ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. *;*(*):*-*

Modares Mechanical Engineering

DOI:
journal homepage: mme.modares.ac.ir

Finite Element Model Order Reduction for the Transient Nonlinear Heat Transfer Problem of a Compressor Blade and the Effects of Thermal Expansion and Pressure on Displacement

Rahman Karimi Noughabi*, Mohammad Komijani, Afshin Taghvaeipour

Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: **** **, *
Revised: **** **, *
Accepted: *** **, *
ePublished: **** **, *

ABSTRACT

In solving finite element problems in mechanical models, the speed of reaching the response and accuracy are important. Issues such as "limited computational memory and the need for real-time response" affect solution speed and accuracy. What is proposed to address these problems is the development of methods that reduce the problem solution time while maintaining accuracy to an acceptable level. These problems will also be more severe for models with fine meshes and dynamic solution methods.

One of the proposed approaches for this class of problems is reduced-order modeling of the finite element model. In this paper, reduced-order modeling for a nonlinear dynamic model is presented, and the accuracy and speed of reaching the response are investigated.

This method is based on proper orthogonal decomposition of "singular vectors and values," and optimal use of eigenvectors and eigenvalues. This method has been validated for heat transfer and displacement resulting from thermal expansion and pressure applied to a compressor blade model.

The goal is to develop and train a model and test it with new boundary conditions.

For this model, and based on the computational system used, the overall computational speed for the two heat transfer and static solutions has increased by a factor of 7.634. Additionally, the maximum error percentage of the reduced-order model compared to the full model is 3.6%. This trained model can provide a faster response regarding the blade's behavior in crisis situations. Furthermore, due to its lower computational footprint, it is capable of running on low-end processors.

Keywords: Model Order Reduction, Finite Element Method, Eigenvalues and Eigenvectors, Singular Values and Singular Vectors, Proper Orthogonal Decomposition.

In Press, Pre-Proof Version

How to cite this article
Karimi Noughabi R, Komijani M, Taghvaeipour A, Finite Element Model Order Reduction for the Transient Nonlinear Heat Transfer Problem of a **Compressor** Blade and the Effects of Thermal Expansion and Pressure on Displacement. Modares Mechanical Engineering; *(*): ****-****.

*Corresponding author's email: rahman.karimin@modares.ac.ir
*Corresponding ORCID ID: 0009-0006-2581-4934

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

شاپا: ۲۴۷۶-۶۹۰۹، مهندسی مکانیک مدرس، *؛*(*):*_*
مهندسی مکانیک مدرس
DOI:
صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir

کاهش مرتبه مدل المان محدود برای مسئله انتقال حرارت گذرا و غیرخطی پره کمپرسور و اثرات انبساط حرارتی و فشار بر جابه‌جایی

رحمان کریمی نوقابی*، محمد کمیجانی، افشین تقوایی‌پور

دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تهران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله
مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله
دریافت: **/**/****
بازنگری: **/**/****
پذیرش: **/**/****
ارائه آنلاین: **/**/****

چکیده

در حل مسائل المان محدود در مدل‌های مکانیکی، سرعت رسیدن به پاسخ و دقت اهمیت دارند. مشکلاتی مانند «کم‌بودن حافظهٔ محاسباتی و نیاز به پاسخ بلادرنگ» بر سرعت و دقت حل تأثیر می‌گذارند. آنچه دربارهٔ رفع این مشکلات مطرح می‌شود، ساخت روش‌هایی است که زمان حل مسئله را کاهش دهند، ولی درعین‌حال دقت را تا حد قابل‌قبولی حفظ کنند. این مشکلات برای مدل‌هایی با مش‌های ریز و روش حل دینامیکی نیز شدیدتر خواهند بود.

یکی از راهکارهای مطرح‌شده برای این دسته مسائل، کاهش مرتبهٔ مدل المان محدود است. در این مقاله، کاهش مرتبهٔ مدل برای یک مدل دینامیکی غیرخطی ارائه‌شده و دقت و سرعت رسیدن به پاسخ بررسی می‌شود. این روش بر مبنای تجزیهٔ متعامد مناسب «بردارها و مقادیر تکین» و استفادهٔ بهینه از بردارها و مقادیر ویژه است.

این روش برای انتقال حرارت و جابه‌جایی حاصل از انبساط حرارتی و فشار واردشده به مدل پرهٔ کمپرسور اعتبارسنجی شده است. هدف، ساخت و آموزش یک مدل و آزمایش آن با شرایط مرزی جدید است. برای این مدل و بر اساس سیستم محاسباتی استفادشده سرعت محاسبات درمجموع، برای دو حل انتقال حرارت و استاتیکی، ۷,۶۳۴ برابر شده است و بیشترین درصد خطا مدل کاهش‌یافته نسبت به مدل کامل برابر با ۳,۶٪ است. این مدل آموزش‌دادشده می‌توان در مواقع بحران پاسخ سریع‌تری از رفتار پره ارائه کند. همچنین به دلیل فضای محاسباتی کمتر توانایی اجرا بر روی پردازنده‌های ضعیف را دارا است.

کلیدواژه‌ها: کاهش مرتبه مدل، روش المان محدود، مقادیر و بردارهای ویژه، مقادیر و بردارهای تکین، تجزیه متعامد مناسب

نحوه ارجاع به این مقاله
کریمی نوقابی رحمان، کمیجانی محمد، تقوایی‌پور افشین، کاهش مرتبه مدل المان محدود برای مسئله انتقال حرارت گذرا و غیرخطی پره کمپرسور و اثرات انبساط حرارتی و فشار بر جابه‌جایی، مهندسی مکانیک مدرس. * (*): ****-****.

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Rhaman.karimin@aut.ac.ir
*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ۰۰۰۹-۰۰۰۶-۲۵۸۱-۴۹۳۴

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

TMU Press, Pre-Proof Version

۱- مقدمه

شبیه‌سازی المان محدود مسائل مکانیکی در زمینه‌های هوافضا، رباتیک، سیستم‌های خنک‌کننده و انتشار که نیازمند دقت بسیار بالایی هستند، مدل‌هایی با ابعاد بسیار بزرگی بر اساس درجات آزادی تولید می‌کنند که این شبیه‌سازی‌ها به‌ویژه برای تحلیل‌های مکرر (مانند بهینه‌سازی یا کنترل) پرهزینه و زمان‌برتر هم می‌شود.

یکی از راهکارهای کاهش هزینه محاسبات، استفاده از روش‌های کاهش مرتبه مدل (Model Order Reduction) است. در این روش‌ها برای تقریب قابل‌قبول رفتار دینامیکی مدل اصلی از مدل‌هایی با ابعاد بسیار کوچک استفاده می‌شود. بسته به زمینه‌ی کاری تعاریف مختلفی از کاهش مرتبه مدل مطرح می‌شود. ولی در اصل، MOR درزمینهٔ سیستم‌ها و تئوری کنترل توسعه داده شده است تا بتوان به کمک آن ویژگی‌های سیستم‌های دینامیکی را باتوجه‌به کاربردشان برای کاهش پیچیدگی مدل مطالعه کرد، درحالی‌که رفتار **ورودی و خروجی** آن‌ها تاحدامکان حفظشده باشد. به‌علاوه، روش کاهش مرتبه امروزه نیز در حل عددی موردتوجه بسیاری قرار گرفته است.

کاهش مرتبه مدل با ساده‌سازی معادلات و متغیرها برای انجام شبیه‌سازی در مدت‌زمان مناسب و ظرفیت ذخیره‌سازی محدود اما با نتایج قابل‌اعتماد استفاده می‌شود. همچنین در برخی موارد پیش‌بینی‌های آنلاین رفتار مدل با سرعت محاسباتی مناسب برای بهینه‌سازی فرایندها و محصولات یک ضرورت است.

مهم‌ترین نکته این است که MOR باید اساسی‌ترین ویژگی‌های مدل اصلی را در مدل کاهش‌یافته حفظ کند. روش‌های کاهش مرتبه متفاوتی وجود دارد که بعضی از آن‌ها عمومی و برخی دیگر مخصوص مسائل خاص هستند. برای مثال می‌توان اولین ساده‌سازی عمومی معادلات را تقریب به کمک سری‌های مثلثاتی ابداع شده توسط فوریه دانست [۱].

در میان روش‌های تخصصی‌تر MOR، روش‌های مبتنی بر تجزیه‌ی مؤلفه‌های متعامد (Proper Orthogonal Decomposition) به دلیل کارایی بالا در مسائل مکانیکی خطی و غیرخطی، اهمیت ویژه‌ای دارند. این مقاله بر کاربرد این دو روش در سیستم‌های مکانیکی (شامل مسائل استاتیکی و دینامیکی) خطی و غیرخطی تمرکز دارد و با حل یک مثال دقت و کارایی آن‌ها را بررسی می‌کند.

برای کاهش مرتبه روش‌های سنتی‌تری مانند روش‌های استاتیکی کاهش گویان و روش‌های سنتز مد مؤلفه و نمونه بهبودیافته آن‌ها که در مقاله [۲] مطرح‌شده است وجود دارد.

روش تجزیه متعامد مناسب که به‌عنوان تجزیه کار هومن – لوئه (Karhunen-Loeve decomposition) یا تحلیل مؤلفه‌های اصلی (Principal Component Analysis) نیز شناخته می‌شود، ریشه در کارهای پیرسون [۳] در سال ۱۹۰۱ دارد. این روش‌ها با تجزیه مقادیر تکین (Singular Value Decomposition) مرتبط هستند.

روشی دیگر در مقاله [۴] ارائه‌شده است. در این طرح نحوه‌ی ساخت بسط‌های چندجمله‌ای با ساختار ماتریس پراکنده در تحلیل المان محدود تصادفی ارائه‌شده است. در این روش با حل برای چند حالت مختلف ابتدا ضرایب با تأثیرگذاری زیاد (مهم) یافت شده و سپس با بازگشت به عقب ضرایب غیر مهم حذف می‌شوند که درنتیجه این کار خواص مهم و تأثیرگذار مدل استخراج می‌شود. این کار با استفاده از رگرسیون تدریجی و معیار خطای leave-one-out، تعداد جملات بسط داده شده را به طور قابل‌توجهی کاهش می‌دهد. این روش را می‌توان بر متغیرهای ورودی ناشی از عدم قطعیت با تأثیرگذاری خطی در ماتریس‌های سختی و معادلات، مانند سطح مقطع و مدول یانگ و ترکشن‌ها هستند، اعمال کرد.

در حوزه کاهش مرتبه مدل در مقاله [۵] یک چارچوب رگرسیون کم رتبه (LRR) برای ساخت مدل‌های سریع‌تر از سیستم‌های دینامیکی سازه‌ای بیان‌شده است. در این چارچوب، ابتدا حالت کامل با یک تبدیل کاهش‌دهنده به فضای کم بعد نگاشت شده و سپس رفتار مختصات کاهش‌یافته با یک الگوریتم رگرسیون، مانند فرآیند گاوسی، تقریب زده می‌شود.در این مقاله چهار روش ارائه‌شده است: PCA خطی، KPCA غیرخطی، autoencoder و variational autoencoder. روش روی یک مدل المان محدود پیچیده از بازوی انسان با پنج پارامتر فعال‌سازی عضلانی اعمال‌شده و دو کمیت جابه‌جایی و تنش فون میزس به‌عنوان خروجی‌های موردنظر بررسی می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که جابه‌جایی با PCA به‌خوبی بازسازی می‌شود، اما تنش به دلیل ساختار غیرخطی‌تر و کاهش کند تر مقادیر منفرد، در فضای کم بعد خطی سخت‌تر قابل‌نمایش است.

روش‌های غیرخطی، به‌ویژه autoencoder ، بهترین دقت کلی را ارائه می‌دهند، هرچند هزینه آموزش آفلاین و تنظیم فرا پارامترها در آن‌ها بیشتر است. مدل‌های کاهش‌یافته نهایی کارایی در حد میلی‌ثانیه دارد و قابلیت اجرا در زمان واقعی و روی سخت‌افزار کم‌توان را فراهم می‌کنند. این کار نشان می‌دهد که ترکیب کاهش ابعاد داده‌محور و رگرسیون، کارآمد برای کاهش مرتبه مدل‌های المان محدود با ابعاد بالا فراهم است.

در پژوهش اخیر مهدی احمدی و همکاران، اگرچه تمرکز اصلی بر استخراج معادلات حرکت با استفاده از روش گیبس–اپل بوده است، اما دستاوردهای آن‌ها از منظر کاهش مرتبه مدل حائز اهمیت است. آن‌ها با ارائه یک الگوریتم بازگشتی، رشد نمایی عبارات دینامیکی را مهار کرده و با حذف سیستماتیک قیود هولونومیک، دستگاه معادلات را به فرم ODE با کمترین تعداد متغیرهای مستقل کاهش داده‌اند. همچنین ساختار بلوکی ماتریس اینرسی ارائه‌شده در این مقاله، بستر مناسبی برای اعمال روش‌های کاهش مرتبه در سطح زیرسیستم‌ها فراهم می‌آورد [۶].

در پژوهشی که توسط حیدری و شاطری نجف‌آبادی انجام‌شده، انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی گذرا در یک محفظه مربعی حاوی پره انعطاف‌پذیر، با درنظرگرفتن اثرات برهمکنش دوطرفه بین سیال و جامد، به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مطالعه، معادلات الاستودینامیک حاکم بر حرکت پره (جامد) با استفاده از روش اجزاء محدود (FEM) گسسته‌سازی و به کمک تکنیک تکراری نیوتن-رافسون حل‌شده‌اند، درحالی‌که معادلات سیال (ناویر-استوکس و انرژی) با روش حجم محدود (FVM) و فرمول‌بندی لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE) در نرم‌افزار عددی تحلیل گردیده‌اند.

