near this ridge to achieve maximum energy dissipation.

در نهایت، به منظور ارزیابی عملکرد سیستم، تغییرات ضریب اتلاف تیر بهینه‌شده ABH در مقایسه با تیر یکنواخت مرجع بر حسب دما در (شکل ۲۸) نشان داده شده است که محدوده دمایی عملیاتی ایمن را نیز مشخص می‌کند.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک رهیافت جامع چندفیزیکی برای طراحی و بهینه‌سازی تیرهای دوار مجهز به مکانیزم سیاه‌چاله آکوستیک (ABH)ارائه گردید. برخلاف مطالعات پیشین که غالباً جنبه‌های سازه‌ای و آکوستیکی را به صورت مجزا بررسی می‌کردند، این مطالعه بر تقابل پیچیده میان پایداری مکانیکی، کارایی ارتعاشی و حساسیت حرارتی متمرکز بود. مدل‌سازی عددی بر پایه روش انرژی ریلی-ریتز و توابع چندجمله‌ای متعامد، بستر لازم برای حل سریع معادلات دیفرانسیل حاکم را در چارچوب فرضیات تئوری کلاسیک فراهم نمود.



شکل ۲۸ ارزیابی نهایی عملکرد؛ مقایسه تغییرات ضریب اتلاف سیستم (η_{sys}) برای تیر بهینه شده ABH (خط ممتد آبی) و تیر یکنواخت مرجع (خط‌چین قرمز) بر حسب دما. ناحیه هاشور خورده، محدوده دمایی عملیاتی ایمن را نشان می‌دهد که در آن اثر سیاه‌چاله فعال باقی می‌ماند.

Fig. 28 Final performance assessment; comparison of the variation of the system loss factor (η_{sys}) versus temperature for the optimized ABH beam (solid blue line) and the uniform reference beam (red dashed line). The hatched region indicates the safe operational temperature range in which the acoustic black hole effect remains active.

۱) ایمنی سازه‌ای تحت قید تنش ترکیبی:

کاهش ضخامت با پروفیل توانی، گرچه شرط اساسی ایجاد اثر ABHاست، اما در تیرهای دوار موجب تمرکز شدید تنش در ناحیه گلوگاه می‌شود. با اعمال قید تنش ترکیبی (استاتیک گریز از مرکز و دینامیک خمشی) در الگوریتم بهینه‌سازی، ناحیه امن طراحی به‌گونه‌ای استخراج شد که تنش کل سیستم پایین‌تر از حد تسلیم مجاز ماده قرار گیرد. نتایج نشان داد که ماکزیمم تنش کل ترکیب‌شده برابر با 223.5 MPa است که زیر آستانه ایمن 227 MPaقرار داشته و ایمنی سازه را **در محدوده کاری و پارامترهای بررسی‌شده** تأمین می‌کند.

۲) شناسایی و تحلیل پدیده «فروپاشی میرایی» (Damping Collapse):

مهم‌ترین یافته فیزیکی این پژوهش، حساسیت بحرانی سیستم به اثر همزمان دما و فرکانس (بر اساس مدل WLF) است. با افزایش سرعت دوران، فرکانس طبیعی و در نتیجه فرکانس مؤثر لایه ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد. این پدیده، رفتار مؤثر ماده را به سمت ناحیه شیشه‌ای جابه‌جا کرده و قله ضریب اتلاف را از نقطه کاری سیستم دور می‌کند؛ در نتیجه، کارایی جذب انرژی در برخی بازه‌های دمایی کاهش می‌یابد. عملکرد بهینه مکانیزم تنها در یک بازه دمایی مشخص (ناحیه طراحی) تضمین می‌شود.

۳) ارزیابی پایداری حرارتی سیستم:

ارزیابی کوپل‌شده حرارتی–ارتعاشی در چارچوب فرضیات مدل حاضر (فرض دمای موثر یکنواخت) نشان داد که علی‌رغم تغییر خواص... نشانی از ناپایداری شدید حرارتی مشاهده نمی‌شود؛ هرچند تحلیل دقیق‌تر این پدیده مستلزم لحاظ نمودن گرادیان‌های دمایی در مطالعات آتی است..

۴) تعدیل اثرات نرم‌شوندگی و سفت‌شوندگی دورانی:

تحلیل‌های عددی دینامیکی نشان داد که ترم‌های مربوط به سفت‌شوندگی هندسی ناشی از نیروی گریز از مرکز (Centrifugal Stiffening) فرکانس‌های طبیعی را افزایش داده و اثرات ترم کاهنده‌ی نرم‌شوندگی چرخشی (Spin Softening) را در سرعت‌های کاریِ بررسی‌شده به‌خوبی خنثی می‌کنند؛ این امر موجب پایداری دینامیکی سیستم در دامنه پارامتریک مورد مطالعه می‌گردد.

