http://mjmec.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
خرداد ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۳ ص ص ۲۸-۳۶

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۶/۵
تاریخ پذیرش ۹۱/۸/۲۳
ارائه‌درسایت ۹۱/۱۲/۳۰

# بررسی ناپایداری جریان نیوتنی در تبدیل تدریجی واگرای صفحه‌ای

محمد محسن شاه‌مردان[۱*]، محمود نوروزی[۲]، امین شهبانی ظهیری[۳]

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
* شاهرود، صندوق پستی ۳۱۶، mmshahmardan@shahroodut.ac.ir

**چکیده**- هدف مطالعه حاضر بررسی آستانه ناپایداری جریان از حالت متقارن به نامتقارن در کانال دارای انبساط تدریجی است. نسبت انبساط ۱:۳ و زوایای انبساط ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه در نظر گرفته شده است. گسسته‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود بر مبنای الگوریتم پیزو روی یک شبکه جابجا شده انجام شده است. بررسی دقت و صحت نتایج حل عددی بر اساس نتایج انبساط ناگهانی صورت گرفته است. در اینجا اثر زاویه انبساط و عدد رینولدز بر ناپایداری جریان در تبدیل گردابه‌ها از حالت متقارن به حالت دو گردابه نامتقارن و سپس سه گردابه، مطالعه و اعداد رینولدز بحرانی اول و دوم استخراج شده است. در هر مورد نمودارهای دو شاخه‌ای مربوط به گردابه‌ها و سرعت روی خط مرکزی کانال ترسیم و اثر ناپایداری بر روی میدان جریان بحث شده است. بر خلاف تحقیقات مشابه پیشین که همگی به مطالعه جریان در کانال‌های دارای انبساط ناگهانی (زاویه ۹۰ درجه) پرداخته‌اند، در پژوهش حاضر ناپایداری جریان در کانال دارای انبساط تدریجی در زوایای مختلف بررسی شده که این امر مهمترین نوآوری آن به شمار می‌آید.

**کلیدواژگان:** عدد رینولدز بحرانی، زاویه انبساطی، ناپایداری، گردابه متقارن، گردابه نامتقارن.

# Instability investigation of Newtonian flow in a planar gradual expansion

**M. M. Shahmardan[1*], M. Norouzi[2], A. S. Zahiri[3]**

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
2- Assic. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
3- MSc. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
* P. O. B. 316 Shahrood, Iran. mmshahmardan@shahroodut.ac.ir

**Abstract-** The main object of current study is investigation of instability threshold of flow in a gradual expansion from symmetric to asymmetric situations. The expansion ratio is 1:3 and expansion angles are 30, 45, 60 and 90 degree. Discretization of governing equations is performed using finite volume method based on PISO algorithm on a staggered mesh. The CFD code is validated based on the results of sudden expansion reported in previous works. Here, the effects of expansion angle and Reynolds number on flow instability in transition from symmetric situation to two and three asymmetric vortices are investigated and the first and second critical Reynolds numbers are obtained. The bifurcation diagrams of vortices and velocity profile in centerline are plotted for each case and the effects of instability on flow field are discussed based on them. Unlike the previous studies which have been focused on the planar flow in sudden expansions, the flow instability in gradual expansions with different expansion angles is investigated which is the main innovation of current study.

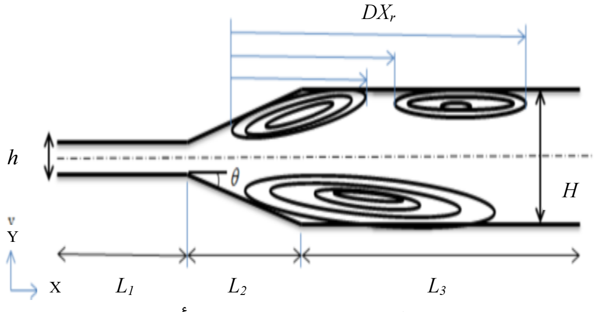
**Keywords:** Critical Reynolds Number, Expansion Angle, Instability, Symmetric Vortex, Asymmetric Vortex.

## ۱- مقدمه

جریان‌های فروصوتی در کانال‌های انبساطی از جمله مسائل مهم و اساسی در مکانیک سیالات به شمار می‌آیند که دارای کاربردهای فراوانی در شیپوره‌ها، تبدیلات لوله کشی، مبدل‌های حرارتی، پر شدن قالب‌های ریخته‌گری، شکل‌دهی فلزات، و مانند آنها می‌باشد. از این‌رو در طی چند دهه اخیر بسیاری از محققان به بررسی تحلیلی، تجربی و عددی این جریان‌ها پرداخته‌اند.

همچنان که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، با افزایش سطح مقطع کانال، متوسط سرعت جریان کاهش و فشار استاتیکی افزایش می‌یابد. از آنجا که مقدار سرعت در مجاور دیواره‌های کانال بسیار کم می‌باشد، این افزایش فشار بر نیروی اینرسی غلبه کرده و سبب وقوع جدایش و درنتیجه تشکیل گردابه در مجاور دیواره‌های کانال می‌شود. در اعداد رینولدز پایین، میدان جریان پایدار بوده و گردابه‌ها به صورت متقارن با جهت چرخش متضاد پدید می‌آیند. با افزایش عدد رینولدز و در نتیجه افزایش فشار انبساطی، نیروهای ویسکوز دیگر قادر به حفظ ساختار گردابه‌ها به صورت متقارن نیستند و ناپایداری در میدان جریان بوقوع می‌پیوندد. در این حالت گردابه ها به صورت یک جفت گردابه نامتقارن ظاهر می‌شوند. با افزایش هرچه بیشتر عدد رینولدز و تشدید ناپایداری گردابه سومی‌نیز بوجود می‌آید.

