http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۲ شماره ۵ دی ۱۳۹۱ ص ص ۸۷-۱۰۱

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۱۰/۲۶
پذیرش ۹۱/۵/۱۳
ارائه در سایت ۹۱/۸/۳۰

تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند روی بستر الاستیک وینکلر- پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی

حسین رفیعی‌پور[۱]، امیر لطف‌آور[۲*]، صغری حمزه شلمزاری[۳]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز
۲- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز
* شیراز، صندوق پستی۳۱۳- ۷۱۵۵۵، Lotfavar@sutech.ac.ir

چکیده- در این مقاله روش تحلیلی هموتوپی برای آنالیز ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند بر روی بستر الاستیک غیرخطی، تحت بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه شده است. ابتدا با فرض تئوری اویلر- برنولی و با استفاده از رابطه کرنش - جابجایی ون‌کارمن، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت غیرخطی استخراج شده و سپس با به‌کار بردن روش تجزیه گالرکین، معادلهٔ حاکمه غیرخطی به یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی کاهش داده شده است. به منظور بدست آوردن یک حل بسته برای این معادله دیفرانسیل، روش تحلیلی هموتوپی که دارای دقت بسیار بالایی است، پیشنهاد شده است. در پایان، اثر پارامترهای مختلفی همچون بزرگی دامنه، بستر الاستیک غیرخطی، بارهای مکانیکی‌و حرارتی و شرایط مرزی مختلف بر روی ارتعاشات تیر بررسی شده‌است.

کلیدواژگان: ارتعاشات غیرخطی، بستر الاستیک وینکلر-پسترناک، تیر هدفمند، تئوری اویلر- برنولی، روش تحلیلی هموتوپی.

Nonlinear vibration analysis of functionally graded beam on winkler-pasternak foundation under mechanical and thermal loading via homotopy analysis method

H. Rafieipour[1], A. Lotfavar[2*], S. Hamzeh Shalamzari[3]

1- MSc. Student of Mech. Eng. Dept., Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran
2- Assist. Prof. of Mech. Eng., Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran
3- MSc Student of Mech. Eng. Dept. Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran
* P.O.B. 71555-313 Shiraz, Iran. Lotfavar@sutech.ac.ir

Abstract-In this paper; the Homotopy Analysis Method is used to Nonlinear free Vibration analysis of a mechanical and thermal loaded Functionally Graded Beam on Nonlinear Elastic Foundation. At first, the governing partial differential equation of the problem has been derived based on the Euler-Bernoulli Theory and the Von-Karman strain-displacement relationship. Then, it was reduced to a nonlinear ordinary differential equation via the Galerkin method. The Homotopy analysis Method which has high accuracy was implemented in order to obtain a closed form solution and study the problem parametrically. The accuracy of the proposed method is verified by those available in literatures. The numerical results demonstrate that proposed method yields a very rapid convergence of the solution as well as low computational effort. Finally, the effects of different parameters such as amplitude, linear and Nonlinear Elastic Foundation, thermal and mechanical loads and boundary conditions were investigated on the beam vibration and their results are presented for future work.

Keywords: Nonlinear Vibration, Winkler-Pasternak Foundation, Functionally Graded Beam, Euler-Bernoulli Theory, Homotopy Analysis Method.

۱- مقدمه

پیشرفت‌های بوجود آمده در زندگی بشر و بویژه صنایع مختلف، انسان را بر آن داشته است تا از موادی با خواص بهتر بهره‌گیرد. مواد هدفمند[1]، مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آنها بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این حالت با تغییر تدریجی کسر حجمی[2] مواد تشکیل دهنده به صورت تابعی از موقعیت در امتداد ضخامت، حاصل می‌شود. در بیشتر موارد مواد هدفمند از ترکیب سرامیک و فلز ساخته می‌شوند تا استحکام فلز را به همراه مقاومت در برابر دمای بالای محیط ترکیب نمایند و در عین حال مشکلات سطح اشتراک را حذف کنند. ترکیبی که از اختلاط پودر فلز و سرامیک بدست آمده و تغییرات درصد ترکیب فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملا پیوسته می‌باشد به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است و بین دو سطح نیز یک ترکیب پیوسته از هر دو جنس وجود دارد. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت خواهند داشت. با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده تیرهای هدفمند، این نوع سازه‌ها دارای خواص مکانیکی مؤثری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌باشند.

از زمانی که مفهوم مواد هدفمند در سال ۱۹۸۰ معرفی شد، به تدریج این مواد جدید در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون هوافضا، صنایع دفاعی، حس‌گرهای الکترونیکی و بیوپزشکی و هرجا که نیاز به حذف تمرکز تنش برای افزایش مقاومت مرزها بود، به کار برده شدند.

با پیشرفت دانش و تکنولوژی، تحقیق در استفاده از مواد هدفمند مانند مدل کردن سازه‌های ساخته شده از این مواد، خمش، کمانش، پس‌کمانش و ارتعاشات این مواد به یکی از موضوعات جالب در همه رشته‌های وابسته به مکانیک مواد تبدیل شد.

به علت استفاده روزافزون از تیرهای هدفمند در صنایع مدرن مختلف، فهمیدن رفتار دینامیکی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سنکار [۱]، یک حل الاستیسیته برای تیرهای با مواد هدفمند تحت بارهای عرضی استاتیکی با فرض تغییر نمایی خصوصیات مواد در جهت ضخامت، ارائه نمود. حل الاستیسیته برای خمش تیرهای طره‌ای با مواد هدفمند با استفاده از روش معکوس در جملات تابع تنش ایری نیز توسط یو و زونگ [۲] گزارش شده است.

از آنجا که بسیاری از سازه‌های تیرشکل مورد استفاده در کاربردهای مختلف مهندسی همچون ریل‌های راه آهن، سکوها و سازه‌های ساختمانی بر روی زمین قرار می‌گیرند، برهم‌کنش بین مواد هدفمند و بستر الاستیک نیز از جمله مسایل مهم بوده که مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. او و همکارانش [۳] یک رهیافت اویلر ـ لاگرانژی را با توابع C^1 پیوسته برای تحلیل پایداری و ارتعاشات تیرهای غیریکنواخت بر روی بستر الاستیک، در نظر گرفتند. ینگ و همکارانش [۴] نیز برای ارتعاشات آزاد و خمش تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند که بر روی بستر الاستیک وینکلر- پسترناک[3] قرار گرفته‌اند، حل‌هایی را بر مبنای الاستیسیته دوبعدی ارائه نموده‌اند.

بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه مواد هدفمند، روی رفتار خطی سازه‌ها متمرکز شده است و این در حالی است که اکثر پدیده‌ها در جهان اطراف ما و بویژه مسائل دینامیکی از جمله ارتعاشات، ذاتاً غیرخطی بوده و بوسیله معادلات غیرخطی تعریف می‌شوند. اگرچه معمولاً می‌توان مسائل غیرخطی را با فرض رفتار خطی حول شرایط کاری حل کرد، ولی همیشه این کار توجیه‌پذیر نیست. گاهی در سیستم‌های غیرخطی، رفتارهایی مشاهده می‌شود که امکان وقوع آنها در سیستم‌های خطی وجود ندارد. کی و همکارانش [۵] از روش انتگرال‌گیری عددی مستقیم به همراه روش رانج-کوتا[4] استفاده کردند تا پاسخ ارتعاشات غیرخطی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند با تکیه‌گاه‌های مختلف را پیدا کنند. ارتعاشات اجباری غیرخطی یک تیر تیموشینکو هدفمند تحت بار هارمونیک نیز توسط سیمسک [۶] بررسی شده است. فلاح و اقدم [۷] نیز به بررسی ارتعاشات غیرخطی و تحلیل پس‌کمانش تیرهای هدفمند بر روی بستر الاستیک غیرخطی پرداخته‌اند.

از طرف دیگر به منظور طراحی مؤثرتر و به علت تفاوت بین دمای ساخت و دمای کار سازه، مطالعه رفتار حرارتی ـ مکانیکی که می‌تواند شدیداً غیرخطی باشد، ضروری است. تحقیقات گوناگونی روی مواد هدفمند تحت محیط‌های‌حرارتی ـ مکانیکی

1. Functionally Graded Materials
2. Volume Fraction
3. Winkler-Pasternak
4. Runge-Kutta

انجام شده است. لیبرسکو و همکارانش [۸] رفتار ارتعاشاتی و تحلیل ناپایداری تیرهای نازک ساخته شده از مواد هدفمند را با در نظر گرفتن اثرات گرادیان دما و کسر حجمی و همچنین با فرض دمای بالای کار، مطالعه نمودند. سنکار [۹] حل الاستیسیته تیرهای هدفمند را تحت بارهای عرضی سینوسی بدست آورد. لو و همکارانش [۱۰] فضای حالت را بر مبنای روش دیفرانسیل‌گیری درجه دو برای تحلیل خمش تیرهای هدفمند بکار برده‌اند. بیان و همکارانش [۱۱] به بررسی فضای حالت تیرهای هدفمند استاتیک و دینامیک به همراه حسگرهای پیزوالکتریک پرداخته‌اند. بیهنگیل و جینسان [۱۲] کمانش و ارتعاشات ترموالاستیک تیر ساندویچی هدفمند را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار داده‌اند.

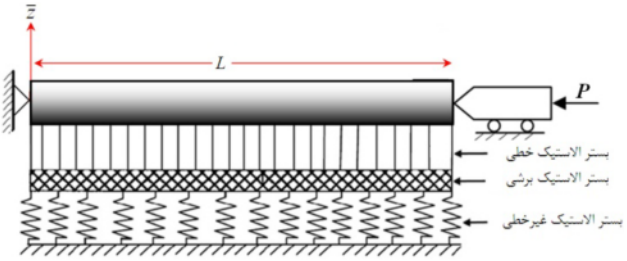
از سوی دیگر تاکنون برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسائل مهندسی، روش‌های عددی مختلفی ارائه شده است که می‌توان به روش‌های المان محدود [۱۳] و دیفرانسیل کوادریچر [۱۴] اشاره کرد. اما مسئلهٔ پیچیده‌تر، استخراج نتـایج برای مسایل غیرخطی به نحوی است که امکان بررسی اثر پارامترهای مختلف مسئله امکان‌پـذیر باشد. در سال‌های اخیر به منظور بررسی میزان تأثیر پـارامترهای مختلف بـر سیـستم‌های مهندسی، حل‌هـای نیمه‌تحلیلی و یا تحلیلی- تقریبی مورد استقبال وسیعی قرار گرفته‌اند. یکی از پرکاربردترین روش‌های تحلیلی، روش اختلالات[1] می‌باشد. اما این روش دارای یک نقص بزرگ بوده و آن وابستگی به ترم‌های غیرخطی ضعیف است. روش تکرار تغییراتی[2] [۱۵]، روش توازن انرژی[3] [۱۶] و روش تحلیلی هموتوپی[4] [۱۷] نیز از روش‌های تحلیلی- تقریبی جدیدتر و پرکاربردی می‌باشند که کوشیده‌اند تا این ضعف را جبران نمایند. باقانی و همکارانش [۱۸] ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ و پس‌کمانش یک تیر کامپوزیتی با لایه‌های نامتقارن بر روی بستر الاستیک را به روش تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین دینگ و همکارانش [۱۹] یک سری حل‌های تحلیلی بـرای تیـرهای هدفمند غیرایـزوتروپیک با شرایط تکیه‌گاهی گوناگون را با استفاده از یک تابع تنش ایری در فرم چندجمله‌ای عمومی استخراج کردند.