۵) عملکرد چندفیزیکی روی خط‌الرأس میرایی:

با بررسی هم‌زمان اثر دمایی WLF و سرعت چرخشی بر روی نقشه سه‌بعدی امضای میرایی، مشخص گردید که عملکرد بهینه سیستم بر روی یک «خط‌الرأس میرایی بهینه» (Optimal Damping Ridge) متمرکز است. ساختار بهینه‌شده با مهار پدیده فروپاشی میرایی، **پایداری عملکردی مطلوبی** را در شرایط متغیر محیطی ارائه می‌دهد.

۷-۱- نوآوری‌ها و محدودیت‌ها

نوآوری اصلی این پژوهش، گذار از مدل‌های خطی رایج به یک مدل کوپل‌شده ترمومکانیکی است که با بهره‌گیری از توابع سیگموئید و گوسی و تلفیق آن‌ها با ماتریس‌های سختیِ وابسته به سرعت دوران، دقت پیش‌بینی رفتار ماده پلیمری را به شدت ارتقا داده است. با این وجود، نادیده گرفتن اثرات آیرودینامیکی و گرمایش اصطکاکی سطح در سرعت‌های بسیار بالا، و همچنین فرض توزیع دمای یکنواخت در طول تیر، از محدودیت‌های مدل حاضر به شمار می‌روند .علاوه بر این، استفاده از تئوری کلاسیک اویلر-برنولی و صرف‌نظر کردن از اثرات کوریولیس و اینرسی دورانی، اگرچه سرعت محاسبات را برای فرآیند بهینه‌سازی به شدت افزایش داده، اما مرزهای عملیاتی مدل را به سازه‌های لاغر و سرعت‌های دورانی زیربحرانی محدود می‌کند .همچنین، در پژوهش حاضر... (ادامه متن خودتان در مورد خستگی).علاوه بر این، در پژوهش حاضر، اگرچه اثرات بارگذاری چرخه‌ای از طریق اعمال قید تنش مجاز تقلیل‌یافته‌ی مبتنی بر خستگی (Fatigue-Informed Constraint) لحاظ شده است، اما تحلیل کامل عمر خستگی (Fatigue Life Prediction) مبتنی بر نمودارهای S-N و تئوری انباشت آسیب (Miner's Rule) انجام نشده است که این مورد می‌تواند به عنوان یکی از جنبه‌های توسعه‌ی آتی مد نظر قرار گیرد.

۷-۲- پیشنهادات برای پژوهش‌های آتی

توسعه این فناوری نیازمند مطالعات تکمیلی است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱. **اعتبارسنجی تجربی در محیط خلأ:** به منظور تفکیک میرایی ساختاری ABH از میرایی آیرودینامیکی و صحت‌سنجی دقیق مدل WLF.
۲. **توسعه کنترل فعال تطبیقی:** استفاده از عملگرهای پیزوالکتریک جهت جبران افت میرایی در شرایط شیشه‌ای‌شدن یا نرم‌شوندگی شدید لایه پلیمری.
۳. **بهینه‌سازی توپولوژی پوشش:** جایگزینی پوشش یکپارچه با الگوهای بهینه‌شده به منظور دستیابی به حداکثر اتلاف انرژی با کمترین افزودن جرم.
۴. استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای تیر (تیموشنکو) و لحاظ نمودن اثرات کوریولیس جهت افزایش دقت در سرعت‌های بسیار بالا و تیرهای ضخیم.

تاییده اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرا یرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: در این مقاله از برخی نتایج حاصل از رساله دکتری نویسنده مسئول استفاده شده است. هیچ تعارض منافع دیگری برای اظهار وجود ندارد.

دسترس‌پذیری داده‌ها:
داده‌ها و نتایج حاصل از این پژوهش، در صورت درخواست موجه از نویسنده مسئول مقاله، قابل ارائه خواهد بود.

بیانیه هوش مصنوعی: در جریان آماده سازی این اثر، نویسندگان از ChatGPTبه منظور بهبود نگارش گرامری و بازنویسی برخی جملات جهت ارتقای روانی متن استفاده کرده اند. پس از استفاده از این ابزار، نویسندگان محتوا را در صورت نیاز بررسی و ویرایش کرده و مسئولیت کامل محتوای مقاله منتشرشده را بر عهده می گیرند

نقش نویسندگان: رضا فضایلی طرقی: مفهوم پردازی؛ روش‌شناسی؛ شبیه‌سازی نرم افزاری؛ انجام پژوهش و محاسبات؛ تحلیل محاسباتی و ریاضی . دکتر علی‌اکبر اکبری: نظارت بر پروژه؛ بتازبینی و ویرایش علمی متن؛ مدیریت پروژه. دکتر محمد شیبانی: نظارت بر پروژه.