در بررسی جریان سیال نیوتنی، داخل هندسه انبساط ناگهانی، تحقیقات ابتدایی در قالب کار تجربی، بوسیله دیورست و همکارانش [۱]، چردون و همکارانش [۲] و اووا و همکارانش [۳] انجام شده است. آنها با بررسی جریان در منطقه پایین‌دست انبساط ناگهانی متقارن دو بعدی، نشان دادند که برای مقادیر اعداد رینولدز کم، جریان متقارن باقی می‌ماند اما برای اعداد رینولدز بزرگتر شرایط عدم تقارن برای گردابه‌ها باعث ایجاد نواحی چرخشی با اندازه‌های مختلف می‌شود.




**شکل ۱** طرحواره هندسه مسأله

مطالعه عددی جریان برای انبساط ناگهانی با نسبت انبساط ۱:۳ توسط فیرن و همکارانش [۴] و دیورست و همکارانش [۵] منجر به پیدا کردن عدد رینولدز بحرانی برای انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن و همچنین ترسیم نمودار دوشاخه‌ای شده است. بررسی عددی تأثیر نسبت انبساط روی پدیده دو شاخه شدن طول گردابه‌ها، برای سیال نیوتنی توسط بتاگلیا و همکارانش [۶] و آلربون و همکارانش[ ۷] انجام شده است. آنها با استفاده از حل متقارن در مطالعات خود با کاهش نسبت انبساط، بهبود پایداری را مشاهده کردند. بررسی پدیده دو شاخه‌ای برای جریان انبساط ناگهانی صفحه‌ای در نسبت‌های انبساطی بزرگتر، توسط رویولتا [۸] مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین آبوت و کلین [۹] در تحقیق خود، جریان‌های آشفته نامتقارن را از میان مجراهای انبساطی متقارن صفحه‌ای مورد بررسی قرار داده‌اند. ساختار ناپایداری پدیده چندشاخه‌ای با استفاده از تحلیل غیرخطی ضعیفی توسط میزوشیما و شیوتانی [۱۰]مطالعه شده است. همچنین داگتکین و اونسال [۱۱] نیز جریان انبساط ناگهانی صفحه‌ای را در محدوده اعداد رینولدز ($۰/۱ \le Re \le ۵۰۰$) و نسبت واگرایی ($۱/۵ \le ER \le ۱۰$) مورد مطالعه قرار دادند.

الیویرا [۱۲]، ترنیک و همکارانش [۱۳] با استفاده از شبیه سازی عددی، مقدار عدد رینولدز بحرانی را براساس ارتفاع بالادست و میانگین سرعت ورودی کانال برابر با ۵۴ بدست آورده‌اند. همچنین الیویرا در مرجع [۱۲] بیان می‌کند که در تبدیلات واگرای متقارن محوری، پدیده دو شاخه‌ای شدن یا همان اختلاف اندازه طول گردابه‌ها ، اتفاق نمی‌افتد. با به کارگیری روش اختلاف محدود مرتبه چهار در بررسی جریان داخل کانال واگرای ناگهانی با نسبت انبساط ۱:۳ در تحقیق دریکاکیس [۱۴]، مقدار عدد رینولدز بحرانی ۵۳/۳ گزارش شده است. هاوا و روساک [۱۵] با استفاده از روش تحلیل پایداری خطی و روش اختلاف محدود روی تابع جریان و تابع ورتیسیته، برای جریان داخل کانال با نسبت انبساط ناگهانی ۱:۳ مقدار عدد رینولدز بحرانی را ۵۳/۸ گزارش کرده‌اند و در این هندسه میشرا و جایارامان [۱۶] در پژوهش خود با به کار گیری روش المان محدود و روش تمدید- اختلال [1] مقدار رینولدز بحرانی را ۵۴ بدست آورده‌اند.

1. Continuation–Perturbation

در تمام کارهای قبلی، عدد رینولدز بحرانی برای تبدیل‌های واگرای ناگهانی صفحه‌ای (زاویه ۹۰ درجه) در حالت دوبعدی و سه‌بعدی بررسی شده و در بیشتر این تحقیقات نسبت انبساط ۱:۳ در نظر گرفته شده است.

هدف مطالعه حاضر بررسی آستانه ناپایداری جریان از حالت متقارن به نامتقارن در کانال دارای انبساط تدریجی می‌باشد و زوایای انبساط ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه در نظر گرفته شده است. اثر زاویه انبساط و عدد رینولدز بر ناپایداری جریان در تبدیل گردابه‌ها از حالت متقارن به حالت دو گردابه نامتقارن و سپس سه گردابه مطالعه شده و اعداد رینولدز بحرانی اول و دوم استخراج شده است. گسسته‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود براساس الگوریتم پیزو روی یک شبکه جابجا شده انجام شده است.

در تحقیق حاضر، جریان سیال به صورت دوبعدی مطالعه شده است. مطابق شکل ۱ پارامترهای هندسی مسأله، شامل طول و ارتفاع بخش بالادست جریان یا بخش اول $(L_1, h)$، طول و ارتفاع بخش پایین‌دست جریان یا بخش سوم $(L_3, H)$، طول و زاویه انبساطی بخش دوم $(L_2, \theta)$، اختلاف طول ابتدا و انتهای هر گردابه از ابتدای گردابه اول $(DX_r)$ می‌باشد.

البته باید توجه داشت که نسبت های هندسی $L_1/h$ و $L_3/h$ باید به اندازه کافی بزرگ باشند تا جریان در هر دو بخش بالادست و پایین‌دست کانال (بخش اول و سوم)، به حالت توسعه‌یافتگی برسدکه در تحقیق حاضر برای اطمینان از این موضوع، طول بخش اول ۲۰ برابر و طول بخش سوم ۶۰ برابر ارتفاع بخش اول در نظر گرفته شده است و برای حل‌های عددی انجام‌شده، نمودارهای سرعت روی خط مرکزی کانال در اعداد رینولدز مختلف برای سه زاویه ۳۰، ۴۵ و۶۰ درجه ترسیم و در بخش نتایج آورده شده است.

