



# تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی با استفاده از تئوری اغتشاشات

رهام رفیعی

استادیار گروه هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران  
Roham.Rafiee@ut.ac.ir ، ۱۴۳۳۵۵۹۴۱ کدپستی

**چکیده-** هدف اصلی از این تحقیق، بررسی ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی تک جداره می‌باشد. برای مدل‌سازی، ساختار مشبک نانولوله کربنی با یک سازه پیوسته معادل با استفاده از مکانیک محیط پیوسته نانومقیاس جایگزین شده است. سپس معادلات ناظم بر ارتعاشات توسعه یافته، کشش صفحه میانی تحت خمش به عنوان عامل غیرخطی هندسی در معادلات لحاظ شده است. برای حل معادله غیرخطی حاصل، از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. پاسخ فرکانسی سیستم در حالات مختلف ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری در دو حالت تشدید اولیه و ثانویه بررسی شده است. نتایج حاصل از حل مبتنی بر روش اغتشاشات تطابق خوبی با انتگرال‌گیری عددی نشان می‌دهد. نتایج حاکی از این واقعیت هستند که نانولوله کربن رفتار سخت شونده را از خود نشان می‌دهد. همچنین، پدیده پرش و تقسیم شدن به دو شاخه غیرخطی، در پاسخ‌ها مشاهده می‌شود. **کلیدواژگان:** نانولوله کربنی، تحلیل ارتعاشی غیرخطی، تئوری اغتشاشات.

## Analysis of nonlinear vibrations of a carbon nanotube using perturbation technique

R. Rafiee

Assist. Prof., Aerospace Dept, Faculty of New Sciences & Tech., Tehran Univ., Tehran, Iran  
P. Code 1439955941, Tehran, Iran. Roham.Rafiee@ut.ac.ir

**Abstract-** The main objective of this research is to study the nonlinear vibrations of a single walled carbon nanotube. For this purpose, the lattice structure of carbon nanotube is replaced with a continuum structure using nanoscale continuum mechanics. Firstly, each carbon-carbon bond is replaced with an equivalent beam element and then the whole discrete structure of carbon nanotube is replaced with a virtual continuum medium representing hollow cylinder. Then, governing equations for vibrations is obtained taking into account geometric nonlinearity arisen from stretching of a mid-plane due to bending. Perturbation technique is used to analyze the nonlinear vibrations of carbon nanotubes. Frequency responses of carbon nanotubes for free vibrations and force vibrations in both primary and secondary resonance cases are studied. Obtained results are in a very good agreement with numerical integration technique. The results imply on hardening behavior of carbon nanotube. Moreover, nonlinear bifurcation and nonlinear jump phenomena are observed.

**Keywords:** Carbon Nanotube, Nonlinear Vibration Analysis, Perturbation Technique.

## ۱- مقدمه

خواص منحصر به فرد مکانیکی، حرارتی و الکتریکی نانولوله‌های کربنی، باعث شده است تا این مواد به گزینه بسیار مناسبی برای مقاوم سازی پلیمرها و تشکیل نانوکامپوزیت‌های پلیمری تبدیل شوند. نتایج تحقیقات آزمایشگاهی حاکی از این واقعیت هستند که تنها با افزودن ۱٪ وزنی نانولوله کربن به رزین پلی‌استر، مدول یانگ کامپوزیت حاصل به میزان ۳۵٪ تا ۴۲٪ رشد نشان می‌دهد [۱]. با توجه به پیچیدگی روش‌های آزمایشگاهی در مقیاس نانو، پیش‌بینی خواص مکانیکی کامپوزیت‌های حاوی نانولوله کربن با تکیه بر روش‌های مدل‌سازی جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است. به طور کلی روش‌های مدل‌سازی خواص مکانیکی نانوکامپوزیت‌ها به روش‌های مدل‌سازی اتمی و مدل‌سازی محیط پیوسته از نوع تحلیلی و یا عددی تقسیم می‌شود [۲]. حجم بالای محاسبات روش‌های مدل‌سازی اتمی و محدود بودن آنها به طول بسیار کوچک و زمان بسیار کوتاه، باعث شده است تا استفاده از روش‌های مدل‌سازی محیط پیوسته رونق خاصی پیدا کنند.