1. Perturbation Method
2. Variational Iteration Method
3. Energy Balance Method
4. Homotopy Analysis Method

در این مقاله، ابتدا با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی در روابط کرنش ـ جابجایی ون‌کارمن[5] و با فرض تئوری اویلر- برنولی و نوشتن معادلات انرژی پتانسیل و جنبشی تیر، به کمک اصل همیلتونین، معادلات حرکت غیرخطی سیستم بدست خواهد آمد. این معادله به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در دو بعد جابجایی و زمان است که با تعریف یک سری پارامترهای بی‌بعد و به کمک روش گالرکین به یک معادله‌معمولی تک‌بعدی تبدیل می‌شود. در مرحله‌بعد به منظور حل‌معادله دیفرانسیل غیرخطی تک‌بعدی، از روش تحلیلی هموتوپی استفاده می‌شود تا با حل پارامتری معادله ارتعاشاتی، بتوان اثر پارامترهای مختلف را بر روی فرکانس غیرخطی سیستم بررسی نمود. علت استفاده از روش تحلیلی هموتوپی در مسئله مذکور، حضور پارامترهای غیرخطی شدید می‌باشد. این روش در عین سادگی، دقت بسیار بالایی خواهد داشت.

۲- استخراج معادلات حاکمه

مطابق شکل ۱، یک تیر مستقیم با سطح مقطع مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند به طول L در جهت x عرض b در جهت y و ضخامت h در جهت z در دستگاه مختصات کارتزین واقع بر یک بستر الاستیک وینکلر ـ پسترناک غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. همچنین تیر تحت تاثیر نیروی فشاری P در راستای محور x قرار داشته و اثرات ناشی از تغییرات دمایی نیز در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی تیر هدفمند می‌تواند با هر تابعی در جهت ضخامت تغییر کند. در اینجا فرض شده است که تیر هدفمند از سرامیک و فلز ساخته شده و خواص مذکور بر حسب قانون مخلـوط‌ها[6] که تـابعی از کسـرهـای حجمی اجزای سـازنده می‌باشد، به طور پیوسته تغییر می‌کنند.



شکل ۱ شماتیک یک تیر هدفمند روی بستر الاستیک غیرخطی و تحت بار محوری فشاری

5. Von Karman
6. Rule of Mixtures

با توجه به قانون مخلوط‌ها، هر خاصیت مؤثری از ماده مانند η ، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\eta = \eta_m V_m + \eta_c V_c \quad (۱)$$

$$V_m + V_c = 1 \quad (۲)$$

که در آنها η و V به ترتیب خاصیت ماده و کسر حجمی را نشان می‌دهند و زیر نویس های m و c به ترتیب نمایندهٔ فلز و سرامیک هستند. تاکنون توابع مختلفی برای توصیف تغییرات کسر حجمی اجزای سازنده مواد هدفمند ارائه شده است که یکی از متداول‌ترین آنها قانون توانی است. با فرض آنکه صفحه پایینی از فلز خالص و صفحه بالایی از سرامیک خالص باشد و در بین آنها خواص به صورت پیوسته طبق قانون توانی تغییر کند، کسر حجمی برابر خواهد بود با:

$$V_c = \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h}\right)^n \; ; V_m = 1 - \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h}\right)^n \quad (۳)$$

که در آن n توان کسر حجمی است و در نتیجه خصوصیات مکانیکی مؤثر یک ماده هدفمند مانند مدول یانگ E، ضریب پواسون υ، ضریب انبساط حرارتی α و دانسیته ρ با جایگذاری معادله (۳) در معادله (۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$E(\bar{z}) = E_m + \left(E_c - E_m\right)\left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h}\right)^n$$

$$\alpha(\bar{z}) = \alpha_m + \left(\alpha_c - \alpha_m\right)\left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h}\right)^n$$

$$\rho(\bar{z}) = \rho_m + \left(\rho_c - \rho_m\right)\left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h}\right)^n$$

$$\upsilon(\bar{z}) = \upsilon_m + \left(\upsilon_c - \upsilon_m\right)\left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h}\right)^n \quad (۴)$$

بر اساس تئوری کلاسیک تیرها[1]، منتجه‌های نیرو و ممان بر واحد طول شامل بخش‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشند. منتجه‌های مکانیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$N_{M\bar{x}} = A_{11}\varepsilon + B_{11}\frac{1}{\rho}$$

$$M_{M\bar{x}} = B_{11}\varepsilon + D_{11}\frac{1}{\rho} \quad (۵)$$

که در آن:

$$\varepsilon = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 \quad ; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \quad (۶)$$

1. Classical Theory of Beams

و w و u به ترتیب جابجایی‌های عرضی و محوری تیر بوده و ثابت‌های دیگر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(A_{11}, B_{11}, D_{11}\right) = \iint Q_{11}(1, \bar{z}, \bar{z}^2)dA \quad (۷)$$

که در آن Q_{11} ماتریس سختی کاهش یافته است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \upsilon^2(z)} \quad (۸)$$

با فرض اینکه دمای اولیه صفر باشد، می‌توان تفاضل دما را با T نشان داد، با در نظر گرفتن افزایش دمای ثابت T، منتجه‌های نیرو و ممان حرارتی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$N_{T\bar{x}} = \iint -Q_{11}\alpha(\bar{z})T\,dA$$

$$M_{T\bar{x}} = \iint -Q_{11}\alpha(\bar{z})T\bar{z}\,dA \quad (۹)$$

در نهایت نیروی محوری N و ممان خمشی M مربوط به منتجه های تنش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N = N_{M\bar{x}} + N_{T\bar{x}} = A_{11}\varepsilon + B_{11}\frac{1}{\rho} + N_{T\bar{x}} \quad (۱۰)$$

$$M = M_{M\bar{x}} + M_{T\bar{x}} = B_{11}\varepsilon + D_{11}\frac{1}{\rho} + M_{T\bar{x}} \quad (۱۱)$$

با فرض تئوری اویلر ـ برنولی، معادله حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$I\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial N}{\partial \bar{x}} = F_{\bar{x}} \quad (۱۲)$$

$$I\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \bar{x}^2} - N\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = F_{\bar{z}} \quad (۱۳)$$

که در آن $F_{\bar{x}}$ و $F_{\bar{z}}$ به ترتیب نیروهای محوری و عرضی، $\bar{t}$ معرف زمان و I ترم اینرسی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \iint \rho(\bar{z})dA \quad (۱۴)$$

با فرض اینکه اینرسی داخل صفحه و نیروی حجمی در راستای طولی قابل چشم‌پوشی باشند، معادله (۱۲) به صورت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (۱۵)$$

با جایگذاری معادلات (۶) و (۱۰) در معادله (۱۵) می‌توان رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) را نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(A_{11}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right] + B_{11}\left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}\right] + N_{T\bar{x}}\right) = 0 \quad (۱۶)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{B_{11}}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{A_{11}}\left(N_{T\bar{x}} + C_1\right) \quad (۱۷)$$

با یک بار انتگرال‌گیری از رابطه (۱۷) جابجایی محوری بدست می‌آید:

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{t}) = -\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{A_{11}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{x}}{A_{11}}\left(N_{T\bar{x}} + C_1\right) + C_2 \quad (۱۸)$$

که ثابت‌های انتگرال‌گیری با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌گردند. با در نظر گرفتن هر سه نوع تکیه‌گاه ساده، گیردار و ساده-گیردار و همچنین با توجه به حضور نیروی محوری P می‌توان نوشت:

$$\bar{u}(0,\bar{t}) = 0 \quad (۱۹)$$

$$\bar{u}(L,\bar{t}) = -\frac{PL}{A_{11}} \quad (۲۰)$$

بدین ترتیب ثابت‌های C_1 و C_2 به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$C_1 = \frac{A_{11}}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{L}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(L,\bar{t}) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(0,\bar{t})\right) - N_{T\bar{x}} + P$$

$$C_2 = \frac{B_{11}}{A_{11}}\frac{\partial \bar{w}(0,\bar{t})}{\partial \bar{x}} \quad (۲۱)$$

درنتیجه با جایگذاری معادله (۲۱) در معادله (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{B_{11}}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{L}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(L,\bar{t}) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(0,\bar{t})\right) - \frac{P}{A_{11}} \quad (۲۲)$$

اکنون معادله (۱۰) به صورت (۲۳) دوباره نویسی می‌شود:

$$N = -\frac{A_{11}}{2L}\int_0^L \bar{w}_{,\bar{x}}^2\, d\bar{x} - \frac{B_{11}}{L}\left(\bar{w}_{,\bar{x}}(L,\bar{t}) - \bar{w}_{,\bar{x}}(0,\bar{t})\right) - P + N_{T\bar{x}} \quad (۲۳)$$

از طرفی با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \bar{x}^2} = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right)\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \quad (۲۴)$$

که در آنها علامت کاما، نشان دهنده مشتق نسبت به پارامتر $\bar{x}$ می‌باشد. در نهایت با جایگذاری معادلات (۲۳) و (۲۴) در معادله (۱۳)، معادله حاکمه ارتعاشات غیرخطی ترمو ـ مکانیکی یک تیر هدفمند به صورت (۲۵) بدست می‌آید:

$$I\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right)\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \left[\frac{A_{11}}{2L}\int_0^L \bar{w}_{,\bar{x}}^2\, d\bar{x} - P + N_{T\bar{x}}\right]\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} - \left[\frac{B_{11}}{L}\left(\bar{w}_{,\bar{x}}(L,\bar{t}) - \bar{w}_{,\bar{x}}(0,\bar{t})\right)\right]\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} = F_{\bar{z}} \quad (۲۵)$$

این معادله به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در دو بعد جابجایی و زمان است که با تعریف پارامترهای بی‌بعد و به کمک روش‌های پخشی به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل می‌شود. یکی از متداولترین روش‌های پخشی که در این مقاله از آن استفاده خواهد شد، روش گالرکین است که در آن از خاصیت تعامد شکل مدها استفاده می‌گردد. همچنین به‌دلیل وجود بستر الاستیک غیرخطی وینکلر ـ پسترناک، طرف دوم تساوی فوق به صورت رابطهٔ (۲۶) تعریف می‌شود:

$$F_{\bar{z}} = -k_L\bar{w} - k_{NL}\bar{w}^3 + k_S\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} \quad (۲۶)$$

که $\bar{w}$ انحراف عرضی تیر در جهت z، k_L و k_{NL} به ترتیب ضرایب خطی و غیرخطی و k_S ضریب برشی بستر الاستیک است.

