ISSN: 2476-6909; Modares. Mech. Eng. 2027;27(03):265-282.

Modares Mechanical Engineering

DOI: 10.48311/mme.2026.123670.83112
journal homepage: mme.modares.ac.ir

Bending Analysis of a Laminated Composite Plate Under Transverse Loading, Steady-State Temperature Difference, and Transient Moisture Diffusion

Tara Mahmoudi, Ali Mohammad Baghestani*

Mechanical Engineering Department, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Article History
Received: September 15, 2026
Revised: October 22, 2026
Accepted: October 26, 2026
ePublished: October 29, 2026

ABSTRACT

The combined effects of temperature and moisture variations, known as hygrothermal effects on the bending of a rectangular multilayer composite plate are investigated based on first-order shear deformation theory. The plate is subjected to transverse mechanical loading, temperature variation, and moisture diffusion. The time-dependent moisture distribution through the plate thickness is obtained using an analytical solution of Fick's moisture diffusion equation. Owing to the slow moisture diffusion process in polymer-matrix composites, the plate bending is investigated quasi-statically based on the moisture distribution at a specified time. Using the semi-analytical Ritz method and the principle of minimum potential energy, the plate deflection is determined for different boundary conditions. The governing equations and solution method are validated by comparison with published results, followed by analyses of new cases. The effects of various parameters, including the length-to-width and length-to-thickness ratios, asymmetric stacking sequences, boundary conditions, and asymmetric moisture boundary conditions, on the plate deflection are investigated. The results show that increasing the length-to-width ratio increases the contribution of hygrothermal loading relative to mechanical loading to the plate deflection, whereas increasing the plate thickness reduces this contribution. In addition, in most cases, the moisture-induced deflection at one-tenth of the saturation time is greater than half of the deflection at saturation, highlighting the importance of considering time-dependent moisture diffusion.

Keywords: Composite Plate, Hygrothermal Analysis, Bending, Transient Moisture Diffusion

How to cite this article
Mahmoudi T, Baghestani A M, Bending Analysis of a Laminated Composite Plate Under Transverse Loading, Steady-State Temperature Difference, and Transient Moisture Diffusion. Modares Mechanical Engineering; 2027;27(03):265-282.

*Corresponding author's email: am.baghestani@nit.ac.ir
*Corresponding ORCID ID: 0000-0002-2058-9364

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

شاپا: ۶۹۰۹-۲۴۷۶؛ مهندسی مکانیک مدرس. ۲۸۲-۲۶۵:(۰۳)۲۷;۱۴۰۵

مهندسی مکانیک مدرس

DOI: 10.48311/mme.2026.123670.83112

صفحه اصلی مجله: mme.modares.ac.ir

خمش ورق چندلایه مرکب تحت اثر بار عرضی، اختلاف دمای پایا و نفوذ رطوبت گذرا

تارا محمودی، علی‌محمد باغستانی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله
مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله
دریافت: ۱۴۰۵/۰۶/۲۴
بازنگری: ۱۴۰۵/۰۷/۳۰
پذیرش: ۱۴۰۵/۰۸/۰۴
ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۸/۰۷

چکیده

اثر همزمان تغییرات دما و رطوبت یا اثرات نم‌گرمایی بر خمش ورق مستطیلی مرکب چندلایه بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی شده است. ورق تحت بار مکانیکی عرضی، تغییرات دما و نفوذ رطوبت قرار دارد. توزیع رطوبت وابسته به زمان در راستای ضخامت ورق با استفاده از حل تحلیلی معادله نفوذ رطوبت فیک به دست آمده است. با توجه به کند بودن فرآیند نفوذ رطوبت در مواد مرکب با زمینه پلیمری و بر مبنای توزیع رطوبت در یک زمان مشخص، خمش ورق به صورت شبه‌استاتیکی بررسی شده است. با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی ریتز و بر مبنای اصل حداقل انرژی پتانسیل، خیز ورق برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف محاسبه شده است. صحه‌گذاری معادلات و روش حل با مقایسه نتایج با مطالعات منتشرشده انجام و سپس موارد جدیدی تحلیل گردیده است. اثر عوامل مختلفی مانند نسبت طول به عرض و نسبت طول به ضخامت ورق، انواع لایه‌چینی نامتقارن، شرایط تکیه‌گاهی و شرایط مرزی رطوبتی نامتقارن بر خیز ورق بررسی شده است. موارد بررسی شده نشان می‌دهد افزایش نسبت طول به عرض ورق، سهم بار نم‌گرمایی نسبت به بار مکانیکی در خیز ورق را افزایش می‌دهند، در حالیکه افزایش ضخامت باعث کاهش آن می‌شود. هم‌چنین در اکثر موارد، خیز رطوبتی مشاهده شده در زمان یک‌دهم زمان اشباع بزرگتر از نصف خیز زمان اشباع است که اهمیت تحلیل نفوذ رطوبت وابسته به زمان را نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: ورق مرکب، تحلیل نم‌گرمایی، خمش، نفوذ رطوبت گذرا

نحوه ارجاع به این مقاله

محمودی تارا، باغستانی علی‌محمد، خمش ورق چندلایه مرکب تحت اثر بار عرضی، اختلاف دمای پایا و نفوذ رطوبت گذرا. مهندسی مکانیک مدرس. ۲۸۲-۲۶۵:(۰۳)۲۷;۱۴۰۵.

*پست الکترونیکی نویسنده عهده‌دار مکاتبات: am.baghestani@nit.ac.ir

*شناسه ارکید نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ۹۳۶۴-۲۰۵۸-۰۰۰۲-۰۰۰۰

Copyright© 2027, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

۱- مقدمه

ورق‌های ساخته شده از مواد مرکب به طور گسترده‌ای در صنایع مختلف مهندسی استفاده می‌شوند. ورق مرکب در زمان ساخت و یا بهره‌برداری در بسیاری از کاربردها در معرض تغییرات شرایط محیطی مانند تغییرات دما و رطوبت یا به طور خلاصه نم‌گرمایی قرار می‌گیرد. شرایط نم‌گرمایی می‌تواند باعث تضعیف تدریجی خواص سفتی و استحکام مواد مرکب و باعث ایجاد تغییر شکل‌های نم‌گرمایی گردد [۱-۳]. بنابراین استحکام و رفتار مکانیکی سازه‌های مرکب از شرایط نم‌گرمایی تاثیر می‌پذیرد و برای پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار سازه‌های مرکب در بسیاری از کاربردها، تحلیل نم‌گرمایی در کنار تحلیل بار مکانیکی لازم است [٤-٥]. با توجه به اهمیت و کاربرد این مساله، تحقیقات بسیاری به بررسی اثرات نم‌گرمایی بر سازه‌های مرکب پرداخته‌اند [۶]. با توجه به مرور مطالعات پیش از سال ۲۰۱۹ در [۶]، در اینجا مطالعات انجام شده درباره تحلیل خمش ورق‌های مرکب تحت شرایط نم‌گرمایی، منتشر شده پس از این سال، مرور می‌گردد.

بوکرت و دیگران [۷] مولفه های تنش در یک ورق چندلایه متعامد متقارن را با استفاده از روش ناویر محاسبه کردند. در این مطالعه اثرات توزیع رطوبت وابسته به زمان با استفاده از حل معادله فیک در نظر گرفته شده است. گرگ و دیگران [۸] تحلیل استاتیکی ورق چندلایه متعامد و ساندویچی را با استفاده از تئوری تغییرشکل پله‌ای هذلولی (Hyperbolic Zigzag Theory) تحت شرایط نم‌گرمایی ارائه کردند. تغییرات دما و رطوبت در راستای ضخامت ورق به صورت خطی و در جهت‌های درون صفحه ورق به صورت هارمونیک (Sinusoidal) تغییر می‌کند. مقادیر خیز مرکز ورق و مولفه‌های تنش در چندین حالت محاسبه شده‌اند. سبحی و رادوان [۹] به بررسی اثر میدان مغناطیسی دوبعدی و شرایط نم-گرمایی بر خمش میکروورق ساندویچی پرداختند. ورق با رویه-های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و هسته ویسکوالاستیک بر روی بستر ویسکوالاستیک فرض و از روش ناویر برای حل مساله استفاده شده است. نایک و سیاد [۱۰] با ارائه نظریه تغییرشکل مرتبه پنجم و در نظرگرفتن اثرات کرنش عرضی به بررسی ورق چندلایه متعامد پرداختند. موناکو و دیگران [۱۱] نانوورق چندلایه مرکب را با در نظرگرفتن اثرات غیرموضعی ناشی از اندازه با استفاده از روش ناویر بررسی کردند. از تئوری کلاسیک ورق همراه با فرض تغییرات خطی نم‌گرمایی در راستای ضخامت برای محاسبه خیز و مولفه‌های تنش استفاده شده است. تغییرات نم-گرمایی در راستای ضخامت به صورت متناسب با نظریه تغییرشکل ارائه شده فرض، و از روش ناویر برای حل مساله استفاده شده است. نایک و سیاد [۱۲] خمش استوانه‌ای یک باریکه چندلایه متعامد و ساندویچی را با استفاده از نظریه تغییرشکل مرتبه بالا بررسی کردند. از روش ناویر برای حل مساله و محاسبه تغییرشکل و تنش در باریکه تحت تغییرات نم‌گرمایی ثابت و خطی در راستای ضخامت ورق استفاده کردند. گرگ و چالاک [۱۳] خمش ورق ساندویچی و چندلایه متعامد را بر مبنای نظریه تغییرشکل پله‌ای و به روش اجزای محدود بررسی کردند. تغییرات دما به صورت خطی و رطوبت به صورت ثابت در راستای ضخامت ورق فرض شده است. گوپتا و دیگران [۱٤] تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق مرکب جندلایه را به روش هم‌هندسه (Isogeometric) مبتنی بر بی-اسپلاین کسری غیریکنواخت (Non-Uniform Rational B-Splines) ارائه دادند. تحلیل به صورت غیرخطی برای ورق با لایه‌چینی متعامد یا زاویه‌ای با شرایط مرزی چهارطرف تکیه‌گاه ساده یا چهارطرف گیردار انجام شده است. ماوریا و دیگران [۱۵] مساله خمش ورق تقویت شده با نانولوله کربن با لحاظ کردن اثرات کلوخه‌شدگی (Agglomeration) آن را بررسی کردند. با استفاده از نظریه تغییرشکل مرتبه سوم و روش اجزاء محدود، مقدار خیز ورق تحت تغییرات ثابت دما و رطوبت محاسبه شده است. نمازی‌نیا و دیگران [۱٦] خمش و ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی را با استفاده از نظریه تغییرشکل مرتبه سوم و روش دیفرانسیل مربعی تعمیم‌یافته (Generalized Differential Quadrature Method) مطالعه کردند. هسته ورق به شکل آگزتیک (Auxetic) و رویه تقویت شده با نانوصفحات گرافین (Nano Graphene Platelet) و تحلیل با فرض تغییرات ثابت دما و رطوبت انجام شده است. سبحی و رادوان [۱۷] با ترکیب روش لوی و رهیافت فضای حالت (State-Space Approach)، خمش ورق چندلایه متعامد تحت چندین نوع بارگذاری نم‌گرمایی را بررسی کردند. ورق بر روی بستر الاستیک و تحت میدان مغناطیسی دوبعدی در نظر گرفته شده است. ژو و دیگران [۱۸] پاسخ خمش غیرخطی یک نانوورق چندلایه را با در نظرگرفتن اثرات الکترومغناطیس ناشی از گرادیان کرنش (Flexomagnetoelectric Effect) ارائه کردند. معادلات بر مبنای روابط غیرخطی فون‌کارمن استخراج و به روش گالرکین با فرض تغییرات ثابت نم‌گرمایی حل شده است.