در ادامه تحقیق، معادلات حاکم بر جریان به همراه شرایط مرزی و روش حل عددی به کار گرفته شده، به صورت اجمالی توضیح داده شده است. برای ارزیابی صحت نتایج این تحقیق، نمودار چند شاخه‌ای در حالت ۹۰ درجه با تحقیقات قبلی مقایسه شده و استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی با استفاده از ۳ نوع شبکه‌بندی در زاویه ۳۰ درجه، بررسی شده است. در انتها، برای هر زاویه نمودارهای چند شاخه‌ای مربوط به گردابه‌ها و سرعت روی خط مرکزی کانال ترسیم و اثر ناپایداری بر روی میدان جریان بحث شده است.

## ۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

در مطالعه حاضر، جریان آرام سیال نیوتنی به صورت پایدار و تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است و قوانین بقای جرم و اندازه حرکت در چارچوب مختصات کارتزین را می‌توان در قالب معادلات پیوستگی و مومنتوم به صورت زیر نوشت:

$$\nabla \cdot \tilde{V} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{V} = -\nabla \tilde{P} + \mu \nabla^2 \tilde{V} \tag{2}$$

که $\tilde{V}$ معرف بردار سرعت، $\rho$ چگالی، $\tilde{P}$ فشار و $\mu$ ویسکوزیته دینامیکی است.

اعداد بی‌بعد مورد استفاده در تحقیق حاضر بر اساس ارتفاع بخش یک $h$، سرعت ثابت ورودی $U_{in}$، چگالی $\rho$ و لزجت سینماتیکی $\nu$ عبارتند از:

$$\mathrm{Re} = \frac{U_{in} \cdot h}{\nu} \tag{3}$$

$$x = \frac{\tilde{x}}{h}, y = \frac{\tilde{y}}{h} \tag{4}$$

$$V = \frac{\tilde{V}}{U_{in}} \tag{5}$$

$$P = \frac{\tilde{P}}{\rho \cdot U_{in}^2} \tag{6}$$

با استفاده از روابط (۳ تا ۶) شکل بی‌بعد معادلات (۱) و (۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{7}$$

$$V \cdot \nabla V = -\nabla P + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 V \tag{8}$$

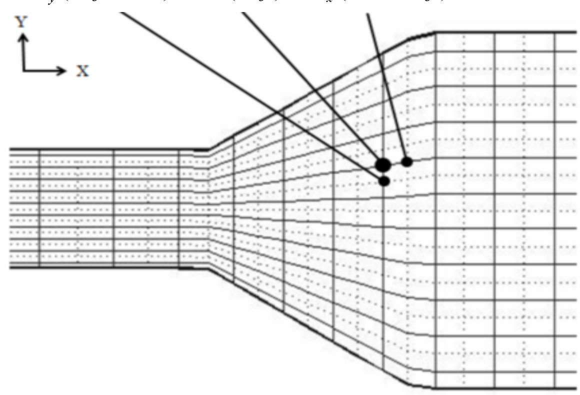
برای شرایط مرزی مسأله، جریان ورودی به صورت یکنواخت و ثابت، برابر با $U_{in}$ در نظر گرفته شده و در خروجی کانال نیز برای کلیه پارامترها به جز فشار، شرط $\partial/\partial x \equiv 0$ قرار داده شده است [۱۷]. در مجاور دیواره‌های کانال نیز شرط عدم لغزش سرعت برقرار می‌باشد.

## ۳- الگوریتم حل

در این تحقیق گسسته‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود انجام شده و برای ترکیب سرعت و فشار از

الگوریتم پیزو[1] روی شبکه محاسباتی موسوم بـه شـبکه جابجـا شده[2] استفاده شده است. بکارگیری ایـن شـبکه امکـان بـه‌هـم جفت شدن متغیرها را فـراهم کـرده و پایـداری حـل عـددی را افزایش می‌دهد. شکل ۲، شبکه جابجا شده به کار گرفتـه شـده در روش عددی را نمایش می‌دهد.

برای تولید شبکه از نرم‌افزار گمبیت[3] استفاده شـده اسـت و در این نرم‌افزار برای سلول‌ها از نوع چهارگوش[4] استفاده شده است و برای افزایش سرعت اجرای برنامه، شبکه در انتهای بخش اول و ابتدای بخش سوم به دلیل حساسـیت ایـن نـواحی در ایجـاد گردابه، دارای تـراکم مـی‌باشـد تـا بـا سـلول‌هـای کمتـر دقـت موردنظر حاصل شود و معادلات جریان در ناحیـه فیزیکـی روی خود حجم کنترل گسسته می‌شود و بـرای حـل ایـن مسـأله از نرم‌افزار منبع باز اُپن فوم[5] استفاده شده و شبکه تولید شـده در نرم‌افزار گمبیت به ایـن نـرم‌افـزار انتقـال داده شـده اسـت و در نرم‌افزار اُپن فوم نیز گسسته‌سازی بـا اسـتفاده از شـبکه جابجـا شده صورت گرفته است. از آنجا که بـرای شـبکه محاسـباتی از دو شبکه غیرمنطبق بر هم استفاده شده است، آنها را با شبکه‌های اولیـه و ثانویه نام‌گذاری می‌کنند. شبکه اولیه با خطوط خط‌چـین و شـبکه ثانویه با خطوط ممتد نشان داده شده است.




**شکل ۲** نحوه تخصیص متغیرها در شبکه بندی جابجا شده

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، مؤلفه فشار استاتیکی $p$، روی شبکه اولیه و مؤلفه‌های سرعت $v_x$ و $v_y$ نیز روی موقعیت‌هـای خاص اتصال شبکه اولیه با شبکه ثانویـه قـرار دارنـد. الگـوریتم پیزو دارای یک مرحله پیش‌بینی و دو مرحله تصحیح (در واقـع بسـط روش سـیمپل[6] بـا یـک مرحلـه تصـحیح اضـافه اسـت) می‌باشد و روند حل به این صورت است که ابتدا یـک سـرعت و فشار حدسی در نظر گرفته می‌شود و بعد معادلات مـومنتم بـه صورت ضمنی برای هر یـک از مؤلفـه‌هـای بـردار سـرعت حـل می‌شوند.

