



ارتعاشات اتفاقی تیر مقطع متغیر یک سرگیردار تحت تحریک تصادفی

سعید ایرانی^{۱*}، سعید سازش^۲

۱- استادیار مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- دانش آموخته کارشناسی ارشد هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۶۷۶۵-۳۳۸۱، irani@kntu.ac.ir

چکیده- در این مطالعه به بررسی ارتعاشات اتفاقی تیر مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی گسترده ایستا با تابع چگالی احتمال گوسین پرداخته می شود. به این منظور با تحلیل ارتعاشات آزاد ابتدا شکل مدهای سیستم بر حسب توابع بسل بدست می آید، سپس پاسخ و تحریک سیستم بر حسب شکل مدهای سیستم بیان می شود. در مرحله بعد با گرفتن انتگرال فوریه از خودهمبستگی پاسخ، تابع چگالی طیفی پاسخ بدست می آید و از روی آن واریانس جابجایی نقاط مختلف تیر محاسبه می شود. در نهایت با استفاده از روابط الاستیسیته و محاسبه واریانس تنش و کرنش اتفاقی و مقایسه آن با تنش تسلیم تیر، احتمال تسلیم سیستم تحت تحریک تصادفی در نظر گرفته شده، بدست می آید.

کلیدواژگان: ارتعاشات اتفاقی، تیر مقطع متغیر، چگالی طیفی، احتمال تسلیم.

Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation

S. Irani^{1*}, S. Sazesh²

1- Assist. Prof., Aero. Eng., Khaje Nasir Toosi Univ., Tehran, Iran.

2- Graduated MSc in Aero. Eng., Khaje Nasir Toosi Univ., Tehran, Iran.

* P. O. B. 16765-3381, Tehran, Iran. irani@kntu.ac.ir

Abstract- In this study random vibration of a cantilever tapered beam under distributed stationary stochastic excitation with Gaussian probability density function is investigated. early free vibration analysis is performed to obtain the mode shapes of beam in form of Bessel functions, then the response is described in summation of mode shapes, and auto correlation of response is shaped by considering the mode shapes of tapered beam, also spectral density matrix of excitation is derived with cooperation of mode shapes and two dummy variables. in next step by means of frequency response and taking Fourier integral of autocorrelation of response, spectral density of displacement is computed and by using spectral density of displacement, variance of random displacements for various positions along the beam are achieved. Finally elasticity equation is applied to derive random strain and stress of beam. Comparing the variance of random stress with yield stress of beam leads to obtain probability of beam failure.

Keywords: Random Vibration, Tapered Beam, Spectral Density, Probability of Yield.

۱- مقدمه

این نوع تیرهای دارای خواص متغیر همواره از موضوعات مورد بررسی بوده است [۱-۳].

در تحلیل این نوع تیرها باید توجه داشت که ضرایب معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم متغیر می باشد و از این رو روش های

در سازه های پیچیده تیرهای غیر یکنواخت به علت توزیع بهتر سختی و وزن نسبت به تیرهای یکنواخت به طور گسترده ای مورد استفاده قرار می گیرد، بنابراین مسئله ارتعاشات خمشی

با در نظر گرفتن شکل تیر به صورت شکل ۱ برای ممان اینرسی خمشی و سطح مقطع روابط زیر بدست می‌آید.

$$A(x) = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right) A_i = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right) b h_i \quad (2)$$

$$I(x) = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right)^3 I_i = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right)^3 \frac{b h_i^3}{12} \quad (3)$$

$$r = \frac{h_j - h_i}{h_i} \quad (4)$$

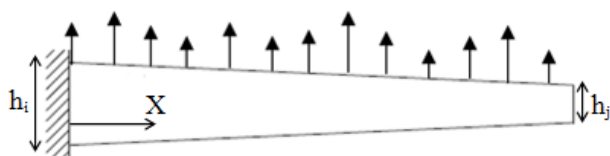
در روابط بالا ℓ طول تیر، A_i سطح مقطع تیر در تکیه‌گاه و I_i ممان خمشی تیر در تکیه‌گاه می‌باشد.