مطالعات متعدد پیشین نشاندهنده اهمیت مساله تحلیل استاتیکی ورق های مرکب تحت شرایط نم‌گرمایی است. مرور این مطالعات نشان می‌دهد که عمده این تحقیقات مربوط به بررسی اثرات نم گرمایی در حالت پایا است. معدود مطالعات مرتبط با تحلیل گذرای حالت رطوبتی مانند مطالعه بوکرت و دیگران [۷] لایه چینی و شرایط تکیه گاهی خاصی را بررسی کرده اند. بنابراین این مطالعه اثرات شرایط رطوبتی گذرا بر خمش ورق مرکب با لایه چینی نامتقارن و شرایط تکیه گاه عمومی را بررسی می کند. با توجه به اینکه تحلیل تنش در ورق مرکب تحت شرایط نم‌گرمایی نیازمند استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و یا نظریه‌های لایه‌ای (Layerwise) است [۶]، این مطالعه محدود به تحلیل خمش ورق بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول است. برای این منظور ابتدا معادلات حاکم بر رفتار خمش ورق

تحت بار مکانیکی عرضی، تغییرات دما و تغییرات رطوبتی پایا و گذرا بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمده است. برای حل معادلات از اصل حداقل انرژی پتانسیل و روشی مشابه روش ریتز با توابع حدس از نوع چندجمله ای جبیشف استفاده شده است. بعد از صحه گذاری معادلات و روش حل، با حل چندین مساله اثر عوامل مختلف مانند نسبت طول به عرض و نسبت طول به ضخامت، شرایط تکیه گاهی ورق، نوع لایه چینی و نوع بارگذاری رطوبتی بر مقدار خیز ورق بررسی شده است.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

در این بخش ابتدا معادلات پایه مانند روابط کرنش-جابه‌جایی و تنش-کرنش بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و رفتار الاستیک خطی بیان می‌گردد. سپس روش نیمه‌تحلیلی استفاده شده در حل مساله بر مبنای اصل حداقل انرژی پتانسیل شرح داده می‌شود. در انتها توزیع رطوبت وابسته به زمان در راستای ضخامت ورق به دست می‌آید.

۲-۱- روابط پایه و تعریف منتجه‌های تنش

یک ورق مرکب چندلایه با طول a، عرض b و ضخامت h در نظر بگیرید. دستگاه مختصات (x,y,z) بر روی سطح میانی ورق، $(z=0)$ قرار دارد. ورق تحت بار عرضی گسترده با شدت q و تغییرات دما و رطوبت بر روی لبه بالا و پایین قرار دارد. بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابه‌جایی در ورق به صورت زیر است [۱۹].

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\,\psi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\,\psi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در رابطه بالا u_0, v_0 و w_0 جابه‌جایی سطح میانی ورق در جهت محورهای $x-, y-$ و $z-$ هستند و ψ_x, ψ_y دوران جهت عمود بر سطح میانی را در راستای $x-, y-$ نشان می‌دهد. بار مکانیکی و تغییرات دما وابسته به زمان نیستند و فرآیند نفوذ رطوبت و توزیع آن وابسته به زمان است. مطالعات قبلی به طور گسترده‌ای نشان داده است که نفوذ رطوبت در مواد مرکب با زمینه پلیمری، پدیده‌ای بسیار کند است [۲۰-۲۱]. بنابراین مساله در اینجا به صورت شبه‌استاتیکی در نظر گرفته می‌شود و میدان جابه‌جایی ورق به صورت استاتیکی تحت بار مکانیکی و حرارتی و برای یک توزیع رطوبت در زمان مشخص به دست می‌آید. به همین دلیل میدان جابه‌جایی در رابطه (۱) به صورت صریح وابسته به زمان نیست.

با استفاده از روابط (۱)، روابط کرنش-جابه‌جایی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_x & \varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} + z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} & \gamma_{xz} &= \gamma_{xz0} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz0} \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن کرنش‌های سطح میانی $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \gamma_{xz0}, \gamma_{yz0}$ و تغییرات انحنای $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ با فرض تغییرشکل کوچک و بر مبنای نظریه الاستیک خطی به صورت زیر است [۱۹].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \varepsilon_{y0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy0} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} & \gamma_{xz0} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \\ \gamma_{yz0} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y & \kappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \kappa_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{aligned} \qquad (۳)$$

در اینجا فرض می‌شود ورق از N لایه تقویت شده با الیاف به صورت لایه‌های اورتوتروپ ساخته شده است. زاویه راستای الیاف در لایه k-ام با راستای طولی ورق، محور x، با $\varphi^{(k)}$ نشان داده می‌شود. با فرض رفتار الاستیک خطی، رابطه تنش-کرنش در لایه k-ام به صورت زیر است [۲۲].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^{(k)} & \bar{Q}_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45}^{(k)} & \bar{Q}_{55}^{(k)} & 0 \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x^{(k)}\Delta T + \beta_x^{(k)}\Delta c \\ \alpha_y^{(k)}\Delta T + \beta_y^{(k)}\Delta c \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{xy}^{(k)}\Delta T + \beta_{xy}^{(k)}\Delta c \end{Bmatrix} \right) \qquad (۴)$$

که در رابطه بالا $\bar{Q}_{ij}$ ضرایب ماتریس سفتی کاهش‌یافته تبدیل شده [۱۹، ۲۲] و $\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}\ i = x, y, xy$ ضرایب انبساط نم‌گرمایی تبدیل‌یافته [۲۳] هستند. در رابطه (۴)، $\Delta T, \Delta c$ مقدار تغییر دما و رطوبت نسبت به مقدار مرجع هستند.

منتجه‌های تنش بر مبنای انتگرال‌گیری از مولفه‌های تنش در راستای ضخامت ورق، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &[N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad Q_x \quad Q_y] \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]\, dz \\ &[M_x \quad M_y \quad M_{xy}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]\, z\, dz \end{aligned} \qquad (۵)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۴) و قرار دادن نتیجه آن در رابطه (۵)، منتجه‌های تنش برحسب کرنش‌ها و انحنای سطح میانی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^c \\ N_y^c \\ N_{xy}^c \\ M_x^c \\ M_y^c \\ M_{xy}^c \end{bmatrix} \quad (٦)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz0} \\ \gamma_{yz0} \end{bmatrix}$$

که در آن عناصر ماتریس‌های سفتی ورق چندلایه و منتجه‌های نم‌گرمایی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \ ; \ i,j = 1,2,6 \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \ ; \ i,j = 1,2,6 \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \ ; \ i,j = 1,2,6 \\
A_{ij} &= K_s \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \ ; \ i,j = 4,5 \\
&[N_x^T \quad M_x^T] \\
&= \Delta T \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha_x^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha_y^{(k)} \right. \\
&\left. + \bar{Q}_{16}^{(k)} \alpha_{xy}^{(k)} \right) \left[(h_k - h_{k-1}) \quad \frac{(h_k^2 - h_{k-1}^2)}{2} \right] \\
&[N_y^T \quad M_y^T] \\
&= \Delta T \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha_x^{(k)} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \alpha_y^{(k)} \right. \\
&\left. + \bar{Q}_{26}^{(k)} \alpha_{xy}^{(k)} \right) \left[(h_k - h_{k-1}) \quad \frac{(h_k^2 - h_{k-1}^2)}{2} \right] \\
&[N_{xy}^T \quad M_{xy}^T] \\
&= \Delta T \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{16}^{(k)} \alpha_x^{(k)} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \alpha_y^{(k)} \right. \\
&\left. + \bar{Q}_{66}^{(k)} \alpha_{xy}^{(k)} \right) \left[(h_k - h_{k-1}) \quad \frac{(h_k^2 - h_{k-1}^2)}{2} \right] \\
&[N_x^c \quad M_x^c] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{11}^{(k)} \beta_x^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta_y^{(k)} \right. \\
&\left. + \bar{Q}_{16}^{(k)} \beta_{xy}^{(k)} \right) \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} [1 \quad z] \, \Delta c \, dz \right) \\
&[N_y^c \quad M_y^c] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} \beta_x^{(k)} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta_y^{(k)} \right. \\
&\left. + \bar{Q}_{26}^{(k)} \beta_{xy}^{(k)} \right) \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} [1 \quad z] \, \Delta c \, dz \right) \\
&[N_{xy}^c \quad M_{xy}^c] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{16}^{(k)} \beta_x^{(k)} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \beta_y^{(k)} \right. \\
&\left. + \bar{Q}_{66}^{(k)} \beta_{xy}^{(k)} \right) \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} [1 \quad z] \, \Delta c \, dz \right)
\end{aligned} \quad (٧)$$

که در رابطه بالا K_s ضریب تصحیح برشی مربوط به فرض توزیع یکنواخت تنش برشی در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول است و در اینجا مقدار 5/6 برای آن فرض می‌شود [۱۹،۲۴]. در رابطه (۷)، h_k نشان‌دهنده فاصله لبه بالای لایه k–ام با سطح میانی $(z = 0)$ است. در حالت لایه‌چینی متقارن به علت صفر شدن عناصر ماتریس سفتی B_{ij}، منتجه‌های نیروی درون صفحه‌ای N_x, N_y, N_{xy} در رابطه (٦) وابسته به جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای لایه میانی و منتجه‌های ممان وابسته به انحنای ورق هستند. هم‌چنین در حالت لایه‌چینی متقارن، منتجه‌های ممان حرارتی نیز صفر هستند. در صورتیکه مقدار شدت رطوبت در بالا و پایین ورق یکسان باشد، توزیع متقارن رطوبت در ورق در رابطه (۷) نتیجه می‌دهد که منتجه‌های ممان رطوبتی نیز در حالت لایه‌چینی متقارن صفر خواهند بود. در این صورت معادلات حرکت درون‌صفحه‌ای از خمش ورق جدا خواهد بود و شرایط نم‌گرمایی موجب خمش ورق نمی‌شود.

۲-۲- روش نیمه‌تحلیلی ریتز

با توجه به اینکه تحلیل خمش ورق به صورت دقیق و تحلیلی محدود به شرایط تکیه‌گاهی خاصی است [۱۹]، در اینجا از روش شناخته شده و نیمه‌تحلیلی ریتز [۲۵-۲۶] و اصل حداقل انرژی پتانسیل، برای بررسی خمش ورق استفاده می‌شود. بنابراین انرژی کل پتانسیل ورق، شامل انرژی کرنشی و کار بار عرضی به صورت زیر استفاده می‌شود [۲۳].

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} & \left[\sigma_x (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T - \beta_x \Delta c) \right. \\
& + \sigma_y (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T - \beta_y \Delta c) \\
& + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} \\
& \left. + \sigma_{xy} (\gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T - \beta_{xy} \Delta c) \right] dz dy dx \\
& - \int_0^a \int_0^b qw \, dy dx
\end{aligned} \quad (٨)$$

با استفاده از رابطه (۲) و انتگرال‌گیری در جهت ضخامت در رابطه (۸) و استفاده از تعریف منتجه‌های تنش در رابطه (۵)، انرژی پتانسیل ورق به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b & \left[N_x \varepsilon_{x0} + M_x \kappa_x + N_y \varepsilon_{y0} + M_y \kappa_y \right. \\
& + Q_x \gamma_{xz0} + Q_y \gamma_{yz0} + N_{xy} \gamma_{xy0} \\
& + M_{xy} \kappa_{xy0} - (N_x^T + N_x^c) \varepsilon_{x0} - (M_x^T + M_x^c) \kappa_x \\
& - (N_y^T + N_y^c) \varepsilon_{y0} \\
& - (M_y^T + M_y^c) \kappa_y \\
& \left. - (N_{xy}^T + N_{xy}^c) \gamma_{xy0} - (M_{xy}^T + M_{xy}^c) \kappa_{xy} \right] dy dx \\
& - \int_0^a \int_0^b qw \, dy dx \\
& + Constant \ Terms
\end{aligned} \quad (٩)$$

جملات ثابت در رابطه (۹)، از انتگرال‌گیری از برخی جملات شامل تغییرات نم‌گرمایی به دست می‌آیند. با توجه به اینکه تغییرات انرژی پتانسیل در رفتار یک سامانه مکانیکی موثر است و این جملات ثابت در اعمال روش ریتز به علت مشتق‌گیری از انرژی

پتانسیل حذف می‌گردند؛ تاثیری در تغییر شکل ورق ندارند. بنابراین در رابطه (۹) و در ادامه ذکر نمی‌شوند. برای محاسبه انرژی پتانسیل برحسب مولفه‌های میدان جابه‌جایی ورق، کرنش‌ها و انحنای سطح میانی از رابطه (۳) در رابطه (٦)، همراه با نتیجه آن در رابطه (۹) جایگذاری می‌شود که نتیجه نهایی عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
U = \int_0^a \int_0^b \Big[& \frac{1}{2}A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + A_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial y} \\
& + A_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \\
& + \frac{1}{2}A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 \\
& + A_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \\
& + \frac{1}{2}A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 \\
& + \frac{1}{2}A_{44}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\psi_y\right)^2 \\
& + A_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi_x\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\psi_y\right) \\
& + \frac{1}{2}A_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi_x\right)^2 \\
& + B_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\
& + B_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) \\
& + B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right) \\
& + B_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right) \\
& + B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \\
& + D_{26}\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \\
& + \frac{1}{2}D_{66}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)^2 \\
& - \frac{\partial u_0}{\partial x}\left(N_x^T + N_x^c\right) \\
& - \frac{\partial v_0}{\partial y}\left(N_y^T + N_y^c\right) \\
& - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\left(M_y^T + M_y^c\right) \\
& - \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\left(M_x^T + M_x^c\right) \\
& - \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\left(N_{xy}^T + N_{xy}^c\right) \\
& - \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)\left(M_{xy}^T\right. \\
& \left. + M_{xy}^c\right)\Big] dydx \\
& - \int_0^a \int_0^b q w_0 \, dydx
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

