



بررسی تأثیر پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی بر رشد ترک خستگی در یک نمونه CT با استفاده از تئوری حد مرکزی

امیررضا شاهانی^{۱*}، محمد سالاری^۲

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۹۹۹-۱۹۳۹۵، Shahani@kntu.ac.ir

چکیده- در این مقاله تأثیر تغییر پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی بر رشد ترک خستگی در یک نمونه CT با استفاده از تئوری حد مرکزی بررسی شده است. در این روش با فرض تئوری آماری حد مرکزی (CLT)، روابط توزیع عمر، تابع احتمال تخریب و قابلیت اطمینان استخراج می شود. برای در نظر گرفتن اثر نسبت تنش در معادلات نرخ رشد ترک خستگی، از معادله واکر استفاده شده است. سپس برای صحت‌گذاری نتایج به دست آمده در سه حالت بارگذاری اتفاقی با پهنای باندها و سطوح بارگذاری مختلف، نتایج تحلیل از جمله میانگین طول عمر نمونه و میانگین طول ترک بر حسب تعداد سیکل بارگذاری با نتایج آزمون مقایسه شده است که نشان‌دهنده تطابق خوب نتایج تحلیل و آزمون است. همچنین نمودارهای قابلیت اطمینان و احتمال تخریب نیز بر حسب تعداد سیکل بارگذاری ارائه شده است.

کلیدواژگان: بارگذاری اتفاقی، پهنای باند، سطح بارگذاری، رشد ترک خستگی، تئوری حد مرکزی.

The study of the effect of bandwidth and loading level parameters of random load histories on the fatigue crack growth in a CT specimen by the central limit theory

A. Shahani^{1*}, M. Salari²

1- Prof., Mech. Eng., Khajeh Nasireddin Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran.

2- PhD. Student, Mech. Eng., Khajeh Nasireddin Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran.

* P. O. B. 19395-1999 Tehran, Iran. Shahani@kntu.ac.ir

Abstract- In this paper, the effect of bandwidth and loading level parameters changes of random load histories on the fatigue crack growth is studied by the central limit theory. In this method, the life probabilistic distribution and probability of failure function and reliability function are derived by the central limit theory. The walker equation is used to account the stress ratio effect in the fatigue crack growth rate equations. Then, the theoretical results are verified by the test results in the three random loading conditions with the various bandwidths and loading levels. A good agreement among the theory and test results was observed. The probability of failure and reliability diagrams via number of cycles is presented too.

Keywords: Random Loading, Bandwidth Parameter, Loading Level, Fatigue Crack Growth, Central Limit Theory.

۱- مقدمه

هوایی در هنگام بهره‌برداری، در معرض بارهای نامنظم یا اتفاقی هستند. تخمین زمانی که یک ترک خستگی طول می‌کشد تا

اغلب سازه‌ها و سیستم‌های مکانیکی مخصوصاً وسایل نقلیه

رشد کند، در طراحی سازه‌های در معرض بار اتفاقی ضروری است. در بارگذاری‌های اتفاقی بر خلاف بارگذاری با دامنه ثابت، دامنه بارگذاری و فرکانس با گذشت زمان ثابت نبوده و به‌صورت کاملاً نامنظم می‌باشند. این بی‌نظمی، تابعی از پهنای باند چگالی طیفی توان فرایند اتفاقی است به‌طوری که هر چقدر این پهنای باند کوچکتر باشد، بارگذاری شکل منظم‌تری داشته که در اصطلاح به آن فرایند نوار باریک^۱ گویند و هر چقدر این پهنای باند بزرگتر باشد، بارگذاری شکل نامنظم‌تری دارد که در اصطلاح به آن فرایند نوار پهن^۲ می‌گویند.

با تغییر پارامترها و مشخصات مختلف بارگذاری اتفاقی می‌توان شاهد تغییر در عمر خستگی سازه مورد نظر بود. تأثیر این پارامترها مانند پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی در مقالات مختلفی از جمله در مراجع [۴-۱] بررسی شده است. همچنین در مقالات متعددی توسط محققان مختلف از جمله [۷-۵]، تحلیل و آزمون رشد ترک خستگی تحت بارگذاری با دامنه متغیر، در نمونه‌های CT بررسی شده است.

