ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. 2027;27(03):207-219.

Modares Mechanical Engineering

DOI: 10.48311/mme.2026.120260.83009
journal homepage: mme.modares.ac.ir

Stability Conditions and Applicability of Linear and Discrete Approximations of Quaternion Kinematic

Ghasem Kahe*

Aerospace Research Institute, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: June 01, 2026
Revised: August 22, 2026
Accepted: September 22, 2026
ePublished: October 29, 2026

ABSTRACT

Quaternion kinematics provides a singularity-free and computationally efficient model for modeling rotational motion in aerospace, robotics, navigation, and computer vision systems. The continuous-time quaternion kinematics model provides an accurate representation of the state changes of a rigid body under angular velocity inputs. However, practical implementations in digital control systems, estimation algorithms, and embedded platforms and systems require linear or discrete approximations of the original nonlinear continuous-time model. These approximations inevitably introduce modeling errors, numerical drift, and stability concerns that may degrade system performance. In this paper, various linear and discrete models of quaternion kinematics are evaluated. In this regard, first, the relationships between the exact continuous-time quaternion differential equation and its linear and discrete representations, which have been introduced and used in various references, are derived. Then, the approximation errors, stability properties, and normalization limits are analyzed under varying angular velocity values and different sampling intervals. This analysis highlights the relationship between computational efficiency and accuracy, especially in highly dynamic rotational regimes. Finally, the limitations of simplified linear and discrete models are discussed in the context of their application in state estimation filters, controller design, and real-time embedded systems. As a result, quantitative and structural insights are provided on when linear and discrete quaternion models remain valid and when higher-order or more precise integration schemes are necessary.

Keywords: Attitude Dynamics, Quaternion Kinematics, Linearization, Discertization, Modelling Error

How to cite this article
Kahe G, Stability Conditions and Applicability of Linear and Discrete Approximations of Quaternion Kinematics. Modares Mechanical Engineering; 2027;27(03):207-219.

*Corresponding author's email: kahe@ari.ac.ir
*Corresponding ORCID ID: 0000-0001-5511-2171

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

شاپا: ۶۹۰۹-۲۴۷۶؛ مهندسی مکانیک مدرس. ۲۱۹-۲۰۷:(۰۳)۲۷;۱۴۰۵

مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.120260.83009

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir



شرایط پایداری و کاربردی تقریب‌های خطی و گسسته سینماتیک کواترنیون

قاسم کاهه*

پژوهشگاه هوافضا، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله

مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله

دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۱۱

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۳۱

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۳۱

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۸/۰۷

چکیده

سینماتیک کواترنیون یک مدل بدون تکینگی و از نظر محاسباتی کارآمد برای مدل سازی حرکت دورانی در سیستم‌های هوافضایی، رباتیک، ناوبری و بینایی کامپیوتر ارائه می‌دهد. مدل سینماتیک کواترنیون زمان پیوسته، نمایش دقیقی از تغییرات وضعیت جسم صلب تحت ورودی‌های سرعت زاویه‌ای ارائه می‌دهد. با این حال، پیاده‌سازی‌های عملی در سیستم‌های کنترل دیجیتال، الگوریتم‌های تخمین و پلتفرم‌ها و سیستم‌های نهفته نیاز به تقریب‌های خطی و گسسته از مدل زمان پیوسته غیرخطی اصلی دارند. این تقریب‌ها ناگزیر خطاهای مدل‌سازی، خطاهای عددی و مشکلات پایداری را ایجاد می‌کنند که عملکرد سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهند. در این مقاله مدل‌های مختلف خطی و گسسته از سینماتیک کواترنیون مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در این راستا ابتدا روابط بین معادله دیفرانسیل کواترنیون زمان پیوسته دقیق و نمایش‌های خطی و گسسته آن که در مراجع مختلف معرفی و استفاده شده‌اند، استخراج می‌شود. سپس، خطاهای تقریب، خواص پایداری و محدودیت‌های نرمال‌سازی تحت مقادیر سرعت زاویه‌ای متغیر و بازه‌های نمونه‌برداری مختلف تجزیه و تحلیل می‌شوند. این تجزیه و تحلیل، ارتباط بین کارایی و دقت محاسباتی، به ویژه در سناریوهای چرخشی با دینامیک بالا را برجسته می‌کند. در نهایت، محدودیت‌های مدل‌های ساده شده خطی و گسسته در زمینه کاربرد آنها در فیلترهای تخمین وضعیت، طراحی کنترلر و سیستم‌های نهفته بلادرنگ مورد بحث قرار می‌گیرد. در نتیجه بینش کمی و ساختاری در مورد اینکه چه زمانی مدل‌های کواترنیون خطی و گسسته معتبر باقی می‌مانند و چه زمانی تقریب‌های مرتبه بالاتر یا دقیق‌تر ضروری هستند، ارائه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: دینامیک وضعیت، سینماتیک کواترنیون، مدل خطی، مدل گسسته، خطای مدل سازی

نحوه ارجاع به این مقاله

کاهه قاسم، شرایط پایداری و کاربردی تقریب‌های خطی و گسسته سینماتیک کواترنیون، مهندسی مکانیک مدرس. ۲۱۹-۲۰۷:(۰۳)۲۷;۱۴۰۵.

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: kahe@ari.ac.ir

*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ۰۰۰۰-۰۰۰۱-۵۵۱۱-۲۱۷۱

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

۱- مقدمه

مدل‌سازی دقیق سینماتیک دورانی در پرنده‌های هوافضایی، بازوهای رباتیک، سیستم‌های ناوبری اینرسی و کنترل وضعیت فضاپیما، امری ضروری است. در میان روش‌های مختلف برای نمایش وضعیت، مانند زوایای اویلر، ماتریس‌های چرخش و پارامترهای رودریگز، کواترنیون‌ها به دلیل فشردگی، کارایی محاسباتی و مصونیت در برابر تکینگی‌ها، به یک انتخاب ترجیحی تقریبا عمومی تبدیل شده‌اند. پس از استفاده سیستماتیک و گسترده آنها برای پایش و کنترل فضاپیماها، سینماتیک کواترنیون به طور گسترده در تحقیقات نظری و کاربردی مورد بحث قرار گرفته و از جنبه‌های مختلف تجزیه و تحلیل شده است. معادله سینماتیک کواترنیون زمان پیوسته، تغییرات زمانی وضعیت وسیله را به عنوان یک معادله دیفرانسیل غیرخطی که توسط سرعت زاویه‌ای هدایت می‌شود، توصیف می‌کند. این مدل دقیق بوده و به خوبی می‌تواند تغییرات وضعیتی و رفتار دینامیکی را دنبال نماید ولی در عین حال چارچوب‌های کنترل و تخمین مدرن، مانند کنترل کننده‌های دیجیتال و رویکردهای مختلف فیلتر کالمن، نیاز به پیاده‌سازی‌های خطی و زمان گسسته دارند. علاوه بر این و با توجه به محدودیت‌های تحلیلی برای مدل‌های غیر خطی، معادلات دیفرانسیل کواترنیون غیرخطی اغلب در اطراف نقطه کاری یا شرایط زاویه کوچک، خطی می‌شود.

مدل‌های کواترنیون خطی و گسسته، علیرغم کاربرد گسترده‌شان، خطاهای تقریبی ایجاد می‌کنند که ممکن است بر پایداری، دقت تخمین و ثبات بلندمدت وضعیت تأثیر گذار باشند. به عنوان مثال، طرح‌های گسسته‌سازی ساده می‌توانند محدودیت نرم واحد کواترنیون‌ها را نقض کنند و منجر به انحراف از نرم واحد شوند. به طور مشابه، فرضیات خطی‌سازی مرتبه اول ممکن است تحت نرخ‌های زاویه‌ای بالا یا بازه نمونه برداری بزرگ نامعتبر شوند. در همین راستا در این مقاله موارد زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

- ایجاد یک مقایسه دقیق بین سینماتیک کواترنیون زمان پیوسته دقیق و همتایان خطی و گسسته رایج آن.
- کمی‌سازی خطاهای تقریب و انحرافات ساختاری ایجاد شده توسط این مدل‌های ساده‌شده.
- شناسایی محدودیت‌های عملی این مدل‌ها در کاربردهای دنیای واقعی مانند کنترل وضعیت فضاپیما، وسایل نقلیه هوایی بدون سرنشین و تخمین حالت مبتنی بر حسگرهای اینرسی.