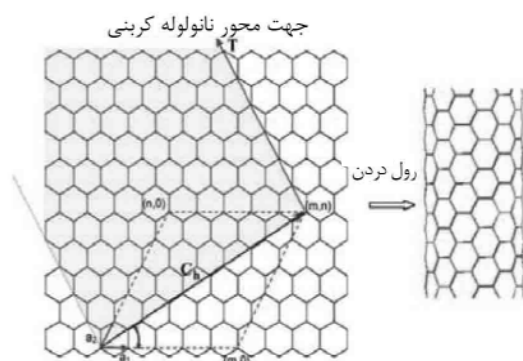
مطالعه رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی، نقش بسیار مهمی در توسعه کاربرد آنها در حوزه وسیعی از تجهیزات غیرمکانیکی همانند نوسان‌سازها، ساعتها، تجهیزات پرتوافشان و به خصوص حسگرها دارد [۳]. تحلیل قابلیت اطمینان تجهیزات نانومقیاس مبتنی بر نانولوله کربنی، نیازمند شناسایی پاسخ نانولوله به بارهای مکانیکی وارده می‌باشد. با توجه به این امر که کاربرد بالقوه نانولوله کربنی در بسیار از زمینه‌های موجود، نیازمند فهم دقیق رفتار مکانیکی آن می‌باشد، مطالعه پاسخ مکانیکی نانولوله کربنی اهمیت خاصی پیدا کرده است. با توجه به این امر که انجام آزمایش در مقیاس نانو بسیار موضوع چالشی و پیچیده‌ای می‌باشد، مدل‌سازی تئوری برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی نانولوله کربنی از اهمیت ویژه‌ای در این مسیر برخوردار می‌گردد. در سالهای اخیر استفاده از نانولوله کربنی در حسگرهای شیمیایی و مکانیکی رونق خاصی پیدا کرده است. قاعده اصلی عملکرد حسگرها بر اساس رخداد پدیده تشدید در فرکانس طبیعی نانولوله کربنی در اثر اعمال بارگذاری خارجی می‌باشد. لذا مطالعه رفتار ارتعاشی نانولوله کربنی در حالت تشدید در حوزه توسعه کاربرد آنها در حسگرها حائز اهمیت می‌باشد. تاکنون مطالعات مختلفی به منظور تحلیل ارتعاشی

نانولوله کربنی به صورت منفرد صورت گرفته است [۴-۱۰] که در آنها از روش‌های مختلف دینامیک مولکولی و یا المان محدود مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته نانومقیاس برای تحلیل رفتار ارتعاشی نانولوله کربنی استفاده شده است. در این مقاله به منظور بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله کربنی تک‌جداره، معادلات ناظم بر ارتعاشات توسعه داده می‌شود و سپس این معادلات با استفاده از روش تئوری اغتشاشات مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

## ۲- ساختار هندسی نانولوله کربنی

نانولوله کربنی تک‌جداره به صورت مجازی از رول کردن یک صفحه گرافن و تشکیل یک استوانه توخالی، شکل می‌گیرد. ورق گرافن شبکه‌ای لانه زنبوری مانند و متشکل از اتمهای کربن است که در آن هر اتم کربن با سه اتم مجاور تشکیل پیوند کووالانت داده است. ساختار اتمی نانولوله توسط بردار و زاویه کایرال تعریف می‌شود که در شکل ۱ نشان داده شده است.

زوج مرتب  $(n,m)$  معرف شاخص کایرال نانولوله می‌باشد. چنانچه ورق گرافن با شاخص کایرال  $(n,0)$  رول شود، نانولوله کربنی از نوع زیگزاگ بدست می‌آید و اگر با شاخص کایرال  $(n,n)$  رول شود، نانولوله کربنی موسوم به آرمچر حاصل می‌شود. به سایر حالتها نیز که با شاخص کایرال  $(n,m)$  که  $n \neq m$  است شناسایی می‌شوند، لفظ کایرال اطلاق می‌شود. زاویه کایرال بین ۰ تا ۳۰ درجه تغییر می‌کند و هر حالت دیگری از بردار کایرال که بین این دو حالت قرار گیرد، اشاره به پیکربندی کایرال دارد [۱].



شکل ۱ نمایش شماتیک نانولوله کربنی

یا (۳) محاسبه می‌شود، جایگزین می‌گردد. چگالی نانولوله کربنی نیز با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۵]:

$$\rho_{CNT} = \frac{16\pi M_w}{\pi N_A R_{ne}^2} \quad (4)$$

که در آن  $M_w$  جرم اتمی کربن،  $N_A$  عدد آووگادرو و معادل با  $10^{23} \times 0.22/6$  و  $R_{ne}$  شعاع موثر نانولوله کربنی و  $N$  معرف تعداد اتم کربن در واحد طول نانولوله کربن می‌باشد که توسط روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_{ne} = \frac{D_{CNT}}{2} + 0.34 \times 10^{-9} \quad (5)$$