آلوی [۵] با استفاده از مدل ویلر و شبیه‌سازی سیکل به سیکل به بررسی رشد ترک خستگی تحت بارگذاری اتفاقی در یک نمونه CT پرداخته و نتایج به‌دست آمده را با نتایج آزمون مقایسه کرده است. مورنو و همکاران [۶]، ۲۳۵ آزمون رشد ترک خستگی تحت بارگذاری اتفاقی روی نمونه‌های CT انجام داده‌اند. آنها در مطالعه خود ۴ نوع بارگذاری از روی توابع چگالی با پهنای باندهای مختلف ایجاد کرده و توسط آنها اثر پهنای باند، طول تاریخچه و سطح بار را روی رشد ترک خستگی بررسی کرده‌اند. همچنین کالنائوس و همکاران [۷]، رفتار فولاد ضد زنگ AL6XN را به‌صورت آزمایشگاهی با استفاده از نمونه CT مدور بررسی کرده‌اند. آنها اثر نسبت تنش، اضافه بار و توالی بار را روی رشد ترک خستگی مطالعه کرده‌اند.

در این مقاله با فرض تئوری آماری حد مرکزی به استخراج روابط توزیع عمر، تابع احتمال تخریب و قابلیت اطمینان در یک نمونه CT تحت بارگذاری اتفاقی و سپس بررسی تأثیر پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی روی عمر خستگی با فرض ثابت و قطعی بودن خواص و هندسه ماده پرداخته شده است. در مطالعات انجام شده قبلی روش تحلیلی با فرض تئوری آماری حد مرکزی تنها برای یک صفحه بی

در این مقاله با فرض تئوری آماری حد مرکزی به استخراج روابط توزیع عمر، تابع احتمال تخریب و قابلیت اطمینان در یک نمونه CT تحت بارگذاری اتفاقی و سپس بررسی تأثیر پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی روی عمر خستگی با فرض ثابت و قطعی بودن خواص و هندسه ماده پرداخته شده است. در مطالعات انجام شده قبلی روش تحلیلی با فرض تئوری آماری حد مرکزی تنها برای یک صفحه بی

در این مقاله با فرض تئوری آماری حد مرکزی به استخراج روابط توزیع عمر، تابع احتمال تخریب و قابلیت اطمینان در یک نمونه CT تحت بارگذاری اتفاقی و سپس بررسی تأثیر پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی روی عمر خستگی با فرض ثابت و قطعی بودن خواص و هندسه ماده پرداخته شده است. در مطالعات انجام شده قبلی روش تحلیلی با فرض تئوری آماری حد مرکزی تنها برای یک صفحه بی

۲- معادلات حاکم بر مساله

۲-۱- استخراج تاریخچه زمانی بارگذاری

برای شبیه‌سازی تاریخچه بارگذاری اتفاقی از روی تابع چگالی طیفی توان $S(\omega)$ ، از هر هم نهی توابع کسینوسی با فرکانس و زاویه فاز اتفاقی با توزیع یکنواخت استفاده می‌شود. در نتیجه، تاریخچه بارگذاری می‌تواند به‌صورت رابطه (۱) نوشته شود:

$$X(t) = \sum_{k=1}^J [2S(\omega_k) \Delta \omega_k]^{1/2} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (1)$$

که در آن ϕ_k به‌صورت اتفاقی در بازه $(0, 2\pi)$ و ω_k به‌صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$\omega_k = \omega_0 + (k - 0.5) \Delta \omega + (0.2 \text{ Rand}(0,1) - 0.1) \Delta \omega \quad (2)$$

جمله سوم معادله فوق جهت تکرار نشدن یک الگوی یکسان در تاریخچه بارگذاری اضافه شده است. همچنین برای یک فرآیند اتفاقی ایستا با میانگین صفر، نسبت بی‌نظمی^۳ (ξ) و پارامتر پهنای باند^۴ (ε) به‌صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{M_2}{\sqrt{M_0 M_4}}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3)$$

