



ارائه مدل عددی بی بعد در تحلیل نویز آکوستیکی پدیده سوپر کاویتاسیون با استفاده از روش اغتشاشات

نوروز محمد نوری^۱، محمد ریاحی^{۲*}، علی ولی پور چهارده چریک^۳

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴، Riahi@iust.ac.ir

چکیده- کاویتاسیون تغییر فاز سیال مایع به بخار به علت کاهش فشار محلی در اثر سرعت موضعی بالا می باشد. در اثر کاویتاسیون حبابهایی در نقاط کم فشار ایجاد می شوند. انتقال این حبابها توسط جریان سیال به نقاط پر فشار باعث فروپاشی حبابها می گردد که این امر در نهایت باعث ایجاد نویز می شود. دستیابی به مدل مناسب در شبیه سازی امواج صوتی ناشی از کاویتاسیون به منظور شناسایی و کنترل این پدیده اهمیت بسیاری دارد. از آنجا که صوت آکوستیکی بخشی از دینامیک جریان می باشد، معادلات بقای جرم، مومنوم و انرژی به عنوان معادلات پایه در تحلیل رفتار آکوستیکی پدیده کاویتاسیون و سوپر کاویتاسیون شناخته می شوند. در این تحقیق به منظور مدل سازی جریان کاویتاسیون به همراه نویز آکوستیکی، ابتدا با استفاده از آنالیز ابعادی، معادلات حاکم به فرم بی بعد تبدیل می شوند. ترم آکوستیکی به عنوان ترمی در مرتبه پایین تر نسبت به دینامیک جریان سیال لحاظ می گردد، سپس با استفاده از روش اغتشاشات، دسته های متعددی از معادلات با مرتبه های مختلف بدست می آیند. نتایج نشان می دهند که به منظور دستیابی به نوسانات فشار ناشی از نویز آکوستیکی کاویتاسیون، باید معادلات جریان سیال را برای سیال تراکم پذیر حل کرد. همچنین معادلات آکوستیکی در مرتبه دوم معادلات حاصله قرار داشته که با معادلات دینامیک جریان کوپل می باشند.

کلیدواژگان: آکوستیک، مدل سازی، اغتشاش و آنالیز ابعادی.

Using perturbation method to obtain scaled numerical model for analyzing noise of supercavitation

N. M. Nouri¹, M. Riahi^{2*}, A. Valipour³

1- Assoc. Prof. of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

2- Assoc. Prof. of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

3- PhD Student, Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

* P.O.B. 1684613114 Tehran, Iran. Riahi@iust.ac.ir

Abstract- Cavitation is changing liquid phase to gas phase due to decreasing local pressure of flow induced by increasing local velocity. In situation of maximum velocity, some bubbles that contain air and vapor are produced and traveled from point of high pressure to lower pressure, so bubbles are destroyed rapidly and produce acoustic noise. Providing sufficient numerical model for simulation of acoustic waves induced by cavitation or supercavitation is so important for monitoring and controlling of these phenomena. For analyzing propagation of acoustic waves in fluid, sound is part of fluid dynamics, so momentum, energy and mass conservation equations like fluid dynamics are basics equation for identification of supercavitation. In this paper, to provide a numerical model contains hydrodynamic and acoustic parts of fluid dynamics, first by using scaled analysis, non-dimensions forms of conservation equations are generated. Then by using perturbation method and considering acoustic term as a term in lower order than hydrodynamic term, conservation equations can be separated to two group equations with different orders. Leading order is hydrodynamic equations and first order is acoustic form of conservation equations. Results in first order equation show coupling of acoustic terms with hydrodynamic terms of fluid flow.

Keywords: Perturbation, Acoustic, Scaled Analysis, Modeling.

۱- مقدمه

تبخیر مایع در اثر کاهش فشار به مقداری کمتر از فشار بخار اشباع آن مایع، کاویتاسیون نامیده می‌شود. کاویتاسیون زمانی رخ می‌دهد که فشار موضعی یک سیال مایع به طور ناگهانی به زیر یک مقدار بحرانی برسد که این مقدار بحرانی در ارتباط با فشار بخار سیال مایع است. با قرارگیری سیال در این ناحیه، حباب‌های کوچکی که از بخار و دیگر گازها تشکیل شده‌اند، شروع به شکل‌گیری می‌کنند. این حباب‌ها با جریان سیال حرکت کرده و زمانی که به ناحیه‌ای با فشار بالاتر می‌رسند، از بین رفته و متلاشی می‌شوند. با افزایش بیشتر سرعت و یا کاهش بیشتر فشار موضعی انواع مختلف کاویتاسیون در جریان قابل مشاهده می‌شوند. افزایش بیش از اندازه سرعت باعث می‌شود که از به هم پیوستن حباب‌ها یک حباب بزرگتر ایجاد شود. اگر این حباب بخشی از جسم را شامل شود به آن کاویتاسیون ثابت و یا صفحه‌ای^۱ گویند. اگر افزایش سرعت یا کاهش فشار موضعی در سیال به حدی باشد که کاویتی حاصل تمام سطح جسم را بپوشاند به آن سوپرکاویتاسیون یا ابر کاواک^۲ گویند.