به منظور استخراج نتایج کلی و عمومی مستقل از ابعاد و اندازه خاص می‌توان معادله حاکمه را به‌کمک تعریف یک سری پارامتر بدون‌بعد به صورت رابطه (۲۷) بی‌بعد کرد:

$$x = \frac{\bar{x}}{L},\quad w = \frac{\bar{w}}{r},\quad t = \gamma\bar{t}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right)\Big/ IL^4} \quad (۲۷)$$

که در آن r شعاع ژیراسیون سطح مقطع است. با جایگذاری این پارامترها در معادله‌حاکمه، معادله‌دیفراسیل (۲۸) حاصل می‌شود.

$$w_{,tt} + w_{,xxxx} - \beta w_{,xx} + K_L w + K_{NL}w^3 - K_S w_{,xx} = 0 \quad (۲۸)$$

که در آن:

$$\beta = \Gamma\int_0^1 w_{,x}^2\, dx + \Lambda\left(w_{,x}(1,t) - w_{,x}(0,t)\right) - \mathrm{P} + N_T$$

$$\Gamma = \frac{A_{11}r^2}{2\Sigma},\quad \Lambda = \frac{B_{11}r}{\Sigma},\quad N_T = \frac{N_{T\bar{x}}L^2}{\Sigma}$$

$$\Sigma = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right),\quad \mathrm{P} = \frac{PL^2}{\Sigma},\quad K_L = \frac{k_L L^4}{\Sigma}$$

$$K_{NL} = \frac{k_{NL}r^2L^4}{\Sigma},\quad K_S = \frac{k_S L^2}{\Sigma} \quad (۲۹)$$

با فرض پاسخ به صورت $w(x,t)=V(t)\varphi(x)$ که در آن $V(t)$ یک تابع ناشناخته وابسته به زمان بوده و $\varphi(x)$ تابعی باشد که شرایط مرزی سینماتیک را ارضا کند، معادله (۲۸) به صورت رابطهٔ (۳۰) تغییر می‌کند:

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2}\varphi(x)+\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}V(t)-\left\{\Gamma\int_0^1\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}V(t)\right)^2dx\right.$$
$$\left.+\Lambda V(t)\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}(1,t)-\frac{d\varphi(x)}{dx}(0,t)\right)-\mathrm{P}+N_T\right\}$$
$$\times\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}V(t)+K_L\varphi(x)V(t)+K_{NL}\left(\varphi(x)V(t)\right)^3$$
$$-K_S\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}V(t)=0 \qquad (۳۰)$$

با اعمال روش گالرکین بر روی معادله حرکت (۳۰)، رابطهٔ (۳۱) حاصل می‌شود:

$$\int_0^1\varphi^2(x)\frac{d^2V(t)}{dt^2}dx+\int_0^1\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}V(t)\varphi(x)dx$$
$$-\left\{\Lambda V(t)\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}(1,t)-\frac{d\varphi(x)}{dx}(0,t)\right)-\mathrm{P}+N_T\right.$$
$$\left.+\Gamma\int_0^l\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}V(t)\right)^2dx\right\}\int_0^1\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\varphi(x)V(t)\right)dx$$
$$+K_L\int_0^1\varphi^2(x)V(t)dx+K_{NL}\int_0^1\varphi^4(x)V^3(t)dx$$
$$-K_S\int_0^1\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\varphi(x)V(t)dx=0 \qquad (۳۱)$$

در نهایت معادله حرکت (۲۸) بـر حسب ترم‌های تابع ناشناخته $V(t)$ به صورت رابطهٔ (۳۲) بدست می‌آید:

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2}+\left(\alpha_1+\mathrm{P}\alpha_P+N_T\alpha_{N_T}+\alpha_L+\alpha_S\right)V(t)$$
$$+\alpha_2V^2(t)+\left(\alpha_{NL}+\alpha_3\right)V^3(t)=0 \qquad (۳۲)$$

بـدون از دست دادن عمومیت مسئله اگـر A ماکزیمم دامنه بی‌بعد نوسان باشد، شرایط اولیه نوسان را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$V(0)=A,\quad \frac{dV(0)}{dt}=0 \qquad (۳۳)$$

تابع $\varphi(x)$ برای شرایط مرزی مختلف در جدول ۱ ارائه شده است و ضرایب α_i به صورت (۳۴) تعریف می‌شوند.

$$\alpha_1=\frac{\int_0^1\varphi^{(iv)}\varphi dx}{\int_0^1\varphi^2dx}\quad,\quad \alpha_2=-\Lambda\left(\varphi'(1)-\varphi'(0)\right)\alpha_P$$

$$\alpha_3=-\Gamma\alpha_P\int_0^1\varphi'^2dx\quad,\quad \alpha_L=K_L\,,\alpha_{Sh}=-K_S\alpha_P$$
$$\alpha_{NL}=K_{NL}\frac{\int_0^1\varphi^4dx}{\int_0^1\varphi^2dx}\quad,\quad \alpha_P=-\alpha_{N_T}=\frac{\int_0^1\varphi''\varphi dx}{\int_0^1\varphi^2dx} \qquad (۳۴)$$

۳- روش تحلیلی هموتوپی

از بین همه روش‌هایی که برای یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد، روش تحلیلی هموتوپی یکی از بهترین و مؤثرترین روش‌ها است. با استفاده از این روش، مسئله غیـرخطی به تعداد نـامحدودی مسئله خطی تبـدیل می‌شود. این فرایند توسط یک پارامتر دلخوه و محدود q که در بازه صفر تا یک قرار دارد، انجام می‌شود. به منظور معرفی مختصر این روش، مسئله غیرخطی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$N\left[x(\tau)\right]=0 \qquad (۳۵)$$

که در آن N یک عملگر غیرخطی کلی، τ نشان‌دهنده زمان بی‌بعد و x یک تابع نامعلوم می‌باشد. معادله هموتوپی در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H\left(\phi;q,h,h(\tau)\right)=(1-q)L\left[\phi(\tau;q)-x_0(\tau)\right]$$
$$-qhh(\tau)N\left[\phi(\tau;q)\right] \qquad (۳۶)$$

که در آن h یک پارامتر اختیاری غیرصفر ، $h(\tau)$ یک تابع اختیاری غیر صفر و L یک عملگر خطی اختیاری است. هنگامی که q از صفر تا یک افزایش می‌یابد، $\phi(\tau;q)$ از یک تقریب اولیه به حل دقیق تغییر می‌کند. به عبارت دیگر $\phi(\tau;q)=x_0(\tau)$، جـواب مـعادله $H\left(\phi;q,h,h(\tau)\right)=0$ به ازای $q=0$ می‌باشد و حل دقیق $\phi(\tau;q)=x(\tau)$، جواب معادله $H\left(\phi;q,h,h(\tau)\right)=0$ به ازای $q=1$ خواهد بود.

با در نظر گرفتن $H\left(\phi;q,h,h(\tau)\right)=0$، معادله تغییر شکل مرتبه صفرم به صورت رابطهٔ (۳۷) در می‌آید:

جدول ۱ مد ارتعاشی اول برای تیرهای با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	$\varphi(x)$
ساده	$\sin(\pi x)$
گیردار	$-\frac{\sinh(q)-\sin(q)}{\cosh(q)-\cos(q)}\left(\cosh(qx)-\cos(qx)\right)+\left(\sinh(qx)-\sin(qx)\right),\ q=4.730041$
ساده ـ گیردار	$-\frac{\sin(q)-\sinh(q)}{\cosh(q)-\cos(q)}\left(\cosh(qx)-\cos(qx)\right)+\left(\sin(qx)-\sinh(qx)\right),\ q=3.926602$

$$(1-q)L\left[\phi(\tau;q)-x_0(\tau)\right]=qhh(\tau)N\left[\phi(\tau;q)\right] \quad (۳۷)$$

که شرایط اولیه آن به شکل زیر می‌باشد:

$$\phi(\tau;q)=const.\ ,\quad \frac{d\phi(\tau;q)}{d\tau}=0 \quad (۳۸)$$

بر اساس قضیه تیلور، توابع $\phi(\tau;q)$ و $\omega(q)$ را می‌توان به صورت یک سری توانی بر حسب q بسط داد:

$$\phi(\tau;q)=\phi(\tau;0)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\phi(\tau;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}q^m$$
$$=x_0(\tau)+\sum_{m=1}^{\infty}x_m(\tau)q^m$$
$$\omega(q)=\omega_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\omega(q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}q^m=\omega_0+\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m q^m \quad (۳۹)$$

که $x_m(\tau)$ و ω_m مشتقات مرتبه mام می‌باشند.