از منظر انتقال حرارت، نتایج نشان می‌دهد که تغییر شکل پره محاسبه‌شده توسط (FEM) تأثیر مستقیم بر الگوی جریان و توزیع دما درون محفظه دارد. با تغییر شکل پره به سمت بالا، عدد ناسلت موضعی دیواره گرم در بخش پایینی پره افزایش و در بخش بالایی آن کاهش می‌یابد که ناشی از تغییر مسیر خطوط جریان و خطوط هم‌دما است. بررسی‌ها در گستره اعداد رایلی 10^3تا 10^6 و برای طول‌ها و موقعیت‌های مختلف پره (L/A و H/A) نشان می‌دهد که با افزایش عدد رایلی و طول پره، اثرات برهمکنش سیال و جامد تشدید شده و تغییرات نرخ انتقال حرارت محسوس‌تر می‌گردد. در حالت پایا، حدود ۲۵ درصد از حالات بررسی‌شده منجر به افزایش و حدود ۳۵ درصد منجر به کاهش انتقال حرارت در مقایسه با پره صلب شده‌اند. بیشترین میزان بهبود و کاهش در عدد ناسلت متوسط حالت پایا به ترتیب برابر با ۴/۵٪ و ۱۵/۴٪-گزارش‌شده است. همچنین در حدود ۹۰ درصد موارد، استفاده از پره انعطاف‌پذیر باعث افزایش زمان رسیدن به حالت پایا گردیده که از دیدگاه عملکرد حرارتی نامطلوب ارزیابی‌شده است. این پژوهش به‌وضوح نشان می‌دهد که مدل‌سازی دقیق تغییر شکل جامد با FEM، برای پیش‌بینی صحیح عملکرد انتقال حرارت در سامانه‌های دارای اندرکنش سیال-سازه، امری ضروری است [۷].

در مقاله [۸] روش کاهش مرتبهٔ دیگری برای یک مدل ایمپلنت ارائه‌شده است در آن مودهای POD از snapshotهای شبیه‌سازی FEM استخراج می‌شود و وابستگی حل به پارامترهای موقعیت ایمپلنت با درون‌یابی توابع پایه مدل می‌شود. برای پرهیز از remeshing و projection، مش مرجع با معادلهٔ لاپلاس ذخیره می‌شود و شماره‌گذاری گره‌ها و تعداد درجات آزادی حفظ می‌شود. در فاز آفلاین، ۷۲۹ snapshot تولید می‌شود و با SVD و POD، ۱۷ مود پایه انتخاب می‌شود که حدود ۹۹.۹۹٪ انرژی داده‌ها را نگه می‌دارد و خطای بازنمایی نزدیک به ۱٪ است.

در فاز آنلاین، تحلیل کاهش‌یافته برای یک موقعیت جدید ایمپلنت تنها حدود ۱.۲ میلی‌ثانیه طول می‌کشد، درحالی‌که شبیه‌سازی FEM کامل حدود ۲۵ دقیقه زمان می‌برد. دقت مدل جانشین با میانگین خطای مطلق حدود ۰.۰۰۴۷ ارزیابی می‌شود.

در مقاله [۹] یک چارچوب کاهش مرتبهٔ مدل پارامتری (pMOR) برای تحلیل کوپل مستقیم حرارتی–مکانیکی یک ماژول الکترونیک قدرت ارائه‌شده است که در آن مدل FEM در ANSYS با روش کاهش مرتبهٔ مبتنی بر زیرفضای Krylov و الگوریتم PRIMA ترکیب‌شده است. نوآوری اصلی مقاله پارامتری کردن خواص وابسته به دمای سیم آلومینیومی، یعنی ضریب انبساط حرارتی و مدول یانگ، و به‌کارگیری یک روش درون‌یابی ماتریسی جدید بر پایهٔ درون‌یابی لاگرانژی برای ساخت مدل کاهش‌یافته پارامتری است. مدل کامل با ۵۰٬۶۰۲ درجهٔ آزادی به یک مدل کاهش‌یافته محلی با تنها ۸ درجهٔ آزادی تقلیل می‌یابد و در عین‌حال توزیع دما، جابه‌جایی، تنش فون میزس و کرنش پلاستیک با دقت قابل‌قبولی نسبت به مدل کامل بازتولید می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که اختلاف بیشینهٔ جابه‌جایی حدود ۰.۱٪ و میانگین اختلاف تنش کمتر از ۱٪ است.

در مقاله [۱۰] که در آن یک مدل المان محدود غیرخطی جامع برای رشتهٔ حفاری فراساحل با ۱۸۷۱ درجهٔ آزادی ارائه‌شده است ارتعاشات کوپل محوری–جانبی–پیچشی، تماس با چاه، بارهای موج و جریان، و برهمکنش غیرخطی مته–سنگ را در نظر می‌گیرد.

برای کاهش هزینهٔ محاسباتی، یک مدل کاهش مرتبهٔ داده‌محور با استفاده از تجزیهٔ مود دینامیکی مرتبه بالا (HODMD) روی snapshotهای سرعت زاویه‌ای در هفت نقطه بر روی میله حفاری ساخته می‌شود که عملاً به یک ROM با ۷ درجهٔ آزادی می‌رسد.

In Press, Pre-Proof Version

نتایج نشان می‌دهد که HODMD دینامیک غالب را به‌خوبی و با خطا پایین بازسازی و پیش‌بینی می‌کند.

در مقاله [۱۱] یک مدل کاهش مرتبهٔ داده‌محور به نام POD–DMD–RI برای PDEها بر اساس پارامتر ورودی زمان، آموزش داده‌شده است. ابتدا در فاز آفلاین با استفاده از POD، بُعد مکانی را کاهش می‌دهد و برای هر پارامتر آموزش یک مدل DMD روی ضرایب تصویر می‌سازد تا پیش‌بینی زمانی خارج از بازهٔ آموزش ممکن شود. سپس ماتریس ضرایب پیش‌بینی‌شده با POD دوباره تجزیه می‌شود و بخش وابسته به زمان با درون‌یابی اسپلاین مکعبی (CSI) و بخش وابسته به پارامتر با رگرسیون فرایند گاوسی (GPR) تقریب زده می‌شود. در فاز آنلاین، حل برای هر زمان و پارامتر جدید تنها با ضرب مودهای POD در ضرایب تقریبی و در زمان بسیار کوتاه محاسبه می‌شود. نتایج روی چهار مسئلهٔ معیار، ازجمله معادلهٔ واکنش–انتشار با ۱۹ پارامتر، نشان می‌دهد که روش دقت خوبی در درون‌یابی و برون‌یابی زمانی و پارامتری دارد و نسبت به DMD استاندارد و POD–GPR کارآمدتر است.

کاری که در این مقاله صورت گرفته‌شده است ساخت مدل کاهش مرتبه مدل المان محدود یک پره کمپرسور است.

در ابتدا در مرحله انتقال حرارت غیرخطی، مدل کاهش مرتبه‌ای به کمک بردارهای تکین حاصل از حل چندین‌باره مدل حرارتی بر اساس شرایط مرزی متنوع حرارتی برای یافت جابه‌جایی‌های حاصل از انبساط حرارتی، آموزش داده می‌شود. این مدل آموزش‌دادشده مختص مرحله انتقال حرارت است.

در مرحله استاتیکی باتوجه‌به بیان روابط موجود، ماتریس سختی بر اساس بردارهای ویژه تقریب زده می‌شود؛ سپس با حل مدل استاتیک با نتایج حاصل از حل مدل‌های انتقال حرارتی و شرایط مرزی متنوع نیرویی (فشاری) مدل کاهش مرتبه مختص حل استاتیکی ساخته (آموزش داده) می‌شود

و در آخر این مدل کاهش مرتبه داده شده بر اساس شرایط مرزی جدید آزمایش می‌شود و دقت و صحت مدل آموزش‌دادشده سنجیده می‌شود.

آنچه در این مقاله مطرح‌شده است ترکیب و استفاده درست از بردارهای ویژه و مقادیر تکین است.

ساختار مقاله به شرح زیر است:

در فصل دوم، فضای برداری و خواص آن، مانند بردارهای پایه، زیرفضای برداری و تجزیهٔ مقدار منفرد، تعریف‌شده است. همچنین، انواع ماتریس‌ها و خواص ماتریس‌های متعامد بیان‌شده است. در فصل سوم، مسئلهٔ انتقال حرارت برای پره و جابه‌جایی ناشی از انبساط حرارتی، به علاوهٔ فشار وارد بر وجوه پره، حل‌شده است. در هر یک از این مراحل حل، مدلی برای کاهش مرتبه ساخته و آموزش داده می‌شود؛ درنهایت، دقت و هزینهٔ محاسباتی برای مدل بررسی می‌شود و در فصل چهارم، نتیجهٔ به‌دست‌آمده بیان می‌شود.

۲- مختصری درباره‌ی فضای برداری

در ادامه، باتوجه‌به روابط به‌کاررفته در این مقاله، مختصری از فضای برداری و روابط حاکم بر آن بیان می‌شود. خواننده برای مطالعهٔ بیشتر می‌تواند به پایان‌نامهٔ همین نویسنده مراجعه کند.

۲-۱- فضای برداری و زیرفضای برداری

پیش از تعریف فضای برداری، نیاز به آشنایی با مفهوم «میدان» در نظریه مجموعه‌ها است. میدان که به‌طورمعمول با $\mathbb{F}$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است که حداقل دارای دو عضو متمایز است که خاصیت جمع و ضرب اسکالر برای آن‌ها تعریف می‌شود و همچنین برای عملگر جمع و ضرب دارای خاصیت‌های بسته بودن، شرکت‌پذیر و جابه‌جایی است و دارای عضوهای منحصربه‌فرد خنثی و قرینه نسبت به عملگر جمع و ضرب است. برای مثال، مجموعه اعداد مختلط و مجموعه اعداد حقیقی میدان هستند.

یک فضای برداری مانند $\mathbf{V}$ بر روی میدان $\mathbb{F}$ عبارت است از مجموعه $\mathbf{V}$ که بردارها، عناصر آن هستند. و خاصیت جمع برداری و ضرب اسکالر (میدان) را دارا هستند و برای دو عنصر متمایز $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ و $\alpha\in\mathbb{F}$ که α اسکالر است، در شرایط زیر صدق می‌کنند.

جدول ۱ ویژگی‌های فضای برداری

Table 1 Characteristics of the vector space

$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{V}$	Closure under vector addition
$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{V}\ \wedge\ \forall a\in\mathbb{F}\Rightarrow a\mathbf{u}\in\mathbf{V}$	Closure under scalar multiplication
$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$	Commutativity of vector addition
$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}:\exists\ \mathbf{0}\in\mathbf{V}\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$	Existence of a unique additive identity element
$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}:\exists\ \mathbf{v}\in\mathbf{V}\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$	Existence of a unique additive inverse element
$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}:\exists\ 1\in\mathbb{F}\Rightarrow 1\mathbf{u}=\mathbf{u}1=\mathbf{u}$	Existence of a unique multiplicative identity element
$\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}\Rightarrow(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	Associativity of vector addition
$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\ \wedge\ \forall a,\beta\in\mathbb{F}\Rightarrow(a\beta)\mathbf{u}=a(\beta\mathbf{u})$ $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}\ \wedge\ (a+\beta)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$	Associativity of vector multiplication

چند فضای برداری:

الف) فضای nتایی‌ها ($\mathbb{F}^n$): مجموعه‌ای از تمام nتایی‌های مرتب موجود که عناصر هرکدام از آن‌ها متعلق به میدان $\mathbb{F}$ است؛ (مجموعه تمام بردارهای n بُعدی که متصل‌کننده یک نقطه‌به‌نقطه دیگر است.)

مانند فضای مرتبه nام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ که به‌صورت $\mathbb{R}^n$ نمایش داده می‌شود که در این مقاله استفاده‌شده است.

ب) فضای ماتریسی ($\mathbf{M}^{m\times n}$): مجموعه‌ای از تمام ماتریس‌ها $m\times n$ است که عناصر هرکدام از این ماتریس‌ها بر روی میدان $\mathbb{F}$ تعریف می‌شوند و m,n اعداد طبیعی هستند. به‌بیان‌دیگر، ماتریس را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای مرتب از بردارها با عناصر تعریف‌شده در یک میدان به‌خصوص تعریف کرد.

$\mathbf{M}^{1\times n}=\mathbb{F}^n$ بیانگر «فضای بردار سطری» و $\mathbf{M}^{m\times 1}=\mathbb{F}^m$ بیانگر «فضای بردار ستونی» است.

ترکیب فضاهای برداری با یکدیگر، فضای برداری خواهد شد. هدف از تعریف فضای برداری در اینجا کمک به درک بهتر عملگرهای جمع و ضرب، مستقل از ماهیت و اندازه عناصر تشکیل‌دهنده آن است.

زیرمجموعه‌ی $\mathbf{S}$ از فضای برداری $\mathbf{V}$ بر روی میدان $\mathbb{F}$، یک زیرفضای $\mathbf{V}$ نامیده می‌شود اگر جمع و ضرب اسکالر تعریف‌شده برای $\mathbf{V}$ بر روی میدان $\mathbb{F}$، برای $\mathbf{S}$ نیز صادق باشد به طور خلاصه:

$$\mathbf{S}\subseteq\mathbf{V} \qquad (۱)$$

جدول ۲ ویژگی‌های زیرفضای برداری

Table 2 Properties of the vector subspace

$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{S}\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{S}$	**Closure under vector addition**
$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{S}\ \wedge\ \forall a\in\mathbb{F}\ \Rightarrow\ a\mathbf{u}\in\mathbf{S}$	**Closure under scalar multiplication**
$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{S}\ \wedge\ 0\in\mathbb{F}:\exists\ \mathbf{0}\in\mathbf{V}\cap\mathbf{S}\Rightarrow \mathbf{u}0=\mathbf{0}$	**The unique identity element of V**

چند نمونه از زیرفضاها در زیر آمده است:

۱- مجموعه تمام nتایی‌ها مانند $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ بر روی $\mathbb{F}^n$ که در آن $a_1=0$ (یا هرکدام از عناصر) است، یک زیرفضا برای $\mathbb{F}^n$ است. (مانند تمام بردارهای عبوری از مرکز مختصات یا نمایش برداری مختصات نقاط.)

۲- مجموعه تمام ماتریس‌های متقارن با بُعد $n\times n$ ، زیرفضای تمام ماتریس‌هایی با بُعد $n\times n$ است.

۳- «فضای پوچ» و «فضای برد» یک ماتریس نیز زیرفضا هستند.

اگرچه فضای برداری باید شامل مجموعه‌ای از بردارها، دو عمل جمع و ضرب اسکالر و میدان باشد؛ اما باتوجه‌به، مشخص‌بودن اعمال جمع و ضرب اسکالر و میدان اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)، در اینجا از $\mathbf{V}$ به‌عنوان فضای برداری استفاده‌شده است.