که در آن M_n ممان درجه n م تابع چگالی طیفی $S(\omega)$ می‌باشد و به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{F(a)P_e \sqrt{\pi a}}{(1-R)^{1-m}} \right)^n = C \left(F(a)P'_e \sqrt{\pi a} \right)^n \quad (9)$$

که در آن P'_e برابر مقدار زیر است:

$$P'_e = \frac{P_e}{(1-R)^{1-m}} \quad (10)$$

برای پیش‌بینی رشد ترک خستگی و قابلیت اطمینان خستگی تحت بارگذاری اتفاقی، تحلیل آماری روی همه دامنه بارگذاری‌های به‌دست آمده از روش جریان بارانی انجام می‌شود. برای برازش دامنه بارگذاری‌های مؤثر به‌دست آمده می‌توان از توزیع احتمالی وایبول استفاده کرد که به‌صورت رابطه (۱۱) نوشته می‌شود:

$$P \left(\frac{P'_e}{\sigma} \right) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{P'_e}{\gamma \sigma} \right)^{m'} \right] \quad (11)$$

که در آن m' و γ پارامترهای توزیع وایبول بوده که تابعی از ضریب بی‌نظمی بارگذاری می‌باشد و σ انحراف استاندارد فرایند بارگذاری است. بعد از بکار بردن توزیع وایبول برای برازش دامنه بارگذاری‌های مؤثر، ممان‌های آماری این دامنه تنش‌ها می‌توانند به آسانی محاسبه شوند. مخصوصاً مقدار میانگین و انحراف معیار که به‌صورت رابطه (۱۲) به‌دست می‌آیند:

$$\mu = \gamma \Gamma \left(1 + \frac{1}{m'} \right),$$

$$\sigma = \gamma \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{m'} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m'} \right)} \quad (12)$$

در رابطه فوق، $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است. در نتیجه با استفاده از رابطه (۱۲) می‌توان مقدار میانگین و انحراف معیار $(P'_e/\sigma)^n$ را به‌صورت رابطه (۱۳) به‌دست آورد که در آن n همان توان رابطه واکر می‌باشد:

$$\mu_{P_e^n} = \gamma^n \Gamma \left(1 + \frac{n}{m'} \right)$$

$$\sigma_{P_e^n} = \gamma^n \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2n}{m'} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{n}{m'} \right)} \quad (13)$$

با استخراج پارامترهای آماری مورد نیاز برای دامنه بارگذاری‌های مؤثر، رشد ترک خستگی می‌تواند با استفاده از رابطه (۹) پیش‌بینی شود. رابطه (۹) می‌تواند همچنین به شکل بدون بعد رابطه (۱۴) نوشته شود:

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad (4)$$

در مرحله بعد به دلیل نامنظم بودن بارگذاری‌ها و نامشخص بودن دامنه آنها، باید از یکی از روش‌های شمارش سیکل برای مشخص کردن دامنه و تنش متوسط سیکل‌ها استفاده کرد که در اینجا از روش شمارش سیکل جریان بارانی^۱ استفاده می‌شود.

۲-۲- شبیه‌سازی رشد ترک خستگی

برای شبیه‌سازی رشد ترک خستگی قوانین مختلفی ارائه شده است. در مقاله حاضر از قانون واکر استفاده می‌شود که به‌صورت رابطه (۵) نوشته می‌شود:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K}{(1-R)^{1-m}} \right)^n \quad (5)$$

که در آن a طول ترک، N تعداد سیکل تنش، ΔK گستره ضریب شدت تنش، R نسبت تنش و m ، n ، C ثوابت ماده هستند. اگر فرض شود که تنش‌های فشاری موجب بسته شدن وجوه ترک شده و در رشد ترک شرکت نمی‌کنند، آنگاه گستره ضریب شدت تنش می‌تواند به‌صورت رابطه (۶) نوشته شود:

$$\Delta K = F(a)P_e \sqrt{\pi a} \quad (6)$$

که در آن $F(a)$ ضریب تصحیح هندسی بوده و طبق [۸] به‌صورت رابطه (۷) نوشته می‌شود:

$$F(a) = \frac{2 + \frac{a}{W}}{B \left(1 - \frac{a}{W} \right)^{1.5} \sqrt{\pi a W}} [0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W} \right) - 13.32 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{W} \right)^3 - 5.6 \left(\frac{a}{W} \right)^4] \quad (7)$$