با دیفرانسیل‌گیری از معادله تغییر شکل مرتبه صفرم نسبت به پارامتر q و قرار دادن $q=0$، معادله تغییرشکل مرتبه اول بدست می‌آید که تقریب مرتبه اول $x(t)$ را می‌دهد:

$$L\left[x_1(\tau)\right]=hh(\tau)N\left[\phi(\tau;q)\right]\Big|_{q=0}$$
$$x_1(0)=0,\ \frac{dx_1(0)}{d\tau}=0 \quad (۴۰)$$

تقریب‌های مراتب بالاتر را می‌توان با استفاده از محاسبه معادله تغییرشکل مرتبه mام بدست آورد. این‌عمل با m بار دیفرانسیل‌گیری از معادله (۳۷) نسبت به پارامتر q، به صورت زیر بدست می‌آید [۲۰].

$$L\left[v_m(\tau)-v_{m-1}(\tau)\right]=hh(\tau)R_m\left(\vec{v}_{m-1},\vec{\omega}_{m-1}\right) \quad (۴۱)$$

که پارامترهای آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_m\left(\vec{v}_{m-1},\vec{\omega}_{m-1}\right)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}N\left[\phi(\tau;q),\omega(q)\right]}{dq^{m-1}}\bigg|_{q=0}$$
$$\vec{v}_{m-1}(\tau)=\{v_0,v_1,v_2,...,v_{m-1}\}$$
$$\vec{\omega}_{m-1}(\tau)=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,...,\omega_{m-1}\} \quad (۴۲)$$

و شرایط اولیه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$v_m(0)=\dot{v}_m(0)=0 \quad (۴۳)$$

۴- کاربرد روش تحلیلی هموتوپی برای حل مسئله ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند

ابتدا با تعریف یک پارامتر زمانی بی‌بعد جدید به صورت $\tau=\omega t$، معادله (۳۲) به صورت (۴۴) در می‌آید:

$$\omega^2\frac{d^2V(\tau)}{d\tau^2}+\alpha V(\tau)+\beta V^2(\tau)+\gamma V^3(\tau)=0 \quad (۴۴)$$

که در آن:

$$\alpha=\alpha_1+\mathrm{P}\alpha_P+N_T\alpha_{N_T}+\alpha_L+\alpha_{Sh}$$
$$\beta=\alpha_2\quad,\quad\gamma=\alpha_{NL}+\alpha_3 \quad (۴۵)$$

و شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشد:

$$V(0)=A\quad,\quad\frac{dV(0)}{d\tau}=0 \quad (۴۶)$$

به منظور حل معادله (۴۴) با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی، ابتدا باید یک جواب تقریبی حدس زده شود. از آنجا که ارتعاشات سیستم در نظر گرفته شده یک حرکت پریودیک است و با توجه به شرایط اولیه سیستم، حدس اولیه به صورت رابطهٔ (۴۷) خواهد بود:

$$V_0(\tau)=A\cos(\tau) \quad (۴۷)$$

که در آن $A=W_{\max}/r$ و برابر با ماکزیمم دامنه بی‌بعد است. بنا بر آنچه پیش از این گفته شد، عملگر غیرخطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N\left[\phi(\tau;q),\omega(q)\right]=\omega(q)^2\frac{d^2\phi(\tau;q)}{d\tau^2}+\alpha\phi(\tau;q)$$
$$+\beta\phi^2(\tau;q)+\gamma\phi^3(\tau;q) \quad (۴۸)$$

و به منظور استفاده از روش تحلیلی هموتوپی، عملگر خطی اختیاری به صورت رابطهٔ (۴۹) در نظر گرفته خواهد شد:

$$L\left[\phi(\tau;q)\right]=\omega_0^2\left[\frac{\partial^2\phi(\tau;q)}{\partial\tau^2}+\phi(\tau;q)\right] \quad (۴۹)$$

تابع اختیاری $h(\tau)$ و پارامتر اختیاری h به ترتیب ناحیه و نرخ همگرایی حل تقریبی را تعیین می‌کنند. شکل ۲ تغییرات فرکانس غیرخطی یک تیر هدفمند را با تغییر در پارامتر مربوط به ناحیه همگرایی نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، با محاسبه تقریب‌های مرتبه بالاتر، ناحیه همگرایی افزایش می‌یابد، ولی مشاهده می‌شود که حتی تقریب‌های مرتبه پایین نیز در یک ناحیه کوچک دقت قابل قبولی را نشان می‌دهند. به همین دلیل جهت استخراج همه نتایج، پارامترهای همگرایی به صورت $h=-1$ و $h(\tau)=1$ لحاظ خواهد شد [۲۱]. با توجه به معادله (۴۰) و با در نظر گرفتن معادلات (۴۸) و (۴۹)، برای تقریب اول می‌توان نوشت:

$$\omega_0^2\left[\frac{\partial^2V_1(\tau)}{\partial\tau^2}+V_1(\tau)\right]=\omega^2\frac{d^2V_0(\tau)}{d\tau^2}+\alpha V_0(\tau)$$
$$+\beta\phi^2V_0^2(\tau)+\gamma\phi^3V_0^3(\tau) \quad (۵۰)$$

که در آن شرایط اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$V_1(0)=0 \quad , \quad \frac{dV_1(0)}{d\tau}=0 \tag{۵۱}$$

حال با قراردادن معادله (۴۷) در رابطه (۵۰)، می‌توان نوشت:

$$\omega_0^2\left[\frac{\partial^2 V_1(\tau)}{\partial\tau^2}+V_1(\tau)\right]=\left(\omega_0^2-\alpha-\frac{3}{4}\gamma A^2\right)A\cos(\tau)$$
$$-\frac{1}{2}\beta A^2\cos(2\tau)-\frac{\gamma}{4}W^3\cos(3\tau) \tag{۵۲}$$

سمت راست معادله (۵۲) شامل ترم‌هایی می‌باشد که باعث پیدایش جملات زمان‌رو در تابع V_1 می‌شوند و باید آنها را حذف نمود. این مسئله باعث پیدایش یک معادله جبری خواهد شد که حل آن تقریب مرتبه صفرم فرکانس غیرخطی را نتیجه می‌دهد و لذا داریم:

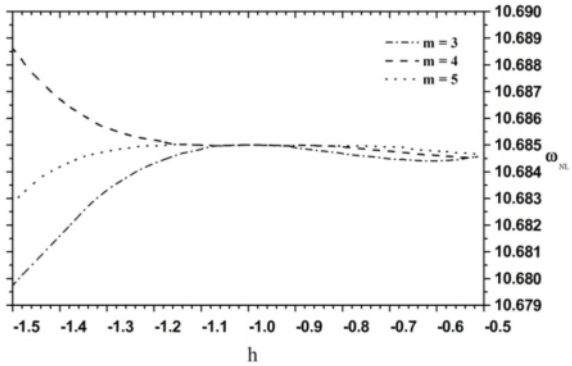
$$\omega_0=\omega_{Nonlinear_0}=\sqrt{\alpha+\frac{3}{4}\gamma A^2} \tag{۵۳}$$

همچنین با حل معادله (۵۲) و اعمال نکته فوق، تقریب مرتبه اول تابع زمانی به‌صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$V(\tau)=V_0(\tau)+V_1(\tau)$$
$$=\frac{1}{96\omega_0^2}\Big((96\omega_0^2A-3\gamma A^3+32\beta A^2)\cos(\tau)$$
$$+16\beta A^2\cos(2\tau)+3\gamma A^3\cos(3\tau)-48\beta A^2\Big) \tag{۵۴}$$

به همین ترتیب با قرار دادن m برابر با ۲ در معادله (۴۱) و اجتناب از حضور جملات زمان‌رو، تقریبی از فرکانس غیرخطی ω_1 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega_1=\omega_{Nonlinear_1}=-\frac{A}{384\omega_0^2}\Big(160\beta^2A-64\alpha\beta$$
$$+9\gamma^2A^3+64\omega_0^2\beta-6\alpha\gamma A-144\beta\gamma A^2\Big) \tag{۵۵}$$



شکل ۲ بررسی اثر پارامتر مربوط به ناحیه همگرایی بر روی فرکانس غیرخطی یک تیر هدفمند

و با توجه به معادله (۳۹)، تقریب فرکانس غیرخطی مرتبه اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega=\omega_0+\omega_1 \tag{۵۶}$$

۵- نتایج

جهت بررسی دقت حل تحلیلی ارائه شده به مقایسه این روش با دیگر روش‌های موجود پرداخته می‌شود و در ادامه، نتایج مربوط به ارتعاشات غیرخطی یک تیر هدفمند ارائه می‌شود.

ابتدا یک تیر ایزوتروپ تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار در نظر گرفته شد و به ازای دامنه‌های متفاوت، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی آنان محاسبه گردید. این نتایج با حل‌های تحلیلی تقریبی موجود در مقالات دیگر مقایسه شده است و به منظور بررسی دقت نتایج بدست آمده، یک حل عددی مورد بررسی قرار گرفت [۲۲] تا به عنوان مرجع اصلی مقایسه قرار گیرد.

نتایج فوق در جدول ۲ نشان داده شده است. همانطورکه دیده می‌شود جواب‌های حاصل از روش تحلیلی هموتوپی مطابقت بسیار خوبی با نتایج عددی را نشان می‌دهد.

جدول ۲ مقایسه بین نتایج به‌دست آمده از روش‌های مختلف برای نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تیر ایزوتروپ

تکیه‌گاه ساده:

دامنه بی‌بعد	مرجع [۲۳]	مرجع [۲۴]	مرجع [۱۷]	نتایج عددی	نتایج جدید
۱	۱/۰۸۹۱	۱/۰۸۹۷	۱/۰۸۹۷	۱/۰۸۹۲	۱/۰۸۹۱
۲	۱/۳۱۷۷	۱/۳۲۲۹	۱/۳۲۲۸	۱/۳۱۷۸	۱/۳۱۷۸
۳	۱/۶۲۵۶	۱/۶۳۹۴	۱/۶۳۹۳	۱/۶۲۵۷	۱/۶۲۵۹
۴	--	--	۱/۹۹۹۹	۱/۹۷۶۰	۱/۹۷۶۵

تکیه‌گاه گیردار:

دامنه بی‌بعد	مرجع [۲۴]	مرجع [۱۷]	نتایج عددی	نتایج جدید
۱	۱/۰۶۲۸	۱/۰۵۷۲	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۶۹
۲	۱/۲۱۴۰	۱/۲۱۲۵	۱/۲۰۹۸	۱/۲۰۹۸
۳	۱/۳۹۰۴	۱/۴۳۴۴	۱/۴۲۶۳	۱/۴۲۶۴
۴	۱/۵۶۳۵	۱/۶۱۷۱	۱/۶۸۱۶	۱/۶۸۱۸

در مرحله بعد ارتعاشات آزاد تیر هدفمند غیرخطی بررسی شده است. خواص مکانیکی این تیر هدفمند در جدول ۳ مشاهده می‌شود.