۲-۲- پایه‌ی فضای برداری

فرض شود که $\mathbf{S}\subset\mathbf{V}$ باشد و $\mathbf{S}$ مجموعه بردارهای $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n\}$ باشد. آنگاه باتوجه‌به خاصیت جمع و ضرب اسکالر، بردار $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ یک ترکیب خطی از $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$ است اگر:

$$\forall \mathbf{u}_i\in\mathbf{S}:\exists\ c_i\in\mathbb{R}\ ,1\le i\le m\ \Rightarrow \mathbf{w}=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{u}_i \qquad (۲)$$

باتوجه‌به فرضیات بالا، مجموعه تمام ترکیبات خطی تولیدشده از $\mathbf{S}$ را زیرفضای تولیدشده از آن می‌گویند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند.

In Press, Pre-Proof Version

$$\text{span}(\mathbf{S}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{u}_i \,|\, \mathbf{u}_i \in \mathbf{S}, c_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le m \right\} \quad (۳)$$

اگر $\text{span}(\mathbf{S}) = \mathbf{V}$ باشد، $\mathbf{S}$ مولد فضای برداری $\mathbf{V}$ است؛ یعنی می‌توان تمام بردارهای موجود در این فضای برداری را به کمک ترکیبات خطی بردارهای زیرفضای $\mathbf{S}$ تولید کرد.

اگر و فقط اگر حاصل ترکیبات خطی عناصر زیرفضای متناهی $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \mathbf{V}$ برابر با عنصر خنثی $\mathbf{V}$ باشد، به‌گونه‌ای که حداقل یک ضریب $c_i = 0$ وجود داشته باشد، این زیرفضا وابسته خطی خواهد بود؛ و اگر برقراری این رابطه مستلزم صفر شدن تمامی ضرایب باشد، آنگاه این زیرفضا مستقل خطی خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_i = 0 \;:\; \forall\, 1 \le i \le k \quad (۴)$$

مجموعه متناهی $\{\mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbf{V}$ پایه‌ی فضای برداری $\mathbf{V}$ است اگر دو شرط زیر را دارا باشد.

۱- $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{n}$ مولد فضای برداری باشد.

۲- $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{n}$ مستقل خطی باشد.

بُعد یک فضای برداری برابر با تعداد بردارهای پایه‌ی آن فضا است؛ برای مثال بُعد مجموعه‌ی بردارهای پایه‌ی $\{\mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m\}_{i=1}^{n}$ برابر با m است.

همچنین می‌توان یک ماتریس مانند $\mathbf{A}_{m\times n}$ شامل عناصر تعریف‌شده در میدان $\mathbb{R}$ را به‌صورت مجموعه‌ای مرتب از بردارهای سطری و در قالب یک ماتریس ستونی $\mathbf{A}_{m\times 1}$ و یا مجموعه‌ای مرتب از بردارهای ستونی و در قالب یک ماتریس سطری $\mathbf{A}_{1\times n}$ نمایش داد.

هر بردار سطری دارای n مؤلفه و هر بردار ستونی دارای m مؤلف است. بردارهای سطری هرکدام زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ و بردارهای ستونی هرکدام زیرفضایی از $\mathbb{R}^m$ را گسترش می‌دهند که به ترتیب به آن‌ها فضای سطری و ستونی ماتریس $\mathbf{A}$ می‌گویند.

$$\mathbf{A} = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix} \;\middle|\; \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^n \;|\; i = 1, \dots, m \right. \\ \left. [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_n] \;|\; \mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^m \;|\; j = 1, \dots, n \right\rangle \quad (۵)$$

قضیه: برای یک ماتریس مانند $\mathbf{A}_{m\times n}$، بعد فضای ستونی آن با بعد فضای سطری آن برابر است.

$$\dim(\text{ColSpace}(\mathbf{A})) = \dim(\text{RowSpace}(\mathbf{A})) \quad (۶)$$

زیرفضای برد یک ماتریس، مجموعه‌ی تمام بردارهایی است که از ضرب ماتریس در هر بردار دلخواه ایجادشده است؛ در عملیات جبری، به فضایی که برد (هر بردار حاصل از نگاشت بردارهای دامنه توسط ماتریس ضرایب) عضوی از آن است، اطلاق می‌شود.

برای یک تبدیل خطی مانند ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ ، فضای برد به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \quad (۷)$$

زیرفضای پوچ که به آن «هسته» هم می‌گویند، مجموعه‌ی تمام بردارهایی است که توسط تبدیل خطی مانند $\mathbf{A}_{m\times n}$ به بردار صفر (عضو خنثی عمل جمع آن فضا) نگاشت می‌شود.

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \quad (۸)$$

$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ مجموعه جواب‌های دستگاه همگن $(\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0})$ است. مشخص است که ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ در دستگاه معادلات خطی همگن حلی «غیر بدیهی» دارد که این خود نشان‌دهنده وجود بردارهای وابسته خطی است. $(\mathbf{v} = \mathbf{0})$ یک حل بدیهی و $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \backslash 0$ حل‌های غیر بدیهی است.)

تعداد ستون‌های یک ماتریس مانند $\mathbf{A}_{m\times n}$ را می‌توان بر اساس جمع بُعد (تعداد پایه‌ها) زیرفضای برد و پوچ آن نوشت.

$$\underbrace{\dim(\mathcal{R}(\mathbf{A}))}_{\text{Rank}(\mathbf{A})} + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n \quad (۹)$$

«رتبه (Rank)» ماتریس $\mathbf{A}$ برابر با تعداد بردارهای پایه‌های فضای ستونی $\mathbf{A}$ است.

ترانهاده کردن ماتریس $\mathbf{A}$ باعث جابه‌جایی سطرها و ستون‌ها خواهد شد. با اعمال رابطه بالا بر روی $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ رتبه ماتریس جدید برابر با تعداد بردارهای پایه فضای ستونی‌ها (سطرهای سابق) خواهد بود.

$$\dim(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})) = m \quad (۱۰)$$

باتوجه‌به رابطه (۶،۹،۱۰) قضیه زیر اثبات می‌شود.

$$\text{Rank}(\mathbf{A}) = \text{Rank}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \;\Rightarrow\; \text{Rank}(\mathbf{A}) \le \min \quad (۱۱)$$

در یک سیستم معادلات جبری ناهمگن مانند $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ چنانچه بردار $\mathbf{c}$ عضو فضای برد ماتریس $\mathbf{A}$ نباشد، این سیستم «ناسازگار» است و جواب ندارد؛ و طبق قاعده کاپلی، رابطه $\text{Rank}(\mathbf{A}) \neq \text{Rank}([\mathbf{A}|\mathbf{c}])$ برای آن برقرار است. (در دو بعد می‌توان این سیستم را دو خط موازی غیر منطبق تجسم کرد.)

۲-۳- متعامدی

آنچه در فصل بعدی دارای اهمیت است، انتخاب بهترین بردارهای پایه برای یک فضای برداری است. یک فضا می‌تواند چندین مجموعه بردار پایه داشته باشد. بعضی از این مجموعه‌ها فضا را بهتر از مجموعه‌های دیگر تعیین می‌کنند.

به طور مختصر، در یک فضای برداری، هرچه بردارهای پایه از یکدیگر فاصلهٔ بیشتری داشته باشند، بهتر می‌توانند آن فضا را توصیف کنند. کم‌بودن فاصلهٔ بردارهای پایه (بسیار کوچک بودن نرم اختلاف آن‌ها) به‌گونه‌ای که بتوان آن‌ها را تقریباً وابستهٔ خطی در نظر گرفت، موجب بدشرط‌شدن آن فضا خواهد شد. به طور خاص، انتخاب بردارهای پایهٔ متعامد یکه باعث رفع این مشکل می‌شود.

طبق تعریف فضای ضرب داخلی، بردارهای $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد هستند اگر و فقط اگر:

$$\forall \{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^{m} \in \mathbb{R}^n \wedge \forall\, i,j \in \mathbb{N} \;:\; \exists \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \Leftrightarrow i \neq j \quad (۱۲)$$

این رابطه بیانگر مستقل خطی‌بودن بردارها متعامد یک فضا است. چنانچه این بردارها علاوه بر متعامد بودن، نرمی برابر با یک داشته باشند، آن‌ها بردار متعامد یکه هستند.

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 1 \quad (۱۳)$$

بردارهای فضای پوچ یک ماتریس غیرتکین، باتوجه‌به رابطه (۸) بر بردارهای سطری آن ماتریس عمود هستند.

با فرض اینکه مجموعه‌ی $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ یک‌پایه برای $\mathbb{R}^n$ است، چنانچه بردارهای این پایه، متعامد یکه باشند، این مجموعه را پایه‌ی متعامد یکه می‌گویند؛ مانند پایه‌ی مرتب استاندار که یک پایه‌ی متعامد یکه است.

از استقرار بردارهای پایه متعامد یکه تعریف‌شده در فضای ضرب داخلی به‌عنوان ستون‌های یک ماتریس، ماتریسی مربعی مانند $\mathbf{Q}$ تشکیل می‌شود که به آن، ماتریس متعامد می‌گویند.

در این ماتریس‌ها ستون‌ها و سطرها به‌عنوان بردارهایی نسبت به هم متعامد یکه‌اند؛ یعنی:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (q_{ij}q_{jk} = \delta_{ik}) \quad (۱۴)$$

چنانچه تعدادی از بردارهای پایه‌ی متعامد یکه‌ی تعریف شده در یک فضای برداری، به‌عنوان ستون‌های یک ماتریسی غیرمربعی مستقر شوند، ماتریس حاصل را یک ماتریس ایزومتریک می‌نامند. در این حالت، فقط ستون‌های ماتریس متعامد یکه هستند، درحالی‌که سطرهای آن متعامد نیستند و به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I_n} \quad (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{I_m}) \quad (۱۵)$$

علل زیر باعث برتری بردارهای پایه‌ی متعامد یکه (به‌عنوان ستون یک ماتریس) بر دیگر مجموعه‌ی بردارهای پایه شده است:

۱-ماتریس متعامد دارای رتبه کامل است. (رتبه برابر با تعداد ستون‌ها یا سطرها است.)

۲-معکوس یک ماتریس متعامد یکه برابر با ترانهاده‌ی همان ماتریس است.

۳-برای یک ماتریس ایزومتریک مانند $\mathbf{Q}_{m\times n}$ یک ماتریس مانند $\mathbf{Q'}_{m\times(m-n)}$ وجود دارد، به‌طوری‌که ماتریس $\mathbf{A} = [\mathbf{Q}, \mathbf{Q'}]$ یک ماتریس متعامد باشد.

۴-حاصل‌ضرب ماتریس متعامد در ماتریس متعامد نیز یک ماتریس متعامد است.

۵-همچنین یک ماتریس متعامد، حافظ اندازه‌ی بردار است؛ یعنی نرم اقلیدسی حاصل‌ضرب ماتریس متعامد در یک بردار با نرم همان بردار برابر است.

یک فضا ممکن است چندین مجموعه شامل بردارهای پایه‌ی متعامد یکه داشته باشد؛ ولی آنچه مهم است، انتخاب بهترین مجموعه باتوجه‌به مسئله جبری است.

۲-۴- چند ماتریس خاص

باتوجه‌به کاربرد در این مقاله، چند نمونه از ماتریس‌های خاص در زیر بیان‌شده است.

ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مثبت معین است اگر و فقط اگر برای بردار (ماتریس ستونی) غیر صفردلخواه مانند $\mathbf{u}$، شرایط زیر را دارا باشد:

$$\mathbf{A}_{pd} \in \mathbb{R}^{n\times n} \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \neq \mathbf{0} \;:\; \exists\, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} > \mathbf{0}$$
$$\mathbf{B}_{pd} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n\times n}} \Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \neq \mathbf{0} \;:\; \exists\, \mathbf{v}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\mathbf{v} > \mathbf{0} \quad (۱۶)$$

ماتریس‌های مثبت معین دارای مقادیر ویژه مثبت هستند. این نوع ماتریس‌ها را می‌توان نوع خاصی از ماتریس‌های حقیقی متقارن $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ و یا ماتریس‌های موهومی هرمیتی $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$معرفی کرد. (البته باتوجه‌به اینکه در این مقاله ماتریس‌ها حقیقی متقارن هستند روابط فقط برای این ماتریس‌ها نوشته خواهد شد.)

همچنین اگر ماتریس $\mathbf{C}$ ماتریس معکوس‌پذیر باشد آنگاه $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$ حتماً متقارن و مثبت معین خواهد بود. (اگر $\mathbf{C}$ تکین باشد $\mathbf{A}$ متقارن و نیمه مثبت معین است.)

In Press, Pre-Proof Version

ماتریس‌های حقیقی متقارن مقادیر ویژه حقیقی خواهند داشت که می‌توان آن‌ها را از بزرگ به کوچک یا هر ترتیب دیگر مرتب کرد. این مقادیر ویژه می‌توانند مثبت یا منفی باشند. اگر مقادیر ویژه اعدادی مثبت باشند، به آن ماتریس، ماتریس متقارن مثبت معین (Symmetric, Positive Definite) می‌گویند.

و ماتریس مربعی مشابه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند که در آن $\mathbf{V}$ یک ماتریس غیر منفرد مربعی است:

$$\forall \mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{V} \mid \det(\mathbf{V}) : \exists \ \mathbf{B} = \mathbf{v^{-1}Av} \qquad (۱۷)$$

تمام ماتریس‌های مربعی را می‌توان به ماتریس مثلثی مشابه تبدیل کرد (تجزیه‌ی Schur فقط با یک مرحله) ولی برای تبدیل به ماتریس قطری مشابه نیاز است که مجموع بعد فضاهای ویژه ماتریس مربعی برابر با رنک همان ماتریس مربعی باشد؛ یا به عبارتی دیگر، ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ قطری شدنی است اگر و فقط اگر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی آن برابر با رنک ماتریس باشد. برای مثال، ماتریس‌هایی با مقادیر ویژه متمایز قطری پذیر هستند. البته در میان ماتریس‌ها ماتریس‌های متقارن را می‌توان به فرم قطری تبدیل کرد.

تعداد مقادیر ویژه یکتا برای یک ماتریس، برابر یا کوچک‌تر از رنک همان ماتریس است. وجود مقادیر ویژه تکراری (به‌غیراز صفر) نشان‌دهنده وجود یک زیرفضای فرعی با بعد بزرگ‌تر از ۲ متناظر با آن‌ها است؛ در این صورت این زیرفضا ممکن است دارای بردارهای پایه‌ای باشد که لزوماً بر یکدیگر متعامد نیستند. (بردارهای ویژه متناظر با یک مقدار ویژه مستقل خطی ولی غیرمتعامد هستند.)