$$N = \frac{4\sqrt{n^2 + mn + m^2}}{3L} \quad (6)$$

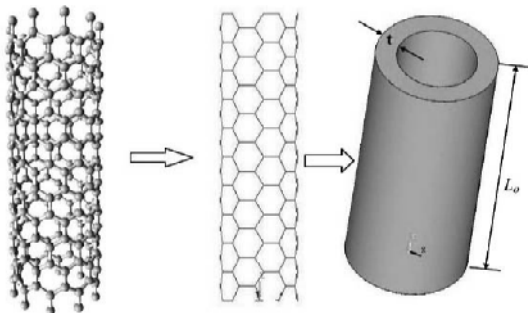
بنابراین با استفاده از مجموعه روابط (۲،۱) یا (۴،۳)، سازه قاب مانند با یک استوانه توخالی با چگالی و مدول معادل جایگزین می‌شود. فرآیند مدل‌سازی هر جداره نانولوله کربنی به صورت شماتیک در شکل ۲ نمایش داده شده است.

در این مقاله به‌عنوان مطالعه موردی نانولوله کربنی از نوع (۱۰، ۱۰) انتخاب شده و بررسی می‌شود. خواص فیزیکی و مکانیکی نانولوله مذکور در جدول ۲ آورده شده است.

#### ۴- معادلات ناظم بر تحلیل دینامیکی

با در نظر گرفتن تئوری تیر اوپلر-برنولی، معادله حرکت در حالت ارتعاشات اجباری با در نظر گرفتن عامل غیرخطی هندسی به صورت زیر شکل می‌یابد [۱۷]:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F \cos(\Omega t) \quad (7)$$



شکل ۲ طرح‌واره مراحل جایگزینی ساختار مولکولی نانولوله کربنی با یک استوانه توخالی [۱۶]

قطر نانولوله کربنی که وابسته به شاخص کایرال آن می‌باشد، با استفاده از رابطه (۱) محاسبه می‌شود [۱۱]:

$$D_{CNT} = \frac{\sqrt{3}L}{\pi} \sqrt{(n^2 + m^2 + nm)} \quad (1)$$

که در آن،  $L$  معرف طول پیوند کربن-کربن و معادل با  $0.142$  نانومتر در نظر گرفته می‌شود. در نانولوله کربنی هر اتم کربن با سه اتم کربن مجاور خود پیوند کوالاننت برقرار می‌کند.

#### ۳- مدل‌سازی نانولوله کربنی

در ابتدا پیوند کربن-کربن در ساختار مولکولی نانولوله کربنی با المان تیر معادل که خواص آن از مکانیک سازه‌ای توسعه داده شده توسط لی و چو [۱۲] بدست آمده‌است، جایگزین می‌شود. در این روش بر اساس تشابه بین انرژی پتانسیل مولکولی با انرژی کرنشی تیر معادل، خواص المان تیر معادل بدست می‌آید [۱۳، ۱۲]. لذا با این روش ساختار مشبک مولکولی نانولوله کربنی با سازه قاب مانند پیوسته جایگزین می‌شود. مدول الاستیک نانولوله کربنی نوع آرمچیر و زیگزاگ که به شیوه مذکور مدل شود، با استفاده از فرمول شکریه-رفیعی [۱۴] طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E_Z = \frac{16\sqrt{3}}{t} \cdot \frac{k_r \cdot k_\theta \left( 3 - \cos \frac{\pi}{n} \right)}{5k_r L^2 + 108k_\theta - (3k_r L^2 + 36k_\theta) \cos \frac{\pi}{n}} \quad (2)$$

$$E_A = \frac{16}{t\sqrt{3}} \cdot \frac{k_r \cdot k_\theta \left( 17 + \cos \frac{\pi}{n} \right)}{7k_r L^2 + 204k_\theta + (12k_\theta - k_r L^2) \cos \frac{\pi}{n}} \quad (3)$$

که در آن  $n$  شاخص کایرال،  $L$  طول پیوند کربن-کربن و معادل با  $0.142$  نانومتر و  $t$  ضخامت نانولوله کربن و معادل با  $0.34$  نانومتر است. ثابتهای مولکولی استفاده شده در روابط (۲) و (۳) در جدول ۱ درج شده است.

جدول ۱ ثوابت مولکولی مورد استفاده [۱۳]

|            |                       |
|------------|-----------------------|
| $k_r$      | 6.52e-7 [N.nm-1]      |
| $k_\theta$ | 8.76e-10 [N.nm.rad-2] |

بنابراین، نانولوله کربنی با استوانه‌ای توخالی به ضخامت  $0.34$  نانومتر که قطر آن از رابطه (۱) و مدول آن از رابطه (۲)

می‌شود. با توجه به ماهیت غیرخطی معادله حاکم بر ارتعاشات نانولوله کربنی، از روش مقیاس زمانی چندگانه<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. مقادیر مورد نیاز برای محاسبه مجموعه ثوابت بیان شده در روابط (۱۳) در جدول ۲ معرفی شده‌اند. طول نانولوله کربنی نیز معادل ۱۰۰ نانومتر در نظر گرفته شده است.