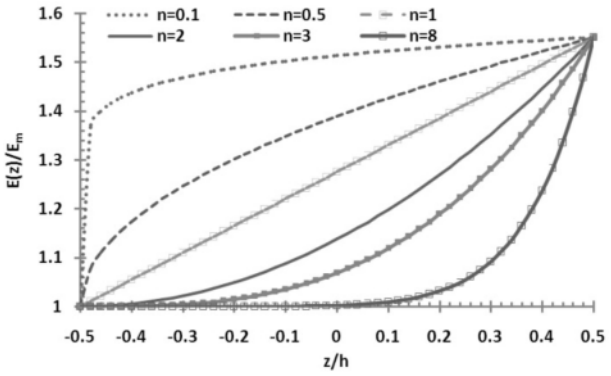
جدول ۳ خواص مواد تشکیل دهنده تیر هدفمند

خاصیت ماده	SuS304	Si_3N_4	واحد
مدول یانگ (E)	۲۰۷/۸	۳۲۲/۳	GPa
نسبت پواسون(ν)	۰/۳۱۷۸	۰/۲۴	-
چگالی (ρ)	۸۱۶۶	۲۳۷۰	kg/m^3
ضریب انبساط حرارتی (α)	$۱۲/۳۳\times۱۰^{-۶}$	$۵/۸۷\times۱۰^{-۶}$	1/K

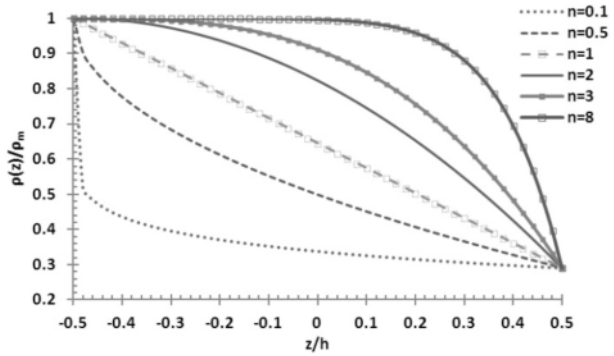
با توجه به معادله (۴) و از آنجا که پارامتر $\bar{z}$ در صفحه پایینی برابر با $-h/2$ و در صفحه بالایی برابر با $h/2$ می‌باشد، با افزایش توان کسر حجمی، مدول یانگ مؤثر کاهش پیدا می‌کند و چگالی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی افزایش می‌یابند. در شکل ۳ تغییرات خواص ماده در راستای ضخامت تیر به ازای تغییر در توان کسر حجمی نشان داده شده است.

معادله (۳۲) شامل یک ترم غیرخطی درجه دو ناشی از کوپل خمشی-کششی می‌باشد که با توجه به روابط ارائه شده، برای تیرهای دوسرگیردار ایزوتروپ، کامپوزیت و هدفمند و همچنین زمانی که تیر تقارن داشته باشد، این ترم برابر با صفر خواهد بود و معادله (۳۲) به معادله دافینگ تبدیل می‌شود.

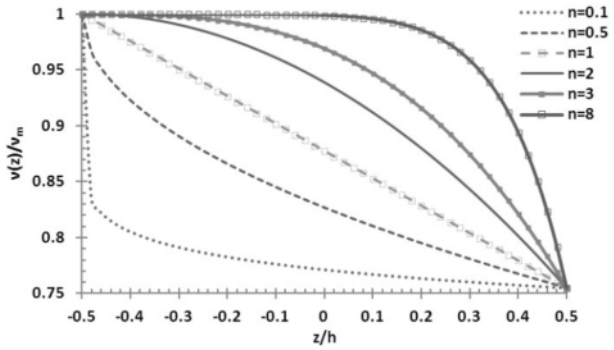
شکل ۴ تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی را برای تکیه‌گاه‌های ساده، گیردار و ساده ـ گیردار نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که کمترین نسبت فرکانسی مربوط به تکیه‌گاه گیردار و بیشترین آن مربوط به ساده ـ گیردار می‌باشد. باید به این نکته توجه داشت که هر چند انتظار می‌رفت بیشترین نسبت فرکانسی مربوط به تکیه‌گاه ساده باشد اما با توجه به هندسه تکیه‌گاه‌ها و عدم تقارن هندسی در تکیه‌گاه ساده ـ گیردار، بیشترین نسبت فرکانسی برای این نوع تکیه‌گاه مشاهده می‌شود.



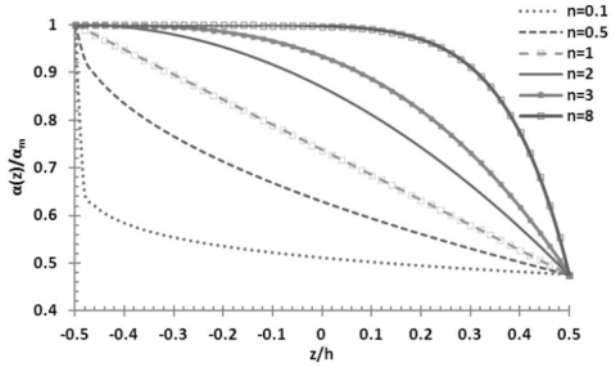
الف) تغییرات مدول‌یانگ



ب) تغییرات چگالی

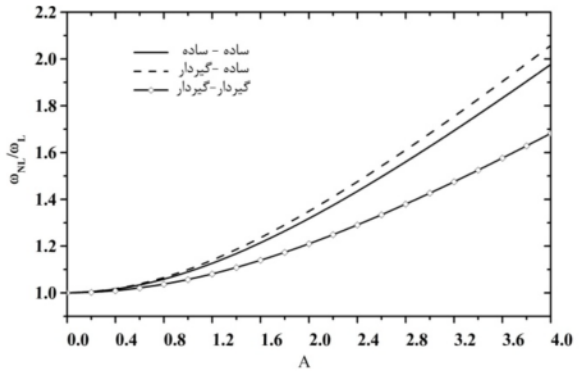


ج) تغییرات ضریب‌پواسون



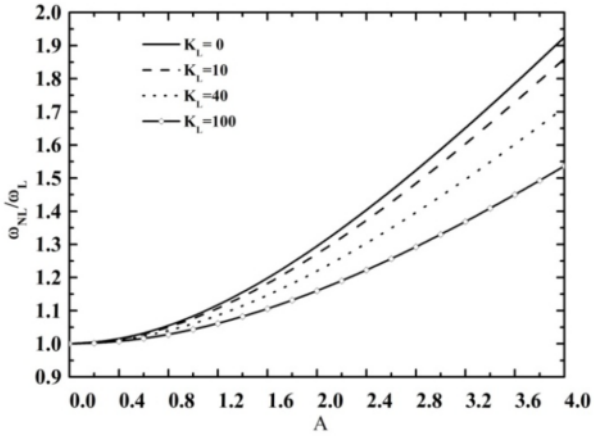
د) تغییرات ضریب انبساط حرارتی

شکل ۳ تغییرات خواص تیر هدفمند در راستای ضخامت

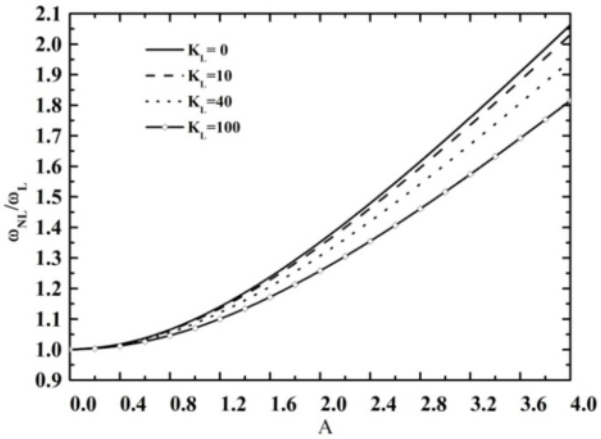


شکل ۴ اثر تکیه‌گاه‌های مختلف بر روی نسبت فرکانسی

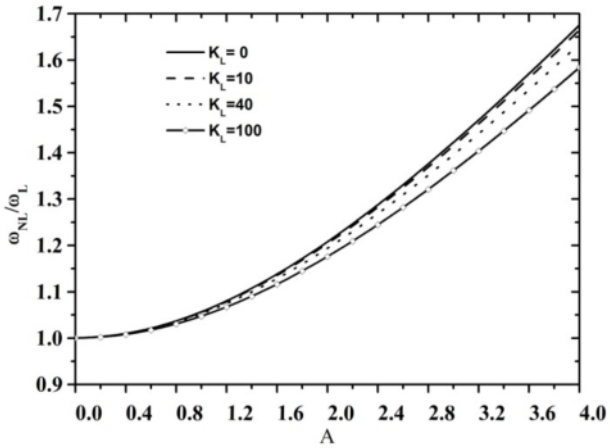
شکل‌های ۵ تا ۹ اثر ضرایب بستر الاستیک، نیروی محوری و همچنین اثـر دما را بـر روی نسبت فرکانس طبیعی نشان می‌دهند. در همه این موارد توان کسر حجمی برابر با ۲ در نظر گرفته شده است.



الف) تکیه‌گاه ساده

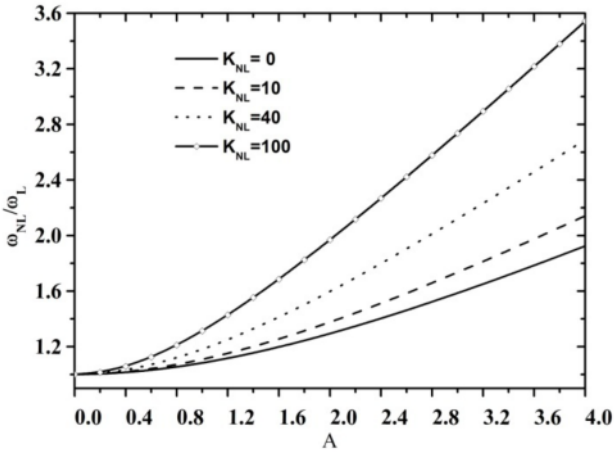


ب) تکیه‌گاه ساده ـ گیردار

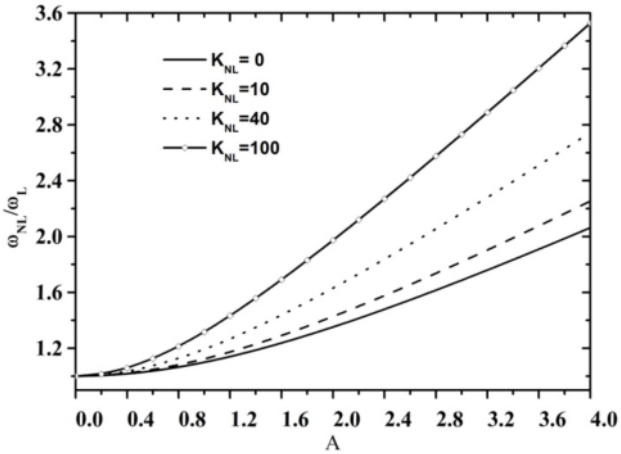


ج) تکیه‌گاه گیردار

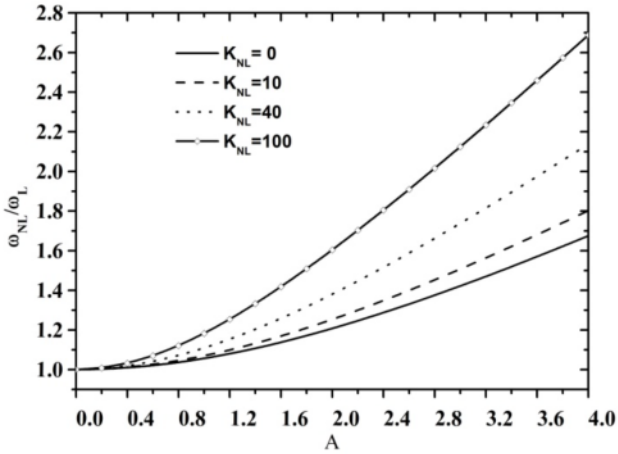
شکل ۵ اثر ضریب بستر وینکلر خطی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت



الف) تکیه‌گاه ساده



ب) تکیه‌گاه ساده ـ گیردار



ج) تکیه‌گاه گیردار

شکل ۶ اثر ضریب بستر وینکلر غیرخطی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، افزایش ضریب بستر الاستیک خطی منجر به کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای همه شرایط مرزی می‌شود. البته باید توجه داشت که حضور بستر الاستیک خطی باعث افزایش سختی تیـر و در نهایت افزایش فرکانس خطی و غیـرخطی می‌شود ولی میزان افزایش فرکانس خطی بیشتر از غیرخطی است. شکل ۶، افزایش نسبت فرکانسی ناشی از افزایش ضریب الاستیک غیرخطی را به خوبی مشخص می‌نماید.

