http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۲ شماره ۵ دی ۱۳۹۱ ص ص ۱۲-۲۱

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۱/۲/۲۷
پذیرش ۹۱/۴/۷
ارائه در سایت ۹۱/۸/۳۰

معادلات دینامیک معکوس منیپولاتور با پایه متحرک غیرهولونومیک با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل بازگشتی

محرم حبیب نژاد کورایم[۱*]، علی محمد شافعی[۲]

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴، Hkorayem@iust.ac.ir

چکیده- هدف اصلی این مقاله استخراج سیستماتیک معادلات دینامیک معکوس یک منیپولاتور n لینکی صلب که بر روی یک پایه متحرک غیرهولونومیک قرار گرفته است، می‌باشد. به منظور اجتناب از محاسبه ضرایب لاگرانژ مرتبط با قیود غیرهولونومیک از روش گیبس-اپل به فرم بازگشتی آن استفاده شده است. به منظور مدل‌سازی دقیق این سیستم رباتیکی تأثیر کوپلینگ دینامیکی میان پایه و منیپولاتور، همچنین دو قید غیرهولونومیک مربوط به شرط عدم لغزش چرخ‌ها و شرط عدم حرکت در امتداد محور دوران چرخ‌ها در این مقاله لحاظ گردیده است. در تمامی عملیات ریاضی صورت گرفته به منظور کاهش حجم محاسبات، تنها از ماتریس‌های ۳×۳ و یا بردارهای ۱×۳ استفاده شده است. همچنین تمام عبارات دینامیکی یک بازو در سیستم مختصات مرجع محلی همان بازو بیان شده است. در پایان به منظور نشان دادن توانایی این فرمولاسیون در استخراج و حل سیستم‌ها با درجات آزادی بالا، یک منیپولاتور که دارای پنج مفصل دورانی بوده و بر روی یک پایه متحرک نصب گردیده است، مورد تحلیل دینامیکی قرار می‌گیرد.

کلیدواژگان: منیپولاتور متحرک، غیرهولونومیک، بازگشتی، گیبس-اپل.

Inverse dynamics of nonholonomic wheeled mobile robotic manipulators using recursive Gibbs-App. ell formulation

M. H. Korayem[1*], A. M. Shafei[2]

1- Prof. of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
2- PhD Student, Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
* P.O.B. 1684613114 Tehran, Iran. Hkorayem@iust.ac.ir

Abstract- The main purpose of this paper is to derive the inverse dynamic equation of motion of n-rigid robotic manipulator that mounted on a mobile platform, systematically. To avoid the Lagrange multipliers associated with the nonholonomic constraints the app. roach of Gibbs-App. ell formulation in recursive form is adopted. For modeling the system completely and precisely the dynamic interactions between the manipulator and the mobile platform as well as both nonholonomic constraints associated with the no-slipping and the no-skidding conditions are also included. In order to reduce the computational complexity, all the mathematical operations are done by only 3×3 and 3×1 matrices. Also, all dynamic characteristics of a link are expressed in the same link local coordinate system. Finally, a computational simulation for a manipulator with five revolute joints that mounted on a mobile platform is presented to show the ability of this formulation in generating the equation of motion of mobile robotic manipulators with high degree of freedom.

Keywords: Mobile Manipulator, Nonholonomic, Recursive, Gibbs-Appell.

۱- مقدمه

ربات متحرک تحت مطالعه یک منیپولاتور n لینکی است که بر روی یک پایه متحرک قرار گرفته است. این سیستم رباتیکی قادر به انجام عملیات در فضای وسیعتری نسبت به یک منیپولاتور با پایه ثابت می‌باشد. قابلیت تحرک بالای پایه به همراه چابکی منیپولاتور باعث شده تا این گونه از سیستمهای رباتیکی دارای کاربردهای بسیاری به ویژه در زمینه‌هایی چون کاوشگرهای فضایی، عملیات نجات، یافتن مین، عملیات نظامی، نگهداری و تعمیر تأسیسات هسته‌ای، کشاورزی و غیره باشند.

از آنجا که معادلات دینامیکی منیپولاتور و پایه ربات به شدت غیرخطی، غیرهولونومیک و کوپله هستند؛ استخراج و حل معادلات سینماتیکی و دینامیکی منیپولاتور با پایه متحرک کار نسبتاً پیچیده‌ای است. اگرچه تحقیقات بسیاری در زمینه منیپولاتورهای متحرک صورت پذیرفته است، بیشتر مدل‌های توسعه یافته قبلی فقط حرکت صفحه‌ای و یا تنها قیود هولونومیک حاکم بر سیستم را در نظر می‌گرفتند. طبیعی است که در این حالت مدل ارائه شده از دقت لازم برخوردار نیست. به عنوان مثال در مرجع [۱]، یک سیستم رباتیکی که برای کارهای مربوط به زیر آب طراحی شده و دارای یک منیپولاتور چند لینکی است، بررسی شد. در این وسیله، قانون بقای ممنتوم زاویه‌ای قیود غیرهولونومیکی را به سیستم تحمیل می‌کند که در مدل ارائه شده لحاظ نشده است. یک ربات همکار که در آن پایه متحرک بر روی یک سطح صفحه‌ای حرکت می‌کند توسط خطیب و همکارانش مدل‌سازی گردید [۲]. معادلات دینامیکی در این تحقیق بر اساس فرمولاسیون لاگرانژ استخراج شده است؛ اما تنها قیود هولونومیک پایه در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. هوتسمنز و دبووسکی [۳] الگوریتم کنترلی ترانهادهٔ ژاکوبین را برای یک منیپولاتور موبایل توسعه دادند؛ ولی در این الگوریتم نیز که وابسته به مدل سینماتیکی پایه می‌باشد؛ تنها قیود هولونومیک پایه لحاظ گردیده است. لیو و لویس [۴] یک مدل ساده شده برای منیپولاتور متحرک چرخدار ارائه کردند؛ ولی مدل آنها امکان اعمال بر روی منیپولاتورهای متحرک با قابلیت حرکت دورانی را ندارد.

به منظور استفاده کامل از مزایای بالقوهٔ منیپولاتورها با پایه متحرک، تحلیلگر به یک مدل دینامیکی واضح، کامل و دقیق از این دسته از سیستمهای رباتیکی نیازمند است. در نظر گرفتن تأثیر متقابل بین منیپولاتور و پایه متحرک یک مسأله مهم در مدل‌سازی دینامیکی اینگونه از سیستمها می‌باشد. واینز [۵] یک ربات تک لینکی که بر روی یک پایه متحرک قرار دارد را بررسی کرد. در این تحقیق یک تکنیک به منظور تعیین اثرات کوپلینگ دینامیکی بین پایه موبایل و منیپولاتور ارائه گردید. این تحقیق منجر به یافتن یک معیار پایداری جهت عدم واژگونی سیستم مورد نظر گردید. چن و زالزالا [۶] قیود غیرهولونومیکی را که از طبیعت پایه ناشی می‌شوند را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از فرمولاسیون نیوتن-اویلر استخراج گردید. با این وجود تمامی قیود غیرهولونومیک حاکم بر این گونه از سیستمها در مدل آنها ارائه نشده است. یاماموتو و همکارش [۷-۹] مدل دینامیکی را توسعه بیشتری داده و تمامی قیود غیرهولونومیک را در اینگونه از سیستمها در نظر گرفتند. آنها در تحقیقشان قیود را با استفاده از ضرایب لاگرانژ با معادلات دینامیکی ترکیب نمودند. با این حال، محاسبه ضرایب لاگرانژ کاری پیچیده و از لحاظ عددی غیرکارا محسوب می‌شود.