۱-۱- سینماتیک کواترنیونی **زمان پیوسته**

نمایش کواترنیونی وضعیت جسم صلب به دلیل استحکام عددی و اجتناب از تکینگی‌های ذاتی در زوایای اویلر، در کاربردهای هوافضا اهمیت پیدا کرده است. بررسی‌های بنیادی سینماتیک کواترنیونی در ادبیات دینامیک فضاپیمای کلاسیک، از جمله دینامیک وضعیت فضاپیما و مکانیک تحلیلی سیستم‌های فضایی، ظاهر می‌شود. سینماتیک کواترنیون با معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2}\,\Omega\big(\omega(t)\big)q(t) \qquad (۱)$$

که در آن q(t) کواترنیون واحد و Ω(ω) ماتریس سرعت زاویه‌ای است. مدل زمان پیوسته، با فرض انتگرال‌گیری دقیق، محدودیت نرم واحد را به صورت تحلیلی حفظ می‌کند. با این حال، پیاده‌سازی عملی نیاز به روش‌های انتگرال‌گیری عددی دارد که پایداری و خاصیت حفظ نرم واحد در آن بسته به روش محاسباتی منتخب، متفاوت است.

۱-۲- خطی‌سازی سینماتیک کواترنیون

خطی‌سازی سینماتیک کواترنیون در طراحی کنترلر و تخمین وضعیت، به ویژه در فیلترهای کالمن توسعه یافته و چارچوب‌های کنترل درجه دوم خطی، رایج است. فرمول‌بندی‌های کواترنیون بر اساس خطای زاویه کوچک اغلب برای به دست آوردن دینامیک خطای خطی محلی استفاده می‌شوند. این رویکردها به طور گسترده در ادبیات تخمین مدرن مانند تخمین حالت بهینه مورد بحث قرار گرفته‌اند. فرمول‌بندی‌های مبتنی بر حالت خطا، یک نمایش حداقل سه پارامتری برای اغتشاشات ارائه می‌دهند که تقریب‌های سیستم خطی را امکان‌پذیر کرده و در عین حال رفتار غیرخطی سینماتیک کواترنیون را برای مدل سازی تغییرات وضعیت دنبال می‌کند. اگرچه برای انحرافات کوچک وضعیت مؤثر است، اما چنین خطی‌سازی‌هایی ذاتاً محلی هستند و می‌توانند در طول مانورهای شدید یا تغییرات زاویه بزرگ، دقت خود را از دست بدهند. مطالعات قبلی نشان داده‌اند که اعتبار مدل‌های کواترنیون خطی‌شده به شدت به بزرگی سرعت زاویه‌ای و زمان نمونه‌برداری بستگی دارد. با این حال، ارزیابی یکپارچه‌ای که مدل‌های خطی‌شده را مستقیماً در برابر فرمول‌بندی زمان پیوسته تحت رژیم‌های عملیاتی مختلف مقایسه کند، همچنان محدود است.

۱-۳- گسسته‌سازی سینماتیک کواترنیون

با ظهور سیستم‌های کنترل دیجیتال و پلتفرم‌های ناوبری نهفته و تعبیه شده، توسعه مدل گسسته از سینماتیک کواترنیون ضروری شده است. رویکردهای گسسته‌سازی رایج عبارتند از:

- انتگرال‌گیری مرتبه اول اویلر،
- گسسته‌سازی دقیق مبتنی بر تابع نمایی با فرض سرعت زاویه‌ای ثابت در بازه‌های نمونه برداری.
- انتگرال‌گیرهای عددی مرتبه بالاتر (به عنوان مثال، روش‌های رانگ-کوتا).

گسسته‌سازی دقیق تحت سرعت زاویه‌ای ثابت را می‌توان با استفاده از نگاشت نمایی کواترنیون‌ها استخراج کرد که خاصیت نرم واحد را حفظ می‌کند. در مقابل، طرح‌های ساده مرتبه اول، مشکل انحراف نرم از مقدار واحد را ایجاد می‌کنند، مگر اینکه مجددا

نرمالیزه شود. در پیاده‌سازی‌های فضاپیما و رباتیک، موازنه بین هزینه محاسباتی و دقت بسیار مهم است. در پلتفرم‌ها و سیستم‌های نهفته با قدرت پردازش محدود اغلب به‌روزرسانی‌های مرتبه اول را با اصلاح نرمال‌سازی ترجیح می‌دهند، در حالی که کاربردهای با دقت بالا، شکل نمایی یا تقریب مرتبه بالاتر را انتخاب می‌کنند. با وجود بحث‌های متعدد متمرکز بر پیاده‌سازی سینماتیک کواترنیون در مراجع مختلف [۱، ۲]، مقایسه تحلیلی و سیستماتیک مدل‌های گسسته در مقایسه با مدل مرجع زمان پیوسته، به ویژه تحت فواصل نمونه‌برداری متغیر و رژیم‌های پویا، به طور نسبتاً کمتری مورد توجه قرار گرفته است.

۱-۴- مرور کارهای مشابه

کارهای زیادی بر اساس مدل سینماتیک کواترنیون توسعه داده شده است که در آنها با توجه به محدودیت‌های روش‌های مورد استفاده برای تلفیق و فیلترینگ، مدل خطی شده و گسسته مورد استفاده قرار گرفته است. در [۳] تعیین وضعیت با استفاده از روش کالمن فیلتر و بر اساس سینماتیک کواترنیون شرح داده شده است. در [۴] یک فیلتر کالمن مبتنی بر کواترنیون با مدل شبه خطی برای مدل اندازه گیری توسعه داده شده است. در [۵] مدل‌های خطا همراه با سینماتیک کواترنیون به عنوان متغیرهای حالت در کالمن فیلتر برای تخمین وضعیت استفاده شده است که به طور گسترده در روش‌های مبتنی بر حسگرهای اینرسی نیز کاربرد دارد. طراحی و تحلیل کنترل وضعیت یک فضاپیما به عنوان یک جسم صلب، مبتنی بر سه کنترلر خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی سازی پس خور و غیرخطی مبتنی بر خطی سازی پسگام در [۶] ارائه شده است. با توجه به اینکه شتاب سنج در حضور شتاب خارجی در تعیین وضعیت دچار خطا می شود، در [۷] با استفاده از یک فیلتر کالمن گسترش یافته تطبیقی مبتنی بر کواترنیون، حرکات شتابدار تشخیص داده شده و باعث بهبود تعیین وضعیت در حرکات دینامیکی پرشتاب شده است. طراحی یک کنترل کننده وضعیت ماهواره زمین آهنگ در [۸] شرح داده شده است که در آن طراحی کنترل‌کننده براساس مدل خطی ماهواره و با استفاده از مدل کاهش یافته کواترنیون‌ها انجام می‌شود. همین طور مقاله‌های [۹، ۱۰] با استفاده از سینماتیک کواترنیون و روش فیلتر کالمن معمولی و توسعه یافته، وضعیت را تخمین زده‌اند. در روش‌های پرکاربرد مبتنی بر کالمن فیلتر، مدل خطی شده و گسسته مورد نیاز است. در مقاله [۱۱] مدل‌های خطا برای مدل خطی شده سینماتیک کواترنیون را ارائه کرده و آنها را با هم مقایسه کرده است. در [۱۲] روش‌های مختلف فیلترینگ خطی و غیر خطی بر اساس سینماتیک کواترنیون پیوسته و گسسته مورد بررسی قرار گرفته است. در [۱۳] با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته و تلفیق حسگرهای مختلف وضعیت تخمین زده شده و سپس یک کنترلر غیرخطی برای یک ماهواره مدار پایین طراحی شده است. در این مقاله قضیه اصل جدا سازی بر اساس مدل خطی و گسسته ارائه شده و همگرایی و پایداری رویت گر و کنترلر اثبات شده است.

برخی از کارهای پژوهشی به صورت محدود و تئوری بر مدل سازی خطای ناشی از خطی سازی و گسسته سازی توجه کرده‌اند. در [۱۴] بصورت تئوری روی مدل سازی خطای سینماتیک کواترنیون در تخمین وضعیت تمرکز شده است. در [۱۵] روش‌های انتگرال گیری عددی مرتبط با گسسته سازی سینماتیک کواترنیون مورد بررسی قرار گرفته و در [۱۶] یک فیلتر کالمن تطبیقی بر اساس مدل سینماتیک کواترنیون بهبود یافته برای تخمین وضعیت شرح داده شده است. این مقاله به صورت نظری و تحلیلی محدودیت‌های ساختاری و عملی تقریب‌های سینماتیک کواترنیونی رایج را روشن کرده و شرایط استفاده از آنها را مشخص می‌کند.

در مقاله [۱۷] محدودیت‌های کنترل خطی وضعیت را مورد بررسی قرار داده و شرایط پایداری برای دینامیک خطی شده را معرفی کرده است. پایداری معادلات دیفرانسیل کواترنیون با ضرایب منفرد در مقاله [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است و شرایط پایداری برای معادلات خطی و غیر خطی و نیز شرایط پایداری نمایی ارائه شده است. به طور خلاصه می‌توان گفت کارهای انجام شده در این حوزه، موارد زیر را پوشش می‌دهند:

- استخراج مدل‌های خطی و گسسته بر اساس سینماتیک کواترنیون زمان پیوسته،
- تکنیک‌های خطی‌سازی عملی برای تخمین،
- طرح‌های گسسته‌سازی چندگانه برای پیاده‌سازی عددی.