برای امکان اعمال روش مقیاس زمانی چندگانه، معادله (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U + \varepsilon \alpha U^3 = 0 \quad (14)$$

که در آن:

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho AL^4} ; \quad \hat{\alpha} = \frac{\pi^4 E}{4\rho L^4} ; \quad \hat{\alpha} = \varepsilon \alpha \quad (15)$$

در روابط (۱۴) و (۱۵)،  $\varepsilon$  یک پارامتر کوچک و مثبت می‌باشد. در روش مقیاس زمانی چندگانه، مقیاس‌های زمان به صورت  $T_0 = t$  و  $T_1 = \varepsilon t$  که به ترتیب معرف مقیاس زمانی سریع و مقیاس زمانی کند می‌باشد، معرفی می‌شود. در این روش، پاسخ معادله (۱۴) به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$U = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (17)$$

با جایگزینی روابط (۱۷) در رابطه (۱۴)، و مساوی قراردادن توانهای یکسان  $\varepsilon$  در دو طرف معادله، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$O(\varepsilon^0): \quad D_0^2 u_0^2 + \omega_0^2 u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (18)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad D_0^2 u_1^2 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3 \quad (19)$$

با جایگذاری معادله (۱۸) در معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$D_0^2 u_1^2 + \omega_0^2 u_1 = -\left[ 2i\omega_0 (A') + 3\alpha A^2 \bar{A} \right] e^{i\omega_0 T_0} - \alpha A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + c.c. \quad (20)$$

جدول ۲ خواص فیزیکی و مکانیکی دیواره‌های نانولوله دو جداره

|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| چگالی ( $\text{kg/m}^2$ )            | ۱/۴۴  |
| مدول الاستیک (TPa)                   | ۱/۰۳۸ |
| ضخامت (nm)                           | ۰/۳۴  |
| قطر (nm)                             | ۱/۳۵۶ |
| ممان اینرسی مقطع - ( $\text{nm}^4$ ) | ۰/۱۷  |
| سطح مقطع ( $\text{nm}^2$ )           | ۰/۷۲  |

که در آن از اثر میرایی صرف‌نظر شده‌است. در معادله (۷) اثر کشش صفحه وسط تیر به علت کشش ناشی از خمش در قالب نیروی  $N$  که تولید کننده ترم غیرخطی معادله (۷) می‌باشد، در نظر گرفته شده است. نیروی  $N$  توسط رابطه (۸) توصیف می‌شود:

$$N = \frac{AE}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \quad (8)$$

برای اعمال شرایط مرزی، فرض می‌کنیم که هر دو طرف نانولوله کربنی تکیه‌گاه ساده باشد. لذا شرایط زیر به مسأله حاکم می‌شود:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{@x=0,L} = 0 \quad (9)$$

برای حل معادله (۷) با شرط مرزی (۹)، با استفاده از جداسازی متغیرها، تغییرمکان به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W = X(x) U(t) \quad (10)$$

که در آن  $X$  شکل مود اول ارتعاشی می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود تا شرایط مرزی ذکر شده در رابطه (۱۱) را تأمین کند:

$$X(x) = \sin(\pi x / L) \quad (11)$$

با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۸) در معادله (۷) و استفاده از شرط تعامد شکل‌مدها، معادلات فضای زمان به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\ddot{U} + a_1 U + a_2 U^3 = F \cos(\Omega t) \quad (12)$$

که ثابتهای آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_1 = \frac{\pi^4 EI}{\rho AL^4} ; \quad a_2 = \frac{\pi^4 E}{4\rho L^4} \quad (13)$$

## ۵- تحلیل ارتعاشات آزاد

در ابتدا با صرف‌نظر کردن از تحریک خارجی معرفی شده در رابطه (۱۲)، حالت ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی بررسی