در روش ریتز، میدان جابه‌جایی با استفاده از توابعی مستقل و کامل [۲۵] که شرایط مرزی هندسی را ارضاء کند، تقریب زده می‌شود. در اینجا بر مبنای استفاده از چندجمله‌ای چبیشف [۲۷]، توابع حدس به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
u_0(x,y) &= \phi_1(x,y)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{1ij}\, T_{i-1}(\bar{x})T_{j-1}(\bar{y}) \\
v_0(x,y) &= \phi_2(x,y)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{2ij}\, T_{i-1}(\bar{x})T_{j-1}(\bar{y}) \\
w_0(x,y) &= \phi_3(x,y)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{3ij}\, T_{i-1}(\bar{x})T_{j-1}(\bar{y}) \\
\psi_x(x,y) &= \phi_4(x,y)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{4ij}\, T_{i-1}(\bar{x})T_{j-1}(\bar{y}) \\
\psi_y(x,y) &= \phi_5(x,y)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{5ij}\, T_{i-1}(\bar{x})T_{j-1}(\bar{y})
\end{aligned}
\qquad (۱۱)
$$

در رابطه (۱۱) از متغیرهای بی‌بعد $\bar{x}=\frac{2x}{a}-1,\ \bar{y}=\frac{2y}{b}-1$ استفاده شده و $T_i(\dots)$ نشان‌دهنده چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه $i-$ ام است. ضرایب مجهول $c_{qij}, q=1,2,\dots,5$ بر مبنای روش ریتز و حداقل کردن انرژی پتانسیل به دست می‌آیند. توابع $\phi_q(x,y), q=1,2,\dots,5$ در رابطه (۱۱)، برای ارضای شرایط مرزی هندسی در چهار لبه ورق و به صورت کلی زیر انتخاب می‌شوند:

$$
\phi_q(x,y) = x^{d_{1q}}(a-x)^{d_{2q}}y^{d_{3q}}(b-y)^{d_{4q}}, \quad q=1,2,\dots,5 \qquad (۱۲)
$$

توان d_{iq} در رابطه (۱۲)، وابسته به وجود شرط مرزی هندسی برای مولفه جابه‌جایی مربوط در لبه موردنظر، به صورت صفر یا یک انتخاب می‌شود. شرایط مرزی برای ورق بر مبنای نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت زیر شناخته شده است [۱۹، ۲۳].

لبه گیردار	$u_0 = v_0 = w_0 = \psi_x = \psi_y = 0$	$x = 0$ یا a ; $y = 0$ یا b
لبه ساده	$v_0 = w_0 = \psi_y = 0$ $N_x, M_x =$ معلوم	$x = 0$ یا a
	$u_0 = w_0 = \psi_x = 0$ $N_y, M_y =$ معلوم	$y = 0$ یا b
لبه آزاد	$N_x, N_{xy}, Q_x, M_x, M_{xy} =$ معلوم	$x = 0$ یا a
	$N_y, N_{xy}, Q_y, M_y, M_{xy} =$ معلوم	$y = 0$ یا b

(۱۳)

در ادامه از حرف C برای تکیه‌گاه گیردار، حرف S برای تکیه‌گاه ساده و F برای لبه آزاد و یک کوته‌نوشت چهارحرفی برای بیان شرایط تکیه‌گاهی در لبه‌های $x=0, y=0, x=a, y=b$ استفاده می‌شود. برای مثال شرایط تکیه‌گاهی CFSC نشان می‌دهد لبه $x=0$ گیردار، لبه $y=0$ آزاد، لبه $x=a$ تکیه‌گاه ساده و لبه $y=b$ گیردار است. بنابراین با توجه به شرایط مرزی هندسی ذکر شده در رابطه (۱۳)، توابع $\phi_q(x,y)$ برای این شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر است:

$$\phi_1(x,y)=x(b-y) \qquad \phi_2(x,y)=x(a-x)(b-y)$$
$$\phi_3(x,y)=x(a-x)(b-y) \qquad \phi_4(x,y)=x(b-y) \qquad (۱۴)$$
$$\phi_5(x,y)=x(a-x)(b-y)$$

بر مبنای اصل حداقل انرژی پتانسیل، ضرایب مجهول c_{qij} در رابطه (۱۱)، از معادلات زیر تعیین می‌گردند.

$$\frac{\partial U}{\partial c_{qij}}=0, \quad q=1,2,\dots,5;\ i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n \qquad (۱۵)$$

تعداد $5\cdot m\cdot n$ معادله بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{uv} & 0 & K^{u\psi_x} & K^{u\psi_y} \\ (K^{uv})^t & K^{vv} & 0 & K^{v\psi_x} & K^{v\psi_y} \\ 0 & 0 & K^{ww} & K^{w\psi_x} & K^{w\psi_y} \\ (K^{u\psi_x})^t & (K^{v\psi_x})^t & (K^{w\psi_x})^t & K^{\psi_x\psi_x} & K^{\psi_x\psi_y} \\ (K^{u\psi_y})^t & (K^{v\psi_y})^t & (K^{w\psi_y})^t & (K^{\psi_x\psi_y})^t & K^{\psi_y\psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_u \\ X_v \\ X_w \\ X_{\psi_x} \\ X_{\psi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ F_{\psi_x} \\ F_{\psi_y} \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

که در آن $(.)^t$ نشان دهنده ترانهاده یک ماتریس است و

$$\begin{aligned} X_u &= [c_{111}, c_{112}, \dots, c_{11n}, c_{121}, \dots, c_{1mn}]^t \\ X_v &= [c_{211}, c_{212}, \dots, c_{21n}, c_{221}, \dots, c_{2mn}]^t \\ X_w &= [c_{311}, c_{312}, \dots, c_{31n}, c_{321}, \dots, c_{3mn}]^t \\ X_{\psi_x} &= [c_{411}, c_{412}, \dots, c_{41n}, c_{421}, \dots, c_{4mn}]^t \\ X_{\psi_y} &= [c_{511}, c_{512}, \dots, c_{51n}, c_{521}, \dots, c_{5mn}]^t \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

زیرماتریس‌های سفتی $K^{ef};\ e,f\in\{u,v,w,\psi_x,\psi_y\}$ در رابطه (۱۶) و با ابعاد $(m\cdot n)\cdot(m\cdot n)$ در پیوست ارایه شده‌اند. عناصر ماتریس نیرو در رابطه (۱۶) وابسته به بار مکانیکی عرضی و تغییرات نم‌گرمایی محاسبه می‌شوند و در پیوست بیان شده‌اند.

در حالت لایه‌چینی متقارن و شرایط نم‌گرمایی متقارن، مطابق توضیحات ارایه شده در بخش ۲-۱ برای معادلات (۶) و (۷)، صفر بودن منتجه‌های ممان نم‌گرمایی باعث صفر شدن عناصر ماتریس نیروهای F_{ψ_x}, F_{ψ_y} می‌گردد. با توجه به تحلیل مساله بر مبنای نظریه الاستیسیته خطی، عناصر ماتریس نیروی F_w فقط وابسته به بار عرضی مکانیکی می‌باشند. بنابراین در حالت لایه‌چینی متقارن و شرایط نم‌گرمایی متقارن، خیز ورق تاثیری از شرایط نم‌گرمایی نمی‌پذیرد و به همین دلیل در بخش سوم فقط ورق با لایه‌چینی نامتقارن بررسی می‌گردد.

۲-۳- توزیع رطوبت

همانطور که در بخش ۲-۱ اشاره شده، بار حرارتی بر روی ورق بصورت اختلاف دمای ثابت نسبت به محیط است. بنابراین دمای سطح بالا و پایین ورق به مقدار ΔT نسبت به دمای مرجع محیط T_0 متفاوت است. در مورد بار رطوبتی، ورق در ابتدا تحت شدت رطوبت ثابت C_i و سپس به عنوان شرایط مرزی در معرض شدت رطوبت ثابت C_t در سطح بالا $(z=h/2)$ و شدت رطوبت ثابت C_b در سطح پایین ورق قرار می‌گیرد. برای محاسبه نفوذ رطوبت در راستای ضخامت ورق از معادله فیک، که به طور گسترده‌ای برای مدلسازی نفوذ رطوبت در مورد مواد مرکب زمینه پلیمری مانند اپوکسی به کار گرفته شده [۲۱، ۲۸-۲۹] ، به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad -h/2<z<h/2, \quad C(h/2,t)=C_t, \quad C(-h/2,t)=C_b; \quad C(z,0)=C_i \qquad (۱۸)$$

D در رابطه (۱۸) نشان‌دهنده ضریب نفوذ رطوبت در ماده بوده که شدیدا به دما وابسته است [۲۰]. در اینجا از رابطه آرنیوس برای بیان وابستگی D به دما به صورت زیر استفاده می‌شود [۳۰].

$$D=D_0\exp\left(-\frac{R}{T}\right) \qquad (۱۹)$$

که در رابطه (۱۹) D_0, R اعداد ثابتی بوده و T نشان‌دهنده دما برحسب کلوین است. با توجه به فرض بار حرارتی به صورت تغییرات دمای ثابت، مقدار D نیز عددی ثابت در هر دمای مشخص خواهد بود. با این فرضیات، حل معادله (۱۸) به صورت زیر است [۳۱].

$$\begin{aligned} C(z,t) &= (C_t-C_b)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)+C_b \\ &+\frac{4C_i}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-D(2n+1)^2\pi^2 t/h^2}}{2n+1}sin\left(\pi(2n+1)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_t\,cos(n\pi)-C_b}{n}e^{-Dn^2\pi^2 t/h^2}sin\left(n\pi\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

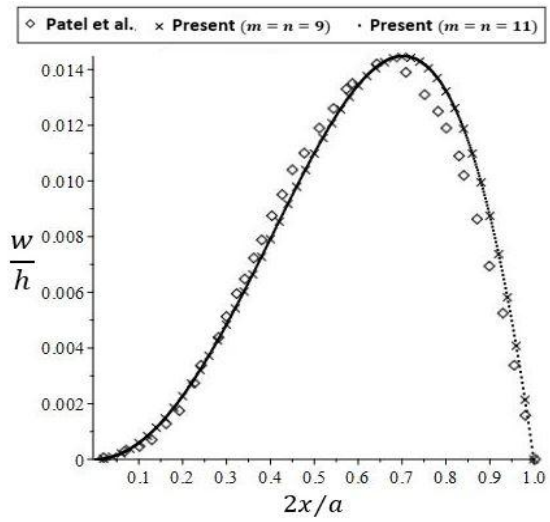
توزیع نفوذ رطوبت به صورت سری بیان شده در رابطه (۲۰) برای زمان‌های غیرکوچک به سرعت همگرا می‌شود و برای زمان‌های اولیه، $\frac{Dt}{h^2}<0.01$ ؛ پاسخ معادله (۱۸) برحسب تابع خطا مناسب‌تر است [۳۱].

۳- نتایج و تحلیل

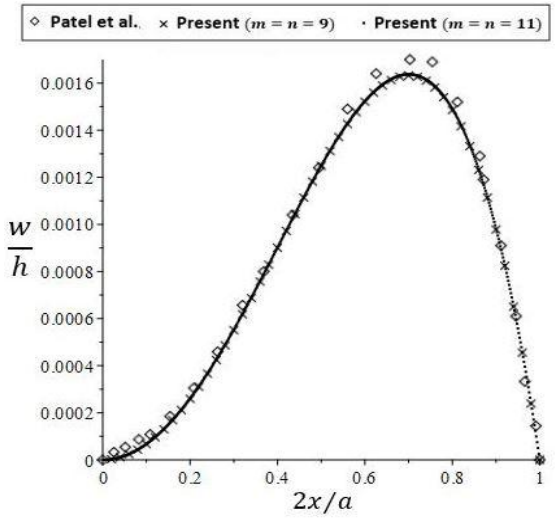
در این بخش با استفاده از معادلات و روش حل توسعه داده شده در بخش قبل، مثال‌های عددی متعدد حل و اثرات عوامل مختلف بر خیز ورق تحت بار مکانیکی عرضی و نم‌گرمایی بررسی می‌شود. برای این منظور ابتدا صحه‌گذاری ارایه و سپس اثر عوامل مختلف بررسی می‌شود.