اجتماع بردارهای پایه‌ی این زیرفضاها و بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز، مجموعه‌ای شامل بردارهای ویژه‌ی ماتریس را تشکیل می‌دهد. برای آشنایی بیشتر به بخش ۲-۵ جفت‌های ویژه و روابط (۲۳-۲۲) مراجعه کنید.

همچنین ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ به طور متعامد قطری شدنی است اگر و فقط اگر بردارهای پایه آن متعامد یکه باشد؛ برای متعامد کردن بردارهای پایه فضای ویژه متناظر مقادیر ویژه مکرر، از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت استفاده خواهد شد.

درنهایت اجتماع بردارهای ویژه یکه متناظر با مقادیر ویژه متمایز و بردارهای ویژه حاصل از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت برای مقادیر ویژه مکرر، یک‌پایه متعامد یکه برای فضای برداری با بعدی برابر با رنک ماتریس موردنظر خواهد بود.

با استقرار بردارهای پایه متعامد یکه فضای ویژه ماتریس $\mathbf{A}_{n\times n}$ به‌عنوان ستون‌های ماتریس$\mathbf{P}$، می‌توان ماتریس قطری $\mathbf{B}_{n\times n}$ مشابه $\mathbf{A}$ ایجاد کرد که درایه‌های قطری آن مقادیر ویژه خواهند بود؛ به صوت:

$$\forall \mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{V} \mid \det(\mathbf{P}) \neq \mathbf{0}\ \mathbf{P^{T}P} = \mathbf{PP^{T}} = \mathbf{I} \ : \exists\ \mathbf{B} = \mathbf{P^{T}AP} \qquad (۱۸)$$

درنتیجه، مجموعه بردارهای ویژه این ماتریس‌ها یک‌پایه متعامد یکه برای فضای ستونی این ماتریس‌ها است که کار با این پایه‌ها به‌مراتب هزینه کمتری نسبت به پایه‌های غیرمتعامد یکه خواهد داشت. مقادیر ویژه ماتریس‌های مشابه یکسان خواهد بود؛ اما لزوماً بردارهای ویژه یکسانی نخواهند داشت.

۲-۵- مقادیر و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه دربردارنده خواص و ویژگی‌های مهمی هستند که در حل معادلات جبری کاربرد فراوانی دارند؛ اما برای ماتریس‌های بزرگ، محاسبه دترمینان و حل معادله مشخصه هزینه‌ی زیادی خواهد داشت؛ لذا از روش‌هایی با محاسبات کمتر ولی تقریبی برای یافتن جفت ویژه‌ها استفاده می‌شود. عمده روش‌های تقریبی برای یافتن مقادیر ویژه، بر اساس روش‌های تکرار مبتنی با نسبت ریلی و روش‌های تشابه با ماتریس‌های مثلثی است.

جفت ویژه را می‌توان به‌صورت زیر به کمک عملگر خطی $\mathbf{T}$ و بردار غیرصفر $\mathbf{x}$ تعریف کرد:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n} \quad \wedge \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \ : \exists\ \mathbf{Tx} = \lambda \mathbf{x} \qquad (۱۹)$$

که در آن اسکالر λ یک مقدار ویژه برای $\mathbf{T}$ است و $\mathbf{x}$ برداری ویژه متناظر با آن خواهد بود. (شهود هندسی $\mathbf{Tx}$ را می‌توان برداری منطبق بر راستای $\mathbf{x}$ با اندازه λ در نظر گرفت، پس راستای بردار $\mathbf{x}$ به‌عنوان دامنه‌ی (ورودی) عملگر خطی $\mathbf{T}$ با بردار برد (خروجی) آن یکسان خواهد بود، ولی اندازه‌ی بردار دامنه و برد متفاوت است.)

هدف در این مسائل یافتن $\mathbf{x}$ و λای است که در رابطه بالا صدق کنند.

همچنین طبق قضیه خواص زیرفضاها (بسته‌بودن نسبت به عمل جمع) حاصل‌ضرب یک ثابت غیرصفر در یک بردار ویژه نیز خود یک بردار ویژه است. درنتیجه می‌توان برای هر بردار ویژه یک مقدار ثابت یافت که نرم اقلیدسی بردار حاصل، از ضرب این ثابت در بردار ویژه برابر با یک باشد. این کار که به آن نرمال‌سازی بردارهای ویژه می‌گویند، باعث منحصربه‌فرد شدن هر بردار ویژه با بردارهای ویژه موجود در مجموعه بردارهای ویژه خواهد شد.

$\mathbf{x}$ و λ مناسب از تفریق $\lambda\mathbf{x}$ از دو طرف معادله و بازنویسی آن به دست می‌آید. مجموعه‌ی بردارهای ویژه عملگر $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})$ فضای پوچ را نشان خواهند داد که یک زیرفضا برای $\mathbb{F}^{n}$ است.

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (۲۰)$$

اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n\times n$ در میدان $\mathbb{F}$ باشد و عملگر $\mathbf{T}$ نیز بر روی $\mathbb{F}^{n}$ با ضابطه $\mathbf{Tx} = \mathbf{Ax}$ باشد، $\lambda \in \mathbb{F}$ یک مقدار ویژه برای عملگر $\mathbf{T}$ و به طبع ماتریس $\mathbf{A}$ خواهد بود، هرگاه بردار(های) غیرصفر $\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که تساوی $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ برقرار باشد، با اعمال روابط بالا و باز نویس مجموعه بردارهای ویژه متناظر به‌عنوان ستون‌های یک ماتریس رابطه زیر برقرار می‌شود:

$$\mathbf{Ax}-\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{AX}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_{n\times n}\mathbf{X} = \mathbf{0}_{n\times n} \ \Rightarrow (\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_{n\times n})\mathbf{X} = \mathbf{0}_{n\times n} \qquad (۲۰)$$

ازآن‌جهت که $\mathbf{x}$ها بردارهایی غیرصفر فرض شده‌اند و $(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_{n\times n})$ بر ماتریس $\mathbf{X}$ عمود نیست و معادله جواب غیر بدیهی دارد. پس باید ماتریس $(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_{n\times n})$ تکین باشد، یعنی دترمینان آن برابر با صفر شود.

$$\mathrm{p}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_{n\times n}) = 0 \qquad (۲۱)$$

که $\mathrm{p}_{\mathbf{A}}$ یک چندجمله‌ای از λ با درجه‌ی n است که به آن معادله مشخصه ماتریس $\boldsymbol{A}$ می‌گویند و ریشه‌های آن مقادیر ویژه هستند و بر طبق قضیه اساسی جبر این ماتریس n تا مقادیر ویژه دارد.

قضیه اساس جبر: هر چندجمله‌ای از مرتبه‌ی n در اعداد مختلط دارای n ریشه با احتساب تکررها است.

برخی از خواص مقادیر ویژه، بر اساس تشابه ماتریس قطری با ماتریس اولیه، به فرم زیر است.

اگر که λ یک مقدار ویژه برای ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشد و a اسکالری در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $a\lambda$ یک مقدار ویژه برای $a.\mathbf{A}$ خواهد بود.

اگر که λ یک مقدار ویژه برای ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشد و $\mathbf{S}$ اسکالری در $\mathbb{R} \geq 0$ باشد، آنگاه λ^{s} یک مقدار ویژه برای $\mathbf{A}^{s}$ خواهد بود. (چنانچه $\mathbf{A}$ غیرتکین باشد آنگاه $\mathbf{S}$ اسکالری در $\mathbb{R}$ است.)

اگر که λ یک مقدار ویژه برای ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشد. پس یک مقدار ویژه برای $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ نیز است.

بردار غیر صفر $\boldsymbol{x}$ یک بردار ویژه تعمیم‌یافته برای ماتریس $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ با مرتبه k و متناظر با مقدار ویژه $\boldsymbol{\lambda}$ است، $(k$ تکررهای مقدار ویژه متناظر است.) اگر:

$$(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})^{k}\mathbf{x} = 0 \ \wedge \ (\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x} \neq 0 \qquad (۲۲)$$

و فضای ساخته‌شده از این بردار ویژه تعمیم‌یافته، فضای ویژه تعمیم‌یافته خواهد بود. همچنین مجموعه‌ی $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{k}$ شامل بردارهای ویژه‌ی تعمیم‌یافته برای مقدار ویژه متناظر $\boldsymbol{\lambda}$ خواهد بود که به‌صورت زیر تعریف خواهند شد. لازم به ذکر است، این مجموعه، یک پایه برای ابرصفحه متناظر $\boldsymbol{\lambda}$ است.

$$\begin{aligned}&\mathbf{x_k} = \mathbf{x}\\ &\mathbf{x_{k-1}} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_k\\ &\vdots\\ &\mathbf{x_1} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x_2}\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

برای تمام $1 < i < k$ رابطه $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i}\mathbf{x}_i = 0, (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i}(\mathrm{i}-1)\mathbf{x}_i \neq 0$ برقرار است. این بردارها را با بردارهای ویژه‌ی تعمیم‌یافته برای مسائل دینامیکی که به‌صورت $(\mathbf{K}-\boldsymbol{\omega^{2}M})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ تعریف می‌شوند، اشتباه نگیرید.

برای یک ماتریس متقارن می‌توان از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت برای بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه مکرر استفاده کرد.

گاهی اوقات می‌توان جفت ویژه‌ها را به‌صورت تقریبی از یک فضا با بعد کمتر استخراج کرد.

همان‌طور که پیش‌ازاین گفته شد، یک ماتریس متعامد را می‌توان به‌صورت اجتماع دو ماتریس ایزومتریک باز نویس کرد. $\mathbf{V}_{n\times n} = [\mathbf{Q}_{n\times r}, \mathbf{G}_{n\times(n-r)}]$

اگر فرض شود که $\mathbf{A}_{n\times n}$ و $\mathbf{S}_{\mathbf{n\times n}}$ دو ماتریس متقارن باشند و ماتریس باقی‌مانده $\mathbf{R}_{n\times r} = \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{Q}_{n\times r} - \mathbf{Q}_{n\times r}\mathbf{S}_{r\times r}$ کوچک باشد، آنگاه بردارهای ستونی ماتریس $\mathbf{Q}$، ایجادکننده‌ی (پایه‌های) تقریبی از فضای بردار ماتریس متقارن $\mathbf{A}$ هستند.

برای یافت ماتریس $\mathbf{S}$ با بعدی کمتر از ماتریس $\mathbf{A}$، به شرطی که بتواند تمام درایه‌های ماتریس باقی‌مانده را کوچک کند، از نرم فروبیوسی استفاده‌شده است.

$$\begin{aligned}&\min = \|\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{Q}_{n\times r} - \mathbf{Q}_{n\times r}\mathbf{S}_{r\times r}\|_{\mathbf{F}} \longrightarrow \ \|\boldsymbol{AQ}-\boldsymbol{QS}\|_{\boldsymbol{F}}^{2}\\ &= \|\mathbf{V}\|_{\mathbf{F}}^{2}\|\mathbf{AQ}-\mathbf{QS}\|_{\boldsymbol{F}}^{2} = \boldsymbol{R}_{n\times r} = \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{Q}_{n\times r} - \boldsymbol{Q}_{n\times r}\boldsymbol{S}_{r\times r}\\ &\|\mathbf{V^{T}AQ}-\mathbf{V^{T}QS}\|_{\mathrm{F}}^{2} = \|\mathbf{Q^{T}AQ}-\mathbf{S}\|_{\mathrm{F}}^{2} + \|\mathbf{G^{T}AQ}\|_{\mathrm{F}}^{2} \to \mathbf{S}\\ &= \mathbf{Q^{T}}\boldsymbol{AQ} = (\mathbf{QAQ^{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد هرچه r بزرگ‌تر باشد، ترم دوم نیز کمینه‌تر خواهد بود. می‌توان مقادیر جفت‌های ویژه ماتریس متقارن $\mathbf{S}$ را به فرم زیر بیان کرد. (ضرب دو ماتریس متعامد، ماتریسی متعامد است.)

In Press, Pre-Proof Version

$$\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{Z}-\mathbf{A}=\mathbf{0}\ :\quad \begin{aligned}&\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{Z}-\mathbf{I}\mathbf{Z}\mathbf{A}\\&=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{Z}-\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{Z}\mathbf{A}\\&=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{Y}-\mathbf{Y}\mathbf{A})=\mathbf{0}\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}_r\ ,\quad \mathbf{A}=\mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1,\dots,\boldsymbol{\lambda}_r)\ ,\quad \mathbf{Q}\mathbf{Z}=\mathbf{Y}_{n\times r}$$

به ماتریس مقادیر ویژه $(\boldsymbol{\Lambda})$ این زیرفضا، ماتریس مقادیر ریتز و به ماتریس بردارهای ویژه $(\mathbf{Y})$ آن، بردارهای ریتز می‌گویند. کیفیت تقریب این جفت ریتزها نسبت به مقادیر ویژه ماتریس اولیه $\mathbf{A}_{n\times n}$ بستگی به انتخاب r دارد.

۲-۶- مقادیر و بردارهای منفرد

همان‌طور که بیان شد. بُعد فضای بردار ستونی و سطری یک ماتریس برابر خواهد بود؛ به عبارتی تعداد بردارهای ستونی و سطری مستقل خطی یک ماتریس با یکدیگر برابر خواهند بود.

باتوجه‌به خواص رتبه و فضای پوچ برای یک ماتریس مانند $\mathbf{A}_{m\times n}$ که $m\geq n$ است. روابط زیر برقرار است.

فضای پوچ ماتریس $\mathbf{A}$ با فضای پوچ ماتریس $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ برابر خواهد بود.

رتبه ماتریس $\mathbf{A}$ با رتبه ماتریس $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ برابر خواهد بود.

همچنین ماتریس‌های $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ و ماتریس‌های $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ متقارن هستند و طبق این خاصیت، مقادیر ویژه آن‌ها نامنفی و حقیقی است و اثبات می‌شود که مقادیر ویژه غیر صفر این دو ماتریس برابر است.

در ماتریس‌های غیرمربعی به دلیل اختلاف بعد دامنه و برد $(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x})$ امکان تعریف جفت ویژه وجود ندارد؛اما اعدادی وجود دارند که برای این ماتریس‌ها همانند مقدار ویژه برای ماتریس‌های مربعی هستند.

پیش‌ازاین، چندین روش فاکتورسازی برای ماتریس‌های مربعی مطرح شد. هدف در این بخش اما فاکتورسازی از یک ماتریس غیرمربعی خواهد بود. اگر ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ در فضای اعداد حقیقی تعریف شود، به‌طوری‌که $m\geq n\in\mathbb{N}$ در نظر گرفته شود، آنگاه فاکتورگیری از این ماتریس به فرم زیر خواهد بود.