به طور کلی دو راه، مشاهده چشمی و مشاهده آکوستیکی برای شناسایی پدیده کاویتاسیون، دینامیک آن و ارزیابی این پدیده وجود دارند [۱]. بنابراین نویز حاصل از این پدیده اگرچه به عنوان یک اثر نامطلوب شناخته می‌شود، اما از طرف دیگر این صدا و نویز می‌تواند به عنوان راهی برای شناسایی این پدیده نیز در نظر گرفته شود. صدا نوعی اغتشاش مکانیکی است که در محیط الاستیک منتشر می‌شود. در سیالات نویز (صوت) زمانی که یک حرکت نسبی بین دو سیال و یا بین سیال و سطح وجود دارد، تولید می‌شود. نویز همواره به عنوان یک صوت یا صدای ناخواسته که در عملکرد نرمال سیستم دخالت دارد، شناخته می‌شود. صدا در جریان یک سیال مایع هم می‌تواند به علت توربولانسی و آشفتگی مایع و هم در اثر وقوع پدیده کاویتاسیون ایجاد شود. توربولانسی و جریان گردابه‌ها معمولاً نوسانات فشاری با فرکانس‌های کم ایجاد می‌کنند در شرایطی که صدای حاصل از پدیده کاویتاسیون غالباً دارای یک رژیم آکوستیکی فرکانس بالا در حدود ۱ تا ۱۰۰ کیلو هرتز می‌باشد [۲]. مطالعات برنن [۳] نشان می‌دهد

که سهم انرژی فروپاشی حباب‌ها در فرکانس‌های بالا، بیشتر از سایر حوادث مشابه بدون وقوع کاویتاسیون می‌باشد. اثر آکوستیکی کاویتاسیون در رنج امواج باند پهن التراسونیک (بالای ۲۰ کیلو هرتز) می‌باشد. در حالت کلی صدا یک ترم اغتشاشی در حالت پایدار است [۴]. پیرس [۵] و گولدستین [۶] نحوه دستیابی به معادلات موج در حالات کلی را به جزئیات بیان کرده‌اند. مورچ [۷] مطالعات خود را بر روی دینامیک نوعی از کاویتاسیون ثابت، که به نام کاویتاسیون ثابت ناپایدار و یا کاویتاسیون ابری معروف است، متمرکز کردند.

مطالعات تجربی رایسمن نشان داد [۸] که نویز حاصل از فروپاشی کاویتاسیون ابری به مراتب بیشتر از مقدار نویزی است که با جمع آثار نویز ناشی از فروپاشی هر حباب منفرد (که در یک ابر قرار دارند) بدست می‌آید. ونگ [۹] امواج شوکی^۳ ایجاد شده در کاویتاسیون ابری را مورد بررسی قرار داد. وی رشد و فروپاشی ابر کروی شکلی از حباب‌های کاویتاسیون را به صورت غیرخطی مدل نمود و به واسطه آن پالس‌های فشاری و مومنتوم ایجاد شده که عامل ایجاد نویز و سایش می‌باشند را بدست آورد. ونگ یک مدل ترکیبی پیوسته^۴ را با معادله ریلی- پلیست ترکیب کرد و آنرا به صورت عددی و با استفاده از روش انتگرال لاگرانژ حل نمود.

ونگ و برنن در سال‌های بعد [۱۰، ۱۱] به صورت عددی به توسعه مطالعه خود در دستیابی به نویز آکوستیکی ناشی از کاویتاسیون ابری پرداختند. رایسمن نیز به همراه ونگ و برنن هم به صورت تجربی و هم به صورت عددی، به تحلیل آکوستیکی پدیده کاویتاسیون ابری پرداخت و با پردازش سیگنال‌های دریافتی از آزمایش خود نشان داد که محدوده فرکانس سیگنال‌های نویز این نوع کاویتاسیون تقریباً بین ۱۰ هرتز تا ۱۰۰ کیلو هرتز می‌باشد [۱۲]. لوی [۱۳] تحقیقات در بررسی نویز ناشی از پدیده کاویتاسیون ابری را به صورت عددی و تجربی در تونل آب با سرعت بالا و برروی هیدروفویل NACA0015 توسعه داد. سئو [۱۴] نویز جریان کاویتاسیون^۵ در اطراف یک سیلندر دو بعدی با سطح مقطع دایروی با استفاده از روش عددی شبیه‌سازی مستقیم^۶ تخمین زده شد.