۳- حل ارتعاشات آزاد

برای حل ارتعاشات آزاد تیر، ابتدا تابع تحریک صفر در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از رابطه $w(x,t) = W(x)q(t)$ جداسازی متغیرها و همچنین تغییر متغیر $\eta = \frac{x}{\ell}$ ، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left((1+r\eta)^3 \frac{d^2}{d\eta^2} W(\eta) \right) - \beta^4 (1+r\eta) W(\eta) = 0 \quad (5)$$

$$\beta^4 = \frac{\rho A_i \ell^4}{EI_i} \omega^2 \quad (6)$$



شکل ۱ تیر مقطع متغیر یک سرگیردار تحت تحریک گسترده تصادفی از حل معادله (۵) رابطه (۷) بدست می‌آید.

$$W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+r\eta}} \left(C_1 J_1 \left(2\beta \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) + C_2 Y_1 \left(2\beta \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) + C_3 J_1 \left(2\sqrt{-\beta^2} \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) + C_4 Y_1 \left(2\sqrt{-\beta^2} \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) \right) \quad (7)$$

در رابطه (۷) J_1 و Y_1 توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه یک و

مختلفی برای بررسی این نوع مسائل ارائه شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به حل بسته معادله حاکم بر یک تیر مقطع متغیر با تکیه‌گاه‌های ساده اشاره نمود [۴-۷]. روش‌های دیگری نیز از جمله باقی‌مانده وزنی [۸]، روش تغییرات [۹، ۱۰]، المان محدود [۱۱]، تفاضل محدود [۱۲]، روش المان مرزی [۱۳]، روش ماتریس انتقال [۱۴]، روش سختی دینامیکی [۱۵]، روش سختی دینامیکی همراه با آنالیز مودال [۱۶، ۱۷]، و تبدیل لاپلاس [۱۸] برای حل معادله حاکم بر اینگونه مسائل به کار رفته است. در بعضی از بررسی‌های دیگر نیز از توابع گرین در فضای لاپلاس [۱۹] استفاده شده است.

در ادامه مطالعه بر روی تیرهایی با مقطع متغیر، اثرات وجود فنر متمرکز [۲۰]، دمپر و جرم متمرکز [۲۱، ۲۲] و تکیه‌گاه‌های الاستیک همراه با دمپر ویسکوز و جرم متمرکز [۲۳] در نظر گرفته شده است. در جدیدترین مطالعات بر روی این‌گونه از تیرها نیز یک تابع شکلی جدید برای بررسی ارتعاشات عرضی آنها معرفی شده است [۲۴].

از طرف دیگر از آنجا که بخشی از بارهای وارد بر انواع سازه‌ها در حالت واقعی به صورت تصادفی هستند ارتعاشات اتفاقی تیرها نیز از موضوعاتی بوده است که در سالهای متمادی به آن پرداخته شده است، در حالی که تیر در نظر گرفته شده در این مطالعات به صورت مقطع ثابت می‌باشد [۲۵-۲۷].

آنچه در این مطالعه به آن پرداخته می‌شود بررسی ارتعاشات اتفاقی یک تیر مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی است و احتمال تسلیم آن نیز تحلیل خواهد شد.

۲- معادلات حرکت حاکم

معادله حرکت تیر اولربرنولی مقطع متغیر را که تحت تحریک تصادفی قرار گرفته باشد را می‌توان به صورت (۱) نوشت [۲۸].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (1)$$

که در آن E مدول یانگ، $I(x)$ ممان خمشی سطح مقطع تیر، ρ چگالی تیر، $A(x)$ سطح مقطع تیر، $w(x,t)$ جابجایی عمودی تیر در زمان t و مکان x و $p(x,t)$ نیروی تصادفی گسترده ایستا^۱ وارد بر تیر می‌باشد.

1. Stationary

که در آن μ_i ، جرم تعمیم یافته و K_i سختی تعمیم یافته برای i امین مود و δ_{ij} تابع دلتای کرونیگر می باشد.

با بسط پاسخ بر اساس رابطه $w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) q_i(t)$ و قرار دادن این معادله در رابطه (۱) و ضرب طرفین معادله حاصل در $W_j(x)$ و انتگرال گیری از صفر تا ℓ ، با توجه به خاصیت تعامد شکل مودها، معادله زیر بدست می آید.

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{\mu_i} \int_0^{\ell} p(x, t) W_i(x) dx = Q_i(t) \quad (10)$$

در صورتی که تابع پاسخ فرکانسی سیستم به صورت رابطه (۱۱) تعریف شود، و با فرض صفر بودن شرایط اولیه سیستم، پاسخ مختصات تعمیم یافته $q_i(t)$ به صورت رابطه (۱۲) محاسبه می شود.

$$H_i(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_i^2} \quad (11)$$

$$q_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_i(\omega) Q_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12)$$

۵- ارتعاشات اتفاقی

در این بخش به تحلیل ارتعاشات اتفاقی سیستم مورد نظر که تحت یک تحریک تصادفی ایستا با مقدار میانگین صفر قرار گرفته است، پرداخته می شود. توجه شود که فرض شرایط اولیه صفر کماکان برقرار است.