۳-۱- صحه‌گذاری

برای صحه‌گذاری روش حل و معادلات توسعه داده شده در بخش‌های قبلی، خیز یک ورق مربعی با لایه‌چینی متعامد تحت بار رطوبتی پایا به میزان $\Delta C=1.5\%$ محاسبه شده و با مرجع [۳۲] مقایسه می‌شود. شرایط تکیه‌گاهی ورق در هر چهار لبه به صورت تکیه‌گاه ساده است. ابعاد هندسی ورق $a/h=20$ و $h=1\ mm$؛ خواص سفتی $E_1=130\ GPa, E_2=8.5\ GPa, G_{12}=6\ GPa, \upsilon_{12}=0.3$ و ضرایب انبساط رطوبتی در راستای الیاف و عمود بر الیاف برابر $\beta_1=0\ \frac{1}{\%}, \beta_2=4.4\times10^{-3}\ \frac{1}{\%}$ است. خیز عرضی ورق در دو حالت لایه‌چینی متعامد با دو لایه $[0/90]$ و هشت لایه $[0/90]_4$



(a)



(b)

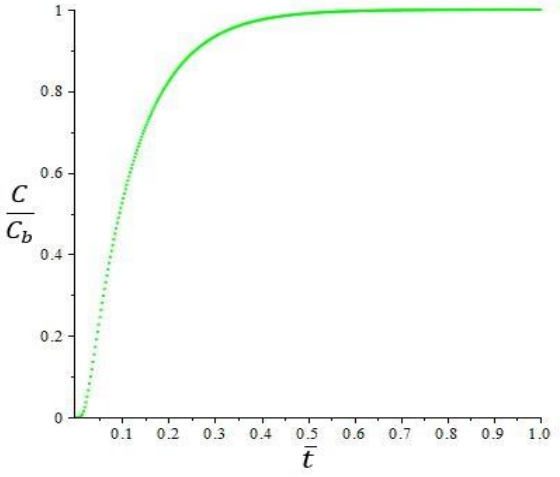
شکل ۱ تغییرات جابه‌جایی عرضی ورق در راستای طولی ناشی از تغییرات رطوبت، الف) $[0/90]$، ب) $[0/90]_4$

Fig. 1 The variation of transverse displacement due to moisture along the x-axis, (a): $[0/90]$, (b): $[0/90]_4$

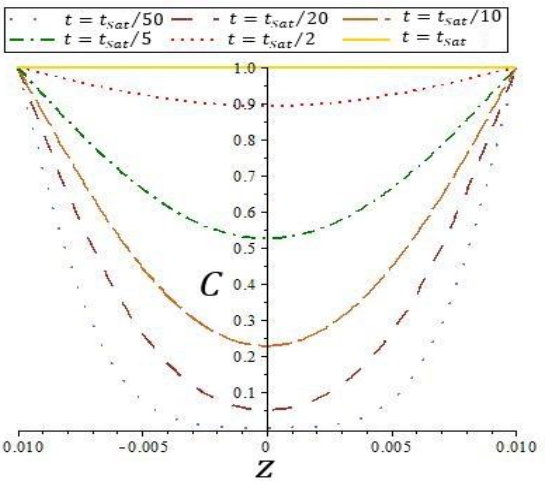
در وسط ورق با تعداد جملات $m = n = 9$ و $m = n = 11$ در روش ریتز حل شده است و با مرجع [۳۲] مقایسه شده است. با توجه به تقارن خیز ورق، فقط نیمی از خیز ورق در راستای طولی در شکل ۱ با فرض $-a/2 \le x \le a/2$ رسم شده است. همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود اختلاف نتایج با مرجع کم بوده و می‌تواند ناشی از تفاوت در روش حل باشد. هم‌چنین با توجه به همگرایی مناسب نشان داده شده در شکل ۱، در ادامه از تعداد $m = n = 11$ جمله در روش ریتز استفاده شده است.

۳-۲- اثر نسبت طول به عرض ورق

در ادامه اثر عوامل مختلف بر خیز ورق تحت شـــرایط نم‌گرمایی بررسی می‌شود. جنس ماده ورق از ماده مرکب گرافیت/اپوکسی



(a)



(b)

شکل ۲ الف) شدت رطوبت در وسط ورق برحسب زمان، ب) توزیع رطوبت در جهت ضخامت در چندین زمان

Fig. 2 (a) Moisture concentration in the mid-surface versus time, (b) moisture distribution through the thickness for some times

با خـواص مـکـانـیـکـی [۳۳] $E_1 = 181\ \text{GPa}, E_2 = E_3 = 10.3\ \text{GPa}, \upsilon_{12} = 0.28, G_{12} = G_{13} = 7.17\ \text{GPa}, G_{23} = 2.39\ \text{GPa}$ و ضـــرایـب انبســـاط نـم‌گـرمـایـی $\alpha_1 = 0.02 \times 10^{-6}/K, \alpha_2 = 22.5 \times 10^{-6}/K, \beta_1 = 0\ \frac{1}{\%}, \beta_2 = 6 \times 10^{-3}\ \frac{1}{\%}$ اســـت. ورق تحت شرایط رطوبتی با فرض $D_0 = 6.23\ mm^2 s^{-1}, R = 5912\ K$ [۳۴] در نظر گرفته می‌شـــود. در این بخش شـــرایط تکیه‌گاهی ورق به صـــورت چهار طرف تکیه‌گاه ســـاده، لایه‌چینی $[0/45/-45/90]$ و ابعاد هندســـی ورق به صـــورت $b/h = 20, h = 0.02\ m$ اســـت. در بـارگـذاری حرارتی، ورق ابتـدا در دمـای اولیـه محیط $T_0 = 22^0C\ (295\ K)$ است و سپس به میزان $\Delta T = 68^0C$ گرم می‌شود. در بـارگـذاری رطوبتی، مگر در بخش اثر شـــرایط مرزی رطوبتی نامتقارن، ورق ابتدا خشـــک اســـت و ســـپس در معرض شـــدت رطوبت $C_b = C_t = 1\%$ قرار می‌گیرد.

برای شناخت بیشتر بارگذاری رطوبتی، توزیع رطوبت در راستای ضخامت ورق برای چندین زمان مختلف و مقدار شدت رطوبت در وسط ورق برحسب زمان بی‌بعد $\bar{t} = Dt/h^2$، در شکل ۲ نشان داده شده است.

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با نفوذ رطوبت از بالا و پایین به داخل ورق، شدت رطوبت داخل ورق افزایش یافته و پس از زمان t_{sat} به حالت اشباع یا پایا می‌رسد. با توجه به حل ارایه شده در رابطه (۲۰)، زمان اشباع از نظر ریاضی، بی‌نهایت است اما در اینجا زمانی که طول می‌کشد تا شدت رطوبت در مرکز ورق به مقدار 99% حالت پایا برسد، به عنوان زمان اشباع تعریف می‌گردد. در این مثال، 12سال $\cong 0.5\, h^2/D$ است. همانطور که انتظار می‌رود نفوذ رطوبت در مواد مرکب زمینه پلیمری فرآیندی بسیار کند است و به همین علت در اینجا تحلیل به صورت شبه‌استاتیکی در نظر گرفته شده است. در ادامه از کوتاه‌نوشت ML برای اشاره به بارگذاری مکانیکی، TML برای بارگذاری مکانیکی-حرارتی، $\mathrm{HTML-tr}$ برای بارگذاری مکانیکی همراه نم‌گرمایی در زمان $t = t_{sat}/10$ و $\mathrm{HTML-st}$ برای بارگذاری مکانیکی همراه نم‌گرمایی در حالت پایا استفاده می‌شود. مقدار شدت بار مکانیکی $q = 0.1$ MPa فرض می‌شود و خیز ورق به صورت بی‌بعد شده $\bar{w} = E_2 w/(100qb)$ گزارش می‌شود. برای بررسی اثر نسبت طول به عرض بر خمش ورق، خیز بی‌بعد شده ورق با سه نسبت طول به عرض $a/b = 1, 2, 4$ ؛ در دو راستای طولی و عرضی در میان ورق در شکل ۳ رسم شده است.

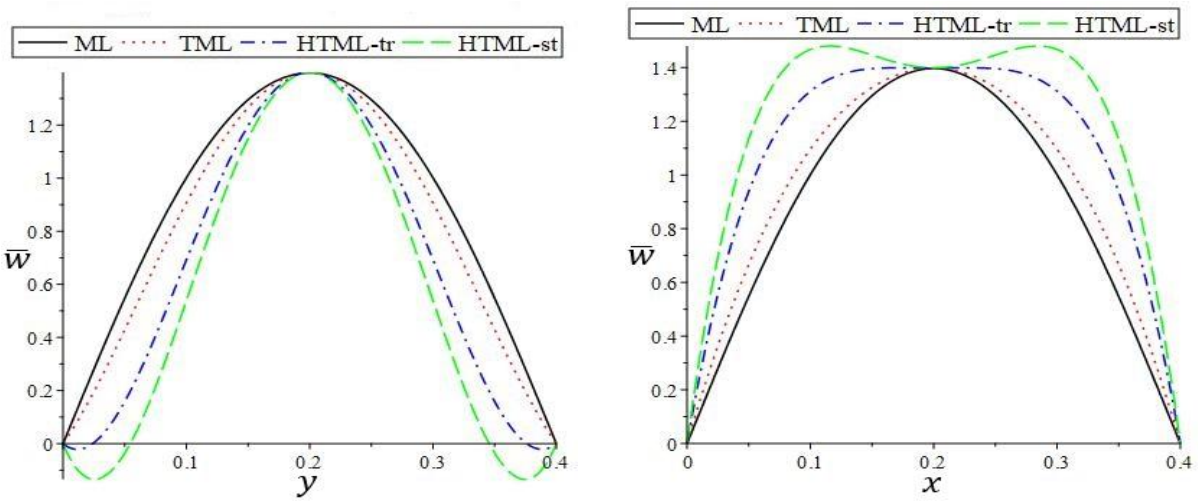
همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت طول به عرض ورق از حالت مربعی به نسبت $a/b = 2$، مقدار خیز ورق در حالت مکانیکی از $\bar{w} = 1.39$ به $\bar{w} = 2.76$ افزایش می‌یابد. اما با افزایش بیشتر به $a/b = 4$، به علت هموار شدن خیز در راستای طولی، مقدار خیز مرکز ورق تغییر چندانی نمی‌کند. با اضافه‌شدن بارگذاری حرارتی و نم‌گرمایی، مشاهده می‌شود که نسبت طول به عرض ورق نه تنها مقادیر عددی خیز ورق بلکه نحوه خمش ورق را نیز تغییر می‌دهد. بار نم‌گرمایی باعث خمش قابل توجه ورق در نزدیکی لبه $y = 0, b$ در حالت ورق مربعی و لبه $x = 0, a$ در دو حالت ورق مستطیلی شده است که می‌تواند تنش‌های خمشی موضعی قابل توجهی ایجاد کند. برای فهم بهتر اثرات بارگذاری حرارتی و نم‌گرمایی بر خیز ورق، مقدار خیز ناشی از بار حرارتی و رطوبتی به صورت جداگانه در میانه عرضی ورق برای حالت‌های $a/b = 1, 4$ در شکل ۴ نشان داده شده است.

در شکل ۴، کوتاه‌نوشت TL بار حرارتی و HL بار رطوبتی را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، افزایش نسبت طول به عرض ورق باعث تغییر کلی خیز ناشی از بار حرارتی و رطوبتی می‌شود. مقایسه شکل ۳ و ۴ نشان می‌دهد که خیز ناشی از بار رطوبتی در ورق با $a/b = 4$ چندبرابر بزرگتر از خیز ناشی از بار مکانیکی است. هم‌چنین در شکل ۴ مشخص است که خیز ناشی از بار رطوبتی پس از زمان $t_{sat}/10$ می‌تواند بزرگتر از نیمی از خیز زمان اشباع رطوبتی باشد که نشان‌گر اهمیت تحلیل گذرا در بار رطوبتی است.