با این مقادیر حدسی بـرای سـرعت میـدان سـرعت $U^*$ جدیـد تخمین زده می‌شود. با جایگذاری سرعت‌های تصـحیح شـده در معادله پیوستگی میدان فشار $p^*$ تخمین زده می‌شود و سرعت و فشار جدید بدست آمده تصـحیح مـی‌شـود ($U^{**}, P^{**}$) و از آنجا که معادله تصـحیح فشـار تمایـل بـه واگرایـی دارد، بـرای افزایش همگرایی معادله مومنتم، در معادلات تصحیح سـرعت و فشار از ضرایب مادون رهایی استفاده می‌شود (تـا اینجـا مشـابه الگوریتم سیمپل است) و با جایگذاری این سرعت‌های جدید در معادله گسسته پیوسـتگی، معادلـه تصـحیح فشـار دوم حاصـل می‌شود تا فشار جدید $p^{***}$ بوجود آید و با حل دوباره معادلات اندازه حرکت و این فشـار جدیـد $p^{***}$ دوبـار تصـحیح شـده، میدان سرعت جدید (کـه دوبـار تصـحیح شـده اسـت) بدسـت می‌آید ($U^{***}$) و فشار جدیـد نهـایی بـا اسـتفاده از فشـارهای قبلی و ضریب مادون رهایی تصحیح می‌شود و تمام این مراحل به صورت بازگشتی در هر گام زمانی حل به منظور ایجاد دقـت بیشتر در حل، تکرار می‌شود تا به حالت پایداری برسـد و دیگـر اختلاف پارامترها در گام‌های زمانی بعدی نسـبت بـه گـام‌هـای زمانی قبلی بسیار کم باشد.

## ۴- نتایج

### ۴-۱- بررسی استقلال حل از شبکه محاسباتی

برای بررسی استقلال حل عددی از شـبکه محاسـباتی، سـرعت روی خط مرکزی[7] کانال ($U_{CL}$) بـا زاویـه ۳۰ درجـه در عـدد رینولـدز ۷۰ بـرای ۳ نـوع شـبکه ترسـیم شـده اسـت. تعـداد سلول‌های مورد استفاده برای این شـبکه‌هـا در جـدول ۱ ارائـه شده است که نام‌گذاری این سه نوع شبکه براساس تراکم شبکه به ترتیب $M1$ ، $M2$ و $M3$ می‌باشد.

1. PISO Algorithm
2. Staggered Mesh
3. Gambit
4. Quad
5. Openfoam Soft
6. SIMPLE Algorithm
7. Center Line

**جدول ۱** تعداد سلول سه نوع شبکه برای زاویه ۳۰ درجه

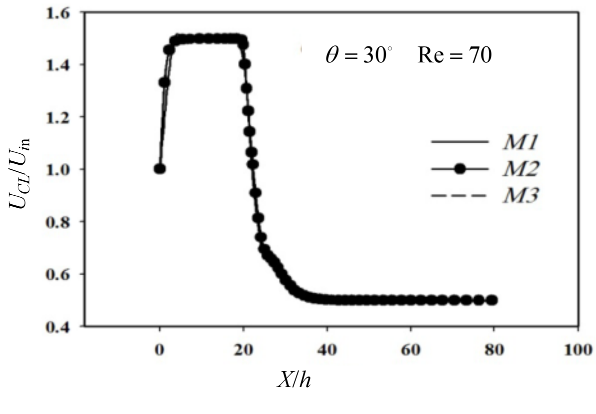
| نوع شبکه | تعداد سلول بخش اول | تعداد سلول بخش دوم | تعداد سلول بخش سوم | تعداد کل سلول‌ها |
|---|---|---|---|---|
| $M1$ | ۲۰۰۰ | ۳۴۰ | ۶۰۰۰ | ۸۳۴۰ |
| $M2$ | ۶۰۰۰ | ۱۳۶۰ | ۱۸۰۰۰ | ۲۵۳۶۰ |
| $M3$ | ۱۰۰۰۰ | ۳۴۵۰ | ۳۰۰۰۰ | ۴۳۴۵۰ |

از آنجا که شبکه $M3$ متراکم‌ترین شبکه می‌باشد، پس دقت آن از دو شبکه دیگر بیشتر است و می‌توان آن را به عنوان شبکه مرجع در نظر گرفت و دو شبکه دیگر را نسبت به آن ارزیابی کرد. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، سرعت ترسیم شده روی خط مرکزی کانال برای شبکه $M2$ نسبت به $M1$، اختلاف بسیار کمی با شبکه $M3$ دارد و حتی توزیع سرعت در بخش یک کانال برای شبکه $M1$ دارای نوسانات زیادی می‌باشد.

افزایش تعداد سلول‌های شبکه، باعث افزایش دقت و کاهش خطای کل می‌شود، ولی باید توجه داشت که این امر باعث افزایش شدید حجم و زمان محاسبات می‌شود که در نتیجه با توجه به شکل ۳، می‌توان با تقریب خوبی از شبکه $M2$ استفاده کرد. بر این اساس در پژوهش حاضر از شبکه $M2$ استفاده شده است.

## ۴-۲- بررسی صحت نتایج

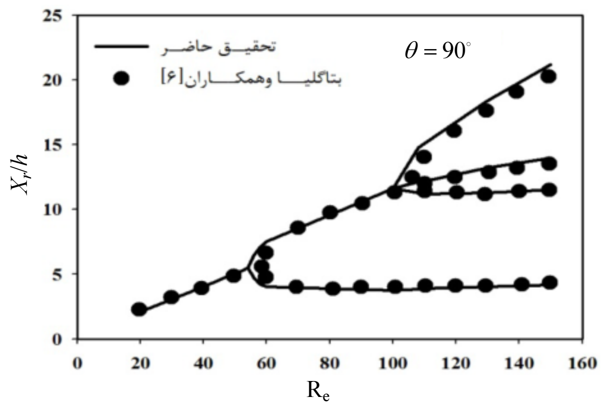
در ارزیابی صحت نتایج تحقیق حاضر، برای مقایسه با مطالعات گذشته از انبساط ناگهانی (زاویه ۹۰ درجه) با نسبت انبساط ۱:۳در محدوده اعداد رینولدز مختلف استفاده شده است.