در عین حال، تحلیل‌های بیشتری از جمله موارد زیر در کاربردهای مختلف ضروری بوده که در این مقاله به آنها پرداخته می‌شود:

- توصیف تحلیلی خطای یکپارچه مدل‌های خطی و گسسته نسبت به مدل دقیق پیوسته.
- مقایسه صریح پایداری و خاصیت حفظ نرم واحد.

مرزهای عملیاتی کمی و کاربردی که مشخص می‌کنند مدل‌های ساده شده چه زمانی و تحت چه شرایطی معتبر باقی می‌مانند.

۲- سینماتیک کواترنیون

در این بخش مدل‌های مختلف و رایج سینماتیک کواترنیون که در مراجع مختلف استفاده شده، شرح داده می‌شود.

۲-۱- مدل دقیق پیوسته

فرض کنید کواترنیون واحد نشان دهنده وضعیت جسم صلب به صورت زیر باشد:

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_v(t) \end{bmatrix} \in R^4, \| q(t) \| = 1 \qquad (۲)$$

که $q_0(t)$ قسمت عددی و $q_v(t) \in R^3$ قسمت برداری کواترنیون می‌باشد. سینماتیک کواترنیون در حوزه زمان پیوسته در معادله (۱) بیان شده است که در آن سرعت زاویه‌ای $w(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \in R^3$ در چارچوب بدنی بیان شده است:

$$\Omega(w)=\begin{bmatrix}0 & -w^T\\ w & -[w]_X\end{bmatrix} \quad (۳)$$

و $[w]_X$ ماتریس پاد متقارن w است. حل معادله زمان پیوسته با فرض سرعت زاویه‌ای ثابت در بازه نمونه برداری $[t_k, t_{k+1}]$ به صورت زیر به دست می‌آید [۱]:

$$q(t_k)=exp\left(\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right)q(t_k) \quad (۴)$$

که با توجه به پاد متقارن بودن ماتریس Ω محدودیت نرم واحد را کاملا حفظ می‌کند.

۲-۲- مدل پیوسته خطی

با فرض تغییرات زاویه‌ای کوچک در وضعیت، کواترنیون را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$q=\delta q \times q_{ref} \quad (۵)$$

که برای تغییرات زاویه‌ای کوچک $\delta\theta$ داریم $\delta q \sim \left[1\ \frac{1}{2}\delta\theta^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ که $\delta\theta^{\mathrm{T}}=[\delta\phi\ \delta\theta\ \delta\psi]$. با خطی سازی سینماتیک دوران:

$$\delta\dot{\theta}=-[w]_X\delta\theta \quad (۶)$$

این تقریب مرتبه اول، محدودیت نرم واحد را به صراحت حذف می‌کند و تنها زمانی معتبر است که $\|\delta\theta\| \ll 1$ باشد. بنابراین، سیستم خطی‌شده حاصل، یک تقریب محلی از مدل غیرخطی را نشان می‌دهد.

۲-۳- مدل گسسته مرتبه اول

با استفاده از تعریف حد مرتبه اول و بر اساس حل معادله سینماتیک کواترنیون در معادله (1) و با تقریب مرتبه اول: $exp\left(\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right)\approx I+\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)$ مدل ساده گسسته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$q_{k+1}=q_k+\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)q_k \quad (۷)$$

خطای این تقریب از درجه $O(\Delta t^2)$ بوده و با توجه به انحراف از نرم واحد، باید به صورت زیر نرمالیزه شود:

$$q_{k+1}\leftarrow\frac{q_{k+1}}{\|q_{k+1}\|} \quad (۸)$$

۲-۴- مدل گسسته دقیق

با استفاده از نگاشت نمایی:

$$q(t_k)=e^{\left(\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right)}q(t_k) \quad (۹)$$

، یک مدل گسسته دقیق به صورت زیر حاصل می‌شود [۲]:

$$q_{k+1}=\begin{bmatrix}cos\left(\frac{\|w_k\|\Delta t}{2}\right)\\ \frac{\|w_k\|}{w_k}sin\left(\frac{\|w_k\|\Delta t}{2}\right)\end{bmatrix}\times q_k \quad (۱۰)$$

که سرعت زاویه‌ای در بازه نمونه برداری ثابت فرض شده است. در این مدل گسسته خاصیت نرم واحد حفظ شده و انطباق خوبی با مدل پیوسته در نرخ‌های مختلف نمونه برداری دارد ولی در عین حال دقت آن در شرایط مختلف باید بررسی و ارزیابی شود.

۲-۵- مدل گسسته مرتبه دوم

با انتگرال گیری عددی مرتبه بالاتر یا تقریب مرتبه دوم از جواب نمایی به دست آمده از حل معادله دیفرانسیل (۱) می‌توان مدل گسسته مرتبه دوم را به دست آورد. تقریب مرتبه دوم در معادله زیر نشان داده شده است:

$$exp\left(\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right)\approx\left(I+\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)+\frac{\Delta t^2}{4}\Omega^2(w_k)\right) \quad (۱۱)$$

به عنوان مثال روش‌های رانگ-کوتا خطای برش را بهبود می‌بخشد و می‌توان آن را به درجه $O(\Delta t^4)$ تقریب زد، اما ذاتاً نرم واحد را حفظ نمی‌کند، مگر اینکه از تکنیک‌های نرمال‌سازی یا انتگرال‌گیری هندسی استفاده شود. مدل خطی و گسسته با تقریب مرتبه دوم بر اساس راه حلی تشریحی در مراجع [۲،۱] در نهایت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$q_{k+1}=\left[\left(1-\frac{\|w_k\|^2\Delta t^2}{2}\right)I+\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right]\times q_k \quad (۱۲)$$

که $\|w_k\|=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}$

۳- مقایسه مدل‌های مختلف سینماتیک کواترنیون

در این بخش مدل‌های شرح داده شده در بخش قبلی از جنبه‌های مختلف بررسی و مقایسه می‌شوند.

۳-۱- خاصیت حفظ نرم واحد

برای بررسی خاصیت نرم واحد برای مدل گسسته مرتبه اول

$$\mathbf{q}_{k+1}=(I+A\Delta t)\mathbf{q}_k \quad (۱۳)$$

معادله زیر را باید حل کنیم:

$$\|\mathbf{q}_{k+1}\|^2=\mathbf{q}_k^T(I+A\Delta t)^T(I+A\Delta t)\mathbf{q}_k \quad (۱۴)$$

که $A^T=-A$ و $(I+A\Delta t)^T=I-A\Delta t$. بنابراین

$$\|\mathbf{q}_{k+1}\|^2=\mathbf{q}_k^T(I-A\Delta t)(I+A\Delta t)\mathbf{q}_k. \quad (۱۵)$$

طبق معادله زیر $(h=\Delta t)$

$$(I-Ah)(I+Ah)=I-A^2h^2 \quad (۱۶)$$

که $A^2=-\frac{\|\omega\|^2}{4}I$ و $-A^2=\frac{\|\omega\|^2}{4}I$ بنابراین

$$(I+Ah)^T(I+Ah)=I+\frac{\|\omega\|^2h^2}{4}I. \quad (۱۷)$$

با فرض انجام نرمالیزاسیون کواترنیون $\|\mathbf{q}_k\|=1$ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\|\mathbf{q}_{k+1}\|^2=1+\frac{\|\omega\|^2h^2}{4} \quad (۱۸)$$

که جذر آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\|\mathbf{q}_{k+1}\|=\sqrt{1+\frac{\|\omega\|^2h^2}{4}} \quad (۱۹)$$

طبق رابطه $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$ در نهایت معادله زیر برای نرم کواترنیون به دست می‌آید.

$$\|\mathbf{q}_{k+1}\|\approx 1+\frac{\|\omega\|^2\Delta t^2}{8} \quad (۲۰)$$

که نشان می‌دهد نرم کواترنیون در مدل گسسته مرتبه اول به صورت $O(h^2)$ افزایشی بوده و باید حتما نرمالیزه شود.

به همین شکل نیز برای مدل گسسته مرتبه دوم خاصیت حفظ نرم واحد بررسی می‌شود که در نهایت معادله زیر بدست می‌آید:

$$\| \boldsymbol{q}_{k+1} \| = 1 + \frac{\| \omega \|^4 h^4}{128} + O(h^6) \quad (۲۱)$$

هر چند مدل گسسته مرتبه دوم دقیق‌تر است ولی به صورت کامل نرم واحد را حفظ نمی‌کند. بنابراین در طولانی مدت باید نرمالیزاسیون برای این مدل هم انجام شود. در مدل زمان پیوسته و در گسسته‌سازی نمایی، خاصیت نرم واحد کاملا حفظ می‌شود ولی در مدل حاصل از گسسته‌سازی اویلر و مدل‌های خطی‌شده با تقریب زوایای کوچک، محدودیت‌های نرم واحد را دور می‌زنند و اعتبار کلی را از دست می‌دهند.