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\qquad(۲۶)$$

که در این رابطه‌ی $\mathbf{U}$ یک ماتریس متعامد $m\times m$ است و $\mathbf{V}$ نیز یک ماتریس متعامد $n\times n$ است. $\mathbf{S}$ یک ماتریس قطری و غیرمربعی با ابعاد $m\times n$ است. (این ماتریس شامل دو بلوک ماتریسی است: بلوک بالایی آن، یک ماتریس قطری (با احتساب مقدار صفر) و مربعی $n\times n$ و بلوک پایینی آن ماتریس غیرمربعی متعامد $(m-n)\times n$ با درایه‌های صفر است.)

به طبع ماتریس‌های مربعی غیر منفرد هم نوعی ماتریس غیرمربعی با ستون و یا سطرهای وابسته خطی خواهند بود و می‌توان از فاکتورسازی SVD برای آن‌ها نیز استفاده کرد.

از ضرب ترانهاده ماتریس رابطه (۲۶) در ماتریس اصلی، به دلیل خاصیت متعامد بودن ماتریس‌ها $\mathbf{U},\mathbf{V}$ رابطه زیر ایجاد می‌شود.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=(\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}=\mathbf{U}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}=\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}\qquad(۲۷)$$

(ماتریس $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن و نیمه مثبت معین است. پس دارای خاصیت قطری شدن است.)

دراین‌رابطه، ماتریس قطری $\mathbf{D}_{n\times n}$ شامل مقادیر ویژه مرتب‌شده از بزرگ به کوچک ماتریس متقارن $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ است و همچنین $\mathbf{V}_{n\times n}$ ماتریس بردارهای ویژه (متعامد یکه) متناظر با هرکدام از مقادیر ویژه است.

ترتیب جاگذاری این مقادیر ویژه به فرم زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}=[d_{ij}]_{i,j=1}^{n}\quad d_{11}&\geq d_{22}\geq\cdots\\&\geq d_{kk}\\&>d_{(k+1)(k+1)}\\&=\cdots=d_{nn}\\&=0\end{aligned}\qquad(۲۸)$$

که در این رابطه k تعداد از این مقادیر ویژه غیرصفر فرض شده است و مابقی صفر هستند. درنهایت، به جذر مثبت هرکدام از مقادیر ویژه غیرصفر مقادیر منفرد ماتریس متقارن $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ می‌گویند و ماتریس مقادیر منفرد به فرم زیر ایجاد می‌شود:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\left[\delta_{ij}\sqrt{d_{ij}}\right]_{i,j=1}^{k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)}\\ \mathbf{0}_{(m-k)\times k} & \mathbf{0}_{(m-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}_{m\times n}\qquad(۲۹)$$

برای یافتن ماتریس متعامد $\mathbf{U}$ می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد و بردارهای ستونی متناظر با مقادیر تکین غیرصفر را به دست آورد: (ازآن‌جهت که مقادیر غیرصفر در نظر گرفته‌شده‌اند، شبه معکوس ماتریس مقادیر منفرد معادل معکوس آن است.)

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\mathbf{A}\mathbf{V}=\mathbf{U}\mathbf{S}\\&\mathbf{V}=[\mathbf{v}_i]_{i=1}^{n},\ \mathbf{U}=[\mathbf{u}_j]_{j=1}^{m}\end{aligned}\right\}\Rightarrow u_i=\frac{1}{s_i}\mathbf{A}v_i\quad i=1,\dots,k\qquad(۳۰)$$

بر طبق رابطه بالا، به دلیل متعامد یکه بودن مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{k}\subset\mathbb{R}^n$ ، بردارها ساخته‌شده $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{k}\subset\mathbb{R}^m$ متعامد یکه خواهند بود. می‌توان $(m-n)$ تا بردار باقی‌مانده برای فضای $\mathbb{R}^m$ یافت، به شرطی که اجتماع آن‌ها با $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{k}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی باشد و سپس با فرایند گرام اشمیت این بردارها را متعامد یکه کرد.

همانند جفت ویژه‌ها، مقادیر منفرد منحصربه‌فرد هستند؛ ولی هرکدام از ماتریس‌های $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ ممکن است متمایز باشند که به ترتیب به آن‌ها ماتریس بردارهای منفرد چپ و راست گفته می‌شود.

چنانچه $\mathbf{A}_{m\times n}$ ماتریسی با رتبه کامل n باشد (مقادیر منفرد یکتا باشند) آنگاه $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{n}$ بردارهای پایه استاندارد فضای سطری و $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{n}$ بردارهای پایه استاندارد فضای ستونی ماتریس $\mathbf{A}$ هستند.

اگر که ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ دارای رتبه کامل $(r<n)$ باشد، آنگاه $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{r}$ و $\{\mathbf{v}_j\}_{j=r+1}^{n}$ به ترتیب بردارهای پایه زیرفضای برد و زیرفضای پوچ این ماتریس خواهند بود. در این حالت:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_2&=\sqrt{d_{11}}\\\|\boldsymbol{A}\|_F&=\sqrt{d_{11}+d_{22}+\ldots+d_{rr}}\end{aligned}\qquad(۳۱)$$

باتوجه‌به توضیحات ابتدایی این زیر فصل، ماتریسی که شامل بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه (مرتب شده از بزرگ به کوچک) ماتریس $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ است، همان ماتریس $\mathbf{U}$ را ایجاد می‌کند. یعنی:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_2&=\sqrt{d_{11}}\\\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}&=\sqrt{d_{11}+d_{22}+\cdots+d_{rr}}\end{aligned}\qquad(۳۲)$$

در مسائلی که هدف فقط یافتن مقادیر منفرد است و یا تعداد کمی از بردارهای منفرد نیاز است. محاسبات کاهش‌یافته و محاسبه یکی از ماتریس‌های منفرد راست یا چپ کافی است. یعنی با یافتن تعدادی مشخص از مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ (و محاسبه جذر آن‌ها) و با استفاده از بردارهای ویژه متناسب با هر یک می‌توان به کمک روش شبه معکوس بردارهای منفرد $\mathbf{u}_i$ را نیز یافت.

از تجزیه SVD می‌توان برای حل معادلات جبری به کمک شبه معکوس و روش‌های حداقل خطای مربعات و حداقل نرم استفاده کرد.

طبق تعریف، یک ماتریس با رتبه کامل n را می‌توان به‌صورت مجموع n تا ماتریس رتبه یک، هم بعد و متمایز، تجزیه کرد. بر این اساس و طبق رابطه پیش‌ازاین، فاکتور ساز SVD برای ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ با رتبه کامل r به‌صورت مجموع r تا ماتریس مرتبه یک نوشته خواهد شد:

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{r}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{T}\quad s_i\in\mathbf{diag}(\boldsymbol{S})\qquad(۳۳)$$

اگر حد بالای عملگر جمع l $(l\ll r)$ شود که تقریب از ماتریس اولیه با مرتبه‌ی l ایجاد می‌شود. خطای حاصل از این تقریب را خطای بازسازی می‌گویند و برای کمینه‌سازی خطای بازسازی ماتریس $\mathbf{A}$ می‌توان از قضیه‌ی Eckart-Young کمک گرفت. و تعریف کرد:

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}_l=\sum_{i=1}^{l}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{T}\\&\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_l\|_2\sqrt{\max_{\lambda}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_l)^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_l)}=\\&\sqrt{\max_{s^2}\left[\sum_{i=1}^{l}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}+\sum_{i=l+1}^{r}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}-\sum_{i=1}^{l}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}\right]^2}\\&=s_{l+1}\\&\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_l\|_{\mathrm{F}}^2=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2=\\&\left\|\sum_{i=1}^{l}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}+\sum_{i=l+1}^{r}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}-\sum_{i=1}^{l}s_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&=\sum_{i=l+1}^{r}s_i^2\end{aligned}\qquad(۳۴)$$

اگر $\mathbf{R}_i$ بیانگر سطرها و $\mathbf{C}_j$ بیانگر ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}$ باشد، سطر و ستون تقریب یافته به فرم زیر تعریف خواهد شد:

In Press, Pre-Proof Version

$$\mathbf{R}_i^l = \sum_{k=1}^{l} s_k u_{ik} \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}\ , \qquad \mathbf{C}_i^l = \sum_{k=1}^{l} s_k v_{jk} \mathbf{u}_j^{\mathrm{T}} \qquad (۳۵)$$
$$i = 1, \dots, m \quad \wedge \quad j = 1, \dots, n$$

هدف از کاهش مرتبه مسائل خطی $(\mathbf{Ay} = \mathbf{b})$ انتخاب یک زیرفضای مناسب و سپس حل مسئله مرتبط بر روی آن زیرفضا است. برای این منظور باید یک‌پایه مرتب استاندارد (متعامد یکه) $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{k}$ برای زیرفضای k بعدی ساخت شود و سپس باید یک بردار $\mathbf{x}_k$ مناسب در این زیرفضا را یافت که تقریب خوبی برای (بردار جواب) $\mathbf{y}$ باشد.[۱۲-۱۶]

در این مقاله به طور خاص از روش ریتز-گالرکین استفاده‌شده است. در این روش، هدف یافتن $\mathbf{u}_m$ای در زیرفضای $\mathbf{Y}^m$ که بردار باقیمانده بر همین زیرفضا عمود باشد: $(\mathbf{b} - \mathbf{Au}_m) \perp \mathbf{Y}^m$ [۱]

۳- تعریف مسئله و روابط مدل‌سازی

مسئله موجود یک مدل انتقال حرارت است که در ادامه‌ی آن باید جابه‌جایی‌های حاصل از انبساط حرارتی، به‌اضافه جابه‌جایی‌های حاصل از فشار یکنواخت سیال به بدنه‌ی یک پره‌ی کمپرسور محاسبه شود. باتوجه‌به اینکه مدل حل گذرا دارد، پس لازم است که تا رسیدن به دمای تعادل، در بازه‌های زمانی تعریف‌شده جابه‌جایی حاصل از انبساط حرارتی در هر لحظه محاسبه شود.

به دلیل آنکه انتقال حرارت مدل، به دلیل تابش، یک مسئله غیرخطی است و همچنین یافت جابه‌جایی‌ها در هر لحظه محاسبه می‌شود، نیاز است یک مدل کاهش مرتبه از مدل اصلی آموزش داده شود تا بتوان از آن در مواقع اضطرار برای یافت پاسخ‌های تقریبی قابل‌قبول با صرف هزینه محاسباتی بسیار کمتر استفاده کرد.

مدل‌ساز به کمک توابع PDE در نرم‌افزار matlab انجام‌گرفته شده است و از مش‌های تتراهدرال خطی برای مدل‌سازی استفاده‌شده است.

در ابتدا روابط مدل‌سازی و گام‌های حل معرفی می‌شود؛ سپس ساخت پایه‌های کاهش مرتبه و اعمال کاهش مرتبه به مدل اصلی بررسی خواهد شد.

۳-۱- روابط المان محدود برای مدل پره

این مسئله به دو مرحله، حل مدل انتقال حرارت و حل مدل استاتیکی تقسیم‌شده است. در مدل استاتیکی از نتایج به‌دست‌آمده از مدل انتقال حرارت برای محاسبه جابه‌جایی استفاده‌شده است.

۳-۱-۱- مدل انتقال حرارت غیرخطی

در مدل انتقال حرارت غیرخطی و گذرا، فرم قوی معادله انتقال حرارت به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \nabla.\left(k \nabla T(x,t)\right) \ \Omega_{\text{solid}}\ , T(x,0) \\ &\qquad = 573\text{K} \ \Omega_{\text{solid}} \\ &-k\frac{\partial T}{\partial n} = \sigma\varepsilon(T^4 - T_{\text{amb}}^4) \quad \Gamma_r \\ &-k\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{amb}) \quad \Gamma_h\ , \quad T = T_{root} \ \Gamma_{root} \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

که دراین‌رابطه باتوجه‌به شکل ۱، وجوه دارای شرایط مرزی زیر هستند:

جدول ۳ شرایط مرزی در وجوه مدل انتقال حرارت گذرا غیرخطی

Table 3 Boundary conditions on the faces of the nonlinear transient heat transfer model

boundary faces	Boundary conditions
Convection on the cooling faces (13, 14, 15)	$h = 30\ W/m^2K, T_{\text{amb}} = 423\ K$
Convection on the hot gas face (2)	$h = 50\ W/m^2K, T_{\text{amb}} = 923\ K$
Convection on the hot gas face (4)	$h = 40\ W/m^2K, T_{\text{amb}} = 923\ K$
Convection on the hot gas faces (1, 3, 5)	$h = 20\ W/m^2K, T_{\text{amb}} = 923\ K$
Convection on the root faces with gas (6, 9, 19)	$h = 15\ W/m^2K, T_{\text{amb}} = 673\ K$
Radiation on faces (1, 2, 4, 5, 3)	$\sigma = 5.670373e-8\ W/m^2K^4, \varepsilon = 0.5, T_{\text{amb}} = 923\ K$
Fixed temperature (Dirichlet) on faces (8, 7, 11, 17, 18, 10, 12, 16)	$T_{\text{root}} = 573\ K$

شرایط مرزی در وجوه بر اساس تماس با سیال‌های مختلف متفاوت است.

و همان‌طور که در شکل ۱، مشخص است: وجه ۲، سمت فشار بوده و بیشترین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را دارا است. وجه ۴، وجه کشش است و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بالایی دارد. وجوه ۱،۳،۵ وجوه فرار هستند و به دلیل جدایش سیال ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی کمتری دارند. وجوه ریشه، وجه‌های نزدیکی ریشه و وجوه خنک‌کننده نیز باتوجه‌به جریان سیال عبور، ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی متفاوتی دارند.

ضریب هدایت حرارتی برای این پره $11.5\ \frac{\text{W}}{\text{m.K}}$ است و ظرفیت گرمایی ویژه $500\ \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ و چگالی برابر با $8000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ است.