3. Shock Waves

4. Continuum Mixture Model

5. Cavitations Flow Noise

6. Direct Numerical Simulation (DNS)

1. Sheet Cavitation

2. Supercavitation

می باشد می توان با به کار بردن قوانین بقای جرم، مومنتوم و انرژی برای یک ذره بنیادی از سیال، علاوه بر دینامیک جریان سیال، آکوستیک ناشی از پدیده کاویتاسیون را نیز توصیف و مدل سازی کرد. همچنین از آنجا که هدف تحقیق حاضر ارائه مدل برای پدیده های ناشناخته است، لذا لازم است که معادلات حاکم در حالت بدون بعد تحلیل شوند. استفاده از آنالیز ابعادی، به منظور ارائه بی بعد معادلات حاکم باعث می شود تا با مقایسه وزن ترم های حاضر در معادلات بتوان تشخیص داد که کدام ترم ها اهمیت بیشتری دارند و یا کدام ترم اهمیتی ندارد. علاوه بر این، بدست آوردن دانش بیشتر نسبت به اهمیت ترم های ناشناخته، فرایند حل عددی ساده و کاهش وابستگی حل به کمیت های فیزیکی مهمترین دلایل در ارائه مدل بی بعد می باشند. معادلات ۱ تا ۳ به ترتیب بیانگر فرم دارای بعد معادلات پیوستگی (بقای جرم)، مومنتوم و ترکیب شده معادلات حالت و انرژی برای یک سیال مایع، تراکم پذیر خالص در فرایند برگشت پذیر می باشند [۱۹].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \rho Q \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial (\vec{u} \rho)}{\partial t} \right] + [\vec{u} \nabla (\vec{u} \rho)] = [-\nabla p] + \mu [\nabla^2 \vec{u}] + \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \nabla (\text{div}(\vec{u})) \right) + \rho \vec{u} Q \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + [\vec{u} \nabla (p)] = c^2 [-\rho \text{div}(\vec{u})] + \left(\frac{c^2 \beta}{c_p} \right) \left[\mu_v (\nabla \cdot \vec{u})^2 + 2\mu \{ e_{ij} e_{ji} - \frac{1}{3} e_{ii}^2 \} \right] \quad (3)$$

در این معادلات $\rho(X, t)$ چگالی، $\vec{u}(X, t)$ سرعت، $Q(X, t)$ منبع حجمی افزایش جرم سیال، p فشار سیال، μ ویسکوزیته، μ_v ویسکوزیته تراکمی، e_{ij} تانسور نرخ کرنش، c سرعت صوت، C_p گرمای ویژه متناظر و ثابت $\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}$ می باشند. T نیز در این رابطه دما است.

در هنگام وقوع این پدیده، تغییرات سرعت، فشار و دانسیته سیال در زمان و مکان مشاهده می شود. لذا سیستم معادلات دربر دارنده ترم هایی هستند که تغییرات کامل زمانی و مکانی دانسیته، سرعت و فشار را بیان می کنند. این ترم ها در روابط ۱

در سال های اخیر مطالعات گسترده ای در بررسی و ارزیابی سوپرکاویتاسیون (حالت گسترش یافته کاویتاسیون) در آزمایشگاه هیدرودینامیکی دانشگاه علم و صنعت ایران انجام شده است که از آن جمله مقیمی [۲] پایداری مرز کاویتی در هنگام ایجاد سوپرکاویتاسیون را ارزیابی کرد. هوو و فولی مطالعات وسیعی را در دستیابی به صدای منتشر شده از پدیده سوپرکاویتاسیون تهیه شده^۱ انجام داده اند [۱۵-۱۸]. در این نوع سوپرکاویتاسیون، با تزریق هوا فشار حفره به صورت مصنوعی تنظیم می شود که در نتیجه آن، در سرعت کمتری می توان سوپرکاویتی را در جریان مشاهده کرد. شکل ۱ عکسی از تشکیل سوپرکاویتاسیون در تونل آب است. بنابراین با توجه به کاربردهای نظامی و همچنین زیست محیطی صوت ناشی از سوپرکاویتاسیون و کاویتاسیون و نیز این که شناسایی از طریق امواج صوتی گسیل یافته یکی از دو راهی بوده که برای شناسایی این پدیده ها معرفی شده است.

لزوم شناخت این مسئله (یعنی بررسی آکوستیکی کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون) اهمیت زیادی دارد. لذا در این تحقیق سعی شده تا به مدل سازی جریان سوپرکاویتاسیون و کاویتاسیون به همراه نویز آکوستیکی حاصله پرداخته شود. در ادامه به منظور تخمین مناسب صوت ناشی از وقوع کاواک، باید معادلات حاکم بر دینامیک جریان سیال را استخراج کرد.