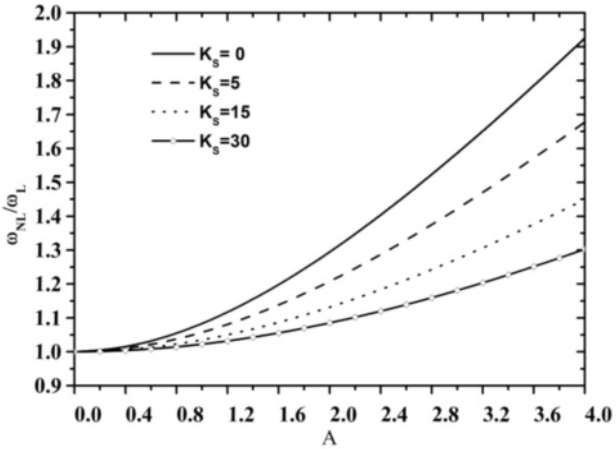
شکل ۷ بیانگر کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی به دلیل افزایش ضریب بستر الاستیک برشی برای همه شرایط مرزی می‌باشد و این در حالی است که مشابه با بستر الاستیک وینکلر خطی، حضور بستر الاستیک برشی (پسترناک) باعث افزایش هر دو فرکانس خطی و غیرخطی می‌شود ولی میزان افزایش فرکانس خطی بیشتر از غیرخطی است.

پس از آن و در ادامه به بررسی اثر بار محوری بر روی نسبت فرکانسی پرداخته می‌شود. شکل ۸ تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی‌به خطی را برای‌بارهای محوری متفاوت نشان می‌دهد.

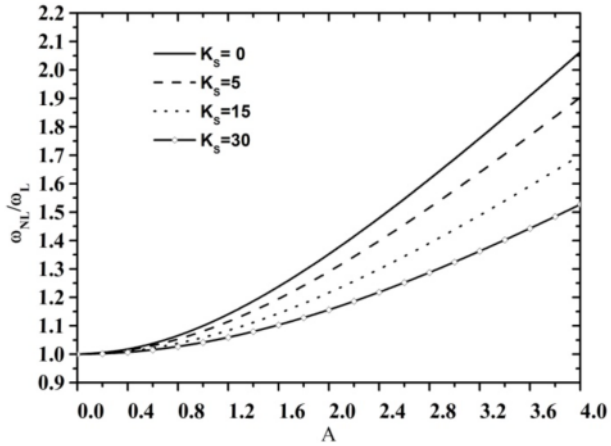
اگرچه با افزایش بار محوری، هر دو فرکانس خطی و غیرخطی کاهش پیدا می‌کنند، اما افزایش مقدار بار محوری باعث افزایش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی می‌شود و این به‌دلیل کاهش شدیدتر فرکانس خطی نسبت به فرکانس غیرخطی می‌باشد.

اثر آخرین پارامتر یعنی دما بر روی نسبت فرکانسی در شکل ۹ آورده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، افزایش دمای محیط نسبت به دمای مرجع، اثری مشابه با اثر بار محوری دارد. البته باید به این موضوع توجه داشت که تغییرات نسبت فرکانسی با دما به شدت تابعی از نسبت طول به ارتفاع تیر یا همان ضریب لاغری تیر می‌باشد. در شکل فوق این نسبت برابر با ۲۰ در نظر گرفته شده است.

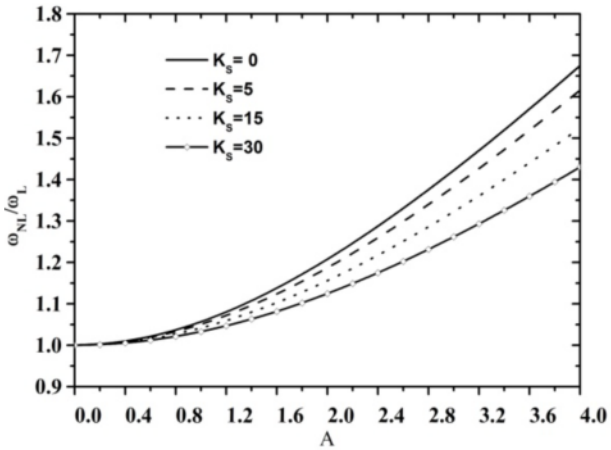
در پایان به منظور مشاهده بهتـر اثـر پارامترهای مختلف به صورت ترکیبی، بر روی فرکانس غیرخطی و همچنین نسبت فرکانسی یک تیر هدفمند، نتایج بیشتری استخراج شده است. این نتایج در قالب جداول ۴ تا ۶ برای شرایط مرزی متفاوت ارائه شده است. محاسبات مربوط به این جداول، بر اساس ضریب لاغری ۲۰ و توان کسر حجمی ۲ صورت گرفته است.



الف) تکیه‌گاه ساده

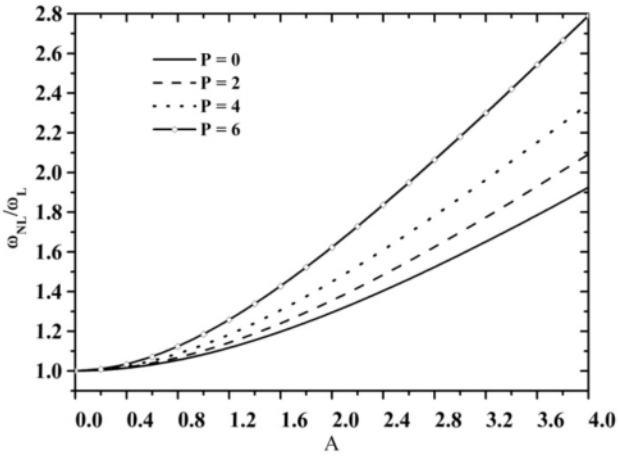


ب) تکیه‌گاه ساده ـ گیردار

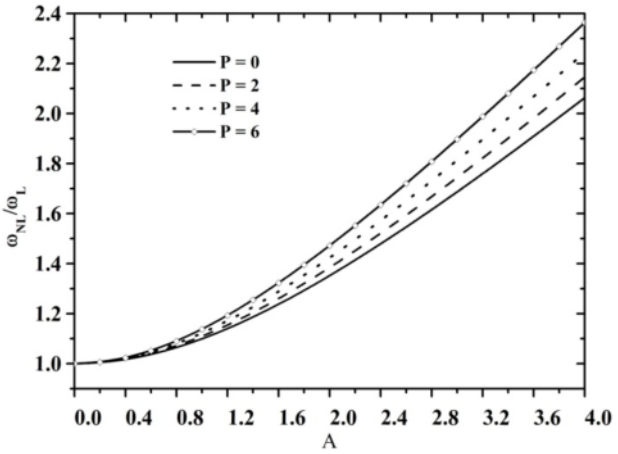


ج) تکیه‌گاه گیردار

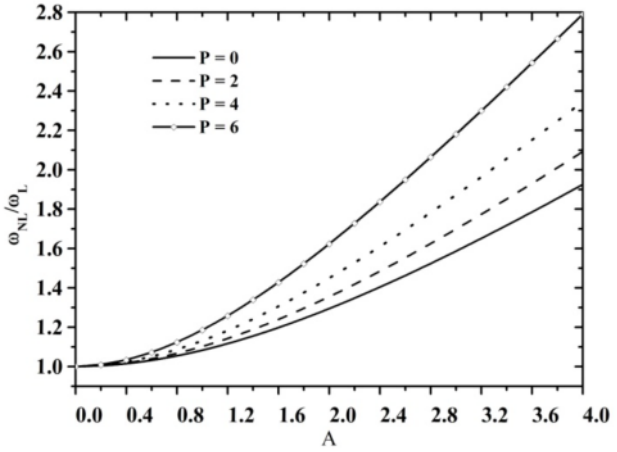
شکل ۷ اثر ضریب بستر الاستیک برشی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت



الف) تکیه‌گاه ساده

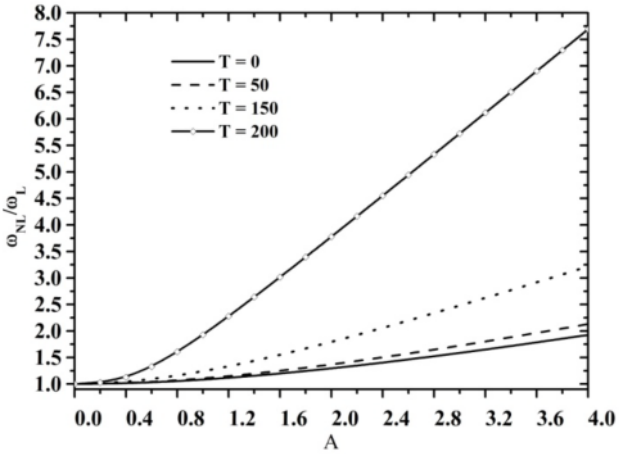


ب) تکیه‌گاه ساده ـ گیردار

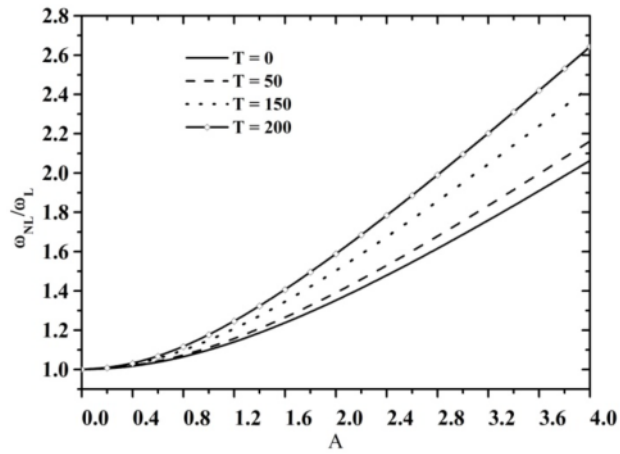


ج) تکیه‌گاه گیردار

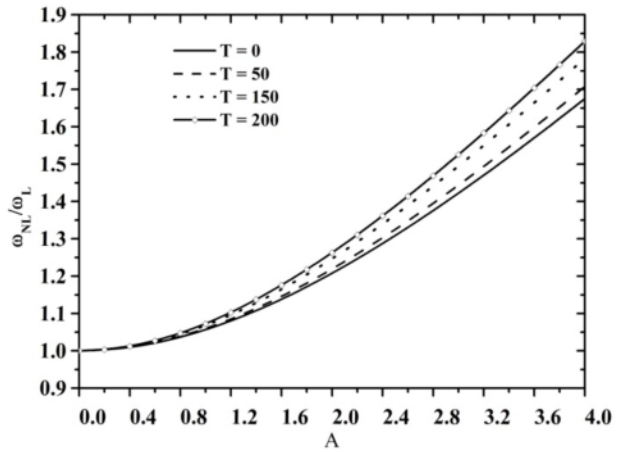
شکل ۸ اثر بار محوری بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت



الف) تکیه‌گاه ساده



ب) تکیه‌گاه ساده ـ گیردار



ج) تکیه‌گاه گیردار

شکل ۹ اثر دما بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت

جدول ۴ فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی تیر هدفمند به ازای پارامترهای مختلف (تکیه‌گاه ساده)

K_L	A	P	T	فرکانس غیرخطی K_{NL}				نسبت فرکانس غیرخطی به خطی K_{NL}			
				۵۰		۰		۵۰		۰	
				K_S		K_S		K_S		K_S	
				۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰
۱	۱	۰	۰	۱۹/۷۳۳	۱۱/۸۷۷	۱۹/۰۲۰	۱۰/۶۸۵	۱/۰۶۳۷	۱/۲۰۳۵	۱/۰۲۵۳	۱/۰۸۲۶
۵۰				۲۰/۹۶۳	۱۳/۸۴۶	۲۰/۲۹۳	۱۲/۷۲۹	۱/۰۵۵۹	۱/۱۴۰۵	۱/۰۲۲۲	۱/۰۵۶۶
۰	۲			۲۲/۸۵۸	۱۶/۴۳۵	۲۰/۳۳۹	۱۲/۷۷۲	۱/۲۳۲۲	۱/۶۶۵۳	۱/۰۹۶۴	۱/۲۹۴۱
۵۰				۲۳/۹۳۶	۱۷/۹۴۳	۲۱/۵۴۰	۱۴/۶۴۸	۱/۲۰۵۷	۱/۴۷۷۹	۱/۰۸۵۰	۱/۲۰۶۵
۰	۱	۳		۱۸/۹۶۴	۱۰/۵۲۷	۱۸/۲۲۲	۹/۱۷۲۶	۱/۰۶۹۳	۱/۲۷۸۵	۱/۰۲۷۵	۱/۱۱۴۰
۵۰				۲۰/۲۴۳	۱۲/۷۱۸	۱۹/۵۴۹	۱۱/۶۰۹	۱/۰۶۰۲	۱/۱۷۱۷	۱/۰۲۳۹	۱/۰۶۹۵
۰	۲			۲۲/۱۸۹	۱۵/۴۶۶	۱۹/۵۹۲	۱۱/۴۹۷	۱/۲۵۱۲	۱/۸۷۸۳	۱/۱۰۴۷	۱/۳۹۶۳
۵۰				۲۳/۳۰۳	۱۷/۰۶۸	۲۰/۸۳۷	۱۳/۵۷۲	۱/۲۲۰۵	۱/۵۷۲۵	۱/۰۹۱۳	۱/۲۵۰۴
۰	۱	۰	۱۰۰	۱۸/۵۱۳	۹/۶۶۴۶	۱۷/۷۵۴	۸/۱۷۵۱	۱/۰۷۳۱	۱/۳۵۴۵	۱/۰۲۹۱	۱/۱۴۵۸
۵۰				۱۹/۸۲۱	۱۲/۰۲۷	۱۹/۱۱۲	۱۰/۸۵۰	۱/۰۶۳۱	۱/۱۹۷۳	۱/۰۲۵۰	۱/۰۸۰۱
۰	۲			۲۱/۸۰۱	۱۴/۸۷۷	۱۹/۱۵۴	۱۰/۶۸۹	۱/۲۶۳۷	۲/۰۸۵۰	۱/۱۱۰۲	۱/۴۹۸۱
۵۰				۲۲/۹۳۳	۱۶/۵۴۷	۲۰/۴۲۶	۱۲/۹۱۳	۱/۲۳۰۰	۱/۶۴۷۳	۱/۰۹۵۵	۱/۲۸۵۵
۰	۱	۳		۱۷/۶۹۲	۷/۸۸۹۱	۱۶/۸۹۶	۵/۹۷۴۳	۱/۰۸۰۶	۱/۷۰۹۴	۱/۰۳۲۰	۱/۲۹۴۵
۵۰				۱۹/۰۵۷	۱۰/۶۹۷	۱۸/۳۱۹	۹/۳۶۶۱	۱/۰۶۸۶	۱/۲۶۶۹	۱/۰۲۷۲	۱/۱۰۹۲
۰	۲			۲۱/۱۰۱	۱۳/۷۷۴	۱۸/۳۵۷	۹/۰۵۷۵	۱/۲۸۸۸	۲/۹۸۴۷	۱/۱۲۱۲	۱/۹۶۲۹
۵۰				۲۲/۲۶۹	۱۵/۵۸۳	۱۹/۶۸۱	۱۱/۶۵۸	۱/۲۴۸۷	۱/۸۴۵۵	۱/۳۸۰۶	۱/۳۸۰۶

جدول ۵ فرکانس غیرخطی و نسبت‌فرکانسی تیر هدفمند به‌ازای پارامترهای‌مختلف(تکیه‌گاه ساده ـ گیردار)

K_L	A	P	T	فرکانس غیرخطی K_{NL}				نسبت فرکانس غیرخطی به خطی K_{NL}			
				۵۰		۰		۵۰		۰	
				K_S		K_S		K_S		K_S	
				۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰
۰	۱	۰	۰	۲۵/۲۵۵	۱۸/۷۰۸	۲۳/۹۷۳	۱۶/۹۴۴	۱/۱۰۱۶	۱/۲۱۳۴	۱/۰۴۵۷	۱/۰۹۹۰
۵۰				۲۶/۲۲۶	۲۰/۰۰۰	۲۴/۹۹۴	۱۸/۳۵۹	۱/۰۹۳۲	۱/۱۷۹۱	۱/۰۴۱۹	۱/۰۸۲۴
۰	۲			۳۱/۱۵۳	۲۶/۰۹۶	۲۶/۸۶۸	۲۰/۸۴۰	۱/۳۵۸۹	۱/۶۹۲۶	۱/۱۷۲۰	۱/۳۵۱۷
۵۰				۳۱/۹۴۸	۲۷/۰۴۴	۲۷/۷۸۳	۲۲/۰۰۵	۱/۳۳۱۷	۱/۵۹۴۴	۱/۱۵۸۱	۱/۲۹۷۳
۰	۱	۳		۲۴/۵۶۱	۱۷/۷۶۱	۲۳/۲۴۲	۱۵/۸۹۴	۱/۱۰۸۷	۱/۲۴۶۰	۱/۰۴۸۹	۱/۱۱۵۱
۵۰				۲۵/۵۵۹	۱۹/۱۱۷	۲۴/۲۹۴	۱۷/۳۹۴	۱/۰۹۸۹	۱/۲۰۱۴	۱/۰۴۴۵	۱/۰۹۳۱
۰	۲			۳۰/۵۹۱	۲۵/۴۲۰	۲۶/۲۱۸	۱۹/۹۹۵	۱/۳۸۰۶	۱/۷۸۳۴	۱/۱۸۳۲	۱/۴۰۲۸
۵۰				۳۱/۴۰۱	۲۶/۳۹۳	۲۷/۱۵۴	۲۱/۲۰۷	۱/۳۵۰۱	۱/۶۵۸۷	۱/۱۶۷۵	۱/۳۳۲۸
	۱	۰	۳۰۰	۲۱/۷۹۶	۱۳/۶۸۵	۲۰/۲۹۹	۱۱/۱۷۳	۱/۱۴۴۳	۱/۵۸۰۳	۱/۰۶۵۷	۱/۲۹۰۲
				۲۲/۹۱۴	۱۵/۴۰۴	۲۱/۴۹۵	۱۳/۲۱۴	۱/۱۲۷۸	۱/۳۷۷۸	۱/۰۵۷۹	۱/۱۸۱۹
	۲			۲۸/۴۰۷	۲۲/۷۲۷	۲۳/۶۴۹	۱۶/۴۸۹	۱/۴۹۱۴	۲/۶۲۴۵	۱/۲۴۱۶	۱/۹۰۴۱
				۲۹/۲۷۹	۲۳/۸۱۵	۲۴/۶۸۳	۱۷/۹۳۷	۱/۴۴۱۰	۲/۱۳۰۱	۱/۲۱۴۸	۱/۶۰۴۴
	۱	۳		۲۰/۹۸۹	۱۲/۳۵۹	۱۹/۴۳۱	۹/۵۱۹۸	۱/۱۵۸۵	۱/۹۴۳۱	۱/۰۷۲۵	۱/۴۹۶۸
				۲۲/۱۴۸	۱۴/۲۳۹	۲۰/۶۷۷	۱۱/۸۴۱	۱/۱۳۸۸	۱/۴۹۷۲	۱/۰۶۳۱	۱/۲۴۵۰
	۲			۲۷/۷۸۹	۲۱/۹۴۲	۲۲/۹۰۷	۱۵/۴۱۰	۱/۵۳۳۸	۳/۴۴۹۸	۱/۲۶۴۳	۲/۴۲۲۸
				۲۸/۶۸۰	۲۳/۰۶۹	۲۳/۹۷۳	۱۶/۹۵۰	۱/۴۷۴۶	۲/۴۲۵۶	۱/۲۳۲۶	۱/۷۸۲۲