۳-۲- خطای تقریب

در این بخش خطای دو مدل گسسته نسبت به مدل پیوسته اصلی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. با فرض ثابت بودن سرعت زاویه‌ای در بازه نمونه برداری، جواب کامل معادله دیفرانسیل اصلی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$q^*_{k+1} = exp\left(\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right) q_k \quad (۲۲)$$

که تقریب مرتبه اول آن برابر است با:

$$q^E_{k+1} = q_k + \frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k) q_k \quad (۲۳)$$

برای به دست آورن خطای بین تقریب مرتبه اول و مدل اصلی، از بسط تیلور استفاده می‌شود:

$$exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + O(\|A\|^3) \quad (۲۴)$$

که $A = \frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$q^*_{k+1} = \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + O(\|A\|^3)\right) q_k \quad (۲۵)$$

روش تقریب اویلر فقط دو جمله اول را حفظ کرده و بقیه از تقریب حذف می‌شوند:

$$q^E_{k+1} = (I + A) q_k \quad (۲۶)$$

بنابراین اختلاف دو مدل برابر است با:

$$\|q^*_{k+1} - q^E_{k+1}\| \le \frac{1}{2} A^2 e^{A^2} \quad (۲۷)$$

با جایگذاری $A = \frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)$

$$\|q^*_{k+1} - q^E_{k+1}\| \le \frac{\Delta t^2}{8} \|\Omega(w_k)\|^2 e^{\frac{\Delta t^2}{2}\|\Omega(w_k)\|} \quad (۲۸)$$

که

$$\|q^*_{k+1} - q^E_{k+1}\| \le O(\Delta t^2\, w^2_{max}) \quad (۲۹)$$

با فرض سرعت زاویه‌ای ثابت، خطای گسسته‌سازی اویلر متناسب است با: $q_{exact} - q_{Euler} = \mathrm{O}(\Delta t^2 \|w_k\|^2)$ و در مدل خطی متناسب است با $\mathrm{O}(\|\delta\theta\|^2)$. بنابراین، خطا با افزایش بازه نمونه برداری و سرعت زاویه‌ای به صورت درجه دوم رشد می‌کند.

۳-۳- پایداری

مدل سینماتیک کواترنیون پیوسته در فضای S^3 تکامل می‌یابد و مسیرهای محدود را تضمین می‌کند ولی مدل خطی دارای پایداری مشروط بوده و فقط به صورت محلی معتبر است و در چرخش‌های سریع واگرا می‌شود. در مدل گسسته حاصل از روش اویلر به شرطی پایدار است که $\Delta t\|w\| \ll 1$ و نقض این امر منجر به ناپایداری عددی و اعوجاج هندسی می‌شود.

۳-۴- خطای انباشته

در ماموریت‌های بلند مدت تقریب روش اویلر باعث انباشتگی شدید خطا و بایاس زیاد می‌شود. هر چند انحراف از مقدار واحد از طریق نرمالیزه کردن برطرف می‌شود اما خطای وضعیت را اصلاح نمی‌کند. در گسسته‌سازی نمایی، انحراف از مقدار واحد را به حداقل می‌رساند. انباشت خطا به ویژه در موارد زیر بسیار مهم است:

- سیستم‌های ناوبری اینرسی
- ماموریت‌های طولانی مدت فضاپیما
- مانورهای پرسرعت پهپاد

۴- شبیه سازی و ارزیابی

برای ارزیابی عملکرد مدل‌های مختلف سینماتیک کواترنیون، سناریوهای مختلف شبیه سازی در ادامه شرح داده شده و *c1* و *d1* و *d2* به ترتیب بیانگر مدل سینماتیک کواترنیون پیوسته (مدل دقیق)، مدل خطی و گسسته با تقریب درجه اول (مدل درجه یک) و مدل خطی گسسته با تقریب درجه دوم (مدل درجه دو) هستند.

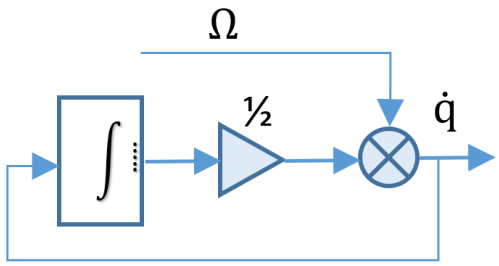
۴-۱- اعتبار سنجی

معادله دیفرانسیلی مدل دقیق (۱) در حوزه پیوسته در سیمولینک پیاده سازی و دیاگرام بلوکی آن در۰نشان داده شده است.

برای اعتبار سنجی و اطمینان از درستی پیاده سازی مدل دقیق، یک آزمون اعتبار سنجی انجام شده است. یک دوران غیر خطی سینوسی (w_x) به وسیله اعمال می‌شود و بر اساس آن وسیله باید در زمان‌های مختلف در وضعیت مشخصی (θ_x) قرار بگیرد که از طریق انتگرال گیری یا محاسبه سطح زیر منحنی دوران وروردی قابل محاسبه است. سطح زیر منحنی از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

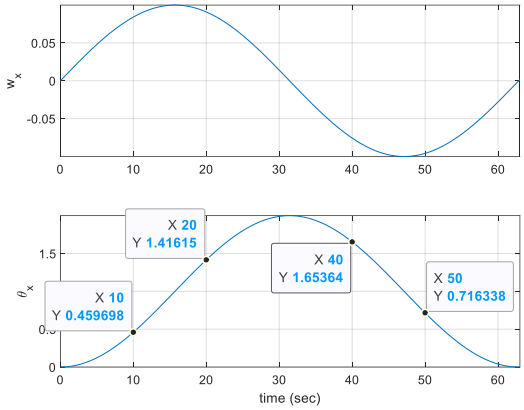
$$\theta_x = \int_0^{t_1} \mathrm{a}\ \sin(ft)\ dt = a(-\cos(ft_1) + 1) \quad (۳۰)$$

که بر اساس پارامترهای فرکانس، دامنه و زمان، مقدار زاویه محاسبه می‌شود. ۰نقاط مشخصی را که با استفاده از فرمول (۳۰) محاسبه شده را نشان می‌دهد که با خروجی مدل در سیمولینک منطبق است.



شکل ۱ پیاده سازی مدل دقیق (۱) در سیمولینک.

Fig. 1 Simulink implementation of accurate model.



شکل ۲ اعتبار سنجی پیاده سازی مدل دقیق بر اساس دوران ورودی سنیوسی (w_x).

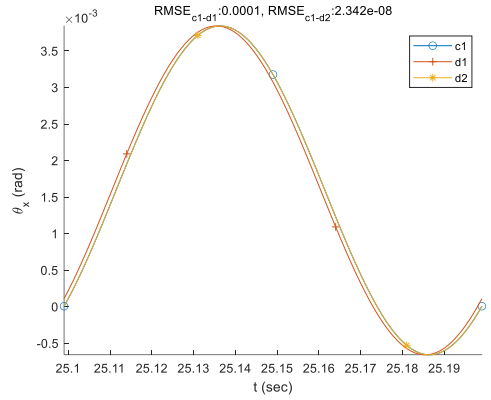
Fig. 2 Accurate model validation using sinusoidal input.

۴-۲- سرعت زاویه‌ای ثابت

در این قسمت مدل‌های درجه یک و دو در مقایسه با مدل دقیق در یک سناریوی شبیه سازی با نرخ دورانی ثابت مقایسه می‌شوند. دوران ثابت معمولا در سامانه‌های هوافضایی مثل ماهواره یا کاوشگرها برای پایدارسازی استفاده می‌شود که پایدار-چرخان نیز نامیده می‌شوند. معمولا نرخ دوران در این وسیله‌ها تا حدود چند درجه بر ثانیه حول محور x در حالت پایدار ممکن است برسد ولی در شرایط ناپایدار که از کنترل خارج می‌شود، ممکن نرخ دوران بیشتر شود. ۰٫۰و ۰٫۰مقایسه مدل درجه یک و درجه دو در دنبال کردن وضعیت وسیله در مقایسه با مدل دقیق را نشان می‌دهند. چرخش حول محور x حدود ۱۰ دور بر ثانیه و حول بقیه محورها ۰٫۱ رادیان بر ثانیه است. همان گونه که در این شکل‌ها مشخص است، هر دو مدل درجه یک و دو با دقت بسیار خوبی مدل پیوسته را برای تخمین وضعیت وسیله دنبال می‌کنند. بنابراین در کاربردهایی که نرخ دوران تقریبا ثابت است، هر دو مدل درجه یک و دو قابل استفاده بوده و دقت لازم را فراهم می‌کنند. لازم به ذکر است که در این حالت شرط ثابت بودن نرخ دوران در بازه نمونه برداری بخوبی برآورده می‌شود.