شکل ۱ سوپر کاویتاسیون ایجاد شده پشت دماغه، در تونل آب آزمایشگاه هیدرودینامیک دانشگاه علم و صنعت ایران [۲]

۲- آنالیز ابعادی

از آنجا که در وقوع پدیده های گوناگون در محیط سیالاتی (مثلاً کاویتاسیون)، صوت آکوستیکی بخشی از دینامیک جریان سیال

1. Artificial Supercavitation

$$(Eu) \left((St) \left[\frac{\partial p^*}{\partial t^*} \right] + [u^* \nabla(p^*)] \right) = \left(\frac{c}{\tilde{U}} \right)^2 [-\rho^* \text{div}(u^*)] + \left(\frac{c^2 \beta}{c_p} \right) \left[\frac{1}{Re_v} (\nabla \cdot u^*)^2 + \frac{1}{Re} 2\{e_{ij}^* e_{ji}^* - \frac{1}{3} e_{ii}^{*2}\} \right] \quad (7)$$

که در این روابط، پارامترهای بدون بعد عدد رینولدز، عدد استروهل و عدد اویلر به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$St = \frac{\tilde{\omega} L}{\tilde{U}} \quad \frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\tilde{\rho} \tilde{U} L} \quad Eu = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho} \tilde{U}^2} \quad (8)$$

همان طور که گفته شد، معادلات ۵ تا ۷ فرم بدون بعد معادلات توصیف دینامیک جریان سیال می‌باشند. با توجه به این که ترم‌های با اندیس ستاره دارای مرتبه واحد می‌باشند، مشاهده می‌شود مرتبه ترم‌های دیفرانسیلی، از مرتبه واحد است. همچنین اعداد بدون بعد در واقع همان وزن ترم‌های دیفرانسیلی می‌باشند که اهمیت هر ترم را نمایان می‌سازند. با مقایسه وزن ترم‌های دیفرانسیلی (اعداد بی بعد) که تعداد آنها ۳ عدد می‌باشد، مشاهده می‌شود که برای سه معادله فوق، ۲۷ حالت متفاوت امکان‌پذیر است، که این حالت‌ها بر گرفته از شرایطی است که برای هر عدد بی بعد ۳ وضعیت مختلف وجود دارد. این وضعیت‌ها عبارتند از این که، مرتبه عدد بی بعد بسیار بزرگتر از مرتبه واحد است، یا از مرتبه واحد بوده و یا بسیار کوچکتر از مرتبه واحد می‌باشد.

حالات مختلف معادلات حاکم دلالت بر انواع مختلف مسئله دارد. حالات سازگار با وقوع کاویتاسیون در جریان برای شرایطی است که عدد اویلر و استروهل از مرتبه واحد بوده و عدد رینولدز بسیار کوچکتر از مرتبه واحد نباشند. علت این مطلب آن است که در باقی شرایط، ترم‌های مورد نیاز برای مدل‌سازی جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون حذف می‌شوند. بطور مثال در رینولدزهای بسیار کمتر از واحد، اثرات ترم همرفتی^۱ حذف می‌شود در صورتی که برای مدل‌سازی انتقال حباب‌ها توسط جریان سیال، محاسبه این ترم‌ها لازم و ضروری است. همچنین حالات مرتبط با عددهای استروهل بسیار کم باعث می‌شود تا شرایط جریان پایدار بوجود آید که مورد نظر تحقیق حاضر نیست.

تا ۳ در سمت چپ معادلات آورده شده‌اند که بیانگر مشتق مادی این پارامترها می‌باشند. این ترم‌ها چگونگی ایجاد و توسعه زمانی و مکانی کاویتاسیون در میدان جریان را تشریح می‌کنند. ترم Q ، بیانگر حضور منبع نوسانات حجمی ناشی از وقوع کاویتاسیون می‌باشد و ترم‌های دارای ضریب ویسکوزیته اثرات ناشی از لزجت را نشان می‌دهند. ترم $c^2[-\rho \text{div}(\vec{u})]$ بیانگر اثرات انبساط حجمی محلی است. این ترم اگرچه در محاسبات هیدرودینامیک جریان نقش به‌سزایی ندارد ولی در محاسبات آکوستیکی اهمیت بسیار دارد و لذا باید در محاسبات لحاظ شود. بر اساس اهمیت هر ترم در آنالیز ابعادی و روش اغتشاشات ترم‌های موثر در پدیده کاویتاسیون نباید حذف شوند. به منظور تحلیل ابعادی معادلات فوق، فرضیات زیر بکار می‌روند:

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p} p^* & u &= \tilde{U} u^* & \rho &= \tilde{\rho} \rho^* \\ t &= \frac{t^*}{\tilde{\omega}} & \Rightarrow & \tilde{\omega} = \frac{\tilde{U}}{\lambda} & \Rightarrow & \lambda = \frac{\tilde{U}}{\tilde{\omega}} \\ Q &= \tilde{Q} Q^* \\ X, Y, Z &= Lx, Ly, Lz & \Rightarrow & \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{L \partial x_i^*} \end{aligned} \quad (4)$$