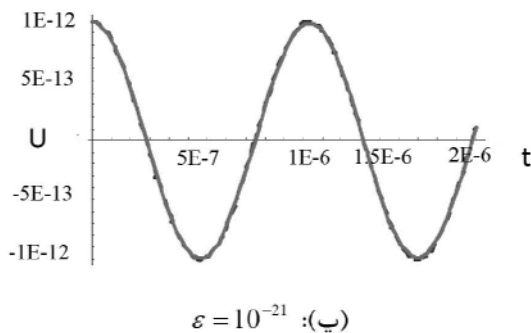
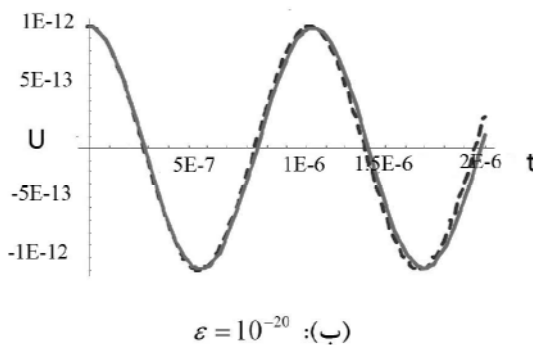
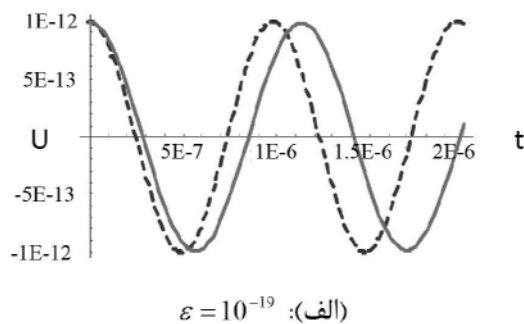
با جایگذاری پاسخ معادله (۱۸) در معادله (۲۶) خواهیم داشت:

$$D_0 u_1^2 + \omega_0^2 u_1 = - \left[ 2i \omega_0 (A') + 3\alpha A^2 \bar{A} \right] e^{i\omega_0 T_0} - \alpha A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} k e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + c.c. \quad (27)$$

شرط حل پذیری معادله (۲۷) به صورت زیر می باشد:

$$\left[ 2i \omega_0 (A') + 3\alpha A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_1} \right] = 0 \quad (28)$$

با فرض  $A = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\beta(T_1)}$  و جایگذاری آن در رابطه (۲۸)، رابطه (۲۹) بدست می آید.



شکل ۳ نمودار جابجایی بر حسب زمان (خط پرنگ: جواب حل عددی، خط ناپیوسته: جواب حل روش اغتشاشات)

شرط حل پذیری معادله (۲۰)، ممانعت از شکل گیری ترم بسیار بزرگ پاسخ زمانی<sup>۱</sup> است. لذا می بایستی ضریب ترم  $e^{i\omega_0 T_0}$  در معادله (۲۰) صفر اتخاذ شود تا ترم  $t \cos(\omega_0 t)$  پاسخ ظاهر نشود. بنابراین:

$$\left[ 2i \omega_0 (A') + 3\alpha A^2 \bar{A} \right] = 0 \quad (29)$$

با فرض  $A = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\beta(T_1)}$  و جایگذاری آن در رابطه (۲۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a' = 0 \\ a\beta' = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 \end{cases} \quad (30)$$

با حل دستگاه معادلات (۳۰)، پاسخ زمانی سیستم در حالت ارتعاشات آزاد به شکل زیر بدست می آید:

$$U = a_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a_0^2 \varepsilon t \right) + O(\varepsilon). \quad (31)$$

که در آن  $a_0$  از شرایط اولیه بدست می آید. پاسخ بدست آمده توسط روش مقیاس زمانی چندگانه با انتگرال گیری عددی برای نانولوله لوله (۱۰، ۱۰) مقایسه و برای چند مقدار مختلف عامل اغتشاش ( $\varepsilon$ ) در شکل ۳ نمایش داده شده است.

شکل ۳ نشان می دهد که روش مقیاس زمانی چندگانه با انتخاب مناسب مقدار پارامتر اغتشاش، روش مناسبی برای تحلیل معادله ارتعاشی غیرخطی نانولوله کربنی می باشد.

## ۶- تحلیل ارتعاشات اجباری

### ۶-۱- تشدید اولیه<sup>۲</sup>

برای بررسی این حالت، معادله (۱۲) به صورت زیر شکل می یابد:

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U + \varepsilon \alpha U^3 = \varepsilon k \cos(\Omega t) \quad (32)$$

که در آن:

$$F = \varepsilon k \quad ; \quad \Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma \quad (33)$$