چون تابع تحریک $P(x, t)$ به صورت ایستا در نظر گرفته شده است، بنابراین نیروهای تعمیم یافته $Q_i(t)$ نیز ایستا هستند. رابطه دیگر همبستگی^۱ نیروهای $Q_i(t)$ و $Q_j(t)$ به صورت رابطه (۱۳) نوشته می شود.

$$\begin{aligned} R_{Q_i Q_j}(\tau) &= E \{ Q_i(t) Q_j(t + \tau) \} \\ &= E \left\{ \frac{1}{\mu_i} \int_0^{\ell} p(x_1, t) W_i(x_1) dx_1 \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\mu_j} \int_0^{\ell} p(x_2, t) W_j(x_2) dx_2 \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\mu_j} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} W_i(x_1) W_j(x_2) \right. \\ &\quad \times \left. R_{P_{x_1 P_{x_2}}}(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

C_1 تا C_4 اعداد ثابت می باشند. با اعمال شرایط مرزی نشان داده شده در جدول ۱ یک دستگاه ۴ معادله ۴ مجهول بر حسب ثوابت C_1 تا C_4 بدست می آید.

از حل غیر بدیهی این دستگاه مقادیر مختلف β حاصل می شود. حل غیر بدیهی منجر به ایجاد یک منحنی متشکل از توابع بسل معرفی شده، می شود که محل برخورد این منحنی با محور β ، پاسخ های حل غیر بدیهی خواهد بود، این محل های برخورد در شکل ۲ نشان داده شده است.

از روی مقادیر مختلف β با توجه به رابطه (۶) فرکانس های طبیعی تیر و با توجه به رابطه (۷) شکل مودهای سیستم محاسبه می شود.

۴- تحلیل مودال

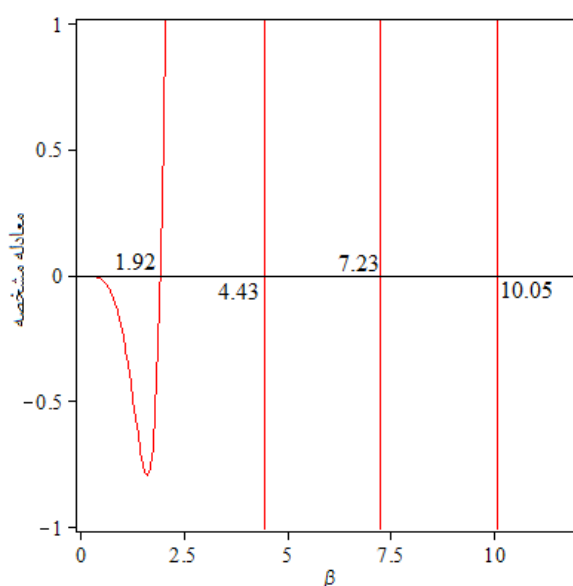
با توجه به خاصیت تعامد شکل مودها برای ماتریس جرم و سختی سیستم روابط زیر برقرار می باشد:

$$\int_0^{\ell} \rho A(x) W_i(x) W_j(x) dx = \mu_i \delta_{ij} \quad (8)$$

$$\int_0^{\ell} EI(x) W_i''(x) W_j''(x) dx = K_i \delta_{ij} \quad (9)$$

جدول ۱ شرایط مرزی تیر مقطع متغیر یک سرگیردار

$$\frac{d}{d\eta} \left(I(\eta) \frac{d^2 W}{d\eta^2} \right) \bigg|_{\eta=1} = 0 \quad \frac{d^2 W}{d\eta^2} \bigg|_{\eta=1} = 0 \quad \frac{dW}{d\eta} \bigg|_{\eta=0} = 0 \quad W(0) = 0$$



شکل ۲ شکل مودهای تیر یک سرگیردار مقطع متغیر

با قرار دادن $\tau = 0$ ، در رابطه (۱۸) میانگین مجذور^۳ جابجایی در نقطه x از تیر حاصل می‌شود.

$$E\{w^2(x)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x) W_j(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) H_j^*(\omega) S_{Q_i Q_j}(\omega) d\omega \quad (19)$$

حال با توجه به روابط الاستیسیته دیگر خواص آماری مربوط به ممان خمشی و کرنش تیر محاسبه می‌شود. رابطه ممان خمشی تیر به صورت رابطه (۲۰) است.