با استفاده از مکانیک لاگرانژین، قیود غیرهولونومیک و ضرایب لاگرانژ مرتبط با آن قبل از استخراج کامل معادلات دینامیکی غیر قابل حذف می‌باشند. تنها بعد از استخراج معادلات حرکت که با قیود ترکیب شده‌اند، تحلیلگر با انجام یکسری عملیات جبری پیچیده قادر به حذف ضرایب لاگرانژ می‌باشد. به منظور اجتناب از ضرایب لاگرانژ تنجوور و راجاگوپالا [۱۰] یک پایه متحرک را با استفاده از معادلات کین بررسی کردند. در این تحقیق آنها به مزایای استفاده از فرمولاسیون کین در مدل‌سازی پایه‌های متحرک و استفاده از ابزار مناسب جهت در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک اشاره نمودند. همچنین در مرجع [۱۱] یک مدل کامل برای یک منیپولاتور متحرک با استفاده از فرمولاسیون کین توسط تانر ارائه شد. در این مقاله یک دسته معادله دینامیکی، همچنین یک دسته معادله قیدی برای منیپولاتور با پایه متحرک ارائه شده است. یک روش دیگر برای اجتناب از ضرایب لاگرانژ توسط ساها [۱۲] ارائه شد. در این مقاله از مفهوم ماتریس متعامد تکامل یافته برای استخراج دینامیک مستقیم و معکوس ربات‌های سریال که دارای لینک‌های صلب می‌باشند، استفاده

شده است. موهان و ساها [۱۳] مفهوم ماتریس متعامد تکامل یافته را برای منیپولاتورها با لینک الاستیک توسعه دادند. آنها همچنین از مزایای فرمولاسیون اویلر-لاگرانژ و نیوتن-اویلر در تحقیق خود استفاده کردند.

همان گونه که در بالا اشاره شد، ترکیب پایه متحرک و منیپولاتور چند لینکی باعث پیچیدگی معادلات دینامیکی می‌گردد. بنابراین، به منظور تسریع در استخراج و حل معادلات دینامیک مستقیم و معکوس این گونه از سیستمهای رباتیکی، ارائه یک فرمولاسیون بازگشتی غیر قابل اجتناب است. در فرمولاسیون بازگشتی، از ماهیت زنجیره‌ای منیپولاتور و ارتباط سینماتیکی و دینامیکی رابطهای مجاور به منظور استخراج خودکار و سیستماتیک معادلات حرکت استفاده می‌شود. اگرچه تعداد بسیار زیادی الگوریتم بازگشتی به عنوان یک اهرم مناسب برای استخراج معادلات دینامیکی منیپولاتورها با بازوهای صلب و الاستیک ارائه شده است، ولی بیشتر این روش‌ها به منیپولاتورها با پایه ثابت محدود شده است [۱۴-۱۸]. در زمینه ربات با پایه متحرک، یو و چن [۱۹] از یک الگوریتم بازگشتی برای تولید خودکار و سیستماتیک معادلات حرکت ربات متحرک با قیود غیرهولونومیک استفاده نمودند. روش پیشنهادی، یک روش عمومی و کلی برای استخراج معادلات حرکت ربات با پایه متحرک محسوب می‌شود که در آن از اصل کار مجازی استفاده شده است. اخیراً، یک الگوریتم که بر پایه دینامیک بازگشتی نیوتن-اویلر بنا نهاده شده، توسط بویر و شوکت [۲۰] پیشنهاد شده است. همچنین در مرجع [۲۱] یک فرمولاسیون بازگشتی بر پایه روابط نیوتن-اویلر برای استخراج معادلات دینامیک مستقیم و معکوس انواع سیستمهای رباتیکی توسط خطیب ارائه گردیده است. یکی از انواع ربات‌هایی که در این تحقیق بررسی شده است، یک منیپولاتور با پایه متحرک می‌باشد. مهمترین مزیت این الگوریتم کاهش عملیات ریاضی به منظور تولید سمبولیک معادلات حرکت و حل آنها می‌باشد.

معادلات حرکت ربات با پایه متحرک با استفاده از فرمولاسیون‌های متنوعی حل شده است. به عنوان مثال با استفاده از فرمولاسیون نیوتن-اویلر می‌توان به کار لی و ژائو [۲۲]، با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ-دالامبر به مقاله چانگ [۲۳]، با استفاده از فرمولاسیون کین به تحقیق مقداری [۲۴] و با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ به مقاله کورایم و همکارانش [۲۵] اشاره نمود. معادلات گیبس-اپل یکی از اصولی است که از آن در حل دینامیک ربات‌ها بسیار کم استفاده شده است. در زمینه ربات با لینک صلب ماتا یک فرمولاسیون بازگشتی برای حل مسأله دینامیک معکوس ربات‌های صلب ارائه کرده است [۲۶]. وثوقی و همکارانش ربات‌های شبه مار را با استفاده از این فرمولاسیون بررسی کردند [۲۷]. همچنین می‌توان به تحقیق کورایم و شافعی اشاره نمود که در آن معادلات دینامیک ربات با n لینک الاستیک که در آن تمامی مفاصل دورانی بودند، مورد تحلیل قرار گرفت [۲۸]. در پایان می‌توان به مقاله اسماعیل زاده خادم و پیرمحمدی اشاره نمود که در آن یک زنجیره از n لینک الاستیک که دارای مفاصل دورانی-کشویی بودند با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل مورد تحلیل دینامیکی قرار گرفت [۲۹].