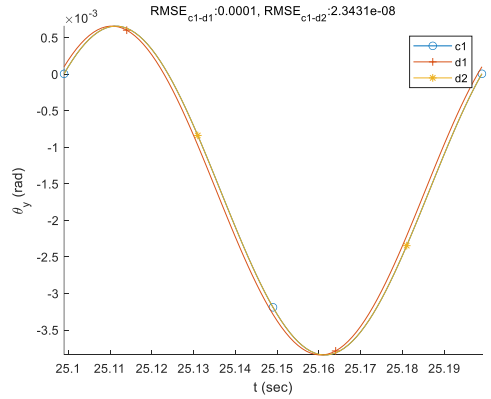
۴-۳- مانور دینامیکی بالا

در این سناریوی شبیه سازی، سینماتیک کواترنیون برای یک وسیله با تغییرات سینوسی نرخ دوران مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.



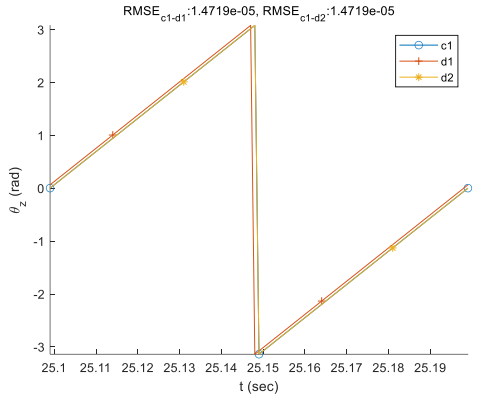
شکل ۳ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله پایدار-چرخان با نرخ ثابت – محور X.

Fig. 3 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spin-stabilized craft with a constant rate – x axis.



شکل ۴ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله پایدار-چرخان با نرخ ثابت – محور y.

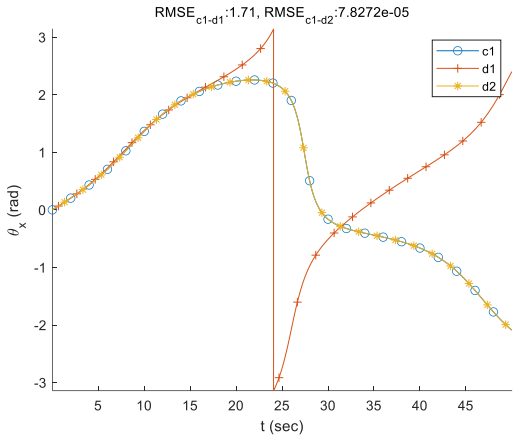
Fig. 4 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spin-stabilized craft with a constant rate – y axis.



شکل ۵ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله پایدار-چرخان با نرخ ثابت – محور Z.

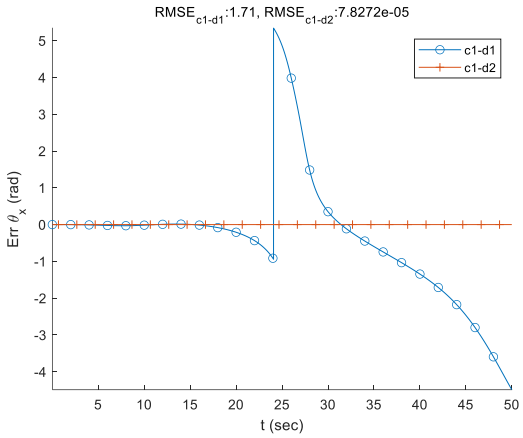
Fig. 5 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spin-stabilized craft with a constant rate – z axis.

تغییرات سینوسی نرخ دوران باعث تحریک رفتار غیر خطی سینماتیک دوران شده و محدودیت‌های مدل‌های خطی در دنبال کردن رفتار غیر خطی را به چالش می‌کشد که باید مورد ارزیابی قرار



شکل ۹ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی – محور x.

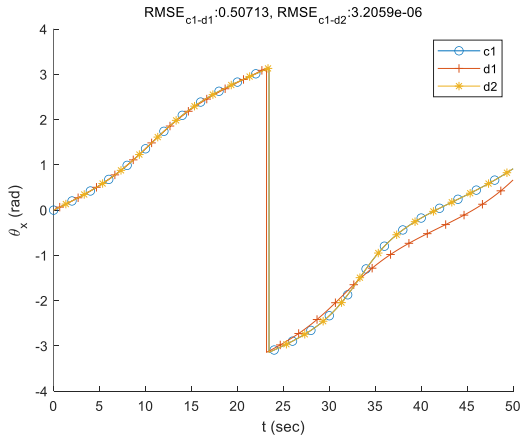
Fig. 9 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft with a sinusoidal rate – x axis.



شکل ۱۰ مقایسه خطای مدل درجه یک و دو نسبت به مدل دقیق در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی – محور x.

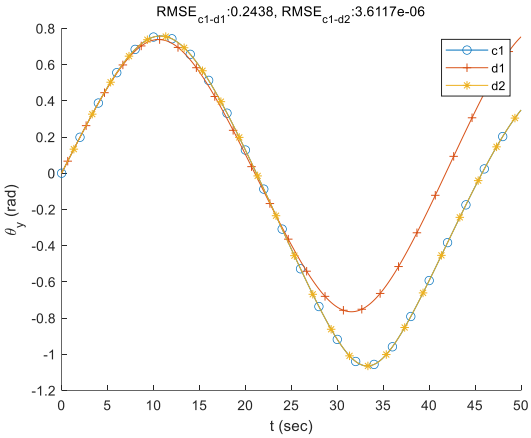
Fig. 10 Comparison the error of 1th and 2th model with respect to accurate one to estimate the attitude of an spined craft with a sinusoidal rate–x axis.

گیرد. این حالت ممکن است در وسیله هوافضایی بدون کنترل فعال هنگام برخود با نیروهای آیرودینامیکی منجر به ارتعاش سینوسی وسیله شود. ابتدا تغییرات سینوسی کم با فرکانس ۰/۰۱ رادیان بر ثانیه و دامنه ۰/۱ روی محور x اعمال می‌شود. بقیه محورها نرخ دوران ثابت ۰/۱ رادیان بر ثانیه دارند و بازه نمونه برداری نیز ۰/۰۰۱ ثانیه است. جدول ۱ مقایسه مقدار خطای مدل درجه یک و دو نسبت به مدل دقیق در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی را نشان می‌دهد. همان گونه که در ۰و ۰و ۰نیز نشان داده شده است، مدل درجه یک در ابتدا با دقت خوبی مدل دقیق را دنبال می‌کند، ولی با توجه به رفتار غیر خطی تغییرات نرخ دوران، از ثانیه ۲۵ به بعد به مرور از مدل دقیق فاصله می‌گیرد ولی مدل درجه دوم با دقت بسیار خوبی همچنان مدل دقیق را دنبال می‌کند. البته اگر تغییرات سینوسی شدیدتر و



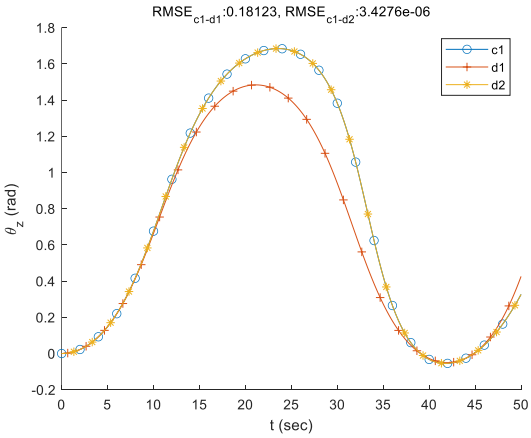
شکل ۶ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی – محور x.

Fig. 6 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft – x axis.



شکل ۷ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی – محور y.

Fig. 7 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft with a sinusoidal rate – x axis.



شکل ۸ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی – محور z.

Fig.8 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft with a sinusoidal rate – x axis.

جدول ۱ مقایسه مقدار خطای مدل درجه یک و دو نسبت به مدل دقیق در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با نرخ سینوسی

Table 1 Comparison of the error magnitude of 1th and 2th models versus the accurate model in estimating the state of a rotating device with a sinusoidal rate

	RMSE c1-d1	RMSE c1-d2
x	3.2059e-06	0.50713
y	3.6117e-06	0.2438
z	3.4276e-06	0.18123

جدول ۲ مقایسه مقدار خطای مدل درجه یک و دو نسبت به مدل دقیق در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با تغییر سریع محور دوران

Table 2 Comparison of the error magnitudes of 1th and 2th models against the accurate model in estimating the state of a rotating device undergoing rapid axis reorientation.