$$M_b = -EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (20)$$

بنابراین میانگین مجذور ممان خمشی در نقطه x از تیر از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$E\{M_b^2\} = (EI(x))^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i''(x) W_j''(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) H_j^*(\omega) S_{Q_i Q_j}(\omega) d\omega \quad (21)$$

بیشینه کرنش در راستای طولی تیر از رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود. در این معادله $h(x)$ ارتفاع مقطع تیر و برابر می‌باشد.

$$\varepsilon = -\frac{h(x)}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (22)$$

میانگین مجذور کرنش بیشینه در نقطه x تیر از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$E\{\varepsilon^2(x)\} = \left(\frac{h(x)}{2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i''(x) W_j''(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) H_j^*(\omega) S_{Q_i Q_j}(\omega) d\omega \quad (23)$$

با توجه به رابطه بین تنش و کرنش در طول تیر از رابطه (۲۴)، برای میانگین مجذور تنش بیشینه در تیر، رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

$$S = E \varepsilon \quad (24)$$

$$E\{S^2(x)\} = E^2 \{ \varepsilon^2(x) \} \quad (25)$$

۶- احتمال تسلیم

از آنجا که توزیع احتمال تحریک گوسین^۴ است و ایستا نیز

در این رابطه $E\{\cdot\}$ نمایانگر تابع میانگین‌گیری است و x_1 و x_2 دو متغیر کاذب‌اند و دو نقطه مجزا را در فاصله $0 < x < \ell$ مشخص می‌نمایند. $R_{p_{x_1 p_{x_2}}}(x_1, x_2, \tau)$ تابع دیگر همبستگی بین تحریک تصادفی گسترده $p(x_1, t)$ و $p(x_2, t)$ می‌باشد.

دیگر چگالی طیفی^۱ $S_{Q_i Q_j}(\omega)$ بین نیروهای تعمیم یافته $Q_i(t)$ و $Q_j(t)$ با انتگرال فوریه از $R_{Q_i Q_j}(\tau)$ بدست می‌آید.

$$S_{Q_i Q_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{Q_i Q_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

اکنون رابطه (۱۳) در داخل رابطه (۱۴) جایگذاری می‌شود،

$$S_{Q_i Q_j}(\omega) = \frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\mu_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i(x_1) W_j(x_2) \times S_{p_{x_1 p_{x_2}}}(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \quad (15)$$

که در این رابطه $S_{p_{x_1 p_{x_2}}}(x_1, x_2, \omega)$ ، انتگرال فوریه تابع $R_{p_{x_1 p_{x_2}}}(x_1, x_2, \tau)$ می‌باشد.

تابع دیگر همبستگی پاسخ بین دو نقطه x_1 و x_2 به صورت رابطه (۱۶) نوشته می‌شود.

$$R_{w_{x_1 w_{x_2}}}(x_1, x_2, \tau) = E\{w(x_1, t) w(x_2, t + \tau)\} \\ = E\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x_1) q_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} W_j(x_2) q_j(t + \tau) \right\} \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x_1) W_j(x_2) R_{q_i q_j}(\tau) \quad (16)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۲) و رابطه (۱۶)، عبارت داده شده در رابطه (۱۷) برای دیگر همبستگی پاسخ بر حسب چگالی طیفی نیروی تعمیم یافته بدست می‌آید.

$$R_{w_{x_1 w_{x_2}}}(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x_1) W_j(x_2) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) H_j^*(\omega) S_{Q_i Q_j}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (17)$$

در این رابطه، $S_{Q_i Q_j}(\omega)$ از معادله (۱۵) محاسبه می‌شود. تابع $H_j^*(\omega)$ مزدوج مختلط تابع $H_j(\omega)$ می‌باشد. در صورتی که $x_1 = x_2$ باشد تابع خودهمبستگی^۲ پاسخ به صورت زیر حاصل می‌شود.

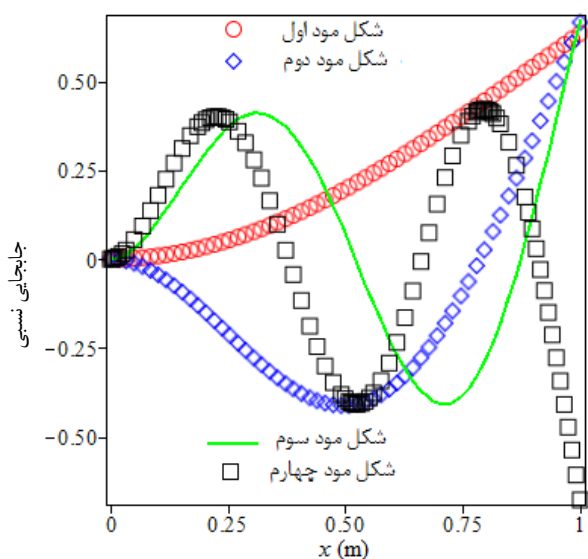
$$R_w(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x) W_j(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) H_j^*(\omega) S_{Q_i Q_j}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (18)$$