$\sigma$  پارامتر انحراف از تشدید<sup>۳</sup> می باشد. در این حالت خواهیم داشت:  $O(\varepsilon^1)$ :

$$D_0 u_1^2 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (34)$$

1. Secular Term
2. Primary Resonance
3. Detuning Parameter

$O(\varepsilon^1)$ :

$$D_0 u_1^2 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3 \quad (33)$$

با جایگذاری پاسخ معادله (32) در معادله (33) خواهیم داشت:

$$D_0 u_1^2 + \omega_0^2 u_1 = - \left[ 2i \omega_0 (A') + \frac{6\alpha A k^2}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} + 3\alpha A^2 \bar{A} \right] e^{i\omega_0 T_0} + \alpha \left\{ \begin{aligned} & A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{k^3 e^{3i\omega_0 T_0}}{8(\omega_0^2 - \Omega^2)^3} \\ & + \frac{3kA^2}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} e^{i(2\omega_0 + \Omega)T_0} \\ & + \frac{3Ak^2}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} e^{i(\omega_0 - 2\Omega)T_0} \end{aligned} \right\} - \frac{k}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left[ \frac{3k^2 \alpha}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} + 6\alpha A \bar{A} \right] e^{i\Omega T_0} + c.c. - \alpha A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} k e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + c.c. \quad (34)$$

با فرض  $A = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\beta(T_1)}$ ، شرط حل پذیری معادله (34) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a' = 0 \\ \omega_0 a \beta' = 3\alpha a \left( \frac{k^2}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} + \frac{1}{8} a^2 \right) \end{cases} \Rightarrow U = a \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{k}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (35)$$

با توجه به معادله (34)، چنانچه  $\Omega = \omega_0/3$  باشد، سیستم در حالت مافوق هارمونیک<sup>۴</sup> خواهد بود و چنانچه  $\Omega = 3\omega_0$  باشد، سیستم در حالت مادون هارمونیک<sup>۵</sup> قرار می‌گیرد. در حلت مافوق هارمونیک، با در نظر گرفتن  $3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$ ، معادله پاسخ فرکانسی به صورت رابطه (36) بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} a' = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a\beta' = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{cases} \Rightarrow U = a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\varepsilon). \quad (29)$$

معادله پاسخ فرکانسی سیستم، با تعریف  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$  و توجه به این موضوع که در حالت پاسخ حالت یکنوا<sup>۱</sup>، تغییرات مقادیر  $a$  و  $\gamma$  صفر خواهد بود ( $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ )، خواهیم داشت:

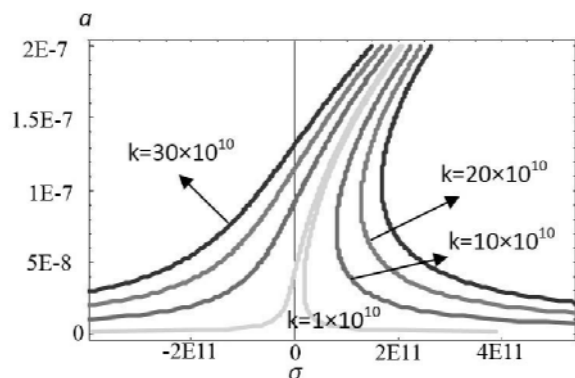
$$\left[ \left( \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{k^2}{4\omega_0^2} \quad (30)$$

در شکل ۴، تغییرات دامنه بر حسب پارامتر انحراف از تشدید در حالت یکنوا نمایش داده شده است. نمودارهای ارائه شده در شکل ۴، به وضوح به علت تمایل به سمت راست مبین پدیده سخت‌شوندگی در نانولوله کربن در ارتعاشات اجباری می‌باشند. همچنین پدیده پرش<sup>۲</sup> یا چند فرکانسه بودن در این نمودارها دیده می‌شود.

#### ۶-۲- تشدید ثانویه<sup>۳</sup>

برای بررسی حالت تشدید ثانویه، معادله (24) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U + \varepsilon \alpha U^3 = k \cos(\Omega t) \quad (31)$$



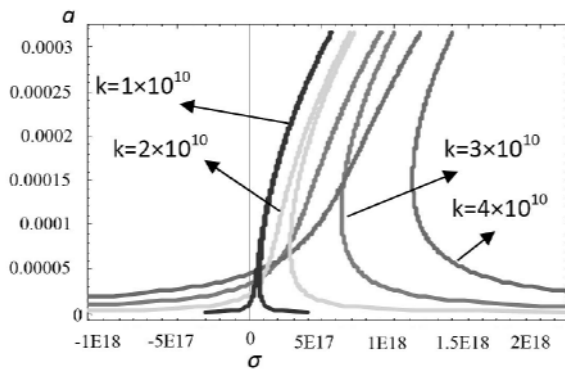
شکل ۴ تغییرات دامنه بر حسب فرکانس در حالت یکنوا

در این حالت داریم:

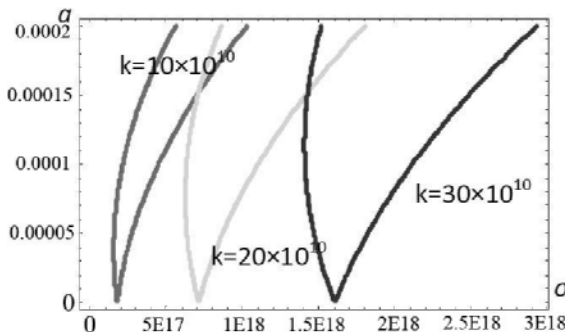
$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0): \\ D_0 u_0^2 + \omega_0^2 u_0 = k \cos(\Omega t) \\ \Rightarrow u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} \frac{k}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} e^{i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (32)$$

4. Super Harmonic  
5. Sub Harmonic

1. Steady State  
2. Jump  
3. Secondary Resonance



شکل ۵ تغییرات دامنه بر حسب فرکانس در حالت تشدید ثانویه مافوق هارمونیک



شکل ۶ تغییرات دامنه بر حسب فرکانس در حالت تشدید ثانویه مادون هارمونیک

سپس معادله ناظم بر ارتعاشات جانبی نانولوله کربنی با در نظر گرفتن کشش صفحه مرکزی به عنوان عامل ایجاد کننده ترم غیرخطی در معادلات حرکت لحاظ شده است. با استفاده از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس زمانی چندگانه معادله مربوط مورد ارزیابی قرار گرفته است و ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری در دو حالت تشدید اولیه و همچنین تشدید ثانویه بررسی شده است. پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی تک جداره، نشان دهنده رفتار سخت شونده گی نانولوله می باشد. فو و همکارانش با ارائه حل تحلیلی برای نانولوله کربنی تک جداره [۱۷]، خرسند زاده و حاج عباسی با ارزیابی معادلات ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی دو جداره به روش رانگ-کوتا [۱۸] و همچنین ژانگ و هان نیز با تحلیل ارتعاشات جانبی نانولوله کربنی دوجداره تحت بار محوری [۸] رفتار مشابهی را با آنچه در این مقاله بدست آمده است گزارش نموده اند.

$$\begin{cases} a' = -\frac{\alpha}{\omega_0} \frac{k^3}{8(\omega_0^2 - \Omega^2)^3} \sin(\gamma) \\ a\gamma' = \left( 6 - \frac{3\alpha k^2}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} \right) a - \frac{3\alpha a^3}{8\omega_0} - \frac{\alpha k^3}{8(\omega_0^2 - \Omega^2)^3} \cos(\gamma) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = a \cos(3\Omega t - \gamma) + \frac{k}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon)$$

(۳۶)

با مقایسه پاسخ معادله (۳۶) با پاسخ معادله (۲۹)، معلوم می شود که فرکانس طبیعی سیستم غیرخطی از  $\Omega$  به  $3\Omega$  تغییر یافته است. همچنین در این سیستم بر خلاف سیستم خطی، پاسخ ارتعاشات آزاد میرا نمی گردد. تغییرات دامنه بر حسب فرکانس در حالت تشدید ثانویه مافوق هارمونیک در شکل ۵ ترسیم شده است. همانطور که از شکل ۵ معلوم است، با افزایش مقدار نیروی تحریک، میزان سخت شونده گی افزایش می یابد.

در حالت مادون هارمونیک، با در نظر گرفتن  $\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma$ ، معادله پاسخ فرکانسی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} a' = -\frac{3\alpha}{8\omega_0} \frac{k}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} a^2 \sin(\gamma) \\ a\gamma' = \left( 6 - \frac{9\alpha k^2}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} \right) a - \frac{9\alpha a^3}{8\omega_0} - \frac{9\alpha k}{8(\omega_0^2 - \Omega^2)} a^2 \cos(\gamma) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = a \cos\left(\frac{\Omega}{3}t - \frac{\gamma}{3}\right) + \frac{k}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon)$$

(۳۷)

تغییرات دامنه بر حسب فرکانس در حالت تشدید ثانویه مادون هارمونیک در شکل ۶ رسم شده است.

## ۷- نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی تک جداره پرداخته شده است. در ابتدا پیوند کربن-کربن در ساختار مولکولی نانولوله کربنی با المان تیر مجازی جایگزین شده است و ساختار قاب مانند نانولوله کربنی با یک استوانه توخالی با خواص مشابه جایگزین شده است.