	RMSE c1-d1	RMSE c1-d2
x	4.5087e-05	1.7419
y	5.3783e-06	0.044308
z	4.6253e-05	2.47

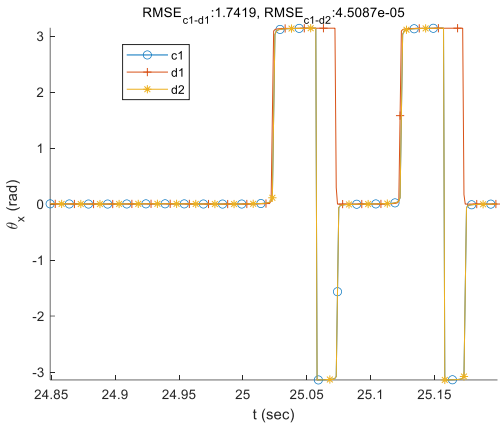
فرکانس آن از ۰/۰۱ به ۰/۱ افزایش یابد (۰)، خطای مدل درجه یک خیلی زیاد شده (۰) و بطور کلی نامعتبر می‌شود. بنابراین در عمل باید محدودیت‌های مدل‌های مورد استفاده مد نظر قرار گیرد.

۴-۴- تغییر سریع محور دوران

در این سناریو حرکت یک وسیله مثل یک هواپیمای نمایشی سبک که محور دوران سریع تغییر می‌کند، شبیه سازی شده است. ابتدا دوران حول محور x حدود ۱۰ دور بر ثانیه و حول بقیه محورها ۰/۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. سپس در ثانیه ۲۵ دوران حول محور x به ۰/۱ رادیان بر ثانیه کاهش یافته و دوران حول محور y به ۱۰ دور بر ثانیه افزایش می‌یابد. در واقع محور دوران از x به y تغییر یافته است و عملکرد مدل‌های مختلف سینماتیک کواترنیون در دنبال کردن وضعیت دقیق با هم مقایسه می‌شوند. جدول ۲ مقایسه مقدار خطای مدل درجه یک و دو نسبت به مدل دقیق در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان با تغییر سریع محور دوران را نشان می‌دهد. ۰، ۰و ۰عملکرد مدل‌های مختلف در مواجهه با تغییرات سریع محور دوران را نشان می‌دهد. همان گونه که در این شکل‌ها مشخص است، مدل درجه یک در ابتدا با دقت خوبی مدل دقیق را دنبال می‌کند، ولی با توجه به رفتار غیر خطی تغییرات نرخ دوران، از حدود ثانیه ۲۵ به بعد (۰و ۰) از مدل دقیق فاصله می‌گیرد ولی مدل درجه دوم با دقت بسیار خوبی همچنان مدل دقیق را دنبال می‌کند.

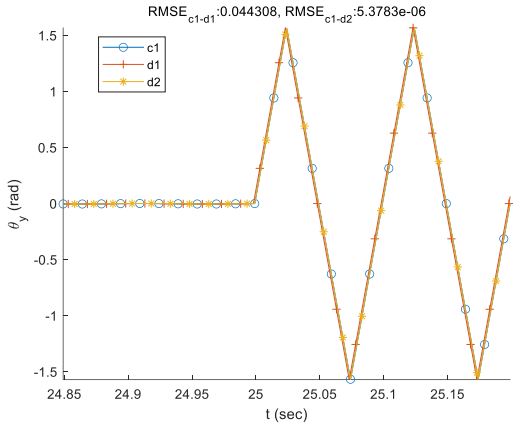
۴-۵- ورودی نویز زاویه‌ای تصادفی

در این سناریو، دوران حول محور x با نرخ ۱۰ دور بر ثانیه همراه با نویز تصادفی سفید با دامنه ۰/۱ رادیان بر ثانیه و دوران حول بقیه محورها نیز ۰/۱ رادیان بر ثانیه همراه با نویز تصادفی سفید با دامنه ۰/۰۱ رادیان بر ثانیه است. ۰، ۰و ۰عملکرد مدل‌های مختلف را در مواجهه با ورودی نویز تصادفی نشان می‌دهد. همان گونه که در این شکل‌ها مشخص است، مدل درجه



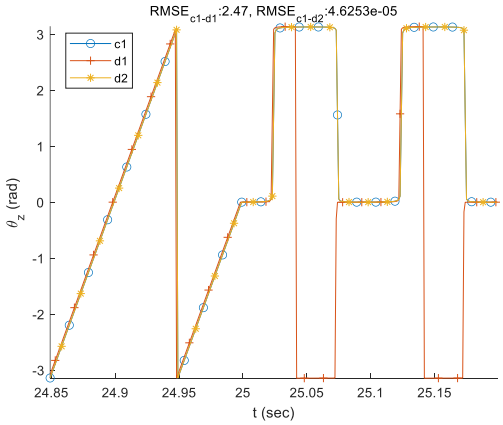
شکل ۱۱ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و تغییر سریع محور دوران در ثانیه ۲۵ – محور x.

Fig. 11 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft with quick change of rotation axis (25 sec)–x axis.



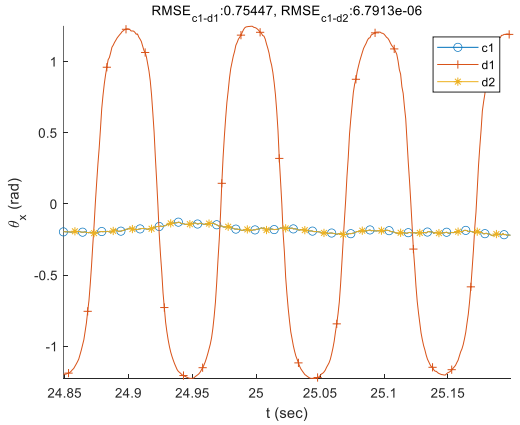
شکل ۱۲ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و تغییر سریع محور دوران در ثانیه ۲۵ – محور y.

Fig. 12 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft craft with quick change of rotation axis (25 sec)–y axis.



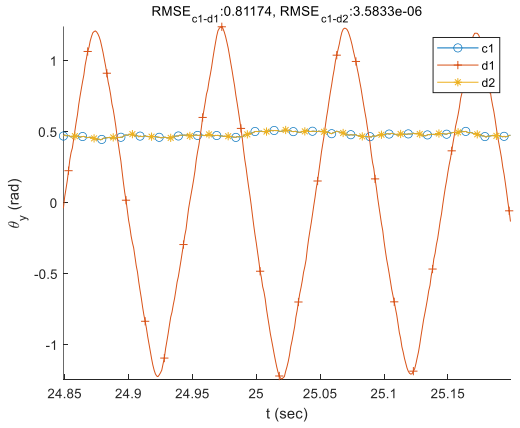
شکل ۱۳ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و تغییر سریع محور دوران در ثانیه ۲۵ – محور z.

Fig. 13 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft craft and quick change of rotation axis (25 sec)–z axis.



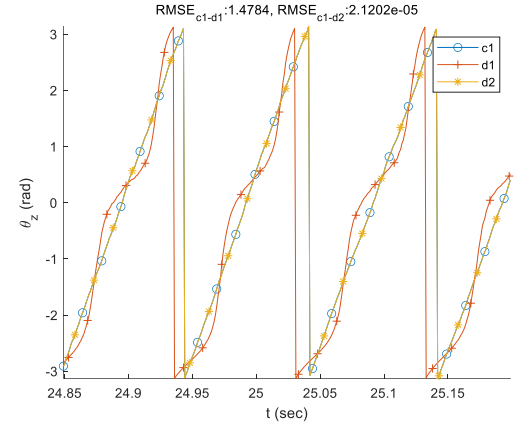
شکل ۱۴ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و ورودی نویز تصادفی– محور x.

Fig. 14 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft and random noise input – x axis



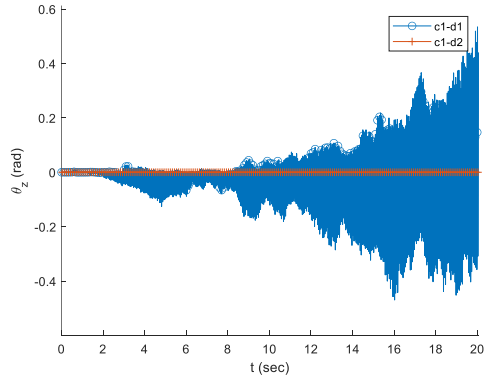
شکل ۱۵ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و ورودی نویز تصادفی– محور y

Fig. 15 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft and random noise input – y axis.



شکل ۱۶ مقایسه مدل دقیق، درجه یک و درجه دو در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و ورودی نویز تصادفی– محور z

Fig. 16 Comparison of accurate, 1th and 2th model to estimate the attitude of an spined craft and random noise input – z axis.



شکل ۱۷ مقایسه خطای مدل درجه یک و درجه دو نسبت به مدل دقیق در تخمین وضعیت یک وسیله چرخان و ورودی نویز تصادفی– محور z

Fig. 17 Comparison the error of 1th and 2th model with respect to accurate model to estimate the attitude of an spin-stabilized craft and random noise input – z axis.