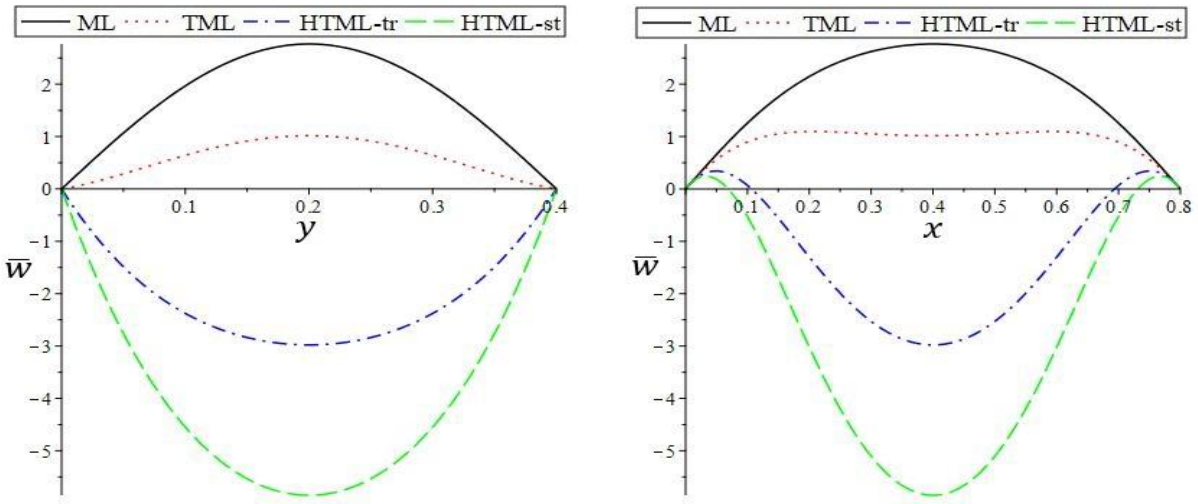
۳-۳- اثر نسبت طول به ضخامت ورق

در این بخش ورق مربعی با ویژگی‌های ذکر شده در بخش قبل اما با ضخامت‌های متفاوت $a/h = 10, 40, 100$ بررسی می‌شود. برای این منظور مقدار خیز ورق در میانه طولی و عرضی ورق برای دو ضخامت $a/h = 10, 40$ تحت بارگذاری‌های مختلف در شکل ۵ رسم شده است. هم‌چنین نتایج مربوط به ضخامت $a/h = 20$ در بخش قبل ارایه شده و از آن استفاده می‌گردد. زمان اشباع نفوذ رطوبت، t_{sat} به ضخامت ورق وابسته است و بنابر رابطه $\bar{t}_{sat} = Dt_{sat}/h^2 \cong 0.5$ می‌توان زمان اشباع رطوبت برای ضخامت‌های مختلف ورق را محاسبه کرد.

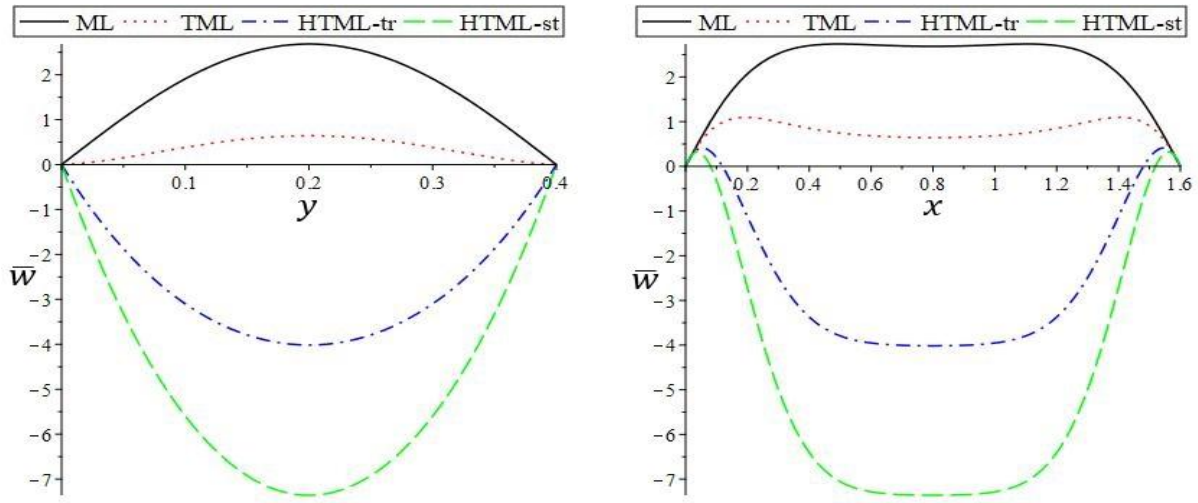
شکل ۵ و حالت ورق مربعی در شکل ۳ نشان می‌دهد که با کاهش ضخامت، مقدار خیز مکانیکی به دلیل کاهش سفتی ورق، افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. هم‌چنین افزایش خیز مکانیکی در مقایسه با تغییر شکل حرارتی و نم‌گرمایی بسیار بیشتر بوده و باعث شده است که در حالت ورق نسبتا نازک $a/h = 40$، تغییر شکل کلی ورق در حالت مکانیکی-نم‌گرمایی نزدیک به تغییر شکل مکانیکی ورق باشد.



(a)



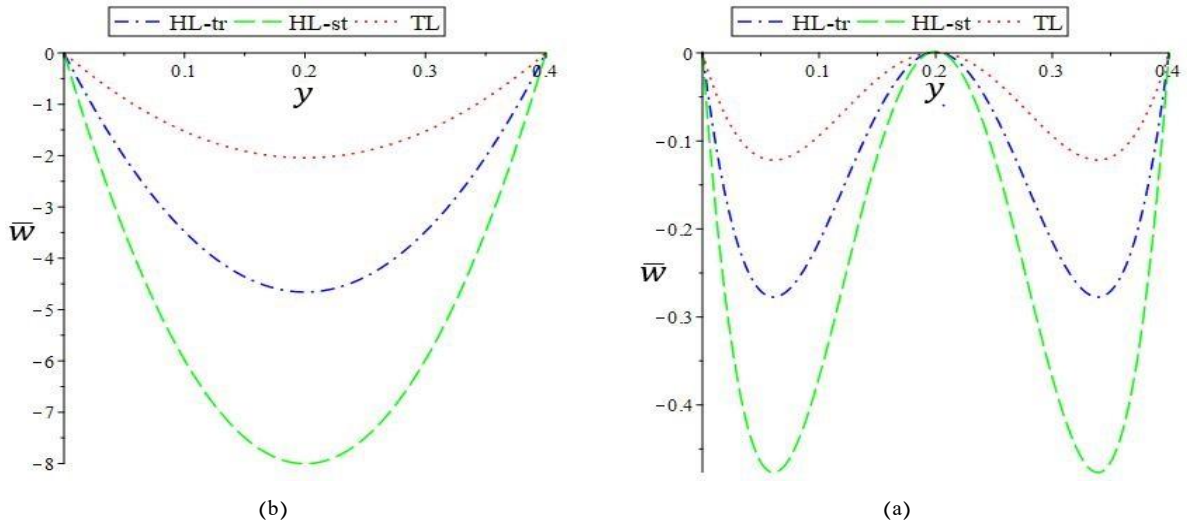
(b)



(c)

شکل ۳ خیز عرضی در دو راستای میانی ورق الف) $a/b=1$؛ ب) $a/b=2$؛ ج) $a/b=4$

Fig. 3 Transverse deformation in the mid-line of the plate (a) $a/b=1$; (b) $a/b=2$; (c) $a/b=4$



شکل ۴ خیز در راستای میانه عرضی ورق تحت بار حرارتی و رطوبتی الف) $a/b=1$؛ ب) $a/b=4$

Fig. 4 Transverse deformation in the transverse mid-line of the plate under thermal and thermal and hygroscopic loads (a) $a/b=1$; (b) $a/b=4$

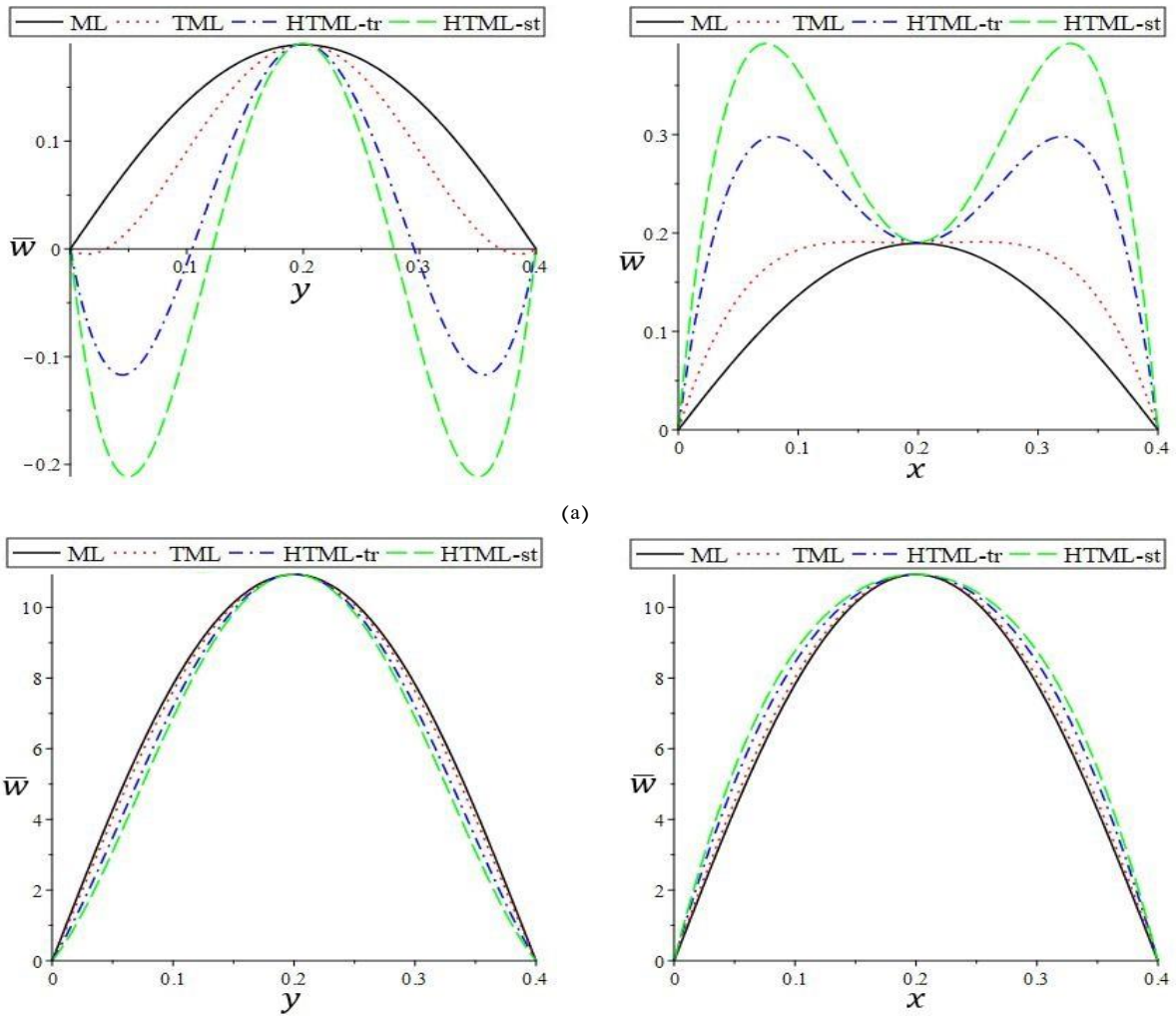
این موضوع برای ورق نازک $a/h=100$ شدیدتر است و تغییر شکل ورق در حالت نم‌گرمایی در مقایسه با بار مکانیکی بسیار کوچکتر است و به همین دلیل در اینجا نشان داده نشده است. در حالیکه برای ورق نسبتا ضخیم $a/h=10$، تغییر شکل ناشی از بار رطوبتی بزرگتر از خیز مکانیکی است و تغییر شکل کلی ورق در حالت مکانیکی-نم‌گرمایی، کاملا متفاوت با حالت بارگذاری نیرو است. برای بررسی کمی، مقادیر خیز حداکثر در حالت‌های بارگذاری مکانیکی، حرارتی و رطوبتی در جدول ۱ نشان داده شده است. مقدار حداکثر خیز در اثر بار مکانیکی در وسط ورق رخ می‌دهد اما تغییر شکل ناشی از بار حرارتی و رطوبتی مشابه شکل ۵-الف می‌باشد.

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که برای حالت ورق مربعی و در محدوده ضخامت بررسی شده، بیشینه خیز ناشی از بار مکانیکی نسبت عکس با h^3 دارد، مثلا با نصف شدن ضخامت مقدار حداکثر خیز تقریبا ۸ برابر شده است. اما در حالت بارگذاری حرارتی و رطوبتی مقدار بیشینه خیز نسبت عکس با h دارد، مثلا با نصف شدن ضخامت مقدار حداکثر خیز تقریبا ۲ برابر شده است. هم‌چنین جدول ۱ تایید می‌کند که خیز ناشی از بار رطوبتی در کسری از زمان اشباع می‌تواند در مقایسه با خیز حالت پایدار، که معمولا در زمان طولانی اتفاق می‌افتد، قابل توجه باشد. هم‌چنین نسبت خیز بیشینه در حالت رطوبتی گذرا به حداکثر خیز در حالت رطوبتی پایا، مستقل از ضخامت ورق در محدوده مورد بررسی است.