همان گونه که پیشتر نیز بیان شد، این مقاله به استخراج سیستماتیک و خودکار معادلات حرکت یک منیپولاتور n لینکی که بر روی یک پایه متحرک قرار دارد و روابط آن بر اساس روش گیبس-اپل بازگشتی استخراج شده است، می‌پردازد. بنابراین در ادامه ساختار مقاله به شکل زیر خواهد بود. در بخش دوم سینماتیک مسأله شامل سینماتیک منیپولاتور، سینماتیک پایه غیرهولونومیک و سینماتیک چرخ‌های سمت راست و چپ توضیح داده می‌شود. بخش سوم که خود شامل سه قسمت است به بررسی معادلات دینامیک معکوس سیستم به فرم بسته می‌پردازد. فرم بازگشتی این معادلات به منظور استخراج خودکار و سیستماتیک معادلات دینامیک معکوس سیستم در بخش چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک شبیه‌سازی عددی به منظور نشان دادن توانایی این روش در استخراج معادلات حرکت ربات‌ها با درجات آزادی بالا در بخش پنجم ارائه گردیده است. در پایان در بخش ششم نتیجه‌گیری و مزایای این روش بیان شده است.

۲- سینماتیک منیپولاتور با پایه متحرک

این بخش از سه قسمت تشکیل شده است. در ابتدا سینماتیک منیپولاتور ارائه می‌شود. سپس معادلات سینماتیکی پایه غیرهولونومیک بررسی می‌شود و در پایان سینماتیک چرخ‌های راست و چپ مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۲-۱- سینماتیک منیپولاتور

در این بخش سینماتیک یک زنجیره از n لینک صلب که بر روی یک پایه متحرک قرار گرفته است، بررسی می‌شود. این پایه متحرک که بر روی زمین حرکت می‌کند تحت تأثیر قیود غیرهولونومیک قرار دارد. طبق قاعده زیر به هر لینک یک دستگاه مختصات اختصاص می‌یابد. XYZ، چارچوب متصل به زمین است که در سینماتیک بازوی رباتیکی می‌توان آن را چارچوب مرجع در نظر گرفت. $x_i y_i z_i$ دستگاه مختصات متعلق به لینک iام را به‌گونه ای تعریف می‌کنیم که مبدأ آن چسبیده به ابتدای این رابط، محور x_i در امتداد طول رابط iام از مبدأ مختصات O_i به سمت مبدأ مختصات O_{i+1} و محور z_i آن به عنوان محور دوران iامین لینک در نظر گرفته شود. همچنین محور y_i تکمیل کننده دستگاه راستگرد $x_i y_i z_i$ می‌باشد.

در شکل ۱ المان دیفرانسیلی Q بر روی iامین بازو نشان داده شده است.

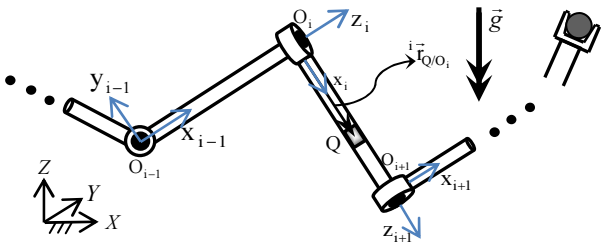
موقعیت این المان دیفرانسیلی نسبت به دستگاه مختصات مرجع محلی رابط iام توسط بردار ${}^i\vec{r}_{Q/Q_i}$ بیان می‌شود.

$$ {}^i\vec{r}_{Q/O_i} = \eta\, {}^i\vec{x}_i \qquad (۱) $$

که در آن ${}^i\vec{x}_i = \{1 \quad 0 \quad 0\}^T$ و η فاصله میان مبدأ O_i و المان دیفرانسیلی Q می‌باشد. شتاب مطلق المان دیفرانسیلی Q که در دستگاه مختصات رابط iام بیان شده است، به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$ {}^i\ddot{\vec{r}}_Q = {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times \eta\, {}^i\vec{x}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times \left({}^i\vec{\omega}_i \times \eta\, {}^i\vec{x}_i \right) \qquad (۲) $$

که در آن ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ شتاب مطلق مبدأ مختصات دستگاه متصل به مفصل iام و ${}^i\vec{\omega}_i$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای رابط iام، بیان شده در دستگاه مختصات متصل به این رابط می‌باشند. در بخش بعد معادله (۲) به منظور تشکیل انرژی شتاب بازوها استفاده می‌شود.



شکل ۱ منیپولاتور با لینک‌های صلب

۲-۲- سینماتیک پایه متحرک غیرهولونومیک

در مدل‌سازی پایه ربات، این فرضیات در نظر گرفته می‌شود. ۱) هیچ گونه لغزشی بین چرخ‌ها و زمین وجود ندارد. در حقیقت تماس از نوع غلتش خالص است. ۲) پایه به دلیل قید غیرهولونومیک حاکم بر سیستم قادر به حرکت در امتداد محور دوران چرخ‌ها نمی‌باشد. ۳) حرکت پایه به صفحه XY محدود شده و هیچ گونه حرکتی در امتداد محور Z انجام نمی‌پذیرد. سینماتیک پایه ربات نشان داده شده در شکل ۲ ارائه شده است.

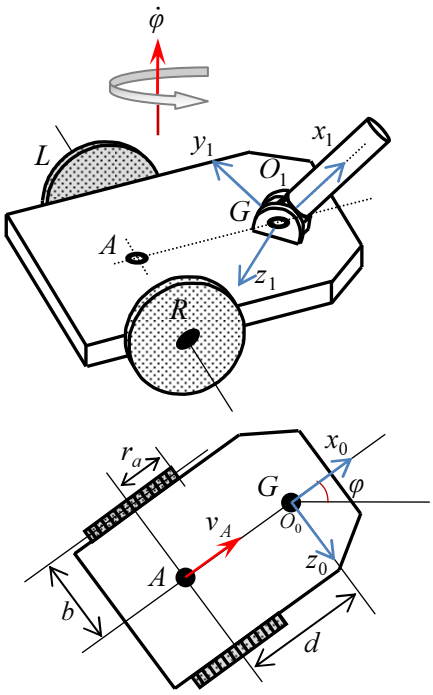
عدم حرکت پایه در امتداد محور دوران چرخ‌ها باعث می‌شود تا سرعت نقطه A (نقطه تقاطع محور تقارن پایه ربات با محور دوران چرخ‌ها) نسبت به دستگاه مختصات $x_0 y_0 z_0$ (دستگاه مختصات متصل به پایه ربات) به شکل زیر ارائه شود.

$$ {}^0\vec{v}_A = v_A\, {}^0\vec{x}_0 \qquad (۳) $$

سرعت زاویه‌ای پایه ربات در امتداد y_0 می‌باشد که به شکل رابطه (۴) ارائه می‌شود.

$$ {}^0\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}\, {}^0\vec{y}_0 \qquad (۴) $$

که در آن ${}^i\vec{y}_i = \{0 \quad 1 \quad 0\}^T$ است. اکنون با داشتن سرعت مطلق نقطه A و سرعت زاویه‌ای پایه، شتاب مطلق مرکز جرم مجوعه پایه و چرخ‌ها یعنی نقطه G نسبت به دستگاه $x_0 y_0 z_0$ به طریق زیر ارائه می‌شود.