که در روابط بالا، ρ^* چگالی، $\vec{u}^*$ سرعت، Q^* منبع حجمی افزایش جرم سیال، p^* فشار سیال و t^* زمان بدون بعد (دارای مرتبه واحد) می‌باشند. همچنین ترم‌های دارای اندیس ~ بیانگر یک پارامتر دارای مقدار ثابت از جنس، پارامترهای خود مسئله می‌باشند که در خصوص فشار و چگالی مثالی از آن‌ها آورده شده است. در نهایت با جایگذاری روابط فوق در معادلات ۱ تا ۳ و ساده‌سازی‌ها و تعریف اعداد بی بعد، به ترتیب فرم بدون بعد معادلات پیوستگی (بقای جرم)، مومنتوم و ترکیب شده معادلات حالت و انرژی به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$St \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (u^* \rho^*) = \left(\frac{L \tilde{Q}}{\tilde{U}} \right) Q^* \quad (5)$$

$$\begin{aligned} St \left[\frac{\partial (\vec{u}^* \rho^*)}{\partial t^*} \right] + [\vec{u}^* \nabla (\vec{u}^* \rho^*)] &= Eu [-\nabla p^*] + \\ \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 \vec{u}^* + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) (\nabla \text{div}(\vec{u}^*)) \right] &+ \left(\frac{L \tilde{Q}}{\tilde{U}} \right) Q^* \end{aligned} \quad (6)$$

1. Convective Term

۳- بکارگیری روش اغتشاشات

همان طور که پیشتر نیز ذکر شد، صوت آکوستیکی بخشی از دینامیک جریان سیال می باشد. اما ماهیت صوت آکوستیکی و نحوه انتشار آن با دینامیک جریان سیال متفاوت است، که این مطلب را می توان به علت قرارگیری صوت ناشی از جریان و دینامیک جریان در مرتبه های متفاوت از معادلات پایه دانست. اگر از دیدگاه اغتشاشات با مسئله کاویتاسیون نگاه شود، معادلات بکار رفته در مدل سازی جریان در مرتبه ای به مراتب بزرگتر از معادلات آکوستیک جریان قرار می گیرند. با توجه به مطالب فوق، در ادامه سعی شده تا به تفکیک معادلات پیوستگی (بقای جرم)، مومنتوم و ترکیب شده معادلات حالت و انرژی از حیث مرتبه پرداخته شود تا با استفاده از آن بتوان معادلات لازم در شناسایی و شبیه سازی آکوستیک ناشی از کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون و نیز ارتباط این دسته معادلات با دینامیک جریان سیال را ارائه کرد. ابتدا فرضیات زیر در معادلات وارد می گردند:

$$p^*(X, t, \varepsilon) = h_0(\varepsilon)p_0(X, t) + h_1(\varepsilon)p_1(X, t) + o(h_1(\varepsilon))$$

$$\vec{u}^*(X, t, \varepsilon) = f_0(\varepsilon)\vec{u}_0(X, t) + f_1(\varepsilon)\vec{u}_1(X, t) + o(f_1(\varepsilon))$$

$$\rho^*(X, t, \varepsilon) = g_0(\varepsilon)\rho_0(X, t) + g_1(\varepsilon)\rho_1(X, t) + o(g_1(\varepsilon))$$

$$Q^*(X, t, \varepsilon) = m_0(\varepsilon)Q_0(X, t) + m_1(\varepsilon)Q_1(X, t) + o(m_1(\varepsilon))$$

$$x_{n+1}(\varepsilon) = o(x_n(\varepsilon)) \quad \varepsilon = \frac{QL}{\tilde{U}} \quad (9)$$

در واقع تعریف فوق بدین معنی است که دینامیک جریان کاویتاسیون ترکیبی از ترم های با مرتبه مختلف بوده که برای تفکیک معادلات هم مرتبه لازم است تا پارامترهای حاضر در معادلات را به صورت فوق بیان نموده و در معادلات اصلی جایگزین کرد. با جایگذاری روابط فوق در معادلات ۵ تا ۷ و سپس ساده سازی های لازم و استفاده از اصل حداقل حالات ممکن، نتیجه می شود که پارامترهای فوق باید به فرم زیر در معادلات قرار داده شوند:

$$\begin{aligned} p^* &= p_0 + \varepsilon p_1 & \vec{u}^* &= \vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1 \\ \rho^* &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 & Q^* &= Q_0 + \varepsilon Q_1 \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری روابط ۱۰ در معادلات ۵ تا ۷، معادلاتی با مرتبه های مختلف بدست می آیند. بالاترین مرتبه این معادلات که همان مرتبه واحد می باشد، همان معادلاتی است که مقیمی در مطالعات خود بکار برده است و در نتیجه این معادلات بیانگر هیدرو دینامیک جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون می باشند [۲]. دسته معادلات دوم از مرتبه ترم اپسیلون بوده و به عبارت دیگر در مرتبه نوسانات حجمی در سیال می باشند. نوسانات حجمی در جریان سیال منبع ایجاد صوت بوده و لذا این دسته از معادلات نیز بیانگر سیستم معادلات حاکم بر آکوستیک ناشی از جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون می باشند. از طرف دیگر پس از دستیابی به معادلات مرتبه اول (معادلات بیان کننده آکوستیک در جریان سیال) و جایگذاری فرضیات آکوستیک خطی (سیال ساکن، غیرلزج و تراکم ناپذیر) سیستم معادلات زیر بدست آورده می شوند. این سیستم معادلات، همان سیستم معادلاتی است که در اثبات آکوستیک خطی استفاده می شود. بنابراین این مطلب به نوعی صحت سیستم معادلات بدست آمده را اثبات می کند و بعلاوه نشان می دهد که سیستم معادلات تحقیق حاضر قادر است تا در تحلیل های آکوستیکی بدون لحاظ فرضیات سیال ساکن، غیرلزج و تراکم ناپذیر بکار برده شوند. بنابراین مرتبه اصلی معادلات بوجود آمده بیانگر مدل سازی جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون بوده و مرتبه اول معادلات بیانگر آکوستیک ناشی از این جریان می باشد.

۴- نتایج

نتایج نشان می دهند که، معادلات آکوستیکی در مرتبه ای پایین تر نسبت به معادلات دینامیک جریان کاویتاسیون قرار دارند. به عبارت دیگر آکوستیک به صورت یک ترم اغتشاشاتی بر روی جریان کاویتاسیون سوار شده است. بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده دو دسته معادلات مرتبه اصلی^۱ و مرتبه اول^۲ را می توان به ترتیب به دسته معادلات بیانگر مدل ریاضی دینامیک جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون و دسته معادلات بیانگر مدل ریاضی آکوستیک ناشی از این جریانات اختصاص داد.

1. Leading Order
2. First Order

آکوستیک خطی و دستیابی به معادله موج خطی، فرض می شود که سیال تراکم ناپذیر است. این یعنی فرکانس های بسیار بالا را نمی توان با استفاده از روابط آکوستیک خطی تشخیص داد.

۴-۲- مدل ریاضی (عددی) شبیه سازی آکوستیک ناشی از جریان

از آنجا که معادلات آکوستیکی نسبت به معادلات دینامیک جریان در مرتبه پایین تری قرار دارند، مرتبه این معادلات، هم مرتبه با پارامتر اغتشاشی که در رابطه ۹ آورده شده است، در نظر گرفته می شود. همانند مرتبه اصلی، معادلات مرتبه اول نیز بر اساس فرکانس موردنظر به دو فرم دسته معادلات مربوط به فرکانس های بالا و پایین تقسیم می شوند. دسته اول معادلات آکوستیکی که در ارتباط با فرکانس های بالا می باشد، در روابط ۱۷ تا ۱۹ آورده شده اند.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_0) = \rho_0 Q_0 \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial (\vec{u}_0 \rho_1)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial (\rho_0 \vec{u}_1)}{\partial t} \right] + [(\vec{u}_0) \nabla (\vec{u}_0 \rho_1)] + [(\vec{u}_0) \nabla (\vec{u}_1 \rho_0)] + [\vec{u}_1 \nabla (\vec{u}_0 \rho_0)] = [-\nabla (p_1)] + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 (\vec{u}_1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) (\nabla \text{div} (\vec{u}_1)) \right] + \rho_0 u_0 \bar{Q}_0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla \right) p_1 + \left(\vec{u}_1 \cdot \nabla \right) p_0 = -\rho_0 \left(\nabla \cdot \vec{u}_1 \right) - \rho_1 \left(\nabla \cdot \vec{u}_0 \right) + \left(\frac{c^2 \beta}{c_p} \right) \times \left[\frac{1}{Re_v} \cdot 2 \cdot (\nabla \cdot \vec{u}_0) (\nabla \cdot \vec{u}_1) + \frac{2}{Re} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} \right\} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (\nabla \cdot \vec{u}_0) (\nabla \cdot \vec{u}_1) \right] \quad (19)$$

دسته دیگر که در ارتباط با فرکانس های پایین است، تنها در نوع معادله سوم دارای اختلاف می باشند، یعنی دو معادله

۴-۱- مدل ریاضی (عددی) شبیه سازی دینامیک جریان

بر اساس نتایج بدست آمده، دسته معادلات مرتبه اصلی (از مرتبه واحد)، برای شبیه سازی جریان کاواک بکار برده می شوند. البته باید توجه داشت که با توجه به تعریف عدد استروهال (رابطه ۸) و بر اساس فرکانس موردنظر (فرکانس های بالا و فرکانس های کم)، دو فرم مختلف را می توان برای دسته معادلات دینامیک جریان ارائه کرد. دسته اول که در ارتباط با فرکانس های بالا می باشد، در روابط ۱۱ تا ۱۳ آورده شده اند.