که در آن W عرض نمونه CT است. همچنین P_e گستره بارگذاری مؤثر بوده و طبق رابطه (۸) تعریف می‌شود:

$$P_e = \begin{cases} P_{\max} - P_{\min}, & \text{if } P_{\max} > 0 \text{ and } P_{\min} > 0 \\ P_{\max}, & \text{if } P_{\max} > 0 \text{ and } P_{\min} < 0 \\ 0, & \text{if } P_{\max} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

با قرار دادن عبارت ضریب شدت تنش در رابطه (۵)، رابطه (۹) به دست می‌آید.

$$p\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{1}{\lambda \sigma_{P_e^n} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi N}} \times \exp\left[-\frac{\left(\frac{X}{\lambda} - \mu_{P_e^n} N\right)^2}{2N \sigma_{P_e^n}^2}\right] \quad (20)$$

که در آن X برابر است با:

$$X = \frac{2}{2-n} \left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{(2-n)}{2}} - 1 \right] \quad (21)$$

همچنین تعداد میانگین سیکل لازم برای رسیدن طول ترک از مقدار اولیه a_0 به یک طول a را می‌توان با مرتب سازی مجدد رابطه (۱۶) و سپس میانگین گیری از دو طرف آن، به صورت رابطه (۲۲) به دست آورد:

$$E[N] = \frac{2}{\lambda(2-n)} \left[\frac{\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{(2-n)}{2}} - 1}{\mu_{P_e^n}} \right] \quad (22)$$

تابع چگالی احتمالی N نیز به طور مشابه می‌تواند به صورت رابطه (۲۳) به دست آید [۱۰، ۹]:

$$p(N) = \frac{X}{\lambda \sigma_{P_e^n} \sqrt{2\pi N^3}} \times \exp\left[-\frac{\left(\frac{X}{\lambda} - \mu_{P_e^n} N\right)^2}{2N \sigma_{P_e^n}^2}\right] \quad (23)$$

۳- مثالهای عددی

در این قسمت به بررسی عددی روابط به دست آمده و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی پرداخته می‌شود.

۳-۱- مواد و هندسه نمونه آزمون

برای مقایسه و صحت‌گذاری روابط فوق از نتایج آزمون انجام شده روی نمونه CT در مرجع [۶] استفاده می‌شود. در این مطالعه از یک نمونه CT از جنس آلایژ آلومینیم 2024-T351 استفاده شده است. در این نمونه، یک ترک اولیه به میزان $a_0 = 1.5 \text{ cm}$ توسط بارگذاری سیکلیک با دامنه ثابت ایجاد شده است. همچنین خواص ماده نمونه فوق در جدول ۱ آورده شده است.

$$\frac{d\left(\frac{a}{a_0}\right)}{dN} = \lambda \left(\frac{P'_e}{\sigma}\right)^n \left(\frac{a}{a_0}\right)^{n/2} \quad (14)$$

که در آن رابطه (۱۵) برقرار است:

$$\lambda = C F^n \pi^{\frac{n}{2}} \sigma^n a_0^{\frac{(n-2)}{2}} \quad (15)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$\frac{a}{a_0} = \left[1 + \lambda N \left(\frac{2-n}{2}\right) \left(\frac{P'_e}{\sigma}\right)^n \right]^{\frac{2}{(2-n)}} \quad n \neq 2, \quad (16)$$

و همچنین:

$$\frac{a}{a_0} = \exp\left[\lambda N \left(\frac{P'_e}{\sigma}\right)^2\right] \quad n = 2 \quad (17)$$