شکل ۲ پایه متحرک

$$ {}^{0}\dot{\vec{v}}_G = \left(\dot{v}_A - d\dot{\varphi}^2\right){}^{0}\vec{x}_0 - \left(v_A\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi}\right){}^{0}\vec{z}_0 \qquad (۵) $$

که در آن ${}^{i}\vec{z}_i = \{0 \quad 0 \quad 1\}^T$ می‌باشد. همچنین d فاصله بین نقطه A و G، $\dot{v}_A$ شتاب مطلق نقطه A و $\ddot{\varphi}$ شتاب زاویه‌ای مربوط به پایه ربات می‌باشد. در بخش بعد معادله (۵) به منظور تشکیل تابع گیبس مربوط به پایه استفاده می‌شود.

۲-۳- سینماتیک مربوط به چرخ‌های سمت راست و چپ

با توجه به شرط عدم لغزش و قیود غیرهولونومیک حاکم بر این سیستم رباتیکی، سرعت مرکز چرخ‌های سمت راست و چپ به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$ {}^{0}\vec{v}_{R/L} = r_a\dot{\theta}_{R/L}\,{}^{0}\vec{x}_0 \qquad (۶) $$

که در آن r_a شعاع چرخ‌های متحرک و $\dot{\theta}_R$ و $\dot{\theta}_L$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ می‌باشند. می‌توان معادله (۶) را بر حسب v_A و $\dot{\varphi}$ به‌طریق زیر نیز ارائه کرد.

$$ {}^{0}\vec{v}_{R/L} = \left(v_A \pm b\dot{\varphi}\right){}^{0}\vec{x}_0 \qquad (۷) $$

که در آن b فاصله بین نقطه A و مرکز چرخ‌های متحرک می‌باشد. با توجه به معادلات (۶) و (۷)، $\dot{\theta}_R$ و $\dot{\theta}_L$ به فرم زیر ارزیابی می‌شوند.

$$ \dot{\theta}_{R/L} = \frac{1}{r_a}\left(v_A \pm b\dot{\varphi}\right) \qquad (۸) $$

در بخش (۳) معادله (۸) به منظور محاسبه تابع گیبس مربوط به چرخ‌های متحرک و همچنین محاسبه نیروهای تعمیم یافته ناشی از اعمال گشتاورهایی که به چرخ‌های راست و چپ اعمال می‌گردد، استفاده می‌شوند.

۳- معادلات دینامیک سیستم

این بخش از سه قسمت تشکیل شده است. در ابتدا انرژی شتاب سیستم محاسبه می‌گردد. سپس مشتقات جزئی انرژی شتاب سیستم نسبت به شبه شتاب‌ها ارائه می‌شود و در پایان معادلات دینامیک معکوس این سیستم رباتیکی به فرم بسته ارزیابی می‌شود.

۱-۳- انرژی شتاب سیستم (تابع گیبس)

انرژی شتاب منیپولاتور با پایه متحرک از سه جزء اصلی تشکیل شده است. ۱) انرژی شتاب به دلیل حرکت لینک‌ها ۲) انرژی شتاب به دلیل حرکت پایه و ۳) انرژی شتاب به دلیل حرکت چرخ‌های محرک. برای محاسبه تابع انرژی شتاب لینک‌ها، در ابتدا انرژی شتاب برای یک المان دیفرانسیلی دلخواه بر روی رابط iام نوشته می‌شود. سپس انتگرال‌گیری از این انرژی شتاب دیفرانسیلی بر روی تمام طول لینک از 0 تا l_i، کل انرژی شتاب مربوط به آن رابط را ایجاد می‌کند. با جمع کردن انرژی شتاب تک‌تک رابط‌ها، انرژی شتاب کل منیپولاتور به دست خواهد آمد.

$$ S = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{1}{2}\mu_i\left(\eta\right)\left({}^{i}\ddot{\vec{r}}_Q^{\,T}\cdot{}^{i}\ddot{\vec{r}}_Q\right)d\eta + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{1}{2}\,{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot J_i\left(\eta\right){}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i\,d\eta \qquad (۹) $$

که در آن $\mu_i(\eta)$ و $J_i(\eta)$ به ترتیب جرم واحد طول و ممان اینرسی جرمی بر واحد طول برای بازوی iام می‌باشند. با وارد کردن معادله (۲) در رابطه (۹) عبارت زیر برای انرژی شتاب منیپولاتور به دست خواهد آمد.

$$ \begin{aligned} S_1 = {} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}B_{0i}\,{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} - {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot B_{1i}\,{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i \\ & - {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T}\cdot{}^{i}\tilde{\omega}_i B_{1i}\,{}^{i}\vec{\omega}_i + \frac{1}{2}\,{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot\left(B_{2i}+B_{3i}\right){}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i \\ & + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{\,T}\cdot{}^{i}\tilde{\omega}_i B_{2i}\,{}^{i}\vec{\omega}_i + \text{جملات غیر مرتبط} \end{aligned} \qquad (۱۰) $$

که در آن:

$$ B_{0i} = \int_0^{l_i}\mu_i\,d\eta \qquad (۱۱) $$

$$ B_{1i} = \int_0^{l_i}\mu_i\eta\,{}^{i}\tilde{x}_i\,d\eta \qquad (۱۲) $$

$$ B_{2i} = \int_0^{l_i}\mu_i\eta^2\,{}^{i}\tilde{x}_i^{\,T}\,{}^{i}\tilde{x}_i\,d\eta \qquad (۱۳) $$

$$ B_{3i} = \int_0^{l_i}J_i\,d\eta \qquad (۱۴) $$

همچنین ${}^{i}\tilde{x}_i$ و ${}^{i}\tilde{\omega}_i$ به ترتیب ماتریس‌های پاد متقارن مربوط به بردارهای ${}^{i}\vec{x}_i$ و ${}^{i}\vec{\omega}_i$ می‌باشند. در معادله (۱۰) جمله‌ای تحت عنوان ترم‌های نامربوط وجود دارد. از آنجا که برای تشکیل معادلات حرکت بایستی مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها محاسبه شود، لذا در انرژی شتاب می‌توان از ترم‌هایی که شامل شبه شتاب‌ها نیستند؛ صرف‌نظر نمود. در اینجا باید به این نکته اشاره شود که B_{2i} از جنس ماتریس اینرسی است. در ادامه به محاسبه تابع گیبس چرخ‌های محرک و پایه متحرک می‌پردازیم. تابع گیبس مربوط به پایه و چرخ‌ها به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$ S_2 + S_3 = \frac{1}{2}I_{pw}\ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_w\left(\ddot{\theta}_R^2 + \ddot{\theta}_L^2\right) + \frac{1}{2}M_{pw}\left[\left(\dot{v}_A - d\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(v_A\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi}\right)^2\right] \qquad (۱۵) $$

که در آن M_{pw} جرم مجموعه پایه و چرخ‌های محرک، I_{pw} ممان اینرسی مجموعه پایه و چرخ‌های محرک (حول محوری عمودی که از مرکز جرم مجموعه پایه و چرخ‌ها می‌گذرد) و I_w ممان اینرسی چرخ‌های راست و چپ (حول محور دوران چرخ ها) می‌باشد. جمع روابط (۱۰) و (۱۵) انرژی شتاب کل مجموعه را در پی خواهد داشت.