۳-۴- اثر شرایط تکیه‌گاهی

در این بخش خیز ورق با شرایط تکیه‌گاهی مختلف به صورت ترکیبی از شرایط گیردار، ساده و آزاد بررسی می‌شود. خواص هندسی و مادی ورق مشابه بخش۳-۲ است. بیشینه خیز ورق، از نظر اندازه، تحت بارگذاری‌های مختلف مکانیکی، حرارتی و رطوبتی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف در جدول ۲ گزارش شده است. برای سهولت مقایسه، نتایج حالت چهار طرف تکیه‌گاه ساده مرتبط $(a/b=1, a/h=20)$ از جدول ۱، تکرار شده است.

نتایج جدول ۲ وابستگی شدید خیز ورق به شرایط مرزی را تحت انواع بارگذاری نشان می‌دهد. باید توجه نمود که مقادیر بیشینه خیز در شرایط تکیه‌گاهی مختلف در نقاط مختلفی از ورق ایجاد می‌شود. برای مثال در حالت بارگذاری مکانیکی و در شرایط مرزی CCFF ، خیز بیشینه در گوشه آزاد ورق رخ می‌دهد و برای سایر شرایط مرزی در مرکز ورق، خیز مکانیکی حداکثر است. بنابراین مقایسه صرفا مستقیم این اعداد برای بررسی دقیق اثرات تکیه‌گاهی کافی نیست. اما مقایسه نسبی خیز بیشینه نمای کلی از اثرات شرایط مرزی رانشان می‌دهد. برای مثال خیز مرکز ورق در حالت بارگذاری مکانیکی، نشان از افزایش ۲۸۵٪ خیز در حالت SSSS نسبت به CCCC است. اثرات شرایط تکیه‌گاهی در حالت بارگذاری حرارتی و رطوبتی، موثرتر و پیچیده‌تر است. مقدار خیز ناشی از بار حرارتی و رطوبتی در حالت چهارطرف گیردار، CCCC در مقایسه با بار مکانیکی بسیار کوچک است. البته این نتیجه وابسته به ابعاد هندسی و لایه‌چینی ورق نیز است. در سایر شرایط مرزی، خیز ناشی از بار حرارتی و رطوبتی، هم‌مرتبه یا بزرگتر از خیز ناشی از بار مکانیکی است. برای بررسی دقیق‌تر منحنی خیز ورق در میانه طولی و عرضی ورق برای شرایط مرزی CSCS، CFCF و CCFF و تحت انواع بارگذاری در شکل ۶ رسم شده است.



شکل ۵ خیز عرضی در دو راستای میانی ورق الف) $a/h = 10$؛ ب) $a/h = 40$

Fig. 5 Transverse deformation in the mid-line of the plate (a) $a/h = 10$; (b) $a/h = 40$

جدول ۱ اثر ضخامت بر حداکثر خیز ورق در بارگذاری‌های مختلف

Table 1 Effect of thickness on the maximum transverse displacement of a plate under various loads.

Types of Loading	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 100$
ML	0.189	1.397	10.93	**169.68**
TL	0.062	0.124	0.249	**0.624**
HL, $t/t_{Sat} = 0.1$	0.139	0.281	0.565	**1.414**
HL, $t/t_{Sat} = 1$	0.240	0.486	0.975	**2.440**

جدول ۲ اثر شرایط تکیه‌گاهی بر حداکثر خیز ورق در بارگذاری‌های مختلف

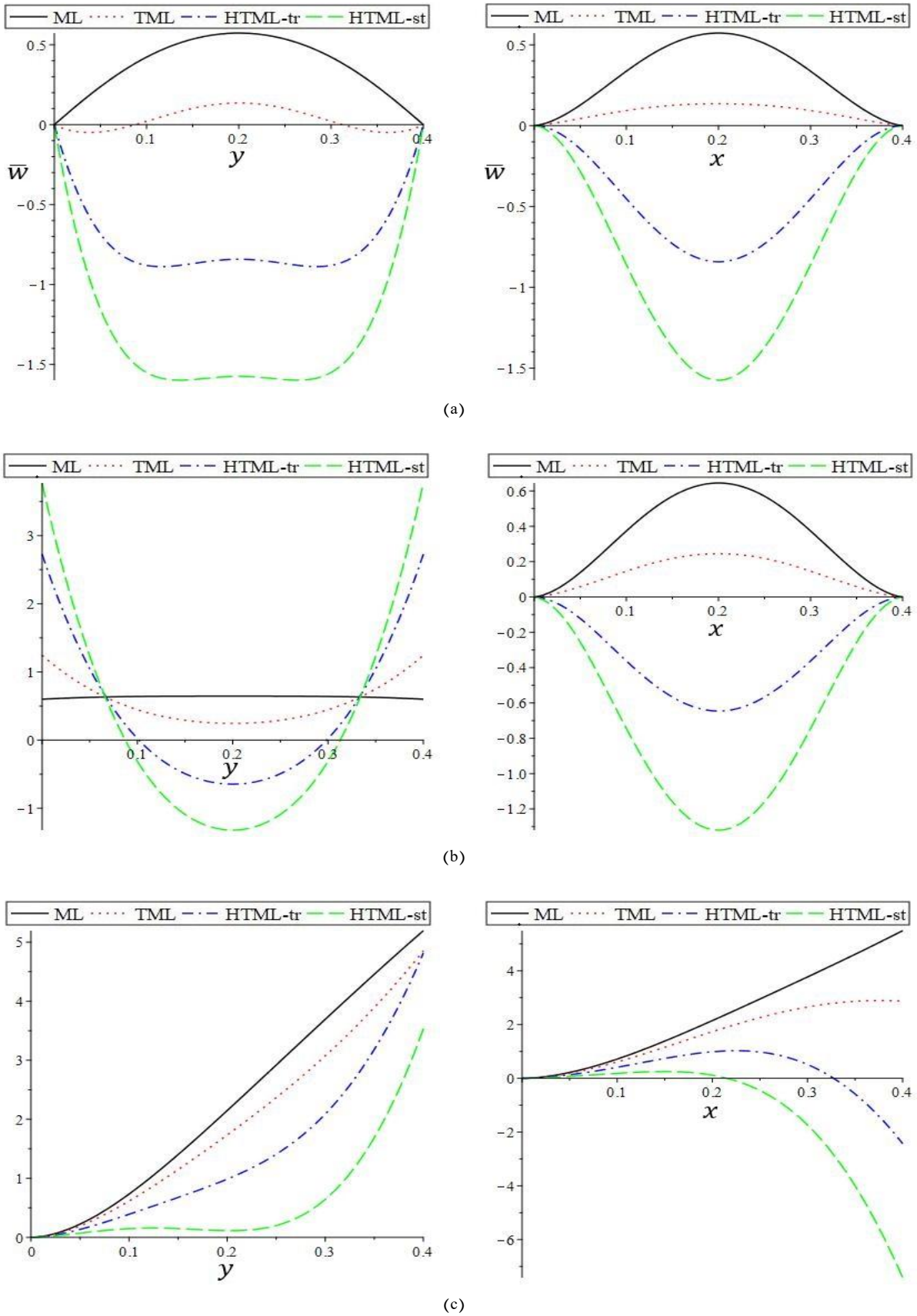
Table 2 Effect of boundary condition on the maximum transverse displacement under various loads.

Types of Loading	CCCC	CSCS	SSSS	CFCF	CCFF
ML	0.362	0.573	1.397	0.645	**12.160**
TL	3.64×10^{-4}	−0.438	0.124	0.645	**−4.958**
HL, $t/t_{Sat} = 0.1$	8.16×10^{-4}	−0.978	0.281	1.485	**−9.155**
HL, $t/t_{Sat} = 1$	1.43×10^{-3}	−1.710	0.486	2.530	**−19.438**

مقایسه شکل ۶.الف و ۳.الف نشان می‌دهد که تغییر شرایط تکیه‌گاهی لبه چپ و راست ورق از تکیه‌گاه ساده به گیردار، باعث تغییر شکل خیز ورق در حالت بارگذاری حرارتی و نم‌گرمایی شده است. شکل ۶.ب نشان می‌دهد که خیز مکانیکی در میانه عرضی ورق که به وسط لبه بالا و پایین آزاد می‌رسد، تغییرات بسیار کمی دارد و در این راستا ورق به صورت استوانه‌ای خم شده است. اما در شرایط بارگذاری حرارتی و نم‌گرمایی، مقدار خیز بیشینه ورق در وسط لبه آزاد بالا و پایین رخ می‌دهد و باعث تفاوت کلی منحنی خیز با حالت مکانیکی شده است. هم‌چنین در این حالت خیز بیشینه بار نم‌گرمایی به صورت قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از بار مکانیکی است. در حالت شرایط تکیه‌گاهی CCFF مقدار بیشینه خیز در لبه‌های آزاد رخ می‌دهد اما شکل کلی خیز ورق تحت بارگذاری‌های حرارتی و نم‌گرمایی نسبت به حالت مکانیکی متفاوت است. هم‌چنین تفاوت کلی منحنی خیز در راستای طولی و عرضی نشان می‌دهد که تقارن خیز ورق در حالت بار مکانیکی در حالت بار حرارتی و رطوبتی از بین می‌رود.

۳-۵- اثر لایه‌چینی

تحلیل ارایه شده در این مقاله متمرکز بر بررسی خمش ورق تحت شرایط نم‌گرمایی است. بنابراین با توجه به توضیح ارایه شده در بخش ۲-۱، در اینجا چندین نوع لایه‌چینی نامتقارن بررسی



شکل ۶ خیز ورق در دو راستای میانی ورق برای شرایط مرزی مختلف الف) CSCS؛ ب) CFCF؛ ج) CCFF

Fig. 6 Transverse deformation in the mid-line of the plate for different boundary conditions (a) CSCS; (b) CFCF; (c) CCFF

جدول ۳ اثر لایه‌چینی بر حداکثر خیز ورق در بارگذاری‌های مختلف

Table 3 Effect of layups on maximum transverse displacement under various loads.

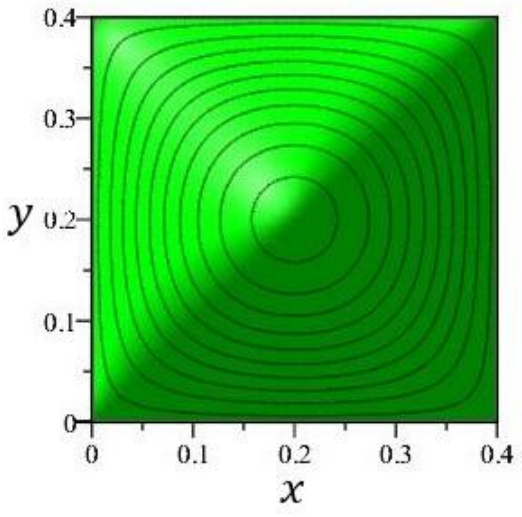
Types of Loading	ML	TL	HL, $t/t_{Sat}=0.1$	HL, $t/t_{Sat}=1$
[0/90/0/90]	0.859	0.040	0.104	**0.155**
[0/30/60/90]	1.545	0.159	0.353	**0.622**
[45/−45/45/−45]	0.493	0.018	0.036	**0.070**
[0/45/−45/90]	1.397	0.124	0.281	**0.486**
[30/−60/−30/60]	0.696	0.028	0.070	**0.110**
[30/−30/60/−60]	0.721	0.094	0.197	**0.365**

می‌گردد. ابعاد هندسی و شرایط مرزی مشابه بخش ورق مربعی در بخش ۳-۲ است. مقدار خیز بیشینه ورق تحت انواع بارگذاری در جدول ۳ نشان داده شده است. نتایج مربوط به لایه‌چینی [0/45/−45/90] برای سادگی مقایسه، تکرار شده است. همانطور که انتظار می‌رود نوع لایه‌چینی بر روی سفتی ورق و مقدار خیز تاثیرگذار است. بیشترین سفتی مکانیکی مربوط به لایه‌چینی زاویه‌ای متوازن [45/−45/45/−45] است. هم‌چنین مقدار خیز نم‌گرمایی در این حالت به طور قابل‌توجهی کوچک است و بیشینه خیز در حالت بار رطوبتی پایدار حدود ۱۴٪ بیشینه خیز مکانیکی است. این موضوع می‌تواند ناشی از صفر بودن منتجه‌های ممان نم‌گرمایی $M_x^T, M_y^T, M_x^c, M_y^c$ در این لایه‌چینی باشد. هم‌چنین در این حالت صفر بودن عناصر ماتریس سفتی B_{11}, B_{12}, B_{22} سبب تضعیف اثر منتجه‌های نیروی نم‌گرمایی بر خمش ورق می‌شود. بیشترین خیز نم‌گرمایی در مقایسه با خیز مکانیکی مربوط به لایه‌چینی [0/30/60/90] است که حدود ۴۰٪ خیز مکانیکی است. نکته مهم دیگر، اثرات قوی‌تر نوع لایه‌چینی بر پاسخ نم‌گرمایی در مقایسه با پاسخ مکانیکی در جدول ۳ است. برای مثال خیز مکانیکی در حالت لایه‌چینی [0/45/−45/90] حدود ۶۰٪ بیشتر از بیشینه خیز مکانیکی لایه‌چینی متعامد پادمتقارن [0/90/0/90] است، در حالیکه اختلاف بیشینه خیز حالت رطوبتی پایدار حدود ۲۱۳٪ است. اخیرا لایه‌چینی چهارجهته دو-دو برای جایگزینی لایه‌چینی سنتی با راستاهای $0, \pm 45, 90$ پیشنهاد شده‌اند [۳۵]. لایه‌چینی [30/−60/−30/60] و [30/−30/60/−60] به عنوان نمونه‌ای از این نوع لایه‌چینی سفتی مکانیکی بالایی نشان می‌دهند. جالب توجه است که اختلاف حدود ۴٪ در بیشینه خیز مکانیکی در این دو نوع لایه‌چینی، در حالت بار رطوبتی پایا به ۲۳۰٪ افزایش می‌یابد.