- [8] Zhang Y., Liu G. and Han X., "Transverse Vibrations of Double-Walled Carbon Nanotubes Under Compressive Axial Load", *Physics Letter A*, Vol. 340, 2005, pp. 258–266
- [9] Dereli G. and Ozdogan C., "Structural Stability and Energetics of Single Walled Carbon Nanotubes Under Uniaxial Strain", *Physics Review B*, Vol. 67, No.3, pp. 035416-035421.
- [10] Li C. and Chou T.-W., "Single-Walled Nanotubes as Ultrahigh Frequency Nanomechanical Resonators", *Physics Review B*, Vol. 68, 2003, pp. 073405
- [11] Thostenson E.T., Ren Z. and Chou T.-W., "Advances in the Science and Technology of Carbon Nanotubes and Their Composites: a Review", *Composite Science and Technology*, Vol. 61, 2001, pp. 1899–1912.
- [12] Li C. and Chou T.-W., "A Structural Mechanics Approach for the Analysis of Carbon Nanotubes", *International Journal of Solid Structure*, Vol. 40, 2003, pp. 2487–99.
- [13] Tserpes K.I. and Papanikos P., "Finite Element Modeling of Single-Walled Carbon Nanotubes", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 36, 2005, pp. 468–477
- [14] Shokrieh M.M. and Rafiee R., "Prediction of Young's Modulus of Graphene Sheets and Carbon Nanotubes using Nanoscale Continuum Mechanics Approach", *Materials and Design*, Vol. 31, 2010, pp. 790–795.
- [15] Pipes R.B., Frankland S.J.V., Hubert P. and Saether E., "Self-Consistent Properties of Carbon Nanotubes and Hexagonal Arrays as Composite Reinforcements", *Composites Science and Technology*, Vol. 63, 2003, pp. 1349–1358.
- [16] Kalamkarov A.L., Georgidas Rokkam S.K., Veedu V.P and Ghasemi-Nejhad M.N., "Analytical and Numerical Techniques to Predict Carbon Nanotubes Properties", *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 43, 2006, pp. 6832–6854.
- [17] Fu Y.M., Hong J.W. and Wang X.Q., "Analysis of Nonlinear Vibration for Embedded Carbon Nanotubes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, 2006, pp. 746–756.
- [18] Khosrozadeh A. and Hajabasi M.A., "Free Vibrations of Embedded Double-Walled Carbon Nanotubes Considering Nonlinear Interlayer Van Der Waals Forces", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 36, 2012, pp. 997–1007.

همچنین در پاسخ نانولوله کربنی تک‌جداره به ارتعاشات اجباری در حالت تشدید، پدیده تقسیم شدگی به دوشاخه<sup>۱</sup> و پرش غیر خطی مشاهده می‌شود. پدیده تقسیم شدگی به دو شاخه معرف ناپایداری پاسخ سیستم می‌باشد که در یک فرکانس خاص، سیستم می‌تواند دو مقدار مختلف دامنه را تجربه نماید.

نتایج بدست آمده از این تحقیق که توصیف کننده رفتار غیرخطی و سخت شونده نانولوله کربنی تک‌جداره در حالت ارتعاشات اجباری می‌باشد، می‌تواند برای توسعه کاربرد نانولوله کربنی در حسگرها و نوسان‌سازها که نانولوله کربنی پدیده تشدید را تجربه می‌نماید، مفید باشد.

## ۷- مراجع

- [1] Lau K.T., Gu C. and Hui D., "A Critical Review on Nanotube and Nanotube/Nanoclay Related Polymer Composite Materials", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 37, 2006, pp. 425–436.
- [2] Shokrieh M.M. and Rafiee R., "A Review of The Mechanical Properties of Isolated Carbon Nanotubes and Carbon Nanotube Composites", *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 2, 2010, pp. 155–172.
- [3] Gibson R.F., Ayorinde E.O. and Wen Y.-F., "Vibrations of Carbon Nanotubes and Their Composites: a Review", *Composite Science and Technology*, Vol. 67, 2007, pp. 1–28.
- [4] Sakhaee-Pour A., Ahmadian M.T. and Vafai A., "Vibrational Analysis of Single-Walled Carbon Nanotubes using Beam Element", *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, 2009, pp. 646–652.
- [5] Li C. and Chou T.-W., "Vibrational Behaviors of Multi Walled-Carbon Nanotube- Based Nanomechanical Resonators", *Applied Physics Letter*, Vol. 84, No. 1, 2004, pp. 121–123.
- [6] Sanchez-Portal D., Artacho E. and JSoler J.M., "Ab'initio Structural, Elastic and Vibrational Properties of Carbon Nanotubes", *Physics Review B*, Vol. 59, No. 19, 1999, pp. 12678–12688.
- [7] Ru C.Q., "Intrinsic Vibration of Multi Walled Carbon Nanotubes", *International Journal of Nonlinear Science Numerical Simulation*, Vol. 3, No.3-4, 2002, p. 735