3. Mean Square

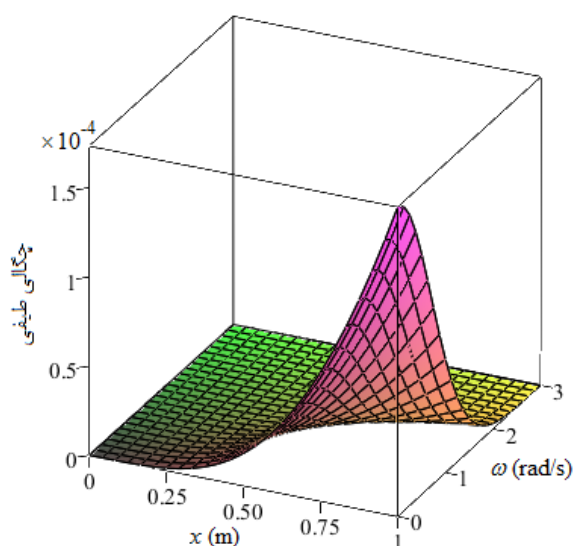
4. Gaussian

1. Cross-Spectral Density

2. Auto-Correlation



شکل ۳ شکل موده‌های تیر یک‌سرگیردار مقطع متغیر



شکل ۴ چگالی طیفی پاسخ در طول تیر

جدول ۳ فرکانس طبیعی تیر مقطع متغیر یک‌سرگیردار

مقدار (رادیان بر ثانیه)	فرکانس طبیعی
۳۱۹/۴۵	ω_1
۱۶۹۹/۸۴	ω_2
۴۵۳۳/۱۷	ω_3
۸۷۶۴/۴۵	ω_4

تابع چگالی طیفی تیر به ازای نقاط مختلف در طول تیر در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۴

می‌باشد، پاسخ سیستم نیز گوسین خواهد بود. بنابراین با بدست آوردن واریانس^۱ و انحراف معیار^۲ پاسخ می‌توان احتمال تسلیم سازه را مشخص کرد. لذا با محاسبه تنش اتفاقی سیستم، از رابطه (۲۶) احتمال وجود بیشینه تنش بالاتر از تنش تسلیم مشخص می‌شود [۲۹].

$$P_y = e^{-\frac{\sigma_y^2}{2\sigma_{s(x)}^2}} \quad (26)$$

در رابطه (۲۶) σ_y نمایانگر تنش تسلیم و $\sigma_{s(x)}$ نمایانگر واریانس تنش در نقطه x از تیر می‌باشد.

۷- حل مثال عددی

در این قسمت یک تیر نمونه که تحت تحریک تصادفی با چگالی طیفی $S_0 e^{-\alpha|x_1-x_2|} e^{-\gamma\omega^2}$ قرار می‌گیرد [۳۰]، و خواص آن در جدول ۲ آمده است، مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. در ابتدا چهار فرکانس طبیعی و چهار شکل مود اول سیستم محاسبه می‌گردد، سپس به ترتیب چگالی طیفی تیر، واریانس پاسخ نقاط مختلف تیر، واریانس تنش در طول تیر، تابع چگالی احتمال پاسخ تیر و در نهایت احتمال تسلیم تیر تحت بارگذاری مشخص شده بدست می‌آید. چهار شکل مود اول تیر در شکل ۳ و ۴ فرکانس طبیعی اول در جدول ۳ نشان داده شده است.