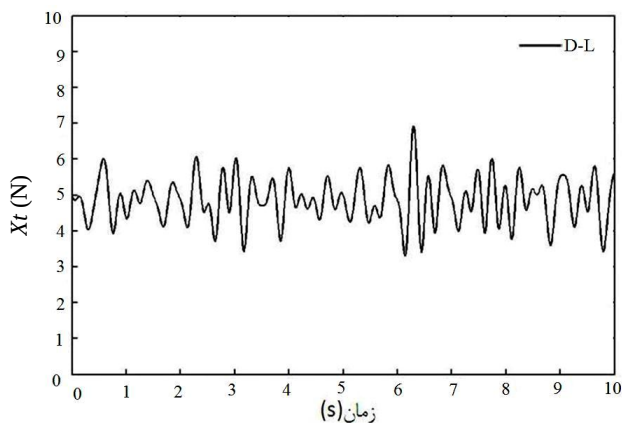
چون در روابط فوق، P'_e/σ یک متغیر اتفاقی است، طول ترک به دست آمده از روابط (۱۶) و (۱۷) نیز یک متغیر اتفاقی می‌باشد. اگر فرض کنیم که $n \neq 2$ آنگاه با استفاده از بسط تیلور و میانگین گیری از دو طرف رابطه (۱۶) میانگین طول ترک بی بعد را به صورت رابطه (۱۸) می‌توان یافت:

$$E\left[\frac{a}{a_0}\right] = \left[1 + \lambda N \mu_{P_e^n} \left(\frac{2-n}{2}\right) \right]^{\frac{2}{(2-n)}} \quad (18)$$

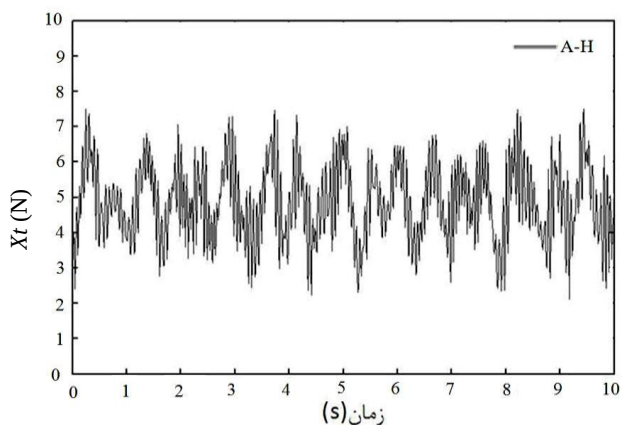
چون فرایند گسترش ترک در حقیقت، تجمع سیکل به سیکل و گسسته‌ای از مقادیر کوچک رشد ترک می‌باشد، در نتیجه شکل انتگرال گرفته شده رابطه (۱۴) می‌تواند به صورت رابطه (۱۹) بازنویسی شود:

$$\int_1^{a/a_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{n}{2}} d\left(\frac{a}{a_0}\right) = \lambda \sum_{k=1}^N \left(\frac{P'_{ek}}{\sigma}\right)^n \quad (19)$$

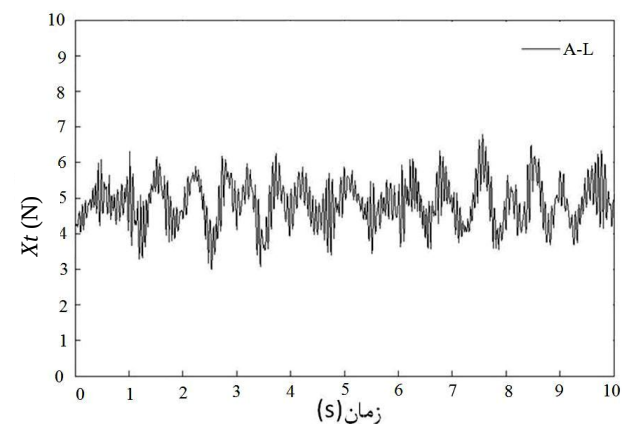
که در آن N تعداد سیکل بارگذاری است. به دلیل این که عبارت‌های $(P'_{ek}/\sigma)^n$ از یکدیگر مستقل بوده و دارای یک توزیع احتمالی یکسان هستند و همچنین تعداد شمارنده سری یا همان تعداد سیکل‌ها، عددی به حد کافی بزرگ می‌باشد در نتیجه با استفاده از تئوری حد مرکزی، توزیع احتمالی طرف راست معادله فوق از یک توزیع گوسی یا نرمال پیروی می‌کند. مقدار میانگین و انحراف معیار این کمیت گوسی را می‌توان از مقادیر میانگین و انحراف معیار P'_{ek} ها تعیین کرد. آنگاه با استفاده از این فرض و حل انتگرال فوق، تابع چگالی احتمالی طول ترک در یک سیکل بارگذاری مشخص N را می‌توان از رابطه (۲۰) پیدا کرد:



شکل ۲ تاریخچه زمانی بارگذاری نوع D-L



شکل ۳ تاریخچه زمانی بارگذاری نوع A-H



شکل ۴ تاریخچه زمانی بارگذاری نوع A-L

جدول ۲ مقادیر پارامترهای بارگذاری‌های تعریف شده

نوع بارگذاری	RMS (N)	ε	ξ	مساحت زیر تابع (N^2)
A-H25	۳۴۴/۱	۰/۷۷	۰/۶۴	۱۱۸/۴۰۳
A-L25	۲۰۳/۸	۰/۷۷	۰/۶۴	۴۱/۵۴۵
D-L25	۲۰۳/۸	۰/۵۳	۰/۸۵	۴۱/۵۴۵

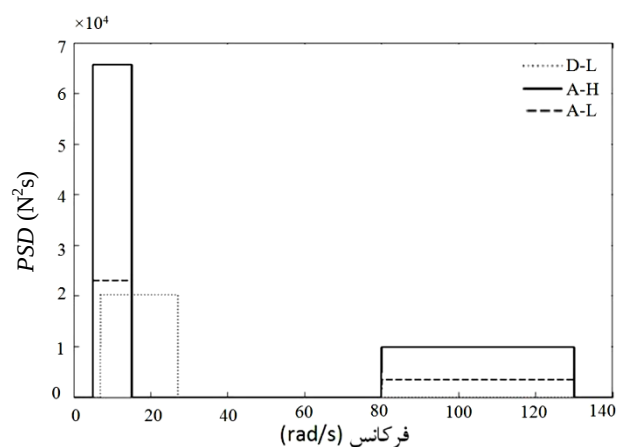
جدول ۱ خواص مکانیکی و شکست ماده نمونه آزمون (Al 2024-T351) [۱۱، ۶].

نوع خاصیت	S_y (MPa)	S_U (MPa)	E (GPa)	C (cm/(MPa $\sqrt{cm}$) ⁿ)	n	m
مقدار	۳۲۵	۴۷۰	۷۳	$1/81 \times 10^{-13}$	۳/۸۱۵	۰/۶۹۱

۳-۲- تعریف تاریخچه بارگذاری

در آزمون انجام شده، هشت نوع بارگذاری با سطوح و پهنای باند مختلف تعریف شده است. در اینجا برای مقایسه پارامترهای مختلف بارگذاری از جمله پهنای باند و سطح بارگذاری، سه نوع از بارگذاری‌ها انتخاب شده است که چگالی طیفی و تاریخچه زمانی آنها، در شکل‌های ۱ تا ۴ دیده می‌شود. همان طور که در این شکل‌ها نیز مشخص است سطح و پهنای باند بارگذاری نوع A-H بیشتر از بارگذاری نوع D-L بوده و در نتیجه دارای بی‌نظمی بیشتری است. همچنین بارگذاری نوع A-L نسبت به بارگذاری نوع A-H دارای سطح بارگذاری کمتری است. این پدیده‌ها را از روی ضریب بی‌نظمی (ξ) و پارامتر پهنای باند (ε) و مقدار مربع میانگین جذر (RMS) بارگذاری در جدول ۲ نیز می‌توان نتیجه گرفت.

لازم به ذکر است که حرف H در اینجا نشان‌دهنده سطح بارگذاری بالاتر نسبت به L می‌باشد. همچنین عدد 25 نشان دهنده طول تاریخچه بارگذاری بکار گرفته شده است که در اینجا برابر 25000 سیکل است.