۳-۲- مشتقات تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها

همان گونه که در بالا نیز اشاره شد، یک بخش از معادلات دینامیکی سیستمهای رباتیکی با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل با مشتق جزئی گرفتن از تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها به دست خواهد آمد. بنابراین یک دسته شبه سرعت مستقل باید انتخاب شود. در این مقاله، سرعت نقطه A یعنی v_A؛ سرعت زاویه‌ای پایه متحرک یعنی $\dot{\varphi}$ و سرعت زاویه‌ای مفاصل رابطها یعنی $\dot{q}_i$ها به عنوان شبه سرعت‌های مستقل انتخاب می‌شود.

در تابع گیبس تنها ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ تابعی از $\ddot{q}_j$ هستند. بنابراین مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به $\ddot{q}_j$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}=\sum_{i=j+1}^{n}\frac{\partial\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \ddot{q}_j}\cdot{}^i\vec{S}_i+\sum_{i=j}^{n}\frac{\partial\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{T}}{\partial \ddot{q}_j}\cdot{}^i\vec{T}_i \qquad (۱۶)$$

که در آن:

$${}^i\vec{S}_i=B_{0i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}-B_{1i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i-{}^i\tilde{\vec{\omega}}_i B_{1i}\,{}^i\vec{\omega}_i \qquad (۱۷)$$

$${}^i\vec{T}_i=B_{1i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}+\left(B_{2i}+B_{3i}\right){}^i\dot{\vec{\omega}}_i+{}^i\tilde{\vec{\omega}}_i B_{2i}\,{}^i\vec{\omega}_i \qquad (۱۸)$$

از آنجایی که ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ مستقل از $\dot{v}_A$ است، مشتق پاره‌ای تابع گیبس نسبت $\dot{v}_A$ به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \dot{v}_A}\cdot{}^i\vec{S}_i+\left(M_{pw}+\frac{2I_w}{r_a^2}\right)\dot{v}_A-M_{pw}\,d\dot{\varphi}^2 \qquad (۱۹)$$

و در پایان مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به شتاب زاویه‌ای پایه یعنی $\ddot{\varphi}$ به شکل زیر ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \ddot{\varphi}}\cdot{}^i\vec{S}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{T}}{\partial \ddot{\varphi}}\cdot{}^i\vec{T}_i+M_{pw}\,d\left(d\ddot{\varphi}+v_A\dot{\varphi}\right)+\left(I_{pw}+2I_w\left(\frac{b^2}{r_a^2}\right)\right)\ddot{\varphi} \qquad (۲۰)$$

در اینجا باید به این نکته اشاره شود که در معادلات بالا از این خاصیت ماتریس‌های پاد متقارن که $a^T=-a$ استفاده شده است.

۳-۳- معادلات دینامیک معکوس به شکل بسته

معادلات سیستم رباتیکی مذکور با در نظر گرفتن نیروهای تعمیم یافته مربوط به گرانش زمین و دیگر نیروهای خارجی که به سیستم وارد می‌شود، کامل خواهد گشت. تأثیر بارگذاری گرانی بر رابطها را می‌توان به سادگی با قرار دادن ${}^0\ddot{\vec{r}}_{O_0}=g\,{}^0\vec{y}_0$ در نظر گرفت؛ که در آن g ترم مربوط به گرانش است. در این صورت می‌توان فرض نمود که پایه ربات با شتاب $1g$ به سوی بالا حرکت می‌کند. بنابراین بدون هیچ گونه محاسبات اضافی تأثیر بارگذاری گرانی لحاظ می‌شود.

در این مقاله فرض بر آن است که هیچ گونه باری بر روی لینک‌ها اعمال نمی‌شود. لذا تنها نیروهای خارجی اعمالی به این سیستم دینامیکی عبارتند از گشتاور τ_j (که به j امین مفصل دورانی اعمال می‌گردد) و τ_R و τ_L که به ترتیب به چرخ‌های سمت راست و چپ اعمال می‌گردد. با این فرض، نیروهای تعمیم یافته مربوط به kامین شبه سرعت به طریق زیر محاسبه می‌شود.

$$U_k=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^k\tau_i+\dot{\theta}_R^k\tau_R+\dot{\theta}_L^k\tau_L$$
$$k=\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n,v_A,\dot{\varphi} \qquad (۲۱)$$

که در آن U_k مشتق‌گیری نسبت به kامین شبه سرعت را نشان می‌دهد. اکنون معادلات حرکت ربات متحرک با مفاصل دورانی با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل به طریق زیر کامل می‌شود.

- معادله حرکت مربوط به j امین مفصل دورانی

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}=\tau_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۲۲)$$

- معادله حرکت مربوط به حرکت انتقالی پایه

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_A}=\frac{1}{r_a}\left(\tau_R+\tau_L\right) \qquad (۲۳)$$

- معادله حرکت مربوط به حرکت دورانی پایه

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}}=\frac{b}{r_a}\left(\tau_R-\tau_L\right) \qquad (۲۴)$$

معادلات بالا به فرم دینامیک معکوس می‌باشند. در این نوع دینامیک با دانستن یک حالت مشخص از پیکربندی ربات (موقعیت، سرعت و شتاب) گشتاور و نیروهای اعمالی به مفاصل به راحتی به دست خواهد آمد.

۴- معادلات دینامیک معکوس به فرم بازگشتی

در بخش قبل، معادلات دینامیک معکوس یک منیپولاتور n لینکی که بر روی یک پایه متحرک غیرهولونومیک نصب شده است، مورد بررسی قرار گرفت. به منظور استخراج سیستماتیک و خودکار معادلات حرکت این گونه از ربات‌ها و بهبود راندمان محاسباتی، ارائه یک فرمولاسیون بازگشتی اجتناب ناپذیر است. به منظور تحقق هدف این بخش، در ابتدا فرم مجموع عبارات ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$ بایستی ارائه شود. با در اختیار داشتن این جملات به صورت مجموع، امکان محاسبه مشتقات جزئی ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$ نسبت به $\ddot{q}_j$، $\dot{v}_A$ و $\ddot{\varphi}$ که در معادلات (۱۶)، (۱۹) و (۲۰) ظاهر شده‌اند، میسر می‌شود.