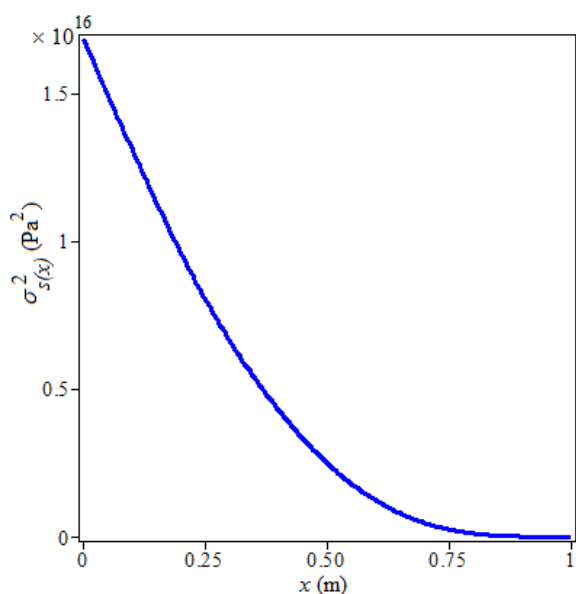
جدول ۲ مشخصات تیر مورد بررسی

پارامتر	مقدار
α	۱
γ	۱
E	۲۰۰ گیگاپاسکال
ρ	۸۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب
ℓ	۱ متر
h_i	۰/۰۶ متر
h_j	۰/۰۴ متر
b	۰/۰۳ متر
S_0	1×10^{-8} نیوتون ثانیه بر مترمربع
σ_y	۰/۲۵ گیگاپاسکال

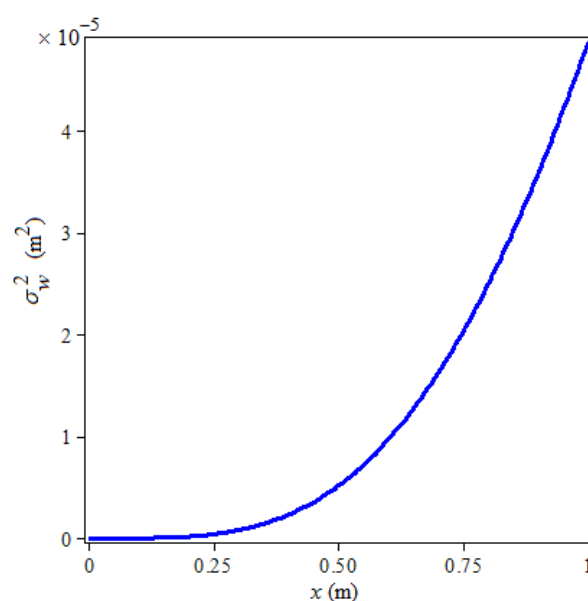
- 1 . Variance
- 2 . Standard Deviation

در تکیه‌گاه دارای مقدار بیشینه می‌باشد به طوری که در تکیه‌گاه بیشینه پراکندگی داده‌های تصادفی پاسخ رخ می‌دهد. بعد از محاسبه واریانس تنش اتفاقی در تکیه‌گاه با توجه به شکل ۶ که نمایانگر توزیع نرمال پاسخ می‌باشد، می‌توان نمودار تنش اتفاقی در تکیه‌گاه را به صورت شکل ۸ داشت.

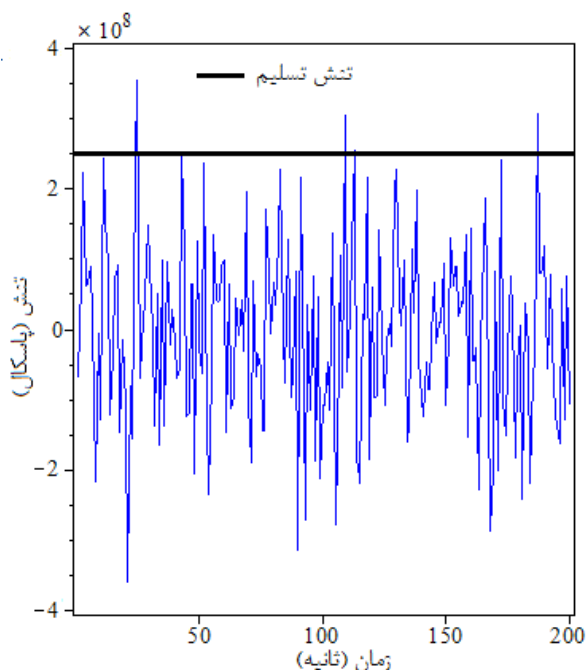
مشخص است، مقدار تابع چگالی طیفی پاسخ در نوک تیر مقدار ماکزیمم خود را داراست، بنابراین با توجه به رابطه (۱۹) واریانس پاسخ نیز در نوک تیر بیشینه خواهد شد (شکل ۵). تابع چگالی احتمال تنش اتفاقی در مقطع تکیه‌گاه تیر به صورت نمودار میله‌ای، در شکل ۶ نشان داده شده است.