یک شرایط ناپایداری را دنبال می‌کند ولی مدل درجه دوم با دقت بسیار خوبی مدل دقیق را دنبال می‌کند. در محورهای x و y مدل درجه یک از همان ابتدا دارای خطای زیاد است ولی در محور z مدل درجه یک در ابتدا دارای دقت مناسبی است ولی به دلیل تغییرات ناشی از نویز تصادفی به مرور از مدل دقیق فاصله می‌گیرد (۰). در حالی که مدل درجه یک شرایط ناپایداری را دنبال می‌کند ولی مدل درجه دوم با دقت خوبی مدل دقیق را دنبال می‌کند.

۴-۶- خطای وضعیت اولیه بزرگ

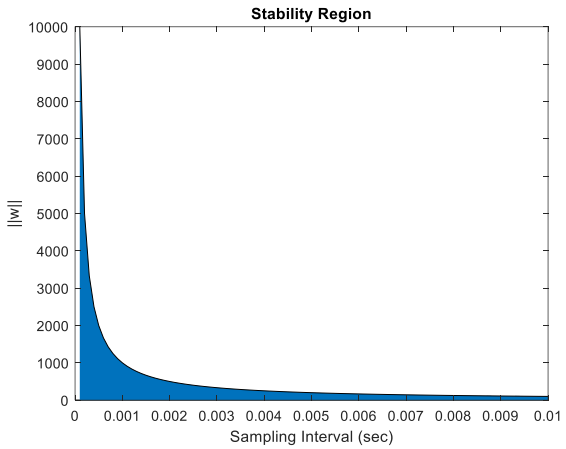
خطی سازی حول یک نقطه کاری با تقریب مقادیر کوچک انجام می‌شود. بنابراین خطا در مقادیر اولیه روی دقت تقریب خطی تاثیر دارد.

۴-۷- محدودیت‌های محاسباتی

سیستم‌های تعیین وضعیت معمولا روی سامانه‌های سخت افزاری با قابلیت اطمینان بالا که منابع پردازشی کمتری دارند، پیاده سازی می‌شوند. به همین دلیل باید از این جنبه هم مورد بررسی قرار گیرند. محاسبات متلب با توجه به وجود منابع پردازشی قوی، با دقت بسیار زیاد انجام می‌شود. بنابراین برای شبیه سازی محاسبات واقعی، باید دقت محاسبات را محدود به سامانه‌های ۱۶ بیتی یا در شرایط بهتر ۳۲ بیتی محدود کرد. پایین آوردن دقت محاسباتی بخصوص در مواقعی که انتگرال گیر وجود دارد و با توجه به تکرار محاسبات در بازه های نمونه برداری منجر به انباشتگی خطا می‌شود.

۴-۸- محدودیت پهنای باند حسگر یا محدودیت نمونه برداری

طبق قانون نایکوئیست برای اینکه بتوان کل اطلاعات یک سیگنال را هنگام نمونه برداری حفظ کرد، سرعت نمونه برداری باید بیش از دو برابر پهنای باند سیگنال باشد که معمولا به منظور افزایش



شکل ۱۸ نقشه ناحیه پایداری در نمودار نرم نرخ دوران نسبت به بازه نمونه برداری در مدل خطی گسسته سینماتیک دوران

Fig. 18 Stability Region Plot: $\Delta t\|w\| \ll 1$

کیفیت سیگنال، سرعت نمونه برداری چند برابر پهنای باند سیگنال (حدودا بیش از ۵ برابر پهنای باند) انتخاب می‌شود.

۴-۹- ناحیه پایداری نسبت به بازه نمونه برداری و نرخ دوران

تقریب‌های خطی و گسسته سینماتیک کواترنوین دارای محدودیت کاربردی هستند که هنگام پیاده سازی باید مد نظر قرار بگیرند در غیر اینصورت بسته به بازه نمونه برداری و تغییرات نرخ دوران یا فرکانس آن دچار خطا شده و ناپایدار می‌شوند. ۰شرایط پایداری بر اساس نرخ نمونه برداری و نرخ دوران نشان داده شده است که بسته به تغییرات نرخ دوران، بازه نمونه برداری باید به اندازه کافی کوچک باشد تا بتواند شرایط پایداری را برآورده نماید.

۵- سیستم نمونه: تعیین وضعیت ماهواره

در این بخش ملاحظات طراحی یک سامانه تعیین وضعیت برای یک ماهواره کوچک مدار پایین و پایدار-چرخان به عنوان یک نمونه کاربردی مرور می شود. یک ترکیب کمینه از حسگرهای خورشید، جایرو و مغناطیس سنج انتخاب می شود که باید با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته با هم تلفیق شوند. برای این منظور یک مدل دینامیکی لازم است که با توجه به شرایط فیلتر کالمن باید خطی شود. ماهواره به منظور حفظ پایداری با نرخ ثابت ۱۵ درجه بر ثانیه حول محور x می‌چرخد. اگر نرخ دوران ثابت باشد، مدل درجه یک که نیاز پردازشی کمتری دارد، کافی است ولی ماهواره در فاز استقرار ممکن است دوران های شدیدی را حول محورهای مختلف تجربه نماید و با توجه به اینکه دارای کنترل فعال است، در هر لحظه ممکن است محور دوران تغییر نماید.

جدول ۳ مشخصات سامانه تعیین وضعیت در فازهای مختلف ماهواره نمونه

Table 3 Specifications of the attitude determination system for the various phases of the prototype satellite

Sat. phase	Characteristic	Status	Fs (Hz)	Model
Deployment	Attitude Maneuver	Changing rate and axis of rotaton	100	2nd order
	Max. rotation rate	360 deg/sec		
In orbit	Attitude Maneuver	No maneuver	50	1nd order
	Max. rotation rate	15 deg/sec		
Orbital Maneuver	Attitude Maneuver	Noisy variations	100	2nd order
	Max. rotation rate	15 deg/sec		

بنابراین در فاز استقرار باید مدل درجه دو استفاده شود. باید توجه داشت که پارامتر $\|\omega\|T_s \ll 1$ همواره برقرار باشد. در فاز استقرار اگر بیشینه نرخ دوران را یک دور بر ثانیه بگیریم، فرکانس نمونه برداری باید بیش از ۱۰۰ هرتز و مدل درجه دو استفاده شود ولی بعد از استقرار در مدار مدل درجه یک با فرکانس نمونه برداری ۵۰ هرتز کافی است. هر چند در

فیلتر کالمن توسعه یافته پیش بینی متغیرهای حالت بر اساس مدل اصلی غیر خطی انجام می شود ولی محاسبه بهره کالمن و ماتریس کواریانس در مرحله بروز رسانی بر اساس ماتریس انتقال مدل خطی شده محاسبه می شود. جدول ۳ مشخصات سامانه تعیین وضعیت در فازهای مختلف ماهواره نمونه را نشان می‌دهد.

۶- نتیجه‌گیری

این مقاله ارزیابی دقیقی از مدل‌های سینماتیک کواترنیون خطی و گسسته را با توجه به مدل دقیق ارائه داده است. مشتقات تحلیلی، مرزهای خطای برش موضعی صریح، مرزهای انحراف هنجار و نواحی اعتبار محلی را برای خطی‌سازی با زاویه کوچک تعیین کرده است. نتایج نشان می‌دهد که:

- گسسته‌سازی اویلر مرتبه اول، دارای خطای برش موضعی درجه دوم و انحراف از نرم واحد از همان مرتبه است.
- حفظ خاصیت نرم واحد کواترنیون از نظر ساختاری فقط در مدل دقیق زمان پیوسته و گسسته‌سازی نمایی تضمین می‌شود.
- مدل‌های کواترنیون خطی‌شده به صورت محلی با خطای اختلال مرتبه دوم معتبر هستند و نمی‌توانند سازگاری کلی را تضمین کنند.
- پایداری مدل‌های گسسته‌سازی‌شده به صراحت به حاصلضرب $\Delta t\|w\| \ll 1$ بستگی دارد که یک ناحیه عملیاتی را برای پیاده‌سازی‌های دیجیتال تعریف می‌کند.