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0) = 0 \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial (\rho_0 \vec{u}_0)}{\partial t} \right] + [(\vec{u}_0) \nabla (\rho_0 \vec{u}_0)] = [-\nabla (p_0)] + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 \vec{u}_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) (\nabla \text{div} (\vec{u}_0)) \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla \right) p_0 - \rho_0 (\nabla \cdot \vec{u}_0) = \left(\frac{c^2 \beta}{c_p} \right) \left[\frac{1}{Re_v} (\nabla \cdot \vec{u}_0)^2 + \frac{1}{Re} 2 \{ e_{ij}^0 e_{ji}^0 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{u}_0)^2 \} \right] \quad (13)$$

نکته حائز اهمیت آن است که این معادلات بیانگر مدل سازی جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون برای سیال لزج تراکم پذیر متحرک می باشند. ترم های آخر در معادلات ۱۲ و ۱۳، در ارتباط با سیال لزج می باشند. دسته دیگر که در ارتباط با فرکانس های پایین می باشد، در روابط ۱۴ تا ۱۶ آورده شده اند.

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0) = 0 \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial (\rho_0 \vec{u}_0)}{\partial t} \right] + [(\vec{u}_0) \nabla (\rho_0 \vec{u}_0)] = [-\nabla (p_0)] + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 \vec{u}_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) (\nabla \text{div} (\vec{u}_0)) \right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla \right) p_0 = \left(\frac{c^2 \beta}{c_p} \right) \left[\frac{1}{Re_v} (\nabla \cdot \vec{u}_0)^2 + \frac{1}{Re} 2 \{ e_{ij}^0 e_{ji}^0 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{u}_0)^2 \} \right] \quad (16)$$

که این معادلات بیانگر مدل سازی جریان کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون برای سیال لزج تراکم ناپذیر متحرک می باشند. همچنین این نکته قابل توجه می باشد که در

پایین) می توان سیال را تراکم پذیر مشاهده کرد. با این وجود تراکم پذیر در نظر گرفتن و یا نگرفتن جریان سیال در معادلات آکوستیکی نیز به شکل محسوسی حائز اهمیت می باشد.

۶- فهرست علائم

سرعت صوت	c
گرمای ویژه متناظر	C_p
تانسور نرخ کرنش	e_{ij}
فشار سیال	p
منبع حجمی افزایش جرم سیال	$Q(X, t)$
دما	T
بردار سرعت جریان سیال	$\vec{u}(X, t)$
ویسکوزیته	μ
ویسکوزیته تراکمی	μ_v
ثابت $\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}$	β
دانسیته یا چگالی	$\rho(X, t)$

۷- مراجع

- [1] Borkent B.M., *Interfacial Phenomena in Micro- and Nanofluidics: Nano bubbles, cavitation, and wetting*, PhD thesis, Netherlands, Twente University, 2009, pp. 23-56.
- [2] مقیمی، مهدی، *تحلیل تجربی و عددی پایداری مرز کاواک*، رساله دکتری، تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۸. صص ۹۳-۱۰۸.
- [3] Stinebring D.R., Holl J. W., *Water tunnel Simulation Study of the Later Stages of Water Entry of Axisymmetric Bodies: Phase II – Effect of the afterbody on Steady State Ventilated Cavities*, ARL Penn State Dec, Technical Memorandum SOO, Report No. TM 79-206, 1979.
- [4] Rienstra S.W., Hirschberg A., *An Introduction to Acoustics*, extended and revised edition of Report IWDE 92-06, Eindhoven, Eindhoven University of Technology, 2012, pp. 8-24.
- [5] Pierce A.D., *Acoustics: an Introduction to its Physical Principles and Applications*, First Ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1981, pp. 5-37.
- [6] Goldstein M.E., *Aeroacoustics*, illustrated Ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1976, pp. 43-66.