منابع

[1] A. Pelat, F. Gautier, S. C. Conlon, and F. Semperlotti, “The acoustic black hole: A review of theory and applications,” *J. Sound Vib.*, vol. 476, p. 115316, Jun. 2020, doi: 10.1016/j.jsv.2020.115316.

[2] V. V. Krylov and F. J. B. S. Tilman, “Acoustic ‘black holes’ for flexural waves as effective vibration dampers,” *J. Sound Vib.*, vol. 274, no. 3, pp. 605–619, Jul. 2004, doi: 10.1016/j.jsv.2003.05.010.

[3] X. Du, W. Li, F. Hao, and Q. Fu, “Multi-Objective Optimization of Acoustic Black Hole Plate Attached to Electric Automotive Steering Machine for Maximizing Vibration Attenuation Performance,” *Machines*, vol. 13, no. 8, p. 647, Jul. 2025, doi: 10.3390/machines13080647.

[4] C. A. McCormick and M. R. Shepherd, “Optimization of an acoustic black hole vibration absorber at the end of a cantilever beam,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 145, no. 6, pp. EL593–EL597, Jun. 2019, doi: 10.1121/1.5113960.

[5] H. Wen, Y. Sheng, J. Guo, and L. Ye, “Vibration characteristics of laminated composite plate with embedded acoustic black holes,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 33, no. 1, p. 2489143, Dec. 2026, doi: 10.1080/15376494.2025.2489143.

[6] Z. Xiong and L. Zhao, “Broadband sound absorption using porous structures with embedded acoustic black holes,” *MechanoEngineering*, vol. 1, no. 2, p. 024702, Jun. 2026, doi: 10.1063/5.0326736.

[7] J. Wang, W. Huang, H. Ji, and J. Qiu, “Multi-Objective Collaborative Optimization of Stiffness and Damping Performance of Acoustic Black Hole Plate,” *Int. J. Acoust. Vib.*, vol. 29, no. 1, pp. 39–47, Mar. 2024, doi: 10.20855/ijav.2024.29.12007.

[8] Y. Wang, W. Ni, W. Guo, M. Wang, M. Li, and G. Wang, “Free and forced vibration analysis of rotating beams with an acoustic black hole,” *Mech. Res. Commun.*, vol. 154, p. 104684, Jun. 2026, doi: 10.1016/j.mechrescom.2026.104684.

[9] Y. Wang, L. Cheng, J. Du, and Y. Liu, “Acoustic Black Holes in a Spinning Beam,” *J. Vib. Acoust.*, pp. 1–27, Jan. 2023, doi: 10.1115/1.4056791.

[10] A. Keys and J. Cheer, “A parametric study of dynamic stress in acoustic black holes,” *INTER-NOISE NOISE-CON Congr. Conf. Proc.*, vol. 270, no. 3, pp. 8410–8421, Oct. 2024, doi: 10.3397/IN_2024_4090.

[11] T. Durand-Texte, A. Pelat, G. Penelet, F. Gautier, and M. Sécail-Géraud, “Thermal imaging of the structural damping induced by an acoustic black hole,” *J. Appl. Phys.*, vol. 127, no. 2, p. 025102, Jan. 2020, doi: 10.1063/1.5128089.

[12] M. L. Williams, R. F. Landel, and J. D. Ferry, “The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids,” *J. Am. Chem. Soc.*, vol. 77, no. 14, pp. 3701–3707, Jul. 1955, doi: 10.1021/ja01619a008.

[13] J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons, 1980.

[14] H. Sheng, M.-X. He, and Q. Ding, "Vibration control and multifunctional design based the acoustic black hole structure: a state-of-the-art review," *Int. J. Dyn. Control*, vol. 13, no. 1, p. 25, Jan. 2025, doi: 10.1007/s40435-024-01542-0.

[15] L. Tang, L. Cheng, H. Ji, and J. Qiu, "Characterization of acoustic black hole effect using a one-dimensional fully-coupled and wavelet-decomposed semi-analytical model," *J. Sound Vib.*, vol. 374, pp. 172–184, Jul. 2016, doi: 10.1016/j.jsv.2016.03.031.

[16] Y. Wang, J. Du, and L. Cheng, "Power flow and structural intensity analyses of Acoustic Black Hole beams," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 131, pp. 538–553, Sep. 2019, doi: 10.1016/j.ymssp.2019.06.004.

[17] R. G. Budynas, K. J. Nisbett, J. K. Nisbett, and J. E. Shigley, *Shigley's mechanical engineering design*, 10. ed. in SI units. in Mcgraw-Hill series in mechanical engineering. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2015.

[18] "Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 8th Edition | Wiley," Wiley.com. Accessed: Aug. 14, 2026. [Online]. Available: https://www.wiley.com/en-us/fundamentals-of-heat-and-mass-transfer-8th-edition-p-9781119353881