شتاب مطلق مبدأ دستگاه مختصات مرجع محلی جسم iام به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} = {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}\times l_{i-1}\,{}^{i-1}\vec{x}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times\left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times l_{i-1}\,{}^{i-1}\vec{x}_{i-1}\right)\right) \quad (۲۵)$$

در حالیکه شتاب زاویه‌ای رابط iام عبارت است از:

$$ {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i = {}^{i}R_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + {}^{i}R_{i-1}\,{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times{}^{i}\vec{z}_i\dot{q}_i + {}^{i}\vec{z}_i\ddot{q}_i \quad (۲۶)$$

که در آن ${}^{j}R_i$ ماتریس دورانی است که جهت‌گیری iامین دستگاه مختصات مرجع محلی را نسبت به j امین دستگاه محلی نشان می‌دهد. این ماتریس به فرم بازگشتی به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$ {}^{j}R_i = {}^{j}R_{i-1}A_i \quad (۲۷)$$

در رابطه بالا A_i، ماتریس دوران iامین مفصل می‌باشد که جهت‌گیری دستگاه $x_iy_iz_i$ را نسبت به دستگاه $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ نشان می‌دهد. درایه‌های این ماتریس تنها تابعی از q_i می‌باشند که در آن q_i مختصات تعمیم یافته مربوط به iامین مفصل می‌باشد.

معادله (۲۵) و (۲۶) فرم بازگشتی عبارات مربوط به ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$ را نشان می‌دهد. تبدیل این معادلات به صورت مجموع روابط زیر را در پی دارد.

$$ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} = {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_{s,i}} + {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_{v,i}} \quad (۲۸)$$

$$ {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i = {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{s,i} + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{v,i} \quad (۲۹)$$

که در آن ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_{s,i}}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{s,i}$ نماینده آن دسته از ترم‌های تشکیل دهنده ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$ هستند که حاوی شبه شتاب‌های $\ddot{q}_j$، $\dot{v}_A$ و $\ddot{\varphi}$ می‌باشند؛ در حالی که ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_{v,i}}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{v,i}$ آن بخش از جملات تشکیل دهنده ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$ هستند که شامل شبه شتاب‌ها نمی‌شوند. این جملات به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_{s,i}} = \sum_{k=1}^{i-1}{}^{i}R_k\left({}^{k}\dot{\vec{\omega}}_{s,k}\times l_k\,{}^{k}\vec{x}_k\right) + {}^{i}R_0\left(\dot{v}_A\,{}^{0}\vec{x}_0 - d\ddot{\varphi}\,{}^{0}\vec{z}_0\right) \quad (۳۰)$$

$$ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_{v,i}} = {}^{i}R_0\left(-d\dot{\varphi}^2\,{}^{0}\vec{x}_0 + g_y\,{}^{0}\vec{y}_0 - v_A\dot{\varphi}\,{}^{0}\vec{z}_0\right) + \sum_{k=1}^{i-1}{}^{i}R_k\left({}^{k}\vec{\omega}_k\times\left({}^{k}\vec{\omega}_k\times l_k\,{}^{k}\vec{x}_k\right) + {}^{k}\dot{\vec{\omega}}_{v,k}\times l_k\,{}^{k}\vec{x}_k\right) \quad (۳۱)$$

$$ {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{s,i} = {}^{i}R_0\,{}^{0}\vec{y}_0\ddot{\varphi} + \sum_{k=1}^{i}{}^{i}R_k\,{}^{k}\vec{z}_k\ddot{q}_k \quad (۳۲)$$

$$ {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{v,i} = \sum_{k=0}^{i-1}{}^{i}R_k\,{}^{k}\vec{\omega}_k\times{}^{i}R_{k+1}\,{}^{k+1}\vec{z}_{k+1}\dot{q}_{k+1} \quad (۳۳)$$

اکنون به کمک روابط (۳۳-۳۰)، مشتقات جزئی ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$ نسبت به شبه شتاب‌ها به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$ \frac{\partial\,{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial\ddot{q}_j} = {}^{i}R_j\,{}^{j}\vec{z}_j \quad (۳۴)$$

$$ \frac{\partial\,{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial\ddot{\varphi}} = {}^{i}R_0\,{}^{0}\vec{y}_0 \quad (۳۵)$$

$$ \frac{\partial\,{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial\ddot{q}_j} = {}^{i}R_j\,{}^{j}\vec{z}_j\times{}^{i}\vec{r}_{O_i/O_j} \quad (۳۶)$$

$$ \frac{\partial\,{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial\dot{v}_A} = {}^{i}R_0\,{}^{0}\vec{x}_0 \quad (۳۷)$$

$$ \frac{\partial\,{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial\ddot{\varphi}} = -{}^{i}R_0 d\,{}^{0}\vec{z}_0 + {}^{i}R_0\,{}^{0}\vec{y}_0\times{}^{i}\vec{r}_{O_i/O_0} \quad (۳۸)$$

در روابط بالا ${}^{i}\vec{r}_{O_i/O_j}$ بردار موقعیت iامین مبدأ مختصات مرجع محلی نسبت به j امین مبدأ مختصات مرجع محلی را نشان می‌دهد که در آن $(i>j)$.

استخراج بازگشتی معادلات دینامیک معکوس نیازمند مراحلی است که در این بخش به آنها پرداخته می‌شود. در معادله مربوط به مفاصل دورانی، با جایگذاری روابط (۳۴) و (۳۶) در معادله (۲۲) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$ {}^{j}\vec{z}_j^{\,T}\cdot{}^{j}\vec{\chi}_j = \tau_j \quad (۳۹)$$

که در آن:

$$ {}^{j}\vec{\chi}_j = {}^{j}\vec{T}_j + {}^{j}\tilde{r}_{O_{j+1}/O_j}\,{}^{j}\vec{\varphi}_j + {}^{j}R_{j+1}\,{}^{j+1}\vec{\chi}_{j+1} \quad (۴۰)$$

$$ {}^{j}\vec{\varphi}_j = {}^{j}R_{j+1}\left({}^{j+1}\vec{S}_{j+1} + {}^{j+1}\vec{\varphi}_{j+1}\right) \quad (۴۱)$$

همانند مرحله قبل، با وارد کردن معادله (۳۷) در معادله مربوط به حرکت انتقالی پایه یعنی معادله (۲۳) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی، عبارت معادل زیر برای حرکت انتقالی پایه به دست خواهد آمد.

$$ {}^{0}\vec{x}_0^T \cdot {}^{0}\vec{\varphi}_0 + \left(M_{pw} + \frac{2I_w}{r_a^2} \right) \dot{v}_A - M_{pw} d \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r_a}\left(\tau_R + \tau_L\right) \qquad (۴۲) $$

در پایان برای تبدیل معادله مربوط به حرکت دورانی پایه به یک رابطه بازگشتی، روابط (۳۵) و (۳۸) را در معادله (۲۴) جایگذاری نموده که در اینصورت عبارت معادل زیر برای حرکت دورانی پایه حاصل خواهد گشت.