شکل ۱ تابع چگالی طیفی بارگذاری‌ها

۳-۳- مراحل تحلیل و نتایج

برای تحلیل رشد ترک خستگی تحت بارگذاری اتفاقی، ابتدا با توجه به توابع چگالی تعریف شده در شکل ۱ و رابطه (۱)، تاریخچه زمانی بارگذاری‌ها به دست می‌آید که این تاریخچه‌ها در شکل‌های ۲ تا ۴ دیده می‌شود. در مرحله بعد به دلیل نامنظم بودن بارگذاری‌ها و نامشخص بودن دامنه آنها، باید از یکی از روش‌های شمارش سیکل برای مشخص کردن دامنه و تنش متوسط سیکل‌ها استفاده کرد که در اینجا از روش شمارش سیکل جریان بارانی استفاده شده است. آنگاه پس از شمارش سیکل‌ها، با استفاده از روش تحلیلی گفته شده در قسمت قبل به محاسبه طول عمر، طول ترک و توزیع احتمالی، احتمال تخریب و قابلیت اطمینان آنها پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که کد نویسی تمام مراحل فوق در نرم افزار متلب^۱ انجام شده است. با انجام مراحل فوق، میانگین طول عمر نمونه به دست آمده با استفاده از روش تئوری و آزمون، به صورت جدول ۳ به دست می‌آید که مشاهده می‌شود که خطای به دست آمده کمتر از ۱۳ درصد است که برای تحلیل های خستگی مقدار قابل قبولی می‌باشد.

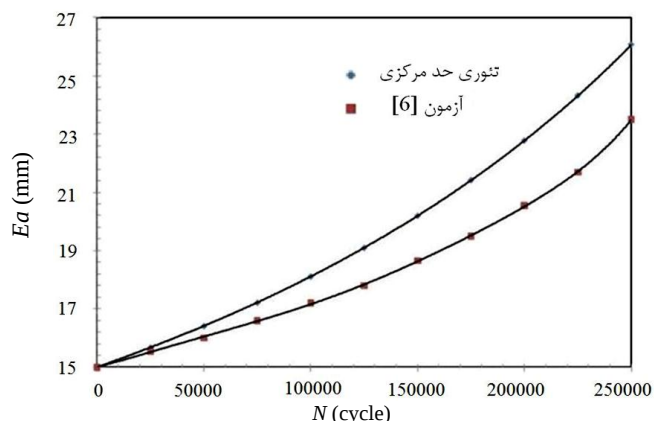
همچنین در شکل ۵ نمودارهای میانگین طول ترک بر حسب تعداد سیکل بارگذاری در حالت بارگذاری نوع A-H آمده است که نشان می‌دهد که با افزایش تعداد سیکل بارگذاری، اختلاف نتایج تئوری و آزمون بیشتر می‌شود که البته حداکثر این مقدار در اینجا به حدود ۱۱ درصد می‌رسد که مقدار قابل قبولی است.

همان طور که در جدول ۳ نیز مشخص است با وجود یکسان بودن پهنای باند یا یکسان بودن ضریب بی‌نظمی، در بارگذاری نوع A-H به دلیل بالاتر بودن سطح و یا مقدار RMS بارگذاری نسبت به بارگذاری نوع A-L، میانگین طول عمر به دست آمده کمتر از میانگین طول عمر بارگذاری نوع A-L است، اما در بارگذاری نوع D-L با وجود یکسان بودن سطح بارگذاری نسبت به بارگذاری نوع A-L، به دلیل کمتر بودن پهنای باند و یا بالاتر بودن ضریب بی‌نظمی، طول عمر نمونه کمتر می‌باشد. البته از روی مقادیر فوق نمی‌توان به نتیجه مطمئنی در مورد تأثیر تغییر در پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری روی طول عمر نمونه رسید.

1. Matlab

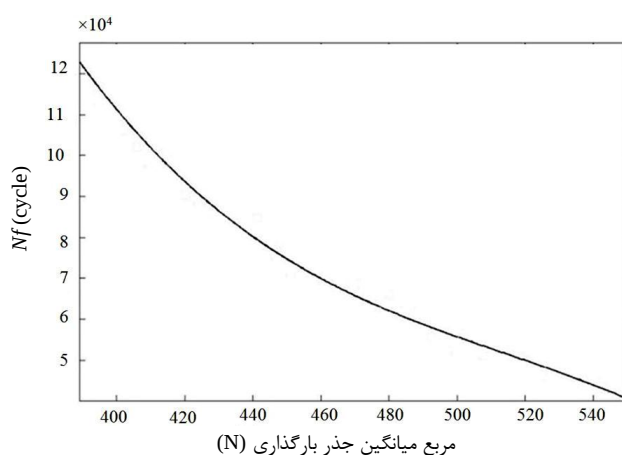
جدول ۳ میانگین طول عمر به دست آمده با استفاده از تحلیل و آزمون