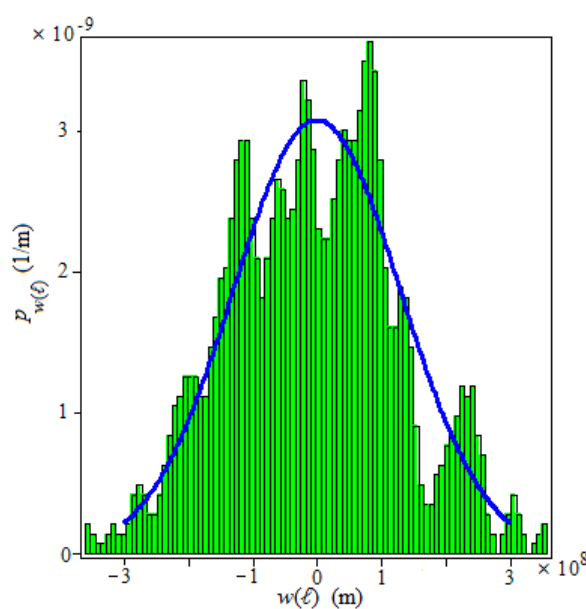
شکل ۷ واریانس تنش در طول تیر



شکل ۵ واریانس جابجایی در طول تیر



شکل ۸ تنش اتفاقی تیر مقطع متغیر در تکیه‌گاه



شکل ۶ تابع چگالی احتمال تنش اتفاقی در تیر

همان‌طور که در شکل ۷ مشخص است، واریانس تنش اتفاقی

آنالیزهای آماری یک بارگذاری تصادفی، چگالی طیفی آنرا مشخص کرده و از روی آن با انجام تحلیل ارتعاشات اتفاقی و بدست آوردن احتمال تسلیم می‌توان قابلیت اطمینان یک سازه را نسبت به آن تحریک مشخص نمود و معیار لازم برای طراحی سازه را مشخص کرد.

همان‌طور که در شکل ۸ مشخص است به ازای تحریک با مشخصات داده شده تنش در تکیه‌گاه از تنش تسلیم فراتر رفته است، لذا می‌توان احتمال وجود تنش ماکزیمم بالای خط تنش تسلیم را از رابطه (۲۶) مشخص نمود، که احتمال تسلیم در این شدت از تحریک، $15/64\%$ می‌باشد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی ارتعاشات اتفاقی تیر مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی پرداخته شد و با توجه به خواص آماری پاسخ اتفاقی احتمال تسلیم تیر در نتیجه بار تصادفی نیز تحلیل شد. به منظور صحت‌گذاری بر پاسخ بدست آمده کافی است شکل مودهای تیر و یا بطور کلی‌تر، حل معادله مشخصه سیستم در شرایط خاصی که تفاوت دو مقطع زیاد نباشد با مقادیر حل معادله مشخصه یک تیر مقطع ثابت یک‌سرگردار مقایسه شود. برای این منظور مقدار پارامتر $h_i/0.6$ و مقدار پارامتر $h_i/0.599$ در نظر گرفته می‌شود تا تیر مورد مطالعه تقریباً تبدیل به تیر مقطع ثابت شود، حال نتایج بدست آمده از حل غیر بدیهی معادله (۷) با نتایج مربوط به تیر یک‌سرگردار مقطع ثابت [۲۸] مقایسه می‌شود (جدول ۴).

در این مطالعه احتمال وجود نقطه ماکزیمم بالاتر از تنش تسلیم محاسبه شد. آنچه مسلم است افزایش شدت تحریک احتمال تسلیم را افزایش خواهد داد به طور مثال با ۵ برابر کردن شدت تحریک احتمال تسلیم به 69% افزایش پیدا می‌کند. عوامل دیگر تأثیرگذار بر روی احتمال تسلیم تیر، ابعاد و مشخصات تیر می‌باشد که با توجه به حل ارائه شده می‌توان با تغییر هرکدام به بررسی میزان تأثیر بر روی احتمال تسلیم تیر پرداخت به عنوان مثال با افزایش طول تیر احتمال تسلیم افزایش یافته و افزایش پهنای تیر موجب کاهش احتمال تسلیم می‌شود.