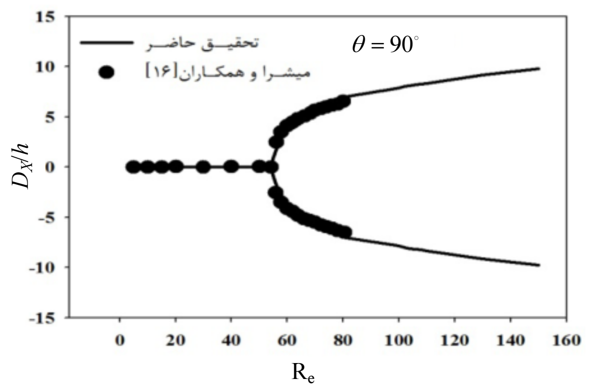

**شکل ۳** سرعت روی خط مرکزی کانال برای سه نوع شبکه

در شکل ۴، برای ارزیابی صحت پدیده دو شاخه‌ای ناشی از طول گردابه‌ها در زاویه ۹۰ درجه، مقایسه‌ای با تحقیق بتاگلیا و همکارانش [۶] انجام گرفته است. آنها در تحقیق خود، شبیه‌سازی عددی را با روش حجم محدود انجام داده‌اند.

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، مقدار طول گردابه به صورت بی‌بعد در عدد رینولدز بحرانی اول و دوم به ترتیب برابر ۵/۵۸ و ۱۱/۳۰ و در تحقیق حاضر به ترتیب برابر با ۵/۴۷ و ۱۱/۶۳ می‌باشد و این اندک تفاوت به دلیل وابستگی نقطه انشعاب دو شاخه‌ای و انشعاب سه شاخه‌ای به عواملی مانند اندازه سلول شبکه، دقت حل عددی و روش‌های عددی مورد استفاده می‌باشد. در شکل ۵ مقایسه دیگری با تحقیق میشرا و همکارانش [۱۶] در زاویه ۹۰ درجه صورت گرفته است که این مقایسه برای صحت پدیده دو شاخه‌ای ناشی از اختلاف طول گردابه‌ها است.




**شکل ۴** مقایسه طول گردابه‌ها با تحقیق بتاگلیا و همکارانش [۶]




**شکل ۵** مقایسه اختلاف طول گردابه‌ها با تحقیق میشرا و همکاران [۱۶]

میشرا و همکارانش [۱۶] در مطالعات خود از روش اختلال[1] و روش المان محدود برای بررسی طول گردابه‌ها استفاده کرده‌اند و آنها در تحقیق خود بعد از محاسبه طول گردابه در مجاورت دیواره بالا و پایین کانال، با تفاضل طول گردابه کوچکتر از طول گردابه بزرگتر و برعکس آن، نمودار اختلاف طول گردابه‌ها را در شکل ۵ رسم کرده‌اند و همان‌طور که در شکل ۴ و شکل ۵ مشاهده می‌شود مطابقت خوبی بین نتایج حاضر و تحقیقات دیگران وجود دارد.

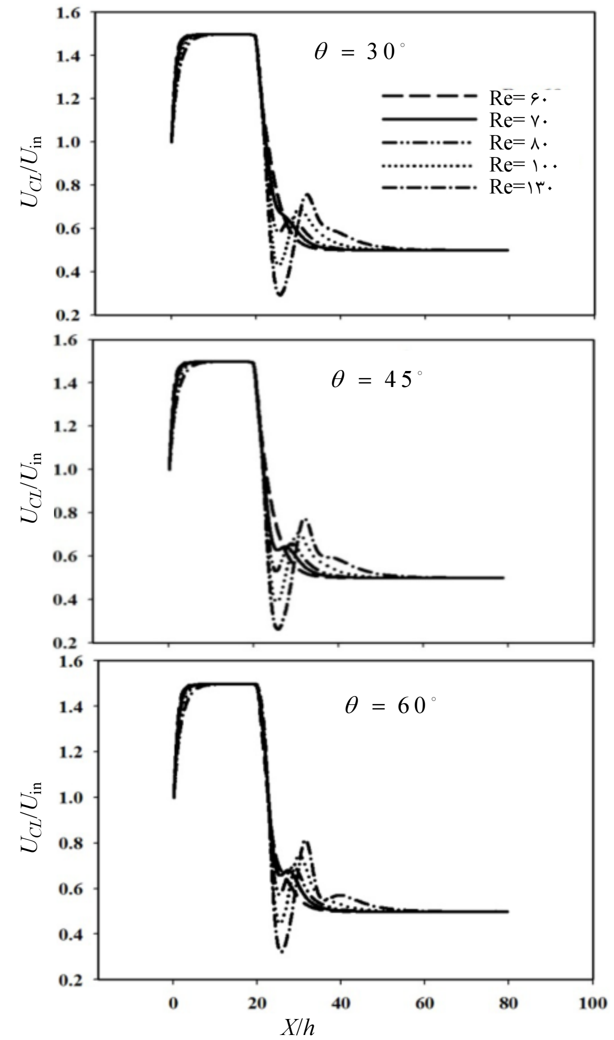
## ۴- ۳- بحث در نتایج

برای بررسی شرط توسعه‌یافتگی جریان در بخش پایین‌دست و بالادست جریان (بخش اول و بخش سوم) از سرعت خط مرکزی کانال ($U_{CL}$) به عنوان یک مشخصه استفاده شده است.

از آنجا که برای افزایش عدد رینولدز، تنها پارامتر سرعت ورودی به عنوان متغیر و باقی پارامترها ثابت در نظر گرفته شده است، پس با افزایش عدد رینولدز طول توسعه‌یافتگی در هر دو بخش اول و سوم کانال افزایش می‌یابد که این به وضوح در شکل ۶ برای هر سه زاویه ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه دیده می‌شود.

همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، در ابتدا که جریان سیال دارای رژیم جریانی متقارن است، سرعت خط مرکزی بعد از افت ناگهانی به حالت توسعه یافتگی می‌رسد اما با افزایش عدد رینولدز، رژیم جریان نامتقارن می‌شود و اثرات گردابه‌های ناشی از جریان معکوس باعث می‌شود که سرعت خط مرکزی بعد از بیشترین کاهش، دوباره افزایش یابد. به عبارت دیگر در این گردابه‌ها جریان به صورت چرخشی است و اگر مؤلفه‌های سرعت بر روی این خطوط جریان رسم شود تعدادی از مؤلفه‌های سرعت در جهت مثبت محور $x$ و مؤلفه‌های دیگر در جهت منفی محور $x$ می‌باشند (برای بررسی دبی جریان، مؤلفه‌های سرعت در جهت مثبت و منفی محور $y$ در نظر گرفته نشده‌اند). به دلیل برقراری قانون بقای جرم در کانال، اندازه سرعت در خارج از گردابه و در جهت مثبت محور $x$ افزایش می‌یابد، که این افزایش سرعت در روی خط مرکزی کانال نیز مشاهده می‌شود.

1. Perturbation

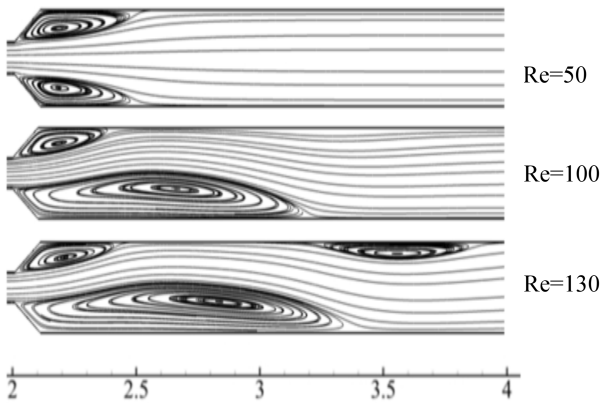



**شکل ۶** مقایسه سرعت روی خط مرکزی کانال در اعداد رینولدز مختلف

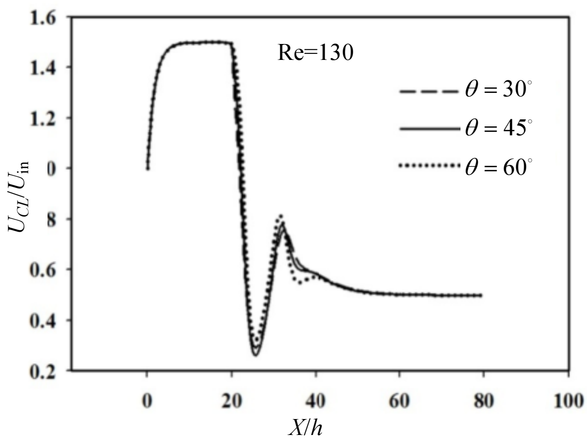
همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، هرچه عدد رینولدر بیشتر باشد به دلیل افت فشار بیشتر در یک سمت، قدرت و طول یک گردابه بیشتر و برای گردابه دیگر کمتر می‌شود به طوری که تأثیر قابل ملاحظه هر دو گردابه باعث می‌شود که با افزایش عدد رینولدز، میزان اولین افت ناگهانی سرعت و اوج دوباره آن نیز افزایش یابد. در شکل ۷ ارتفاع بخش اول ۰/۱ و ارتفاع بخش سوم ۰/۳ می‌باشد. همچنین برای نشان دادن تأثیر زوایا، سرعت روی خط مرکزی کانال برای عدد رینولدز ۱۳۰ در شکل ۸ رسم شده است.

جریان سیال در هر زاویه دارای نمودار انشعابی متفاوتی برای طول گردابه می‌باشد که در آن $DX_r$ مربوط به اختلاف فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از فاصله ابتدای گردابه اول از

ورودی بخش دوم است که بر حسب اعداد رینولـدز مختلـف در شکل ۹ ترسیم شده است.




**شکل ۷** خطوط جریان برای زاویه ۴۵ درجه



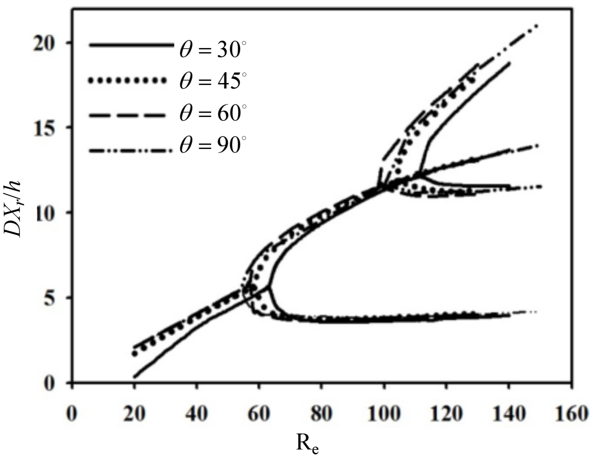

**شکل ۸** سرعت روی خط مرکزی کانال در زوایای مختلف

افزایش عدد رینولدز (ناشی از افزایش سرعت) سبب افزایش فشار انبساطی می‌شود. در عدد رینولدز بحرانی نیروهای فشاری بر نیروی ویسکوز غلبه می‌کنند و دیگر نیروی ویسکوز قـادر بـه حفظ ساختار میدان جریان به شکل یک جفت گردابـه متقـارن نخواهد بود. در این حالت جدید، گردابه هـایی نامتقـارن پدیـد می‌آیند. بنابراین برای رسیدن به یک حالت جدیـد، طـول یـک گردابه کاهش و طول گردابه دیگر افزایش می‌یابد و ایـن منجـر به دو شاخه شـدن[1] نمـودار طـول گردابـه‌هـا در عـدد رینولـدز بحرانی می‌شود.

همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، بـرای پدیـده دو شاخه شدن، باید قدرمطلق طول گردابه در زوایـای مختلـف بـه یک مقدار مشخص برسد که با توجه بـه نتـایج تحقیـق حاضـر، قدرمطلق طول گردابه ۵/۵ برابر ارتفاع بخش بالادسـت جریـان می‌باشد. افزایش زاویه انبساطی، باعـث افـزایش قـدرت و طـول گردابه می‌شود. در نتیجه با افزایش زاویه، مقـدار عـدد رینولـدز بحرانی کاهش می‌یابد و نقطه دو شاخه شـدن بـه سـمت چـپ متمایل می‌شود. بـا افـزایش بیشـتر عـدد رینولـدز پدیـده سـه شاخه‌ای شدن نیز در نمودار مشاهده می‌شود.

تا قبل از رینولدز بحرانی اول، جریان متقارن و طول هـر دو گردابه برابر است. در نتیجه، نمـودار شـکل ۹ بـه صـورت تـک شاخه می‌باشد. با بیشتر شدن عـدد رینولـدز از مقـدار بحرانـی اول، جریـان نامتقـارن شـده و نمـودار شـکل ۹ دو شـاخه‌ای می‌شود. به طوری که شاخه پایین طول گردابه کوچکتر و شاخه بالا طول گردابه بزرگتر را نشان می‌دهد.

بعد از عدد رینولدز بحرانی اول با انحراف جریان و ایجاد موازنـه جدید بین نیروهای اینرسی، فشاری و ویسکوز حالـت جدیـدی برای جریان ایجاد می‌شود. به این صورت که برای افزایش عـدد رینولدز سـرعت ورودی افـزایش پیـدا مـی‌کنـد و ایـن افـزایش سرعت با زیاد شدن دبی جریان همراه می‌باشد؛




**شکل ۹** مقایسه نمودار چند شاخه‌ای برای زوایای مختلف

پس اگر در محل‌هایی که گردابه تشکیل مـی‌شـود یـک سـطح مقطع فرضی در نظر گرفته شود، به دلیـل برقـراری پیوسـتگی، اندازه پروفیل سرعت در این سطح مقطع افزایش پیدا می‌کند و در نزدیکی دیواره‌های کانال که گردابه‌ها تشکیل مـی‌شـود و بـا افزایش سرعت ترم مشتق دوم سرعت نسـبت بـه $y$ در معادلـه

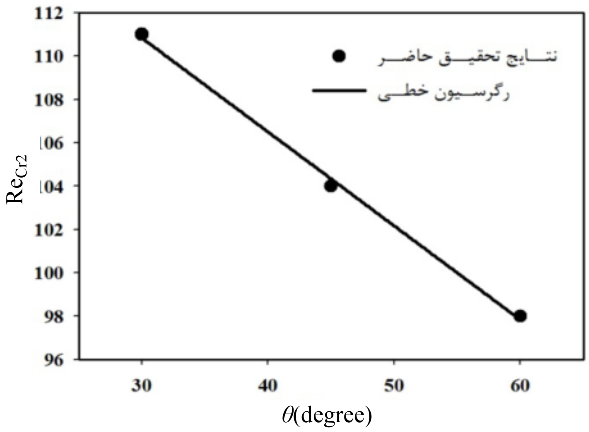
1. Bifurcation Phenomena

مومنتم کاهش می‌یابد که این منجر به کم شدن نیروی ویسکوز می‌شود و افزایش مقدار سرعت $u$ و ترم مشتق اول سرعت نسبت به $x$ در معادله مومنتوم، سبب افزایش نیروی اینرسی شده و برای موازنه نیروها در معادله مومنتوم، نیروی فشاری نیز افزایش پیدا می‌کند و این موازنه جدید نیروها با انحراف جریان به یک سمت کانال همراه می‌باشد؛ به طوری که گردابه‌هایی نامتقارن شکل می‌گیرد.

با زیاد شدن سرعت، نیروی اینرسی در جهت جریان انحرافی افزایش یافته و باعث افزایش طول گردابه در آن سمت کانال می‌شود و در سمت دیگر کانال که موازنه نیروها برقرار بوده، طول گردابه تقریباً ثابت می‌ماند؛ به همین دلیل در شکل ۹ شاخه پایین ابتدا کمی‌افت دارد و بعد از اندکی افزایش عدد رینولدز به صورت خط صاف ظاهر می‌شود. بعد از عدد رینولدز دوم دوباره تغییرات فشار نسبت به $x$ در جهت جریان زیاد شده و باعث انحراف جریان به سمت دیگر کانال شده و گردابه سوم شکل می‌گیرد و همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، تمودار سه شاخه‌ای می‌شود؛ که شاخه وسطی طول گردابه بزرگتر و فاصله بین شاخه پایین و بالا، طول گردابه سوم را نشان می‌دهد.

همان‌طور که در شاخه وسط قسمت سه شاخه‌ای نمودار شکل ۹ مشاهده می‌شود مقادیر رینولدز بحرانی دوم برای هر زاویه انبساطی تقریباً بر روی یک خط راست قرار دارد. در شکل ۱۰ با استفاده از رگرسیون خطی رابطه‌ای، برای مقدار عدد رینولدز بحرانی دوم بر حسب زاویه انبساطی به صورت زیر ارائه شده است.

$$\mathrm{Re}_{Cr۲} = ۱۲۳/۸۳۳۳ + (-۰/۴۳۳۳\theta^{o}) \qquad (۹)$$




**شکل ۱۰** رگرسیون خطی برای عدد رینولدز بحرانی دوم

مقدار عدد رینولدز بحرانی برای تبدیل گردابه‌ها از حالت متقارن به حالت نامتقارن و نیز تبدیل دو گردابه به سه گردابه در سه زاویه ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه به صورت منظم در جدول ۲ آورده شده است. که این مقادیر بیان شده برای عدد رینولدز بحرانی اول و دوم، در نقطه دو شاخه‌ای و سه شاخه‌ای نمودار شکل ۹ نیز قابل مشاهده است.