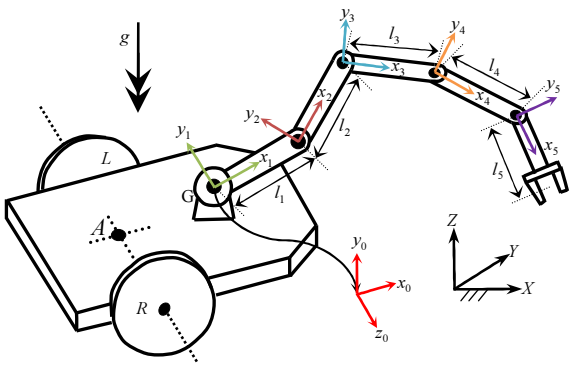
$$ {}^{0}\vec{y}_0^T \cdot {}^{0}R_1\, {}^{1}\vec{\chi}_1 - d\, {}^{0}\vec{z}_0^T \cdot {}^{0}\vec{\varphi}_0 + M_{pw} d \left(d\ddot{\varphi} + v_A \dot{\varphi} \right) + \left(I_{pw} + 2I_w \left(\frac{b^2}{r_a^2} \right) \right) \ddot{\varphi} = \frac{b}{r_a}\left(\tau_R - \tau_L\right) \qquad (۴۳) $$

معادلات (۳۹)، (۴۲) و (۴۳) فرم بازگشتی معادلات دینامیک معکوس منیپولاتور با پایه متحرک را نشان می‌دهد. از این معادلات در بخش بعد به منظور شبیه‌سازی یک منیپولاتور که بر روی یک پایه متحرک قرار گرفته است، استفاده می‌شود.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی برای یک منیپولاتور با پنج لینک صلب که بر روی یک پایه متحرک نصب شده است، ارائه می‌گردد. شکل ۳ ربات مورد نظر را نشان می‌دهد.

تمامی پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی در جدول ۱ ارائه شده است.



شکل ۳ ربات با سه مفاصل دورانی بر روی پایه متحرک

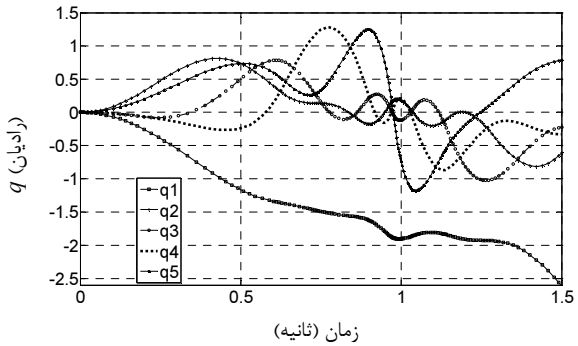
جدول ۱ پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار	واحد
$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5$	1	m
$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$	1	kgm^{-1}
$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5$	1×0.0008	kgm
g	10	ms^{-2}
I_w	0.001	kgm^2
I_{pw}	0.06363	kgm^2
M_{pw}	6.64	kg
d	0.2	m
r_a	0.08	m
b	0.145	m
$\tau_1; \tau_2; \tau_3; \tau_4; \tau_5$	1	Nm
τ_R	0.1	Nm
τ_L	0.2	Nm

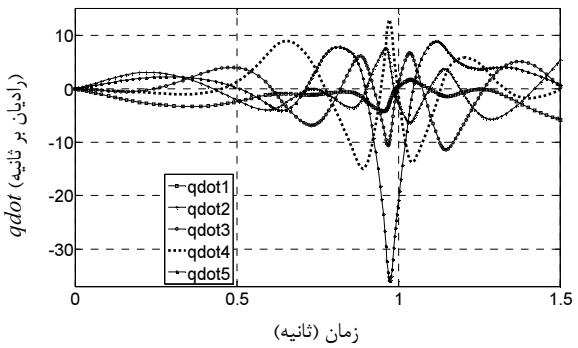
در جدول ۱، I همان ماتریس یکه می‌باشد. همچنین تمامی شرایط اولیه برای شبیه‌سازی به صورت زیر فرض شده است:

$$ q_1 = \dot{q}_1 = q_2 = \dot{q}_2 = q_3 = \dot{q}_3 = q_4 = \dot{q}_4 = q_5 = \dot{q}_5 = x_A = v_A = \varphi = \dot{\varphi} \Big|_{t=0} = 0 $$

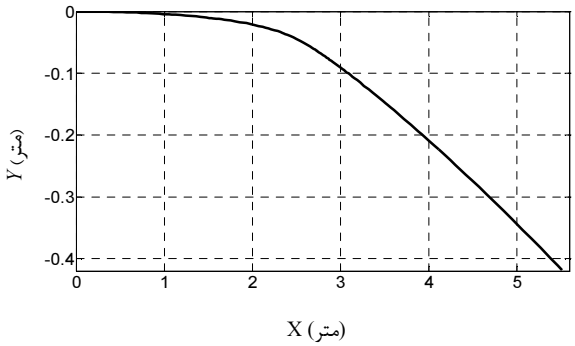
شکل‌های ۴ تا ۷ پاسخ زمانی سیستم را نشان می‌دهد.



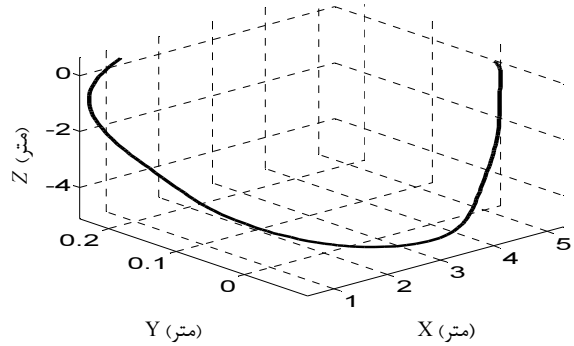
شکل ۴ موقعیت زاویه‌ای بازوها



شکل ۵ سرعت زاویه‌ای بازوها



شکل ۶ مسیر حرکت پایه در صفحه *XY*



شکل ۷ مسیر حرکت پنچه در صفحه *XYZ*

به منظور بررسی کارآیی الگوریتم بازگشتی پیشنهادی، زمان مورد نیاز برای استخراج معادلات حرکت و حل آنها برای سیستم نشان داده شده، بایستی ارائه گردد. زمان مورد نیاز برای مدت زمان شبیه‌سازی ۱/۵s که توسط کامپیوتری با مشخصات (Intel® Core™ 2 Duo Processor E7500 @ 3GHz) انجام پذیرفته است، ۴۷۷/۶۶s می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش خودکار و سیستماتیک برای استخراج معادلات حرکت ربات با n لینک صلب که بر روی یک پایه متحرک قرار گرفته است، ارائه شد. روش به کار گرفته شده در این تحقیق بر پایه فرمولاسیون گیبس-اپل استوار می‌باشد. از مزایای عمده این روش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱- کاهش حجم محاسبات نسبت به حالت غیر بازگشتی که این امر منجر به صرف زمان کمتری برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم می‌شود.