جدول ۴ صحت‌گذاری بر پاسخ‌ها با مقایسه حل معادله مشخصه

حل معادله مشخصه	مطالعه ارائه شده	مرجع [۲۸]
β_1	۱/۸۷۵۲	۱/۸۷۵۱
β_2	۴/۶۹۲۸	۴/۶۹۴۱
β_3	۷/۸۵۱۹	۷/۸۵۴۷
β_4	۱۰/۹۹۱۲	۱۰/۹۹۵۶

۹- مراجع

- [1] Taleb N. J. and Suppiger E. W., "Vibration of Stepped Beams", *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 28, 1961, pp. 295-298
- [2] Lindberg G. M., "Vibrations of Nonuniform Beams", *The Aeronautica Quarterly*, Vol. 14, 1963, pp. 387-395.
- [3] Wang H. C., "Generalized Hypergeometric Function Solutions on Transverse Vibrations of a Class of Nonuniform Beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, 1968, pp. 702-708.
- [4] Mabie H. H. and Rogers C. B., "Transverse Vibrations of Tapered Cantilever Beams with End Supports", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 44, 1968, pp. 1739-1741.
- [5] Mabie H. H. and Rogers C. B., "Transverse Vibrations of Double-Tapered Cantilever Beams", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 57, 1972, pp. 1771-1774.
- [6] Mabie H. H. and Rogers C. B., "Transverse Vibrations of Double-Tapered Cantilever Beams with End Support and with End Mass", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 55, 1974, pp. 986-991.
- [7] Ganga Rao H. V. S. and Spyarakos C. C., "Closed form Series Solutions of Boundary Value Problems with Variable Properties", *Computers and Structures*, Vol. 23, 1986, pp. 211-215.
- [8] Finlayson B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, New York Academic Press, 1972.
- [9] Mikhlin S. G., *Variational Methods in Mathematical Physics*, New York Macmillan, 1964.
- [10] Laura P. A. A., Valerga De Greco B., Utjes J. C. and Carnicer R., "Numerical Experiments on Free and Forced Vibrations of beams of nonuniform cross-section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 120, 1988, pp. 587-596.
- [11] Bathe K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
- [12] Ghali A. And Neville A. M., *Structural Analysis*, Pennsylvania: Intext Educational Publishers, 1972.
- [13] Beskos D. E., "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis" *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 40, 1987, pp. 1-23.

- [22] De Rosaa M.A., Maurizi M.J., "Damping in Exact Analysis of Tapered Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 286, 2005, pp. 1041-1047.
- [23] De Rosa M.A., Lippiello M., Maurizi M.J., Martin H.D., "Free Vibration of Elastically Restrained Cantilever Tapered Beams with Concentrated Viscous Damping and Mass", *Journal of Mechanics Research Communications*, Vol. 37, 2010, pp. 261-264.
- [24] Valipour Hamid R., Bradford Mark A., "A New Shape Function for Tapered Three-Dimensional Beams with Flexible Connections", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 70, 2012, pp. 43-50.
- [25] Rzhantsyn A.R., *Probabilistic Calculation of Beams on a Random Load*, Stroizdat Publ. House, Moscow, Vol. 12, 1977.
- [26] Elishakoff, I., *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [27] Waleed F., Faris J., Daoud I. and Sutjipto A.G.E., "Random Vibrations of a Beam on Elastic Foundation", *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, Vol. 5(6), 2011, pp. 456-460.
- [28] Singiresu S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, New York, 2007.
- [29] Newland, D.E., *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*, Dover publication, Mineola New York, 3th Edition, 2005.
- [30] Chang, T.P. and Chang, C.Y., "Vibration Analysis of Beams with a Two Degree-of-Freedom Spring-mass System", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 35, No. 5, 1998, pp. 383-401.
- [14] Chu F. H. and Pilkeyw. D., "Transient Analysis of Structural Members by the CSDT Riccati Transfer Matrix Method", *Computers and Structures*, Vol. 10, 1979, pp. 599-611.
- [15] JUST D. J., "Plane Frameworks of Tapered Box and I-Section", *Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 103, 1977, pp. 71-86.
- [16] Ovunk B. A., "Dynamics of Frameworks by Continuous Mass Method", *Computers and Structures*, Vol. 4, 1974, pp. 1061-1089.
- [17] Beskosd. E., "Dynamics and Stability of Plane Trusses with Gusset Plate" *Computers and Structures*, Vol. 10, 1979, pp. 785-795.
- [18] Beskos D. E. and Narayanan G. V., "Dynamic Response of Frameworks by Numerical Laplace Transform", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, 1983, pp. 289-307.
- [19] Lee S. Y., Ke H. Y. and Kuo Y. H., "Analysis of Non-Uniform Beam Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142(1), 1990, pp. 15-29.
- [20] Craver W. L., Jampala J.R. and P., "Transverse Vibration of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Constraining Springs", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166(3), 1993, pp. 521-529.
- [21] De Rosa M.A., Auciello N.M., Maurizi M.J., "The use of Mathematical in the Dynamic Analysis of a Beam with a Concentrated Mass and Dashpot", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263, 2003, pp. 219-226.