جدول ۶ فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی تیر هدفمند به ازای پارامترهای مختلف (تکیه‌گاه گیردار)

K_L	A	P	T	فرکانس غیرخطی K_{NL}				نسبت فرکانس غیرخطی به خطی K_{NL}			
				۵۰		۰		۵۰		۰	
				K_S		K_S		K_S		K_S	
				۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰
۰	۱	۰	۰	۳۰/۶۱۷	۲۵/۰۸۹	۲۹/۴۲۹	۲۳/۶۳۰	۱/۰۷۷۰	۱/۱۲۱۴	۱/۰۳۵۲	۱/۰۵۶۲
۵۰				۳۱/۴۲۳	۲۶/۰۶۸	۳۰/۲۶۶	۲۴/۶۶۶	۱/۰۷۲۷	۱/۱۱۱۰	۱/۰۳۳۲	۱/۰۵۱۲
۰	۲			۳۶/۳۲۸	۳۱/۷۷۴	۳۲/۲۲۲	۲۷/۰۱۵	۱/۲۷۷۹	۱/۴۲۰۲	۱/۱۳۳۵	۱/۲۰۷۵
۵۰				۳۷/۰۱۴	۳۲/۵۵۹	۳۲/۹۹۰	۲۷/۹۲۸	۱/۲۶۳۵	۱/۳۸۷۶	۱/۱۲۶۲	۱/۱۹۰۲
۰	۱	۳		۳۰/۰۰۸	۲۴/۳۴۱	۲۸/۷۹۵	۲۲/۸۳۵	۱/۰۷۰۶	۱/۱۳۰۴	۱/۰۳۶۹	۱/۰۶۰۵
۵۰				۳۰/۸۳۰	۲۵/۳۴۹	۲۹/۶۵۰	۲۳/۹۰۶	۱/۰۷۵۸	۱/۱۱۸۵	۱/۰۳۴۷	۱/۰۵۴۸
۰	۲			۳۵/۸۱۳	۳۱/۱۸۲	۳۱/۶۴۳	۲۶/۳۱۹	۱/۲۸۹۶	۱/۴۴۸۱	۱/۱۳۹۴	۱/۲۲۲۳
۵۰				۳۶/۵۰۹	۳۱/۹۸۲	۳۲/۴۲۵	۲۷/۲۵۷	۱/۲۷۴۰	۱/۴۱۱۱	۱/۱۳۱۵	۱/۲۰۲۷
۰	۱	۰	۶۰۰	۲۴/۲۷۳	۱۶/۷۴۲	۲۲/۷۶۳	۱۴/۴۹۷	۱/۱۳۱۳	۱/۳۵۴۵	۱/۰۶۱۰	۱/۱۷۲۹
۵۰				۲۵/۲۸۳	۱۸/۱۸۴	۲۳/۸۳۶	۱۶/۱۳۴	۱/۱۱۹۲	۱/۲۷۷۰	۱/۰۵۵۱	۱/۱۳۳۰
۰	۲			۳۱/۱۲۸	۲۵/۶۱۶	۲۶/۲۵۶	۱۹/۴۷۴	۱/۴۵۰۹	۲/۰۷۲۵	۱/۲۲۳۸	۱/۵۷۵۶
۵۰				۳۱/۹۲۹	۲۶/۵۹۵	۲۷/۱۹۵	۲۰/۷۳۴	۱/۴۱۳۴	۱/۸۶۷۶	۱/۲۰۳۸	۱/۴۵۶۰
۰	۱	۳		۲۳/۴۹۸	۱۵/۵۸۹	۲۱/۹۳۶	۱۳/۱۵۸	۱/۱۴۲۰	۱/۴۴۸۳	۱/۰۶۶۰	۱/۲۲۲۴
۵۰				۲۴/۵۴۱	۱۷/۱۳۲	۲۳/۰۴۸	۱۴/۹۴۳	۱/۱۲۷۹	۱/۳۳۰۲	۱/۰۵۹۳	۱/۱۶۰۳
۰	۲			۳۰/۵۲۲	۲۴/۸۶۶	۲۵/۵۴۰	۱۸/۴۸۶	۱/۴۸۳۳	۲/۳۱۰۱	۱/۲۴۱۲	۱/۷۱۷۴
۵۰				۳۱/۳۴۰	۲۵/۸۷۶	۲۶/۵۰۵	۱۹/۸۱۲	۱/۴۴۰۴	۲/۰۰۹۲	۱/۲۱۸۲	۱/۵۳۸۳

۶- فهرست علایم

A	ماکزیمم دامنهٔ بی‌بعد نوسان
b	عرض تیر (m)
E	مدول یانگ (N/m^2)
h	ارتفاع تیر (m)
$\bar{k}_L$	سفتی بستر الاستیک خطی وینکلر (N/m)
$\bar{k}_{NL}$	سفتی بستر الاستیک غیر خطی وینکلر (N/m^3)
$\bar{k}_S$	سفتی بستر خطی پسترناک (N/m)
L	طول تیر (m)
$M_{\bar{x}}$	منتجهٔ ممان بر واحد طول (N)
$N_{\bar{x}}$	منتجهٔ نیرو بر واحد طول (N/m)
n	توان کسر حجمی
$\bar{P}$	بار محوری (N)
r	شعاع ژیراسیون (m)
t	زمان (s)
$\bar{u}$	جابه‌جائی محوری (m)
$V(t)$	پارامتر تغییر شکل وابسته به زمان
$\bar{w}$	جابه‌جائی عرضی (m)
ρ	چگالی (N/m^3)
ν	ضریب پواسون
ω	فرکانس غیر خطی (Rad/s)
$\varphi(x)$	شکل مد تیر

۷- مراجع

[1] Sankar B. V., "An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 5, 2001, pp. 689-696.

[2] Zhong Z., Yu T., "Analytical Solution of a Cantilever Functionally Graded Beam", *Composites Science and Technology*, Vol. 67, No. 3-4, 2007, pp. 481-488.

[3] Au F. T. K., Zheng D.Y., Cheung Y.K., "Vibration and Stability of Non-Uniform Beams with Abrupt Changes of Cross-Section by using C1 Modified Beam Vibration Functions", *Applied Mathematics and Modeling*, Vol. 23, No. 1, 1999, pp. 19-34.

[4] Ying J., Lu C. F., Chen W. Q., "Two-Dimensional Elasticity Solutions for Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundations", *Composite Structures*, Vol. 84, No. 3, 2008, pp. 209-219.

[5] Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S., "An Analytical Study on the Nonlinear Vibration of Functionally

Graded Beams", *Meccanica*, Vol. 45, No. 6, 2009, pp. 743-752.

[6] Simsek M., "Non-Linear Vibration Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam under Action of a Moving Harmonic Load", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, 2010, pp. 2532-2546.

[7] Fallah A., Aghdam M. M., "Nonlinear Free Vibration and Post Buckling Analysis of Functionally Graded Beams on Nonlinear Elastic Foundation", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 30, No. 4, 2011, pp. 571-583.

[8] Librescu L., Oh S.Y., Song O., "Thin-Walled Beams Made of Functionally Graded Materials and Operating in a High Temperature Environment: Vibration and Stability", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 28, No. 6-7, 2005, pp. 649-712.

[9] Sankar B.V., "An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 5, 2001, pp. 689-696.

[10] Lu C. F., Chen W. Q., Xu R.Q., Lim C.W., "Semi-Analytical Elasticity Solutions for Bi-Directional Functionally Graded Beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, No. 1, 2008, pp. 258-275.

[11] Bian Z. G., Lim C. W., Chen W. Q., "On Functionally Graded Beams with Integrated Surface Piezoelectric Layers", *Composite Structures*, Vol. 72, No. 3, 2006, pp. 339-351.

[12] Bhangale R. K., Ganesan N., "Thermoelastic Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Beam with Constrained Viscoelastic Core", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 1-2, 2006, pp. 294-316.

[13] Bangera K. M., Chandrashekhara K., "Nonlinear Vibration of Moderately Thick Laminated Beams using Finite Element Method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, No. 4, 1991, pp. 321-333.

[14] Malekzadeh P., Vosoughi A. R., "DQM Large Amplitude Vibration of Composite Beams on Nonlinear Elastic Foundations with Restrained Edges", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 3, 2009, pp. 906-915.

[15] He J. H., "Variational Iteration Method: Some Recent Results and New Interpretations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 207, No. 1, 2007, pp. 3-17.

[16] Younesian D., Askari H., Saadatnia Z., KalamiYazdi M., "Frequency Analysis of Strongly Nonlinear Generalized Duffing Oscillators using He's Frequency Amplitude Formulation and He's Energy Balance Method", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 9, 2010, pp. 3222-3228.

[17] Pirbodaghi T., Ahmadian M. T., Fesanghary M., "On the Homotopy Analysis Method for Non-Linear Vibration of Beams", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 2, 2009, pp. 143-148.

[18] Baghani M., JafariTalookolaei R. A., Salarieh H., "Large Amplitudes Free Vibrations and Post-Buckling Analysis of Unsymmetrically Laminated Composite Beams on Nonlinear Elastic Foundation", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 1, 2011, pp. 130-138.

[19] Ding H. J., Huang D. J., Chen W. Q., "Elasticity Solutions for Plane Anisotropic Functionally Graded Beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 1, 2007, pp. 176-196.

[20] Li S., Liao S.J., "An Analytic Approach to Solve Multiple Solutions of a Strongly Nonlinear Problem", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, No. 2, 2005, pp. 854-865.

[21] Liao S. J., "Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method", *Chapman and Hall/CRC*, 2004.

[22] Lai S. K., Lam C. W., Wu B.S., Wang C., Zeng Q.C., He X.F., "Newton-Harmonic Balancing Approach for Accurate Solutions to Nonlinear Cubic-Quintic Duffing Oscillators", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, No. 2, 2008, pp. 852-866.

[23] Azrar L., Benamar R., White R. G.,"A Semi-Analytical Approach to the Nonlinear Dynamic Response Problem of S-S and C-C Beams at Large Vibration Amplitudes, Part I: General Theory and Application to the Single Mode Approach to Free and Forced Vibration Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 2, 1999, pp. 183-207.

[24] Qaisi M. I., "Application of the Harmonic Balance Principle to the Nonlinear Free Vibration of Beams", *Applied Acoustics*, Vol. 40, No. 2, 1993, pp. 141-151.