**جدول ۲** اعداد رینولدز بحرانی اول و دوم

| $\theta = ۳۰$ | $\theta = ۴۵$ | $\theta = ۶۰$ | عدد رینولدز بحرانی |
|---|---|---|---|
| ۶۳ | ۵۹ | ۵۷ | $\mathrm{Re}_{Cr۱}$ |
| ۱۱۱ | ۱۰۴ | ۹۸ | $\mathrm{Re}_{Cr۲}$ |

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق اثر زاویه انبساط و عدد رینولدز بر ناپایداری جریان در تبدیل گردابه‌ها از حالت متقارن به حالت دو گردابه نامتقارن و سپس سه گردابه، مطالعه شده و نتایج آن در زیر ارائه شده است.

۱- در اعداد رینولدز پایین، گردابه‌هایی به صورت متقارن با جهت چرخش متضاد پدید می‌آیند. با افزایش عدد رینولدز و وقوع حالت جدید در میدان جریان، گردابه ها به صورت یک جفت گردابه نامتقارن ظاهر می‌شوند. با افزایش هرچه بیشتر عدد رینولدز و تشدید ناپایداری گردابه سومی‌نیز بوجود می‌آید.

۲- در اعداد رینولدز بزرگ، گردابه‌ها تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر افزایش میزان اولین افت ناگهانی سرعت و اوج دوباره آن دارند. به طوری که گردابه کوچکتر در افت سرعت و گردابه بزرگتر در افزایش مجدد سرعت نقش بیشتری را ایفا می‌کند.

۳- در عدد رینولدز بحرانی اول برای هر زاویه انبساطی، رابطه (۱۰) (طول گردابه ۵/۵ برابر ارتفاع جریان بالادست) برقرار می‌باشد.

$$Xr = ۵/۵\, h \qquad (۱۰)$$

۴- برای هر زاویه انبساطی، مقدار عدد رینولدز بحرانی دوم را می‌توان از معادله (۱۱) بدست آورد.

$$\mathrm{Re}_{Cr۲} = ۱۲۳/۸۳۳۳ + (-۰/۴۳۳۳ \cdot \theta^{o}) \qquad (۱۱)$$

۵- با افزایش زاویه انبساطی، مقادیر اعداد رینولدز بحرانی اول ($\mathrm{Re}_{Cr۱}$) برای انشعاب دوشاخه‌ای (تبدیل جریان متقارن به نامتقارن) و مقادیر اعداد رینولدز بحرانی دوم ($\mathrm{Re}_{Cr۲}$) برای انشعاب سه شاخه‌ای کاهش می‌یابد.

## ۶- مراجع

[1] Durst F., Melling A., Whitelaw J. H., "Low Reynolds Number Flow over a Plane Symmetric Sudden Expansion", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 64, 1974, pp. 111-128.

[2] Cherdron W., Durst F., Whitelaw J. H., "Asymmetric Flows and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansions", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 84, 1978, pp. 13-31.

[3] Ouwa Y., Watanabe M., Asawo H., "Flow Visualization of a Two-Dimensional Water Jet in a Rectangular Channel", *Jpn. J. Appl. Phys*, Vol. 20, 1981, pp. 243-247.

[4] Fearn R. M., Mullin T., Cliffe K. A. , "Nonlinear Flow Phenomena in a Symmetric Sudden Expansion", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 211, 1990, pp. 595-608.

[5] Durst F., Pereira J. C. F., Cliffe K. A., "The Plane Symmetric Sudden Expansion Flow at Low Reynolds Number", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 248, 1993, p. 567.

[6] Battaglia F., Tavener S. J., Kulkarni A. K., Merkle C. L., "Bifurcation of Low Reynolds Number Flows in Symmetric Channels", *J. AIAA*, Vo. 35, 1997, pp. 99-105.

[7] Allerborn N., Nandakumar K., Raszillier H., Durst F., "Further Contributions on the Two-Dimensional Flow in a Sudden Expansion", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 330, 1997, p. 169.

[8] Revuelta A., "On the Two-Dimensional Flow in a Sudden Expansion with Large Expansion Ratios", *J. Phys. Fluids*, Vol. 17, No. 028102, 2005.

[9] Abbott D.E., Kline S.J., "Experimental Investigation of Subsonic Turbulent Flow over Sngle and Double Backward Facing Steps", *J. Basic Eng. Trans. ASME*, Vol. 84, No. 317, 1962.

[10] Mizushima J., Shiotani Y., "Structural Instability of the Bifurcation Diagram for Two-Dimensional Flow in a Channel with a Sudden Expansion", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 420, No. 131, 2000.

[11] Dagtekin I., Unsal M., "Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime", *Int. J. Numer. Methods Fluids,* Vol. 65, 2011, pp. 1133-1144.

[12] Oliveira P. J., "Asymmetric Flows of Viscoelastic Fluids in Symmetric Planar Expansion Geometries", *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 114, 2003, pp. 33-63.

[13] Ternik P., Marn J., Zunic Z., " Non-Newtonian Fluid Flow through a Planar Symmetric Expansion: Shear-Thickening Fluids", *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 135, 2006, pp. 136-148.

[14] Drikakis D., "Bifurcation Phenomena in Incompressible Sudden Expansion Flows", *J. Phys. Fluids*, Vol. 9, 1997, pp. 76-86.

[15] Hawa T., Rusak Z., "The Dynamics of a Laminar Flow in a Symmetric Channel with a Sudden Expansion", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 436, 2001, pp. 283-320.

[16] Mishra S., Jayaraman K., "Asymmetric Flows in Planar Symmetric Channels with Large Expansion Ratio", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 38, 2002, pp. 945-962.

[17] Pinho F. T., Oliveira P. J., Miranda J. P., "Pressure Losses in the Laminar Flow of Shear-Thinning Power-Law Fluids Across a Sudden Axisymmetric Expansion", *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, Vol. 24, 2003, pp. 747-761.