پیوستگی و ناویر-استوکس همانند روابط ۱۷ و ۱۸ بوده و معادله سوم به شکل زیر است:

$$0 = -\rho_0 \left(\nabla \cdot \vec{u}_1 \right) - \rho_1 \left(\nabla \cdot \vec{u}_0 \right) + \left(\frac{c^2 \beta}{c_p} \right) \times \left[\frac{1}{Re_0} \cdot 2 \cdot (\nabla \cdot \vec{u}_0)(\nabla \cdot \vec{u}_1) + \frac{2}{Re} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (\nabla \cdot \vec{u}_0)(\nabla \cdot \vec{u}_1) \right\} \right] \quad (20)$$

نتایج بدست آمده در این مرتبه از معادلات نشان می دهد که، اگر فرضیات بکار رفته در دستیابی به معادله موج خطی، یعنی فرض ساکن بودن و غیرلزج بودن جریان سیال در معادلات مرتبه اول بدست آمده برای فرکانس های پایین لحاظ شود، معادله موج از این معادلات قابل استخراج است. این مطلب خود نوعی اثبات صحت دسته معادلات بدست آمده می باشد.

۵- نتیجه گیری

با توجه به این که مدل سازی آکوستیک ناشی از کاویتاسیون و سوپرکاویتاسیون در شناسایی این پدیده های هیدرودینامیکی بسیار مفید می باشد، لذا ارائه مدلی دقیق و معتبر در تخمین نویز آکوستیکی انتشار یافته از این پدیده ها از اهمیت بسیار برخوردار است. نتایج بدست آمده از تحقیق حاضر نشان می دهند که به منظور تخمین هرچه دقیقتر صوت منتشر شده از پدیده های کاواک و ابرکاواک باید ابتدا معادلات پیوستگی، ناویر استوکس، انرژی و حالت را برای سیال تراکم پذیر (با و یا بدون در نظر گرفتن لزجت) حل کرد و سپس نتایج بدست آمده را در معادلات آکوستیکی (که با معادلات هیدرودینامیک جریان کوپل می باشند) قرار داد. همچنین بر اساس نتایج حاصله، دو دسته معادله بر اساس فرکانس نوسانات فشاری پایین و بالا، معتبر می باشند. یک دسته بیانگر نوسانات صوتی فرکانس پایین بوده که حالتی خاص از آن مربوط به آکوستیک خطی بوده و دسته دیگر مربوط به نوسانات با فرکانس بالا می باشد. نتایج بدست آمده برای دسته معادلات هیدرودینامیک جریان در نوسانات بالا به این معنی می باشد که اگر پدیده کاویتاسیون یا سوپرکاویتاسیون در مقیاس زمانی بسیار کم (در ارتباط با فرکانس بالا) مدنظر باشند، می باید سیال را تراکم پذیر در نظر گرفت؛ ولی در مقیاس زمانی زیاد (فرکانسی

- [13] Levy M., Kjeldsen M., Arndt R.E. A., "Cloud Cavitation Noise", In: *APS, 53rd Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics*, Washington, 2000.
- [14] Seo J.H., Moon Y.J., Shin B.R., "Prediction of Cavitating Flow Noise by Direct Numerical Simulation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No.13, 2008, pp. 6511-6513.
- [15] Howe M. S., Foley A. W., *Investigation of the Sound Generated by Supercavity Ventilation*, [PhD thesis], Boston, Boston University, 2009, pp.7-40.
- [16] Foley A. W., Howe M. S., Brungart T. A., "Sound Generated by a Jet Excited Spherical Cavity", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 315, No.2, 2008, pp. 88-99.
- [17] Foley A. W., Howe M. S., Brungart T. A., "Spectrum of the Sound Produced by a Jet Impinging on the Gas-Water Interface of a Supercavity", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No.4, 2009, pp. 415-424.
- [18] Howe M. S., Colgan A. M., Brungart T. A., "on Self-Noise at the Nose of a Supercavitating Vehicle", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, No.5, 2009, pp. 772-784.
- [19] Temkin S., *Elements of Acoustics*, New York, John Wiley & Sons, 1981, pp.4-33.
- [7] Morch K.A., Hansson I., "The dynamics of cavity clusters in ultrasonic (vibratory) cavitation erosion", *Journal of Applied Physics*, Vol. 51, No.9, 1980, pp. 4651-4658.
- [8] Reisman G.E., McKinney E.A., Brennen C.E., "Cloud Cavitation on an Oscillating Hydrofoil", *Proceedings of the 20th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1994, pp. 328-340.
- [9] Wang Y.C., *Shock Waves in Bubbly Cavitating Flow*, [PhD thesis], California, California Institute of Technology, 1996, pp.81-97.
- [10] Wang Y.C., Brennen C.E., "Computing Shock Waves in Cloud Cavitation", In: *CAV98 Third International Symposium on Cavitation*, Grenoble, France, 1998.
- [11] Wang Y.C., Brennen C.E., "Numerical Computation of Shock Waves in a Spherical Cloud of Cavitation Bubbles", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 121, No.4, 1999, pp. 872-880.
- [12] Reisman G.E., *Dynamic, Acoustic and Control of Cloud Cavitation on Hydrofoil*, [PhD thesis], California, California Institute of Technology, 1997, pp. 21-78.