۲- استفاده از ماتریس های ۳×۳ و ۱×۳ در فرمولاسیون ارائه شده که نسبت به ماتریس ۴×۴ و ۱×۴ پیچیدگی محاسباتی کمتری دارد.

۳- استفاده آسان‌تر این روش نسبت به روش لاگرانژ، زیرا مشتقات جزئی کمتری نسبت به آن روش دارد.

۷- مراجع

[1] Tarn T.J., Shoults G.A., Yang S.P., "Dynamic Model for an Underwater Vehicle with Multiple Robotic Manipulators", *In Pre- Proc. 6th Int. Advanced Robotics Program*, Toulon-Laseyne, 1996, pp. 1-23.

[2] Khatib O., Yokoi K., Ruspini D., Holmberg R., Casal A., Baader A., "Force Strategies for Cooperative Tasks in Multiple Mobile Manipulation Systems", *Robotic Research 7, The Seventh Int. Symposium Springer* Berlin, 1996, pp. 333-342.

[3] Hootsmanns N. A. M., Dubowsky S., "The Motion Control of Manipulators on Mobile Vehicles", *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1991, pp. 2336-2341.

[4] Liu K., Lewis F. L., "Decentralized Continuous Robust Controller for Mobile Robots", *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1990, pp. 1822-1827.

[5] Wiens, G. J., "Effects of Dynamic Coupling in Mobile Robotic Systems", *Proc. World Conf. on Robot. Res*, Detroit, MI, SME, 1989, pp. 43-57.

[6] Chen M. W., Zalzala A. M. S., "Dynamic Modeling and Genetic-Base Trajectory Generation for Nonholonomic Mobile Manipulators", *Control Engineering Practice*, Vol. 5, No. 1, 1997, pp. 39-48.

[7] Yamamoto Y., "Control and Coordination of Locomotion and Manipulation of a Wheeled Mobile Manipulator", *Ph.D. thesis*, Dept. of Comp. and Inf. Science, School of Eng. and Applied Science, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, August, 1994.

[8] Yamamoto Y., Yun X., "Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 39, No. 6, 1994, pp. 1326-1332.

[9] Yamamoto Y., Yun X., "A Modular App. Roach to Dynamic Modeling of a Class of Robotics and Automation", *IEEE Transactions of Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 2, 1997, pp. 41-48.

[10] Thanjavur K., Rajagopalan R., "Ease of Dynamic Modeling of Wheeled Mobile Robots (WMRs) using Kane's App. Roach", *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, 1997, pp. 2926-2931.

[11] Tanner H. G., and Kyriakopouos K. J., "Mobile Manipulator Modeling with Kane's App. Roach", *Robotica*, Vol. 19, No. 6, 2001, pp. 675-690.

[12] Saha S. K., "Dynamic Modeling of Serial Multi-Body Systems Using the Decoupled Natural Orthogonal Complement Matrices", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, No. 2, 1999,pp. 986-996.

[13] Mohan A., Saha S. K., "A Recursive, Numerically Stable and Efficient Simulation Algorithm for Serial Robots", *Multibody System Dynamics*, Vol. 17, No. 4, 2007, pp. 291-319.

[14] Bae D. S., and Haug E.J., "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I. Open Loop System", *Mechanics of Structures & Machines*, Vol. 15, No. 3, 1987, pp. 359-382.

[15] Bae D.S., Haug E.J., "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II. Closed Loop System", *Mechanics of Structures & Machines*, Vol. 15, No. 4, 1987, pp. 481-506.

[16] Book W. J., "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", *International Journal of Robotic Research*, Vol. 3, No. 3, 1984, pp. 87-101.

[17] Hwang Y.L., "Recursive Newton-Euler Formulation for Flexible Dynamic Manufacturing Analysis of Open-Loop Robotic Systems", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 29, No. 5/6, 2006, pp. 598-604.

[18] Kim S. S., Haug E.J., "A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics: Part I. Open Loop Systems", *Computer Methods in App. lied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 3, 1988, pp. 293-314.

[19] Yu Q., Chen, I-M., "A General App. Roach to the Dynamics of Nonholonomic Mobile Manipulator Systems", *ASME Tran. Dyn. Syst. Measur. Contr.*, Vol. 124, No. 4, 2002, pp. 512-521.

[20] Boyer F., Ali S., "Recursive Inverse Dynamics of Mobile Multibody Systems with Joints and Wheels", *IEEE Transaction on Robotics*, Vol. 27, No. 2, 2011, pp. 215-228.

[21] Khalil W., "Dynamic Modeling of Robots Using Recursive Newton-Euler Techniques", *ICINCO Proceeding of the 7th Int. conf. on informatics in Control, Automation and Robotics* 1, 2010, pp. IS19-IS31.

[22] Li J.J., Zhao X.H., "Dynamics Modeling and Simulation of Tracked Five DOF Mobile Manipulator", *Advanced Materials Research*, 2012, 433-440, pp. 4817-4822.

[23] Chung J.H., Velinsky S.A., Hess R.A., "Interaction Control of a Redundant Mobile Manipulator",*International Journal of Robotics*, 1998, Vol. 17, No. 12, pp. 1302-1309.

[24] Meghdari A., Mahboobi A.H., Gaskarimahalle A.L., "Dynamic Modeling of 'CEDRA' Rescue Robot on Uneven Terrain", *ScientiaIranica*, 2006,Vol. 13, No. 3, pp. 272-283.

[25] Korayem M.H., Rahimi H.N., Nikoobin A., "Mathematical Modeling and Trajectory Planning of Mobile Manipulators with Flexible Links and Joints", *Applied Mathematical Modelling*, 2012, Vol. 36, No. 7, pp. 3229-3244.

[26] MataV., Provenzano S., Valero F., Cuadrado J. I., "Serial-robot Dynamics Algorithms for Moderately Large Number of Joints", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, No. 8, 2002, pp. 739-755.

[27] VossoughiG., Pendar H., Heidari Z., Mohammadi S., "Assisted Passive Snake-Like Robots: Conception and Dynamic Modeling Using Gibbs-App. Ell Method", *Robotica*, Vol. 26, No. 3, 2008, pp. 267-276.

[28] KorayemM. H., Shafei A. M., "Motion Equations Proper for Forward Dynamic of Robotic Manipulators with Flexible Links by using Recursive Gibbs-App. ell Formulation", *ScientiaIranica Transaction B-mechanical engineering*, Vol. 16, No. 6, 2009, pp. 479-495.

[29] KhademS. E., Pirmohammadi A. A., "Analytical Development of Dynamic Equations of Motion for a Three-Dimensional Flexible Link Manipulator with Revolute and Prismatic Joints", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 33, No. 2, 2003, pp. 237-24.