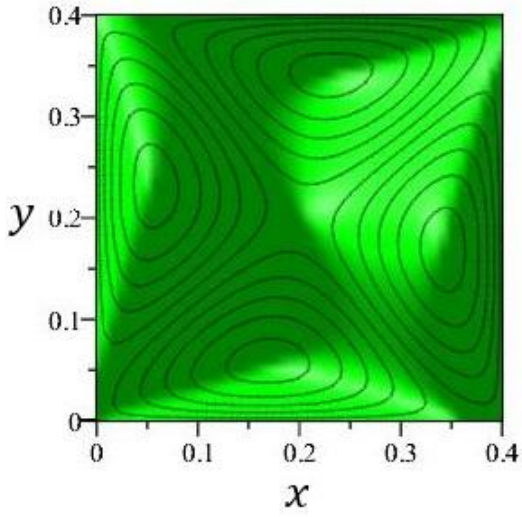
شکل کلی خیز ورق برای انواع لایه‌چینی مشابه حالت ورق مربعی در شکل‌های ۴ و ۵ است. برای تجسم بهتر، شکل خمش ورق با لایه‌چینی [30/−30/60/−60] در حالت بار مکانیکی و بار رطوبتی پایا در شکل ۷ نشان داده شده است.

۳-۶- اثر شرایط مرزی رطوبتی نامتقارن

در این بخش به منظور بررسی اثر شرایط مرزی رطوبتی نامتقارن، ورق در ابتدا خشک است و سپس در معرض شدت رطوبت $C_t = 2\%$ و $C_b = 0$ قرار می‌گیرد. در این حالت محتوی رطوبت پایا با حالت قبلی $C_b = C_t = 1\%$ یکسان است. توزیع رطوبت در راستای



(a)

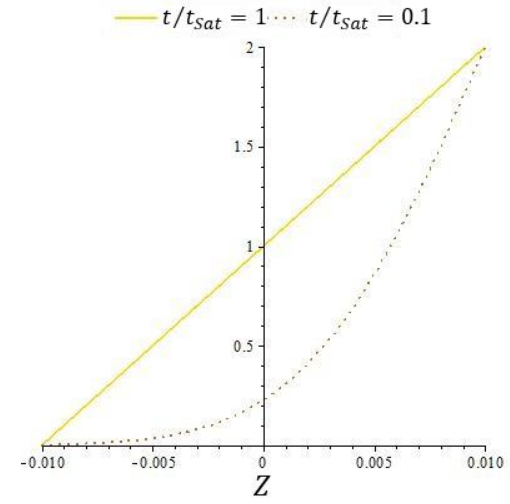


(b)

شکل ۷ خیز ورق برای لایه‌چینی [30/−30/60/−60] الف) ML ب) $HL, t/t_{Sat}=1$

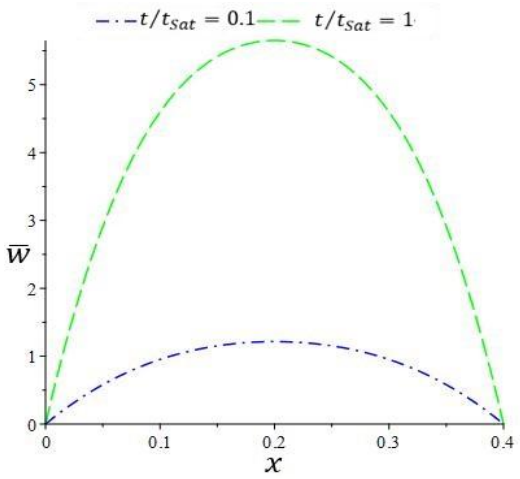
Fig. 7 Transverse deformation of the plate with layup [30/−30/60/−60] (a) ML; (b) $HL, t/t_{Sat}=1$

ضخامت ورق در حالت پایا به صورت خطی است که همراه با حالت گذرا در شکل ۸ نشان داده شده است.

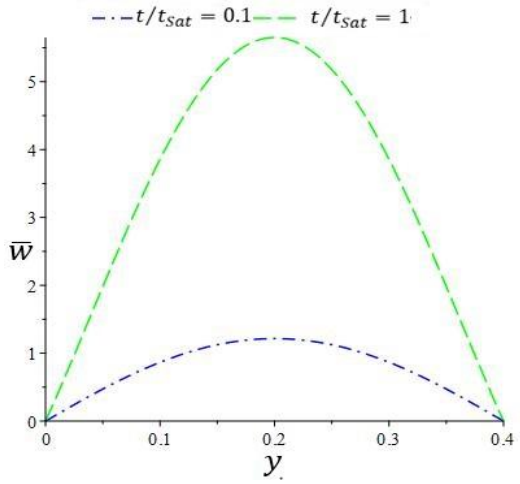


شکل ۸ توزیع رطوبت در راستای ضخامت در حالت پایا و $t/t_{Sat} = 0.1$ تحت شرایط مرزی $C_b = 0, C_t = 2\%$

Fig. 8 Moisture distribution through the thickness for steady state and $t/t_{Sat} = 0.1$ under $C_b = 0, C_t = 2\%$



(a)



(b)

شکل ۹ خیز ورق تحت بار رطوبتی نامتقارن در راستای میانه الف) طولی ب) عرضی

Fig. 9 Transverse deformation of the plate under asymmetric hygroscopic load in (a) axial mid-line, (b) transverse mid-line

ابعاد هندسی و مشخصات خواص مادی ورق مشابه حالت ورق مربعی بخش ۳-۲ است. منحنی خیز ورق تحت بارگذاری رطوبت ذکر شده در دو راستای میانی ورق در شکل ۹ نشان داده شده است.

مقایسه شکل ۹ و شکل ۴.الف هم تغییر کلی شکل خیز ورق و هم مقادیر آن را در حالت بارگذاری رطوبتی نامتقارن با حالت ورق تحت شرایط رطوبتی متقارن $C_b = C_t = 1\%$ را نشان می‌دهد. خصوصا مقدار خیز ورق در حالت پایا نسبت به حالت متقارن افزایش قابل توجهی را نشان می‌دهد. اما نسبت خیز ورق در حالت گذرا $t/t_{Sat} = 0.1$ نسبت به حالت پایا در مقایسه با حالت متقارن، کاهش یافته است. مقدار خیز ورق در حالت نامتقارن $C_t = 0\%$ و $C_b = 2\%$ تقریبا قرینه حالت بررسی شده است اما به علت لایه‌چینی نامتقارن [0/45/−45/90] اندازه مقادیر خیز بیشینه به مقدار کمی متفاوت است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله خیز ورق مرکب چندلایه نامتقارن تحت شرایط نم‌گرمایی پایا و گذرا بررسی شد. با توجه به نفوذ بسیار آهسته رطوبت در مواد مرکب با زمینه پلیمری، معادلات به صورت شبه‌استاتیکی و بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمد. صحه‌گذاری معادلات و روش حل با مقایسه خیز ورق تحت شرایط رطوبت پایا با مطالعات منتشر شده پیشین، انجام شد. سپس اثر عوامل مختلف بر خیز ورق با حل مثال‌های مختلف بررسی شد. با افزایش نسبت طول به عرض ورق مشاهده شد که شکل کلی خیز ورق نسبت به حالت مربعی تغییر یافته و خیز حالت نم‌گرمایی در مقایسه با خیز مکانیکی افزایش قابل توجهی نشان می‌دهد. با تغییر ضخامت ورق مشاهده شد که خیز مکانیکی بیشینه نسبت عکس با h^3 دارد، اما خیز بیشینه بار نم‌گرمایی نسبت عکس با h دارد. بنابراین برای ورق‌های نازک، تاثیر بار مکانیکی بر خیز ورق در مقایسه با بار نم‌گرمایی افزایش می‌یابد. مشاهده شد که شرایط تکیه‌گاهی اثر قاطعی بر شکل خیز ورق تحت بارگذاری‌های مختلف داشته و اثرات آن در حالت بارگذاری حرارتی و رطوبتی، موثرتر و پیچیده‌تر است. هم‌چنین نسبت خیز نم‌گرمایی به خیز مکانیکی کاملا به شرایط تکیه‌گاهی وابسته است. بررسی شش نوع لایه‌چینی نامتقارن نشان داد که نوع لایه‌چینی بر روی پاسخ نم‌گرمایی عموما موثرتر است. برای مثال اختلاف بیشینه خیز مکانیکی در لایه چینی متعامد پادمتقارن [0/90/0/90] و لایه‌چینی زاویه‌ای [0/30/60/90] حدود ۸۰٪ است، در حالیکه تحت بار رطوبتی پایا، اختلاف بیشینه خیز به ۳۰۰٪ می‌رسد. بررسی حالت بارگذاری رطوبتی نامتقارن، شدت رطوبت متفاوت در بالا و پایین ورق، نشان دهنده وابستگی شکل کلی خیز ورق در شرایط رطوبتی به نوع بارگذاری رطوبتی است. در حالت شدت رطوبت یکسان در بالا و پایین ورق، خیز

ناشی از بار رطوبتی پس از زمان $t_{sat}/10$ ، بزرگتر از نیمی از خیز زمان اشباع رطوبتی است که اهمیت تحلیل گذرا در بار رطوبتی را نشان می‌دهد. اما در حالت بار رطوبت نامتقارن، نسبت خیز حالت گذرا نسبت به حالت پایا کاهش یافت.

پیوست

عناصر ماتریس سفتی و نیرو در معادلات (۱۶) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$K_{pq}^{uu}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{11}\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,x}^1+A_{16}\left(\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,y}^1+\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,x}^1\right)+A_{66}\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,y}^1\right]dydx$$

$$K_{pq}^{uv}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{12}\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,y}^2+A_{16}\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,x}^2+A_{26}\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,y}^2+A_{66}\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,x}^2\right]dydx$$

$$K_{pq}^{u\psi_x}=\int_0^a\int_0^b\left[B_{11}\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,x}^4+B_{16}\left(\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,y}^4+\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,x}^4\right)+B_{66}\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,y}^4\right]dydx$$

$$K_{pq}^{u\psi_y}=\int_0^a\int_0^b\left[B_{12}\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,y}^5+B_{16}\varphi_{ij,x}^1\varphi_{rs,x}^5+B_{26}\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,y}^5+B_{66}\varphi_{ij,y}^1\varphi_{rs,x}^5\right]dydx$$

$$K_{pq}^{vv}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{22}\varphi_{ij,y}^2\varphi_{rs,y}^2+A_{26}\left(\varphi_{ij,y}^2\varphi_{rs,x}^2+\varphi_{ij,x}^2\varphi_{rs,y}^2\right)+A_{66}\varphi_{ij,x}^2\varphi_{rs,x}^2\right]dydx$$

$$K_{pq}^{v\psi_x}=\int_0^a\int_0^b\left[B_{12}\varphi_{ij,y}^2\varphi_{rs,x}^4+B_{16}\varphi_{ij,x}^2\varphi_{rs,x}^4+B_{26}\varphi_{ij,y}^2\varphi_{rs,y}^4+B_{66}\varphi_{ij,x}^2\varphi_{rs,y}^4\right]dydx$$

$$K_{pq}^{v\psi_y}=\int_0^a\int_0^b\left[B_{22}\varphi_{ij,y}^2\varphi_{rs,y}^5+B_{26}\left(\varphi_{ij,y}^2\varphi_{rs,x}^5+\varphi_{ij,x}^2\varphi_{rs,y}^5\right)+B_{66}\varphi_{ij,x}^2\varphi_{rs,x}^5\right]dydx$$

$$K_{pq}^{ww}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{44}\varphi_{ij,y}^3\varphi_{rs,y}^3+A_{45}\left(\varphi_{ij,x}^3\varphi_{rs,y}^3+\varphi_{ij,y}^3\varphi_{rs,x}^3\right)+A_{55}\varphi_{ij,x}^3\varphi_{rs,x}^3\right]dydx$$