جدول ۴ مقایسه مدل‌های مختلف سینماتیک کواترنیون

Table 4 Comparison of different quaternion kinematic models

Model	Equation	Stability Condition	Applicability Condition	Typical Limit
Acuurate	$\dot{q}(t) = \frac{1}{2}\,\Omega(\omega(t))q(t)$	Stable	Exact Model	No restriction
Exact Discretization	$q(t_k) = e^{\left(\frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right)}q(t_k)$	Stable	Exact for constant ω during T_s	No restriction
1nd Order	$q_{k+1} = q_k + \frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)q_k$	Unstable without normalization	$\|\omega\|T_s \ll 1$	$\|\omega\|T_s \ll 0.1\ (6\ deg/sample)$
2nd Order	$q_{k+1} = \left[\left(1 - \frac{\|w_k\|^2\Delta t^2}{2}\right)I + \frac{\Delta t}{2}\Omega(w_k)\right] \times q_k$	Nearly norm preserving	$\|\omega\|T_s \ll 1$	$\|\omega\|T_s \ll 0.3\ (17\ deg/sample)$

مقایسه این مدل‌ها در جدول ۴ نشان داده شده است. این یافته‌ها، مصالحه بین سادگی محاسباتی و دقت هندسی را روشن می‌کند. برای سیستم‌های با دینامیک پایین با فواصل نمونه‌برداری به اندازه کافی کوچک، گسسته‌سازی مرتبه اول با نرمال‌سازی ممکن است قابل قبول باشد. با این حال، برای سیستم‌های با مانورهای سریع و مستلزم انتگرال‌گیری طولانی مدت یا کاربردهای حساس به دقت مانند تعیین وضعیت فضاپیما و ناوبری اینرسی، روش‌های انتگرال‌گیری نمایی یا هندسی توصیه می‌شود. بر اساس تحلیل‌ها و شبیه سازی‌های انجام شده، قواعد زیر را باید هنگام استفاده از مدل‌های خطی و گسسته سینماتیک کواترنیون در نظر گرفت:

- مدل‌های خطی: فقط برای اغتشاشات با زاویه کوچک معتبر بوده و برای وسیله‌های با مانورهای سریع و تهاجمی نامناسب هستند. مدل‌های خطی به دقت مسیر مرجع حساس هستند.
- گسسته‌سازی اویلر: بازه نمونه برداری در مدل گسسته اویلر باید به اندازه کافی کوچک باشد تا بتواند کل اطلاعات سیگنال را منتقل نماید. این مدل‌ها انحراف زیادی از نرم واحد کواترنیون پیدا می‌کنند و به همین دلیل به نرمال سازی نیاز دارند.
- گسسته‌سازی نمایی: این مدل بار محاسباتی بالایی نیاز دارد و فرض بر این است که در هر بازه نمونه برداری سرعت زاویه‌ای ثابت است.
- روش‌های تقریب مرتبه بالاتر: این مدل‌ها از از نظر محاسباتی سنگین‌تر هستند در عین حال برای حفظ خاصیت نرم واحد کواترنیون به اصلاح هندسی نیاز دارند.

به صورت تقریبی و بر اساس مقدار $\|\omega\|T_s\ (rad/sample)$ شرایط زیر برای استفاده از مدل‌های ارائه شده برای سینماتیک کواترنیون باید رعایت شود:

- کمتر از ۰/۱: همه مدل‌ها قابل استفاده هستند.
- بین ۰/۱ تا ۰/۳: تقریب مرتبه دوم قابل استفاده است.
- بیشتر از ۰/۳: مدل دقیق پیوسته یا گسسته قابل استفاده است.

به عنوان مثال اگر فرکانس نمونه برداری ۱۰۰ هرتز و بیشینه نرخ دوران ۳۰۰ درجه بر ثانیه باشد مقدار $\|\omega\|T_s = 0.052$ می‌شود که بنابراین همه مدل‌ها قابل استفاده هستند ولی اگر بیشینه نرخ دوران ۱۰۰۰ درجه بر ثانیه باشد ($\|\omega\|T_s = 0.17$) بهتر است از تقریب درجه دوم استفاده شود.

تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

بیانیه هوش مصنوعی: در ویرایش متن از هوش مصنوعی به عنوان ابزار کمکی استفاده شده است.

منابع تامین مالی: این پژوهش هیچ‌گونه گرنت مشخصی از آژانس‌های تأمین مالی در بخش‌های عمومی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

نقش نویسندگان: نویسنده اول (۱۰۰٪) – جمع آوری، تحلیل، شبیه سازی، تدوین و ویرایش مقاله

تعارض منافع: در این مقاله هیچ تعارض منافع برای اظهار وجود ندارد.

منابع

[1] D. Titterton and J. Weston, Strapdown inertial navigation technology, 2 ed., American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004 .

[2] A. Noureldin, T. Karamat and &. J.Georgy, Fundamentals of inertial navigation, satellite based positioning and their integration, Springer, 2013 .

[3] P. Bernal-Polo and H. Martinez-Barbera, "Kalman Filtering for Attitude Estimation with Quaternions and Concepts from Manifold Theory," Sensors, vol. 19, no. 1, p. 149, 2019. , doi: 10.3390/s19010149.

[4] D. Choukroun, l. Y. Bar-ltzhack and Y. Oshman, "Novel Quaternion Kalman Filter," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 42, no. 1, pp. 174-190, 2006. , doi: 10.1109/TAES.2006.1603413.

[5] J. Sola, "Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter," Laboratoire dAnalyse et dArchitecture des Systemes-Centre national de la recherche scientifique (LAAS-CNRS), Toulouse, France, 2012., doi: 10.48550/arXiv.1711.02508.

[6] M. N. Lame, "Analysis and Comparison of Linear, Feedback Linearized and Backstepping Controllers Based on Quaternion in Spacecraft Attitude Control," Journal of Aerospace Mechanics, vol. 19, no. 4,

pp. 41-52, 2023. , dor: 20.1001.1.26455323.1402.19.4.4.5

[7] M. Mirzaei, H. Iman و R. Babaei, “Improving Attitude Estimation in High-Acceleration Dynamic Movements Using an Adaptive Extended Kalman Filter Based on Quaternions در ”,The First International Conference on New Technologies in Sciences, Amol, Iran, 2017 .

[8] A. Kosari, M. Peyrovani, M. Fakoor and H. Nejat, "Design of LQG/LTR controller for attitude control of geostationary satellite using reduced quaternion model," Modares Mechanical Engineering, vol. 14, no. 6, pp. 1-10, 2014. , doi: 10.1109/VPPC.2013.6671729.

[9] K. Feng, J. Li, X. Zhang, C. Shen, Y. Bi, T. Zheng and J. Liu, "A New Quaternion-Based Kalman Filter for Real-Time Attitude Estimation Using the Two-Step Geometrically-Intuitive Correction Algorithm," Sensors, vol. 17, 2017. , doi: 10.3390/s17092146.

[10] X. Tang, Z. Liu and J. Zhang, "Square-root quaternion cubature Kalman filtering for spacecraft attitude estimation," Acta Astronaut, vol. 76, p. 84–94, 2012. doi: 10.1016/j.actaastro.2012.02.009

[11] W. Ouyang and Y. Wu, "A Trident Quaternion Framework for Inertial-based Navigation Part II: Error Models and Application to Initial Alignment," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 58, no. 3, pp. 2409-2420, 2021. doi: 10.1109/TAES.2021.3133219

[12] H. A. Hashim, "Attitude Determination and Estimation using Vector Observations: Review,Challenges and Comparative Results," arXiv preprint, vol. arXiv:2001.03787, 2001. doi: 10.48550/arXiv.2001.03787.

[13] A. Badpa, M. T. Hamidi Beheshti and M. Sojoodi, "Nonlinear Observer and Controller Design for Low Earth Orbit Satellite Attitude Control System over Network," Modares Mechanical Engineering, vol. 15, no. 5, pp. 49-59, 2015. dor: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.51.5.

[14] K. S. Phogat and D. E. Chang, "Invariant extended Kalman filter on matrix Lie groups," Automatica, vol. 114, 2020. doi: 10.1016/j.automatica.2020.108812.

[15] Z. Terze, D. Zlatar and V. Pandža, "Aircraft attitude reconstruction via novel quaternion-integration procedure," Aerospace science and technology, 2020. , doi: 10.1016/j.ast.2019.105617.

[16] S. Zhang, G. Chang, C. Chen, L. Zhang and T. Zhu, "Attitude determination using gyros and vector measurements aided with adaptive kinematics modeling," Measurement, 2020. doi: 10.1016/j.measurement.2020.107679.

[17] Y. B. Mitikiri, "Linear Stability Analysis of a Constant Quaternion Difference Attitude Controller," arXiv preprin, vol. arXiv:2504.03222, 2025. , doi: 10.48550/arXiv.2504.03222.

[18] J. WANG, J. WANG and R. LIU, "Stability to Quaternion Matrix Differential Equations with Singular Coefficients," Qualitative Theory of Dynamical Systems ,vol. 24, no. 4, p. 167, 2025. doi: 10.1007/s12346-025-01325-8.

[19] N. Zhou, L. Li, R. Chen, Q. Wang and J. Lu, "Quaternion Based Attitude Determination Method of Cubature Kalman Filter," in 40th Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2021. , doi: doi: 10.23919/CCC52363.2021.9549362.

[20] Y. S. Suh, "Quaternion-Based Attitude Estimation Kalman Filter Using Global Optimization," IEEE Access, vol. 11, pp. 118652-118659, 2023. doi: 10.1109/ACCESS.2023.3327520.