و درنتیجه، فرم ضعیف به فرم زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\overbrace{\left(\int_\Omega \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \rho c_p \mathbf{N} d\Omega\right)}^{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \overbrace{\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T k \mathbf{B} d\Omega\right)}^{\mathbf{K}} \mathbf{T} = \underbrace{-\overbrace{\int_{\Gamma_r} (\mathbf{N}^T \sigma \varepsilon \mathbf{T}^4) d\Gamma - \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^T h_c\, \mathbf{T} d\Gamma}^{\mathbf{f(T)}} \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}^T (\sigma \varepsilon \mathbf{T}_{\text{amb}}^4) d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}^T h_c\, \mathbf{T}_{\text{amd}} d\Gamma}_{r} \qquad (۳۷)$$

و درنهایت:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{KT} = -\mathbf{f} + \mathbf{f}(\mathbf{T}) \qquad (۳۸)$$

برای حل گذاری مدل، از روش اویلر پس‌رونده استفاده‌شده است.

$$\mathbf{r}\left(\mathbf{T}^{(n+1)}\right) = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{K}\right)\mathbf{T}^{(n+1)} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}\mathbf{T}^{(n)} - \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}^{(n+1)}\right) \qquad (۳۹)$$

و برای محاسبه‌ی ترم غیرخطی، از روش نیوتن-رافسون با بردار حدس اولیه‌ای که از حل قسمت خطی به‌دست‌آمده است، استفاده‌شده است.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{J}_k = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{\boldsymbol{T}_{(k)}} = \frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t} + \boldsymbol{K} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{T}^{(n+1)})}{\partial \boldsymbol{T}}, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{T}^{(n+1)})}{\partial \boldsymbol{T}} = \int_{\Gamma_{h,r}} \boldsymbol{B}^T (4\sigma\varepsilon F \boldsymbol{T}^3 + h_c) \boldsymbol{B} d\Gamma \\ &\boldsymbol{T}_{k+1}^{(n+1)} = \boldsymbol{T}_k^{(n+1)} - \boldsymbol{J}_k^{-1} \boldsymbol{r}_k \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

در این حالت، شرط همگرایی به صور زیر است:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{r}_k\| < \text{tol.}\left(\|\mathbf{T}_{k+1}^{(n+1)}\| + \varepsilon\right) \\ &\|\mathbf{r}_{k+1}\| < \text{tol.}\left(\|\mathbf{r}_0\| + \varepsilon\right) \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

۳-۱-۲ مدل استاتیکی جابه‌جایی

رابطه تعادل و فرم قوی برای این مدل، به‌صورت زیر است:

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \boldsymbol{\Omega_{solid}} \ , \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{th}}) \qquad (۴۲)$$

با توجه ضریب انبساط حرارتی و همسانگرد بودن خواص مواد، کرنش حرارتی به فرم زیر نوشته خواهد شد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{th}} = \alpha(\mathbf{T} - \mathbf{T}_{\text{amb}})[1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]^{\mathrm{T}} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}}) \qquad (۴۳)$$

شرایط مرزی، باتوجه‌به شکل ۱، به فرم زیر است:

جدول ۴ شرایط مرزی در وجوه برای مدل جابه‌جایی

Table 4 Boundary conditions on the faces for the displacement model

boundary faces	Boundary conditions
Zero displacement on faces (13, 14, 15)	$\boldsymbol{Ku} = 0 \quad \boldsymbol{\Gamma_u}$
Pressure (surface tension) on face (2)	$\boldsymbol{K\sigma.n} = \boldsymbol{-pn} \quad \boldsymbol{\Gamma_{p(2)}} \quad \boldsymbol{,p = 5e5\ \ Pa}$
Pressure (surface tension) on face (4)	$\boldsymbol{K\sigma.n} = \boldsymbol{-pn} \quad \boldsymbol{\Gamma_{p(4)}} \quad \boldsymbol{,p = 4.5e5\ \ Pa}$

ضریب انبساط حرارتی برای این پره $12e-6\ \frac{1}{\text{K}}$ است و مدول یانگ برابر با $227e9$ Pa است

روابط گسسته المان محدود برای مدل خطی، به فرم زیر است:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}_{\text{thermal}} + \mathbf{F}_{\text{pressure}} \qquad (۴۴)$$

Press, Pre-Proof Version

۳-۲- اعمال کاهش مرتبه

در این بخش، روابط و مفاهیم کاهش مرتبه برای مدل انتقال حرارت غیرخطی و مسئله استاتیکی بیان می‌شود.

۳-۲-۱- کاهش مرتبه برای مدل انتقال حرارت غیرخطی

باتوجه‌به رابطه (نیوتن رافسون) مدل بر اساس گام‌های زمانی بسیار کوتاه، از دمای ابتدایی ۵۲۳ درجه‌ی کلوین تا زمان رسیدن به تعادل حرارتی حل می‌شود. در انتها و در هر گام زمانی اویلر، بردار دما به‌عنوان ستون‌های یک ماتریس برداری ذخیره می‌شود. به آن بردارها «اسنپ‌شات» می‌گویند. (به دلیل گذرا بودن مسئله، جهت یکسان‌سازی ضریب تأثیر این اسنپ‌شات‌ها، هر بردار دما بر نرم خودش تقسیم خواهد شد.)

سپس مقادیر و بردارهای منفرد از این ماتریس مستطیلی استخراج می‌شود و طبق الگوریتم انرژی، مهم‌ترین مقادیر منفرد و بردارهای منفرد متناظر با آن‌ها استخراج می‌شود. این بردارهای دربردارنده بردارهای پایه برای ماتریس کاهش مرتبه برای فضای برداری تابع (۳۶) خواهند بود که شامل ترم غیرخطی و خطی است. برای آموزش مدل مسئله انتقال حرارت از زمان صفر تا زمان ۵۰ ثانیه با گام‌های زمانی $\Delta t = 0.2$ استفاده‌شده است.

$$\mathbf{T}_{\mathrm{st}} = \left[\frac{\mathbf{T}_n}{\|\mathbf{T}_n\|_2} \in \mathbb{R}^N\right]_{n=1}^{400} \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathrm{st}} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{k} \mathbf{Z}_k = [\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^N]_{i=1}^{k} \quad (۴۵)$$

تمام محاسبات در مرحله آفلاین انجام خواهد شد.

در رابطه بالا N برابر با تعداد نودها برای مرحله انتقال حرارت و برابر با درجات آزادی برای مرحله جابه‌جایی است. این مقادیر برای آن دسته از نودها و درجات آزادی است که مقید نشده‌اند. (به طبع محاسبات برای ماتریس سختی و جرم با اعمال شرط سازگاری (حذف سطر و ستون با متناسب شرایط مرزی دیریکله) برای تحلیل حرارتی نود با مرزی دمای ثابت و برای جابه‌جایی درجات آزادی با مرزهای ثابت است و در انتها مقادیر ثابت به پاسخ‌های به‌دست‌آمده الحاق می‌شود.)

و مدل کاهش‌یافته به فرم زیر تغییر خواهد کرد.

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{Z}_k^T\mathbf{M}\mathbf{Z}_k \;,\; \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{Z}_k^T\mathbf{K}\mathbf{Z}_k \qquad \tilde{\boldsymbol{f}} = \mathbf{Z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} \;,\; \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{Z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\mathbf{T}) \;,\; \mathbf{T} \cong \mathbf{Z}_k\mathbf{a} \quad (۴۶)$$

طبق تعریف، بردار دما به کمک ترکیب خطی از بردارهای پایه، تقریب زده خواهد شد. ماتریس ژاکوبین و بردار باقی‌مانده در این حالت به‌صورت زیر محاسبه خواهند شد.

$$\tilde{\mathbf{r}}\left(\mathbf{a}^{(n+1)}\right) = \left(\frac{\tilde{\mathbf{M}}}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{a}^{(n+1)} - \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{\Delta t}\mathbf{a}^{(n)} - \tilde{\boldsymbol{f}} + \tilde{\boldsymbol{f}}(\mathbf{a}^{(n+1)})$$
$$\mathbf{a}_{k+1}^{(n+1)} + \mathbf{a}_k^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{J}}_k^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_k \quad (۴۷)$$
$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{rad}} = \mathbf{Z}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{rad}}\mathbf{Z}_k \quad , \quad \tilde{\mathbf{J}}_k = \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{\Delta \mathbf{t}} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{rad}}$$

۳-۲-۲- کاهش مرتبه برای مسئله استاتیکی

باتوجه‌به رابطه (۱۱) و تعریف فضای ستونی یک ماتریس، انتظار می‌رود برای یک سیستم سازگار (جایی که فضای پوچ یک بردار پایه دارد) که به دلیل حذف و سطر و ستون‌های ماتریس سختی متناسب با درجات تکیه‌گاهی ایجادشده است، بردارهای ویژه ماتریس سختی دربردارنده‌ی تمام بردارهای پایه برای فضای حل می‌باشد. به توضیح زیر توجه کنید:

نکته مهم در این رویکرد این است که گرچه درجات آزادی مقید شده‌ی تکیه‌گاهی یا ثابت درروند حل و محاسبات وارد نمی‌شوند، اما بر ماهیت فضای برداری حل تأثیر می‌گذارند. (فرض کنید محل تکیه‌گاه‌ها عوض شود یا نوع آن‌ها تغیر کند آنگاه سطر و ستون‌های حذف‌شده متغیر خواهند بود و فضای پوچ و فضای برد نیز تغیر می‌کنند. البته در مسائل این مقاله فرض بر ثابت‌بودن تکیه‌گاه‌ها است و این نیروهای خارجی یا دمای نودهای سیستم است که تغیر می‌کند.)

فرض کنید سیستمی سازگار به‌صورت زیر تعریف می‌شود در این سیستم ماتریس $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن است

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{b} \quad (۴۸)$$

فرض کنید که $\mathbf{x}$ها اسنپ‌شات‌ها هستند. تمام این $\mathbf{x}$ها در فضای ستونی ماتریس $\mathbf{C}$ قرار دارند (شرط سازگاری). باتوجه‌به اینکه ماتریس $\mathbf{C}$ یک ماتریس مربعی و همچنین متقارن است، اعمال تجزیه SVD به آن، تقریبی از محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به طور خاص در جهت تقویت بردارهای ویژه متناسب با پاسخ سیستم در حل‌های متفاوت خواهد بود.

باتوجه‌به اهمیت بردارهای ویژه متناسب با مقادیر ویژه (۳۳) برای توصیف فضای ستونی ماتریس $\mathbf{C}$ و رابط و خواص مطرح‌شده مقادیر ویژه در فصل دو می‌توان به روابط زیر را اثبات کرد.

$$\mathrm{SVD}(\mathbf{C}) \underset{\mathbf{C}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}}{=} \mathrm{EIG}(C) \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1} \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-\mathrm{T}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-1} \quad (۴۹)$$

باتوجه‌به مثبت معین‌بودن ماتریس $\mathbf{C}$، ماتریس $\mathbf{D}$ یک ماتریس قطری با درایه‌های مثبت و غیر صفر حقیقی است و برای ساخت ماتریس معکوس آن کافی است درایه‌های قطری معکوس شوند و ماتریس قطری $\mathbf{D^{-1}}$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ است و بردارهای ویژه متناظر با آن در ماتریس $\mathbf{U^{-1}}$ وجود دارند. (قبلاً بیان شد که فضای ستونی یک ماتریس مثبت معین معکوس‌پذیر با فضای ستونی معکوس آن یکی است.)

باتوجه‌به اینکه ما برای توصیف بهتر فضای برداری اسنپ‌شات‌ها نیاز به بردارهای ویژه (پایه) متناظر با بزرگ‌ترین مقادیر ویژه داریم و باتوجه‌به اینکه $\mathbf{D}$ از معکوس‌کردن مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ به دست می‌آید، می‌توان بیان کرد با به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر با کوچک‌ترین مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ می‌توان پایه‌های تأثیرگذار بر برد ماتریس را به دست آورد. در این صورت، ابتدا مقادیر ویژه سیستم استخراج و سپس پاسخ آن نسبت به نیروهای خارجی به دست می‌آید. (ممکن است نیاز به ضرب اضافه باشد.)

ابتدا به کمک ژاکوبین دیویدسون، ۸۰ مقدار ویژه کوچک سیستم تقریب زده می‌شود. سپس از اجتماع بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه کوچک، مجموعه‌ای شامل پایه‌هایی برای ساخت یک ماتریس تبدیل کاهش بعد دهنده، ایجاد می‌شود. و در آخر برای نیروی خارجی حاصل از گام‌های زمانی حل انتقال حرارت و فشارهای مختلف مدل کامل حل می‌شود.

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \;,\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\left[\frac{1}{\lambda_i}\right]_{i=1}^{N}\mathbf{V}$$
$$\rightarrow \; \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{V}_m^T\left[\frac{1}{y_{ii}}\right]_{i=1}^{m}\mathbf{V}_m + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\left[\frac{1}{y_{ii}}\right]_{j=m+1}^{N}\boldsymbol{\Psi}. \quad (۵۰)$$
$$\mathbf{K}\mathbf{u}^{\mathbf{i}}(t) = \mathbf{F}_{\mathrm{thermal}}(t) + \mathbf{F}_{\mathrm{pressure}}^{i} \;\rightarrow$$
$$\mathbf{u}^{i}(t)|_{\mathrm{i}=1}^{4} = \mathbf{V}_m^T\left[\frac{1}{y_{ii}}\right]_{i=1}^{m}\mathbf{V}_m.\left(\mathbf{F}_{\mathrm{thermal}}(\mathrm{t}) + \mathbf{F}_{\mathrm{pressure}}^{i}\right)_{i=1}^{4}$$

در رابطه بالا مدل برای گام‌های زمانی مختلف با فشار مشخص حل خواهد شد؛ سپس همین مسئله برای سه فشار مختلف دیگر حل می‌شود. فشارها به ترتیب از چپ به راست برای وجوه ۲ و ۴ به فرم $\{[550{,}500],[600{,}400],[450{,}400]\}\mathrm{kPa}$ است.

درنهایت، ماتریس اسنپ‌شات‌ها و استخراج بردارها و مقادیر منفرد برای مدل به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{st}} = \left[\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}_n\|_2} \in \mathbb{R}^N\right]_{n=1}^{1200} \longrightarrow \mathbf{u}_{\mathrm{st}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$
$$\xrightarrow{k} \mathbf{C}_k = [\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^N]_{i=1}^{k} \quad (۵۱)$$

مانند قبل تعداد پایه‌های موردنیاز بر اساس معیار انرژی انتخاب می‌شود.

تمام این محاسبات در مرحله آفلاین صورت می‌گیرد و در مرحله آنلاین از این پایه‌های برای کاهش مرتبه استفاده خواهد شد.