$$K_{pq}^{w\psi_x}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{45}\varphi_{ij,y}^3\varphi_{rs}^4+A_{55}\varphi_{ij,x}^3\varphi_{rs}^4\right]dydx$$

$$K_{pq}^{w\psi_y}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{44}\varphi_{ij,y}^3\varphi_{rs}^5+A_{45}\varphi_{ij,x}^3\varphi_{rs}^5\right]dydx$$

$$K_{pq}^{\psi_x\psi_x}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{55}\varphi_{ij}^4\varphi_{rs}^4+D_{11}\varphi_{ij,x}^4\varphi_{rs,x}^4+D_{16}\left(\varphi_{ij,x}^4\varphi_{rs,y}^4+\varphi_{ij,y}^4\varphi_{rs,x}^4\right)+D_{66}\varphi_{ij,y}^4\varphi_{rs,y}^4\right]dydx$$

$$K_{pq}^{\psi_x\psi_y}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{45}\varphi_{ij}^4\varphi_{rs}^5+D_{12}\varphi_{ij,x}^4\varphi_{rs,y}^5+D_{16}\varphi_{ij,x}^4\varphi_{rs,x}^5+D_{26}\varphi_{ij,y}^4\varphi_{rs,y}^5+D_{66}\varphi_{ij,y}^4\varphi_{rs,x}^5\right]dydx$$

$$K_{pq}^{\psi_y\psi_y}=\int_0^a\int_0^b\left[A_{44}\varphi_{ij}^5\varphi_{rs}^5+D_{66}\varphi_{ij,x}^5\varphi_{rs,x}^5+D_{26}\left(\varphi_{ij,x}^5\varphi_{rs,y}^5+\varphi_{ij,y}^5\varphi_{rs,x}^5\right)+D_{22}\varphi_{ij,y}^5\varphi_{rs,y}^5\right]dydx$$

$$F_u=\int_0^a\int_0^b\left[\varphi_{ij,x}^1\left(N_x^T+N_x^c\right)+\varphi_{ij,y}^1\left(N_{xy}^T+N_{xy}^c\right)\right]dydx$$

$$F_v=\int_0^a\int_0^b\left[\varphi_{ij,x}^2\left(N_{xy}^T+N_{xy}^c\right)+\varphi_{ij,y}^2\left(N_y^T+N_y^c\right)\right]dydx$$

$$F_w=\int_0^a\int_0^b q\,\varphi_{ij}^3\,dydx$$

$$F_{\psi_x}=\int_0^a\int_0^b\left[\varphi_{ij,x}^4\left(M_x^T+M_x^c\right)+\varphi_{ij,y}^4\left(M_{xy}^T+M_{xy}^c\right)\right]dydx$$

$$F_{\psi_\theta}=\int_0^a\int_0^b\left[\varphi_{ij,x}^5\left(M_{xy}^T+M_{xy}^c\right)+\varphi_{ij,y}^5\left(M_y^T+M_y^c\right)\right]dydx$$

که در روابط بالا از تعاریف زیر استفاده شده است.

$$\varphi_{ij}^k=\phi_k(x,y)\bar{x}^{(i-1)}\bar{y}^{(j-1)}$$

$$\varphi_{rs}^k=\phi_k(x,y)\bar{x}^{(r-1)}\bar{y}^{(s-1)}\qquad k=1,2,\dots,5;\ i,r=1,2,\dots,m;\ j,s=1,2,\dots,n$$

$$p=(i-1)n+j\qquad q=(r-1)n+s$$

$$\dots_{,x}=\partial\dots/\partial x\qquad \dots_{,y}=\partial\dots/\partial y$$

بیانیه هوش مصنوعی: در تهیه این متن از ابزارهای هوش مصنوعی استفاده نشده است.

تاییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیرایرانی منتشر نشده است.

حامی مالی: این پژوهش هیچ گونه حمایت مالی مشخصی از آژانس‌های تامین مالی در بخش‌های عمومی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

نقش و مسئولیت نویسندگان:
تارا محمودی: بررسی و تحقیق، تحلیل محاسباتی، تصویرسازی، نگارش پیش‌نویس.
علی‌محمد باغستانی: ایده‌پردازی، مدیریت پژوهش، تحلیل محاسباتی و تایید نتایج، تصویرسازی، نگارش پیش‌نویس، بازبینی و ویرایش.

تعارض منافع: این مقاله مستخرج از پایان‌نامه کارشناسی ارشد نویسنده اول به راهنمایی نویسنده دوم است و هیچ تعارض منافعی برای اظهارنظر وجود ندارد.

منابع

[1] Y. J. Weitsman, Fluid Effects in Polymers and Polymeric Composites. Springer, 2011.

[2] C. H. Shen and G. S. Springer, "Moisture absorption and desorption of composite materials," Journal of Composite Materials, vol. 10, no. 1, pp. 2-20, 1976. doi: 10.1177/002199837601000101.

[3] M. Gholami, H. Afrasiab, A. M. Baghestani, and A. Fathi, "Hygrothermal degradation of elastic properties of fiber reinforced composites: A micro-scale finite element analysis," Composite Structures, vol. 266, p. 113819, 2021. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113819.

[4] G. S. Springer, "Environmental effects," in Reference Book for Composites Technology-2, S. M. Lee, Ed., Technomic Publishing Co., Inc., pp. 17-36, 1989.

[5] M. Gholami, H. Afrasiab, A. M. Baghestani, and A. Fathi, "Mechanical and failure analysis of thick composites under hygrothermal conditions by a novel coupled hygro-thermo-mechanical multiscale algorithm," Composites Science and Technology, vol. 230, p. 109773, 2022. doi: 10.1016/j.compscitech.2022.109773.

[6] A. Garg and H. D. Chalak, "A review on analysis of laminated composite and sandwich structures under hygrothermal conditions," Thin-Walled Structures, vol. 142, pp. 205-226, 2019. doi: 10.1016/j.tws.2019.05.005.

[7] B. Boukert, A. Benkhedda, E. B. Adda, and M. Khodjet-Kesba, "Hygrothermal stresses analysis of thick composite plates using high order theory under a Fick concentration distribution," Procedia Structural Integrity, vol. 17, pp. 37-43, 2019. doi: 10.1016/j.prostr.2019.08.006.

[8] N. Garg, K. Rahul Sanjay, R. Sahoo, P. R. Maiti, and B. N. Singh, "Assessment of inverse hyperbolic zigzag theory for hygro-thermomechanical analysis of laminated composite and sandwich plates," Journal of Aerospace Engineering, vol. 33, no. 5, p. 04020060, 2020. doi: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0001177.

[9] M. Sobhy and A. F. Radwan, "Influence of a 2D magnetic field on hygrothermal bending of sandwich CNTs-reinforced microplates with viscoelastic core embedded in a viscoelastic medium," Acta Mechanica, vol. 231, no. 1, pp. 71-99, 2020. doi: 10.1007/s00707-019-02531-7.

[10] N. S. Naik and A. S. Sayyad, "Analysis of laminated plates subjected to mechanical and hygrothermal environmental loads using fifth-order shear and normal deformation theory," International Journal of Applied Mechanics, vol. 12, no. 03, p. 2050028, 2020. doi: 10.1142/S1758825120500283.

[11] G. Tocci Monaco, N. Fantuzzi, F. Fabbrocino, and R. Luciano, "Semi-analytical static analysis of nonlocal strain gradient laminated composite nanoplates in hygrothermal environment," Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, vol. 43, no. 5, p. 274, 2021. doi: 10.1007/s40430-021-02992-9.

[12] N. S. Naik and A. S. Sayyad, "Higher-order displacement model for cylindrical bending of laminated and sandwich plates subjected to environmental loads," Mechanics of Advanced Composite Structures, vol. 8, no. 1, pp. 185-201, 2021. doi: 10.22075/macs.2020.20242.1253.

[13] A. Garg and H. D. Chalak, "Bending analysis of laminated sandwich plates under hygrothermal loadings," Materials Today: Proceedings, vol. 42, pp. 626-630, 2021. doi: 10.1016/j.matpr.2020.11.045.

[14] A. Gupta, S. Verma, and A. Ghosh, "Static and dynamic NURBS-based isogeometric analysis of composite plates under hygrothermal environment," Composite Structures, vol. 284, p. 115083, 2022. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.115083.

[15] M. C. Maurya, S. M. Jawaid, and A. Chakrabarti, "Response of agglomerated SWCNT reinforced nanocomposite plate under Hygro-thermal loading," Mechanics of Advanced Composite Structures, vol. 11, no. 1, pp. 11-40, 2024. doi: 10.22075/macs.2023.29697.1472.

[16] N. Namazinia, A. Alibeigloo, and M. Karimiasl, "Free vibration and static analysis of sandwich composite plate with auxetic core and GPLRC facing sheets in hygrothermal environment," Forces in Mechanics, vol. 15, p. 100264, 2024. doi: 10.1016/j.finmec.2024.100264.

[17] M. Sobhy and A. F. Radwan, "Levy solution and state-space approach for hygro-thermo-magnetic bending of a cross-ply laminated plate on Kerr foundation under various loadings," Journal of Composite Materials, vol. 59, no. 1, pp. 3-28, 2025. doi: 10.1177/00219983241289492.

[18] L. L. Xu, C. P. Chen, and Y. F. Zheng, "Nonlinear bending responses of magneto-electro-elastic laminated nanoplates with flexomagnetoelectric effect in hygrothermal environments," Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 33, no. 1, p. 2458775, 2026. doi: 10.1080/15376494.2025.2458775.

[19] J. N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press, 2003.

[20] Y. J. Weitsman, "Effects of fluids on polymeric composites. A review," Government Research Announcements and Index (USA), vol. 100, 1994.

[21] A. C. Loos and G. S. Springer, "Moisture absorption of graphite-epoxy composites immersed in liquids and in humid air," Journal of Composite Materials, vol. 13, no. 2, pp. 131-147, 1979. doi: 10.1177/002199837901300205.

[22] A. Firouzian-Nejad, S. Ziaei-Rad, M. Moore, A modified shape function for calculating stable configurations and natural frequencies of bi-stable [0/90] composite laminates, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 4, pp. 119-128, 2016 (In Persian).

[23] J. R. Vinson and R. L. Sierakowski, The behavior of structures composed of composite materials. Springer, 2006. doi: 10.1007/0-306-48414-5.

[24] K. Khorshidi, M. Balali, A. A. Ghadimi, Control forced vibrations of laminated composite rectangular plate resting on linear line support, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 9, pp. 95-104, 2015 (In Persian).

[25] Y. Kumar, "The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review," Journal of Vibration and Control, vol. 24, no. 7, pp. 1205-1227, 2018. doi: 10.1177/1077546317694724.
[26] K. M. Fard and A. M. Baghestani, "Free vibration analysis of deep doubly curved open shells using the Ritz method," Aerospace Science and Technology, vol. 69, pp. 136-148, 2017. doi: 10.1016/j.ast.2017.06.021.
[27] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions. Dover Publications, 1965.
[28] S. M. Ostadzadeh, A. M. Baghestani, H. Afrasiab, and M. Gholami, "Quasi-static bending analysis of composite laminated cylindrical panels under hygrothermal conditions," Thin-Walled Structures, vol. 203, p. 112227, 2024. doi: 10.1016/j.tws.2024.112227.
[29] D. J. Boll, W. D. Bascom, and B. Motiee, "Moisture absorption by structural epoxy-matrix carbon-fiber composites," Composites Science and Technology, vol. 24, no. 4, pp. 253-273, 1985. doi: 10.1016/0266-3538(85)90025-9.
[30] J. Crank, The mathematics of diffusion. Clarendon Press, 1979.
[31] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, and H. Feshbach, "Conduction of heat in solids," Physics Today, vol. 15, no. 11, pp. 74-76, 1962. doi: 10.1063/1.3057871.
[32] B. P. Patel, M. Ganapathi, and D. P. Makhecha, "Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory," Composite Structures, vol. 56, no. 1, pp. 25-34, 2002. doi: 10.1016/S0263-8223(01)00182-9.
[33] P. Vaddadi, T. Nakamura, and R. P. Singh, "Transient hygrothermal stresses in fiber reinforced composites: a heterogeneous characterization approach," Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, vol. 34, no. 8, pp. 719-730, 2003. doi: 10.1016/S1359-835X(03)00135-0.
[34] C. C. Chamis, "Simplified composite micromechanics equations of hygral, thermal, and mechanical properties," SAMPE Quarterly, vol. 15, no. 3, pp. 14-23, 1984.
[35] S. W. Tsai, "Double–Double: New family of composite laminates," AIAA Journal, vol. 59, no. 11, pp. 4293-4305, 2021.