درواقع هدف در اینجا کاهش زمان محاسبات در مرحله آفلاین علاوه بر مرحله آنلاین است این کار با تقریب معکوس ماتریس سختی به کمک بردارهای ویژه آن انجام می‌شود آنچه اهمیت دارد رفتار و جهت‌گیری بردارهای اسنپ‌شات در جهت رسیدن به پاسخ در گام‌های زمانی است معکوس ماتریس سختی تقریب شده بر بردارهای نیرو تصویر می‌شوند و ویژگی‌های ماتریس سختی تقریب شده در جهت بردارهای نیرو تقویت می‌شود.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{C}_k^T\mathbf{K}\mathbf{C}_k \quad , \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}(\mathbf{F}_{\mathrm{thermal}} + \mathbf{F}_{\mathrm{pressure}})$$
$$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\tilde{\mathbf{F}} \quad , \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}_k\mathbf{d} \quad (۵۲)$$

در مدل انتقال حرارت، استخراج بردارهای تکین از اسنپ‌شات‌های دمایی در بارگذاری‌های دمایی متفاوت دربردارنده ویژگی‌های مهم انتقال حرارت این نوع خاص پره کمپرسور (مش و هندسه مدل، شرایط مرزی ثابت ریشه و ضرایب انتقال حرارتی وابسته به مسئله) است. این اسنپ‌شات‌ها به دلیل اینکه از بردارهای پاسخ (فضای برد) تشکیل شده‌اند در بردارند اطلاعات مهم پاسخ مدل به شرایط مرزی حاصل از شارهای حرارتی هستند.

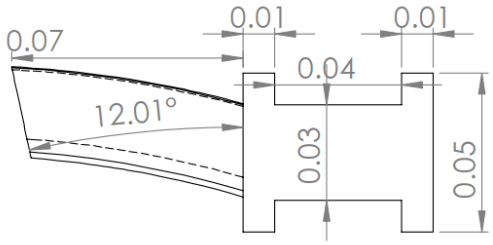
شاید بتوان این‌گونه بیان کرد باتوجه‌به این اصل پره، هندسه مشخصی دارد و شرایط مرزی معین (دمای ثابت) در ریشه دارد و نودهای تحت شار حرارتی ثابت هستند و فقط مقادیر شار حرارتی باتوجه‌به دمای محیط تغیر می‌کند مسیر کوتاه

In Press, Pre-Proof Version

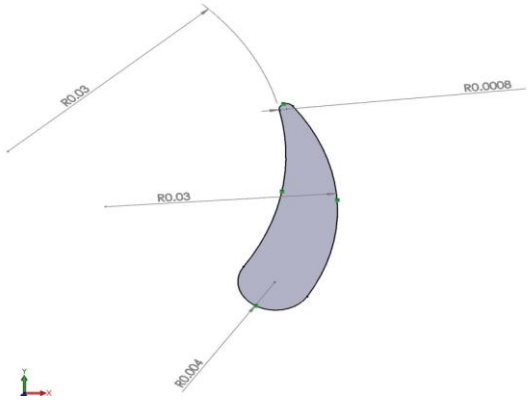
ایجاد کرد که این مسیر در راستای همین مقادیر ثابت است این مسیر در فضای برداری فاقد اطلاعات اضافی یا کم‌ارزش در مسیر حل معادله جیری است.
در مدل استاتیکی، بیان شد که این مقدار ویژه کمینه دربردارنده مشخصات کلیدی در فضای برد هستند. (شکل مدها دربردارنده اطلاعات کلیدی مدل هستند هر مدل فیزیکی دارای شکل مد مشخص و مستقل خود است که البته می‌توان به کمک شبیه‌سازی المان محدود و اعمال شرایط سازگاری این شکل مدها را یافت هر چه مش‌ها مناسب‌تر باشند و مسئله دقیق‌تر شبیه‌سازی شوند نتایج به‌دست‌آمده صحیح‌تر و نزدیک به واقعیت خواهد بود، اما در اینجا هدف، کاهش مرتبه مدل به کمک این بردارهای ویژه می‌باشد نه‌فقط یافت شکل مدها)

۳-۳- مدل‌سازی و بررسی نتایج

پس از تعریف شرایط مرزی و خواص ماده مدل مش زده می‌شود.
چون باید فضای برداری که از گسسته‌سازی مدل فیزیکی به مدل ریاضی به کمک مش‌ها ایجادشده است ثابت بماند، پس مش‌ها در تمامی تحلیل‌های کامل و کاهش‌یافته یکسان است.
تعداد نودها برابر با 2274 است؛ پس ماتریس سختی و جرم برای مدل انتقال حرارت، بعدی برابر با 2274 × 2274 دارد و ماتریس

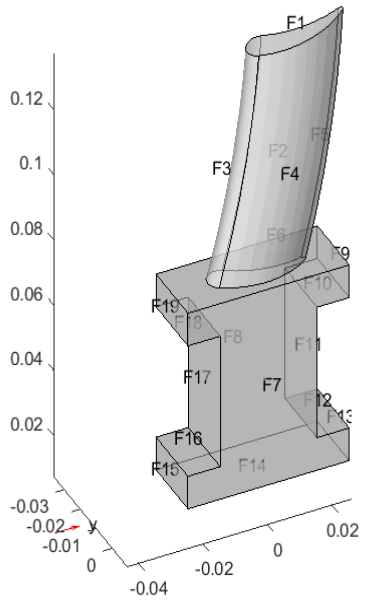


سختی برای مدل جابه‌جایی بعدی برابر با 6822 × 6822 دارد. تعداد المان‌های تتراهدرال خطی برابر با 8856 است.



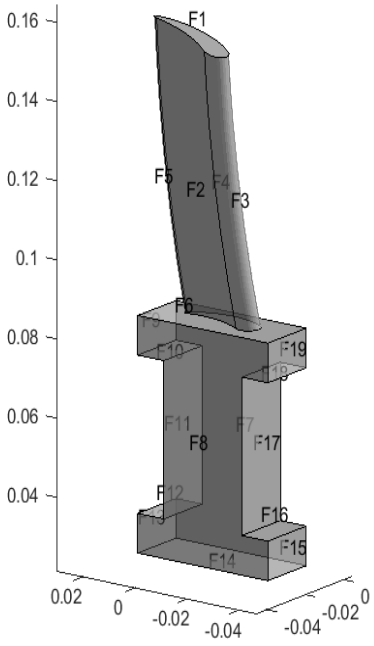
شکل ۱ هندسه دقیق پره بر حسب واحد متر؛ پایه‌ی پره در جهت عمق ۰/۰۲ متر حجم گرفته است.

Figure 1 shows the precise geometry of the blade; the blade base has been extruded 0.02 m in the depth direction.



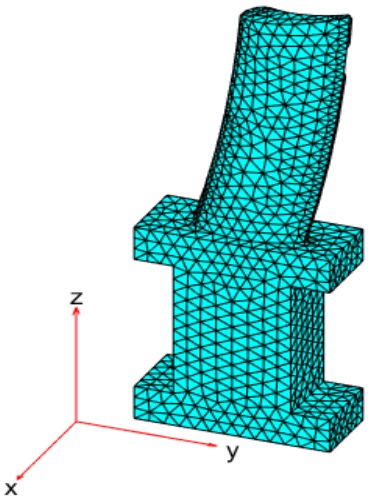
شکل ۲ الف) هندسه در مقیاس متر با مشخص کردن وجوه از نمای جلو

Fig. 2 a) Geometry in meter scale with faces identified from the front view



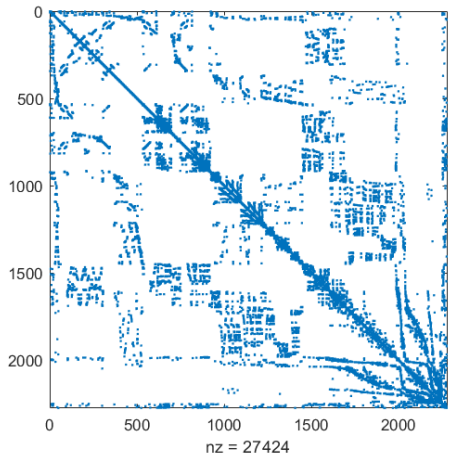
شکل ۲ ب) هندسه در مقیاس متر با مشخص کردن وجوه از نمای پشت

Fig. 2 b) Geometry in meter scale with faces identified from the back view



شکل ۳ مش با حداکثر اندازه مش ۰/۰۴

Fig. 3 Mesh with a maximum mesh size of 0.04



شکل ۴ پرشدگی درایه‌های ماتریس سختی انتقال حرارتی

Fig. 4 Sparsity pattern of the stiffness matrix

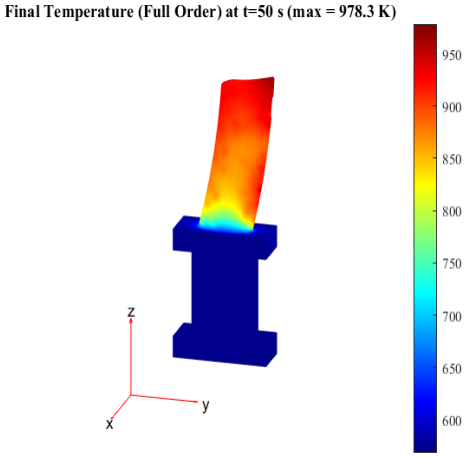
در مدل آنلاین، شرایط مرزی به‌صورت زیر تغیر می‌کند.

جدول ۵ شرایط مرزی در وجوه برای مدل تست در حل انتقال حرارت گذرا غیرخطی و حل جابه‌جایی

Table 5 Boundary conditions on the faces for the test model in the nonlinear transient heat transfer solution and the displacement solution

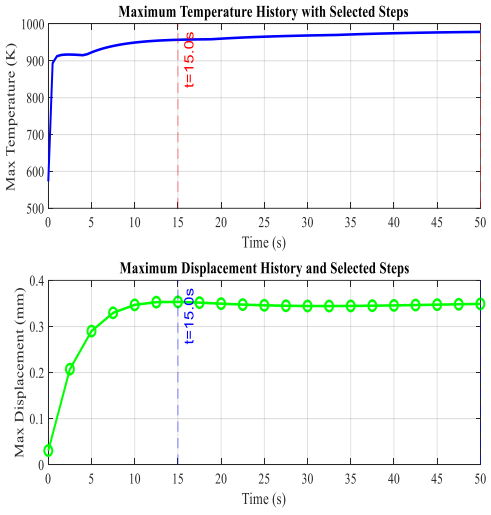
boundary faces	**Boundary conditions**
Convection on the hot gas face (2)	$h = 50\ W/m^2K, T_{amb} = 873\ K$
Convection on the hot gas face (4)	$h = 40\ W/m^2K, T_{amb} = 873\ K$
Convection on the hot gas faces (1, 3, 5)	$h = 20\ W/m^2K, T_{amb} = 873\ K$
Radiation on faces (1, 2, 4, 5, 3)	$\sigma = 5.670373e-8\ W/m^2K^4, \varepsilon = 0.5, T_{amb} = 873\ K$
Pressure (surface tension) on face (2)	$\sigma.n = -pn \quad \Gamma_{p(2)} \quad , p = 5.2e5$ Pa
Pressure (surface tension) on face (4)	$\sigma.n = -pn \quad \Gamma_{p(4)} \quad , p = 4.7e5$ Pa

و نتایج برای مدل کامل به‌صورت زیر است:



شکل ۵ مدل کامل انتقال حرارت در گام زمانی نهایی

Fig. 5 Full heat transfer model at the final time step

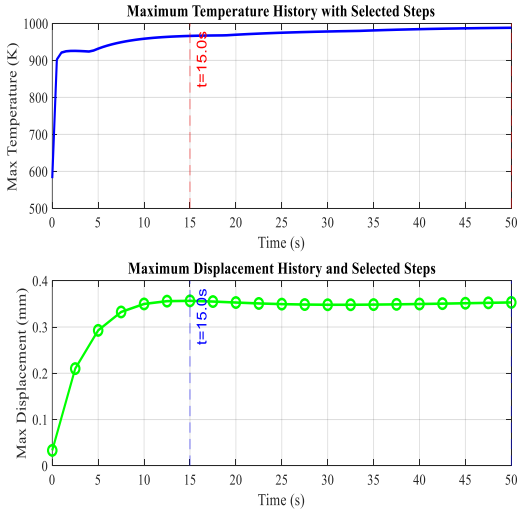


شکل ۶ بیشترین دما و جابه‌جایی نود برای گام‌های زمانی مختلف

Fig. 6 Maximum temperature and nodal displacement for different time steps

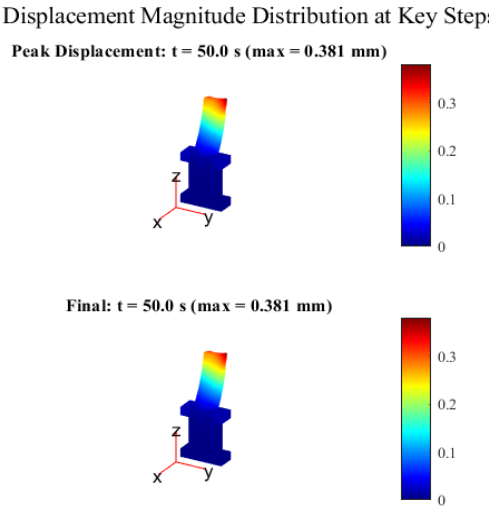
در شکل ۶ نمودار دما و جابجایی در طی گام‌های زمانی حل گذرا برای نود مشخصی که بیشترین دما را دارد ترسیم شده است. همانطور که مشخص است به‌دلیل شار حرارتی زیاد و ظرفیت گرمایی محدود در لبه‌ها (شکل ۵)، در گام‌های اولیه یک جهش دمایی رخ می‌دهد و به دلیل انبساط حرارت، نود دوچار جابجایی می شود. با گذشت زمان و نزدیک‌تر شدن به حالت تعادل که به دلیل انتقال حرارت بین نودهای پره ایجاد شده است اختلاف دمایی میان نودها کمتر می‌شود. این امر باعث شده که بیشترین جابجایی ثبت شده برای این نود خاص در ثانیه ۵۰ رخ دهد.

In Press - Proof



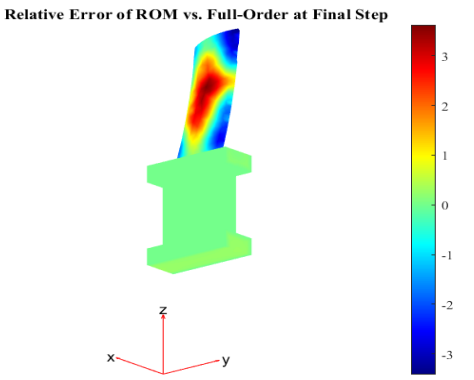
شکل ۹ رفتار نود با بیشترین جابه‌جایی در گام‌های زمانی مختلف در مدل کاهش مرتبه دادشده

Fig. 9 Behavior of the node with maximum displacement at different time steps in the reduced-order model



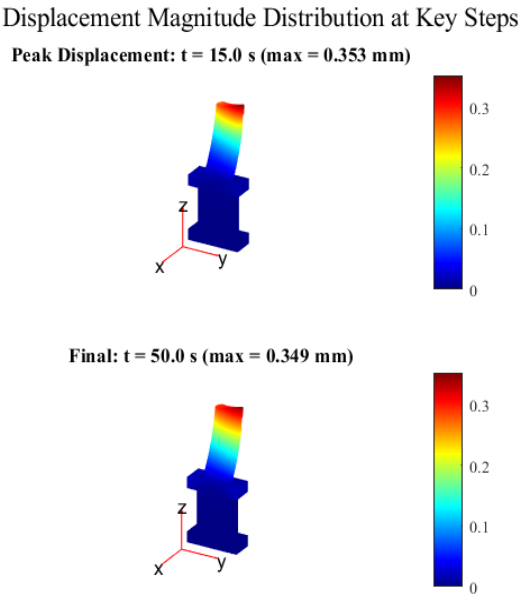
شکل ۱۰ جابه‌جایی برای مدل کاهش مرتبه دادشده در گام انتهایی و گام با بیشترین جابه‌جایی نود

Fig. 10 Displacement for the reduced-order model at the final step and the step with the maximum nodal displacement.



شکل ۱۱ درصد خطای نسبی توزیع دما برای مدل کاهش مرتبه دادشده نسبت به مدل کامل

Fig. 11 Percentage relative error of the temperature distribution for the reduced-order model with respect to the full model

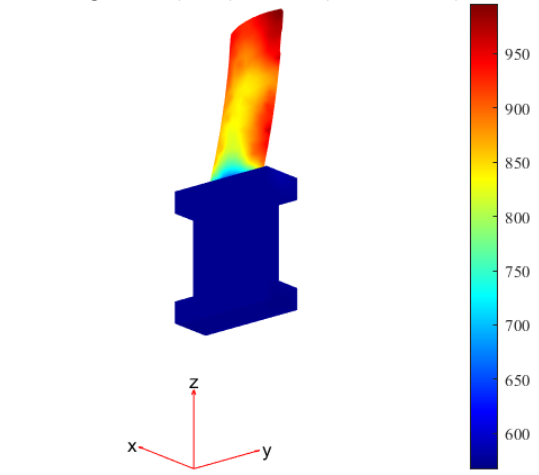


شکل ۷ جابه‌جایی برای گام زمانی نهایی و گام با معیار بیشترین جابه‌جایی نودها

Fig. 7 Displacement for the final time step and the step with the maximum nodal displacement criterion

مدل کاهش‌یافته بر اساس معیار انرژی برای مدل انتقال حرارت برابر با رنک ۴ و برای مدل جابه‌جایی برابر با رنک ۳ است. این جابجایی ها به دلیل فشار وارد شده از طرف سیال به بدنه‌ی پره و گرادیان دمایی نودها ایجاد شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود در نوک پره به دلیل گرادیان حرارتی بالا و دمای بالاتر، جابجایی بیشتر است. میزان این جابه‌جایی از نوک پره تا پایه‌ی پره کاهش می‌یابد.

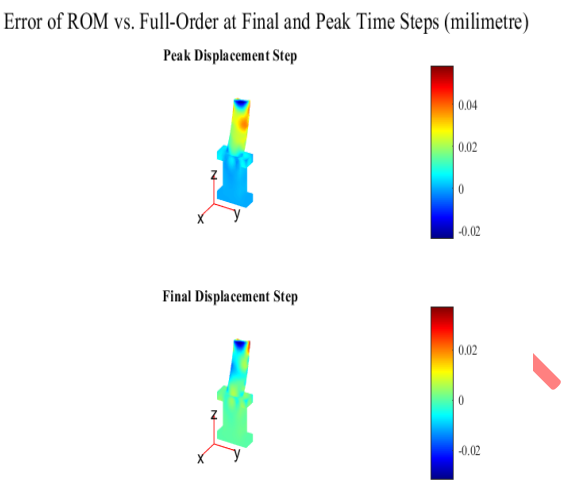
و نتایج برای مدل کاهش بعد یافته به‌صورت زیر است.



شکل ۸ توزیع دما در مدل کاهش مرتبه دادشده

Fig. 8 Temperature distribution in the reduced-order model

Press-Proof



شکل ۱۲ خطای مطلق جابه‌جایی برای مدل کاهش‌یافته نسبت ه مدل کامل

Fig. 12 Absolute displacement error for the reduced model with respect to the full model

جدول ۶ مقایسه زمان محاسبات برای مدل‌های کامل، کاهش‌یافته و مدل آموزش در مرحله‌های حل انتقال حرارت گذرا غیرخطی و حل جابه‌جایی

Table 6 Comparison of computation time for the full, reduced, and training models in the solution stages of nonlinear transient heat transfer and the displacement solution

Computational cost	Nonlinear transient heat transfer	Displacement due to thermal expansion and pressure
Model training	423.8 s	251.3 s
Full model test	96.5 s	63.0 s
Reduced model test	34.2 s	12.9 s

باتوجه‌به اینکه در تحقیقات مرتبت با محاسبات، هزینه محاسباتی متناسب با سخت‌افزار و پردازشگرها می‌باشد، معیار سنجش کارآمدی روش کاهش مرتبه مستقل از شبکه محاسباتی به شرح زیری بیان می‌شود:

$$R_{DOF} = 1 - \frac{r}{n} \quad , \quad C_{DOF} = \frac{r}{n} \quad , \quad S = \frac{T_{FOM}}{T_{ROM}} \qquad (۵۳)$$

در اینجا n، بعد مدل کامل و r، بعد مدل کاهش مرتبه یافته می‌باشد. R_{DOF}، درصد کاهش درجات آزادی و C_{DOF}، نسبت فشرده‌سازی است. T_{FOM} و T_{ROM} به ترتیب زمان حل مدل کامل و مدل کاهش مرتبه یافته می‌باشد.

جدول ۷ نمایش درصد کاهش درجات آزادی مدل کامل و کاهش‌یافته و نسبت فشرده‌سازی و نسبت زمان حل مدل کامل و مدل کاهش‌یافته در دو حل انتقال حرارت غیرخطی و حل استاتیکی

Table 7 Showing the percentage reduction in degrees of freedom between the full and reduced-order models, the compression ratio, and the solution time ratio of the full and reduced-order models in the two nonlinear heat transfer and static solutions.

	Nonlinear transient heat transfer	Displacement due to thermal expansion and pressure
R_{DOF}	0.99824	0.99956
C_{DOF}	0.00176	0.00044
S	2.821	4.813

۴- نتیجه‌گیری

باتوجه‌به مقایسه انجام‌شده در جدول ۷، و باتوجه‌به نتایج خطای نسبی و مطلق نشان داده‌شده در شکل‌های ۱۲ و ۱۱، می‌توان به این نتیجه رسید که این کاهش مرتبه می‌تواند مدل را با دقت قابل قبولی با هزینه محاسباتی و ذخیرسازی بسیار کمتری شبیه‌سازی کند.

همچنین خطاهای مطلق جابه‌جایی نشان‌داده‌شده در شکل ۱۲، به‌وضوح بیان می‌کند که در لبه جسم که در آن‌ها مش ریزتر است دقت تقریب‌ها ضعیف‌تر است.

و باتوجه‌به شکل ۱۱، در مدل انتقال حرارت غیرخطی، خطا در وجوه تحت تابش بیشتر از نقاط دیگر است، که این می‌تواند به علت ترم غیرخطی باشد.

باتوجه‌به نتایج به‌دست‌آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش کاهش مرتبه بر اساس تجزیه متعامد مناسب از اسنپ‌شات‌ها مختلف و ترکیب آن با بردارهای ویژه، تقریب قابل‌قبولی از مدل در زمان کوتاه‌تر ارائه می‌کند. دقت تقریب با افزایش مدل‌های آموزشی افزایش می‌یابد و انتخاب تعداد مناسب بردارهای ویژه متناسب با مقادیر ویژه کمینه بر افزایش دقت تأثیرگذار است.

از این مدل آموزش‌داده‌شده می‌توان در زمان‌های بحران که نیاز به شبیه‌سازی سریع‌تر است استفاده کرد. همچنین باتوجه‌به هزینه محاسباتی کمتر می‌توان از سیستم‌های پردازشی ضعیف‌تر برای مدل‌سازی استفاده کرد.

فهرست علائم

محاسبات جبری

میدان	$\mathbb{F}, \mathbb{R}$
فضای برداری	$\mathbb{F}^n, \mathbb{R}^n$
زیر فضای برداری	$\mathcal{N}(\mathbf{A}), \mathcal{R}(\mathbf{A})$

مدل انتقال حرارت

ظرفیت گرمایی ویژه	$c_p \ \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.K}}\right)$
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی	$h \ \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2.K}}\right)$
ضریب هدایت حرارتی	$k \ \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m.K}}\right)$
میدان دمایی	$T(x,t) \ \ (\mathrm{K})$
نسبت گسیلندگی	ε
ثابت استافن-بولتزمن	$\sigma \ \left(\frac{W}{m^2.K^4}\right)$

مدل استاتیکی

تنسور الاستیسیته	$\boldsymbol{D}$
ماتریس سختی	$\mathbf{K}$
بردار جابه‌جایی	$\mathbf{u}$
فشار بر اساس بردار نرمال بر سطح	$p.\mathbf{n} \ \ (\mathrm{Pa})$
ضریب انبساط حرارتی	$\alpha \ \left(\frac{1}{\mathrm{K}}\right)$
تنسور کرنش کل	$\boldsymbol{\varepsilon}$
تنسور تنش	$\boldsymbol{\sigma}$

*در تمام مقاله اسکالرها، به شیوه‌ی حروف کوچک و بردارها، به شیوه‌ی حروف کوچک و بولد و ماتریس‌ها، به شیوه‌ی حروف بزرگ و بولد نوشته‌شده‌اند.

پیانیه هوش مصنوعی: در نوشتن و تحقیق از هیچ‌یک از ابزار هوش مصنوعی مولد استفاده‌نشده است.

حامی مالی: در این تحقیق از هیچ‌یک از کمک‌هزینه‌های مالی دولتی و غیردولتی استفاده‌نشده است.

تعارض منافع: در این مقاله از برخی نتایج حاصل از پایان‌نامه کارشناس ارشد نویسنده مسئول استفاده‌شده است. هیچ تعارض منافع دیگری برای اظهار وجود ندارد.

منابع

[1] W. H. Schilders, H. A. van der Vorst, and J. Rommes, Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications, vol. 13. Berlin, Germany: Springer, 2008, doi: 10.1007/978-3-540-78841-6.

[2] P. Koutsovasilis and M. Beitelschmidt, "Model order reduction of finite element models: improved component mode synthesis," Math. Comput. Model. Dyn. Syst., vol. 16, no. 1, pp. 57–73, 2010, doi: 10.1080/13873951003590214.

[3] K. Pearson, "LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space," London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., vol. 2, no. 11, pp. 559–572, 1901, doi: 10.1080/14786440109462720.

[4] G. Blatman and B. Sudret, "An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis," Probabilistic Eng.

In Press, Pre-Proof Version

Mech., vol. 25, no. 2, pp. 183–197, 2010, doi: 10.1016/j.probengmech.2009.10.003.
[5] J. Kneifl, D. Rosin, O. Röhrle, and J. Fehr, "Low-dimensional data-based surrogate model of a continuum-mechanical musculoskeletal system based on non-intrusive model order reduction," Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng., vol. 39, no. 9, e3748, 2023, doi: 10.1007/s00419-023-02458-5.
[6] M. Ahmadi and M. A. Karimi, "Temperature control of different conductors using a reduced-order model-based internal model controller," Modares Mech. Eng., vol. 26, no. 07, pp. 571–581, 2026, doi: 10.48311/mme.2026.118761.82932.
[7] E. Heidari and A. Shateri Najaf Abadi, "Effects of two-way fluid-structure interaction on transient natural convection in a square enclosure with flexible baffle," Modares Mech. Eng., vol. 15, no. 9, pp. 396–406, 2015.
[8] M. Reiber, F. Bensel, Z. Zheng, and U. Nackenhorst, "A non-intrusive reduced-order model for finite element analysis of implant positioning in total hip replacements," Biomech. Model. Mechanobiol., vol. 24, no. 1, pp. 169–183, 2025, doi: 10.1007/s10237-024-01903-w.
[9] S. Hassan, P. Rajaguru, S. Stoyanov, C. Bailey, and T. Tilford, "Coupled thermal-mechanical analysis of power electronic modules with finite element method and parametric model order reduction," Power Electron. Devices Compon., vol. 8, 100063, 2024, doi: 10.1016/j.pedc.2024.100063.
[10] L. Kort, D. A. Castello, J. R. Brígido, R. Y. I. Tobisawa, and T. G. Ritto, "Finite element nonlinear model of an offshore drill string with model-order reduction using a higher-order dynamic mode decomposition," J. Sound Vib., vol. 642, 119926, 2026, doi: 10.1016/j.jsv.2026.119926.
[11] Y. Lin, Z. Gao, Y. Chen, and X. Sun, "A dynamic mode decomposition based reduced-order model for parameterized time-dependent partial differential equations," J. Sci. Comput., vol. 95, 70, 2023, doi: 10.1007/s10915-023-02200-x.
[12] S. Axler, Linear Algebra Done Right, 4th ed. Cham, Switzerland: Springer, 2024, doi: 10.1007/978-3-031-41026-0.
[13] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis. Boston, MA, USA: PWS Publishing, 1993.
[14] B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes, Applied Numerical Methods. New York, NY, USA: Wiley, 1969.
[15] T. R. Chandrupatla and A. D. Belegundu, Introduction to Finite Elements in Engineering. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2021, doi: 10.1017/9781108882293.
[16] G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computations, 4th ed. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins Univ. Press, 2013, doi: 10.56021/9781421407944.

In Press, Pre-Proof Version