نوع بارگذاری	روش تئوری	آزمون [۶]	خطا (درصد)
D-L25	$5/26 \times 10^5$	$5/89 \times 10^5$	۱۰/۷
A-H25	$2/41 \times 10^5$	$2/77 \times 10^5$	۱۳
A-L25	$11/03 \times 10^5$	$11/64 \times 10^5$	۵/۲

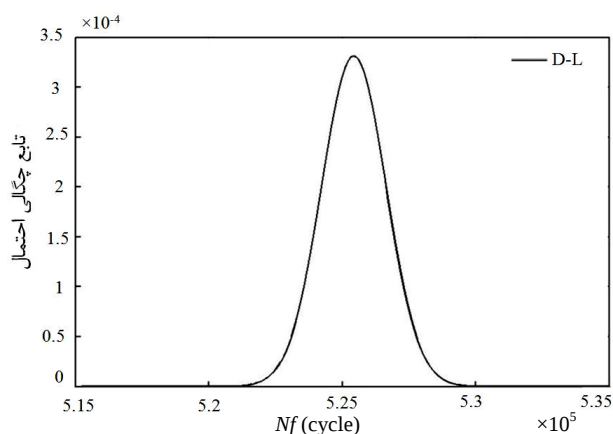


شکل ۵ نمودار میانگین طول ترک بر حسب تعداد سیکل برای بارگذاری نوع A-H

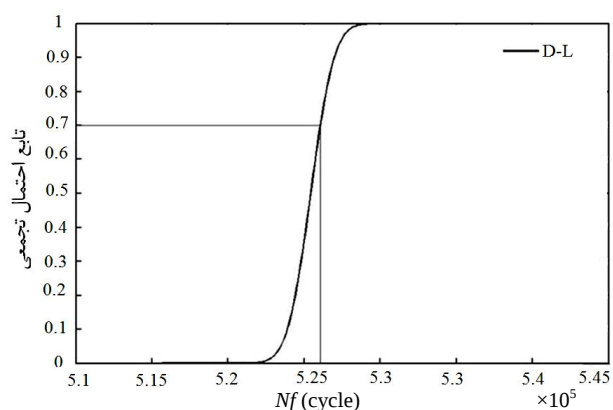
به همین دلیل باید نمودار طول عمر میانگین بر حسب پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری رسم شود تا از روی این نمودارها بتوان به بررسی تأثیر این پارامترها پرداخت. در شکل های ۶ و ۷ این نمودارها آمده است. در شکل ۶ با فرض ثابت ماندن پهنای باند بارگذاری، نمودار طول عمر میانگین بر حسب سطح بارگذاری رسم شده است که همان طور که مشاهده می‌شود، با افزایش سطح بارگذاری، طول عمر نمونه کاهش می‌یابد.



شکل ۶ نمودار طول عمر میانگین نمونه بر حسب مقدار سطح بارگذاری به ازای پهنای باند ثابت



شکل ۸ تابع چگالی احتمالی طول عمر تاریخچه بارگذاری نوع D-L



شکل ۹ تابع احتمال تجمعی طول عمر تاریخچه بارگذاری نوع D-L

قابلیت اطمینان خستگی به صورت احتمال این که سازه مورد نظر برای یک دوره زمانی مشخص تحت بارگذاری خستگی سالم بماند و تخریب نشود تعریف می شود که آن را در اینجا می توان به صورت احتمال اینکه در یک تعداد سیکل مشخص، طول ترک به دست آمده کمتر از طول ترک بحرانی باشد، تعریف کرد. همچنین احتمال تخریب سازه به صورت متمم قابلیت اطمینان یعنی احتمال بیشتر بودن طول ترک به دست آمده از طول ترک بحرانی تعریف می شود. در شکل های ۱۰ تا ۱۵ نمودارهای احتمال تخریب و قابلیت اطمینان در حالت بارگذاری های مورد مطالعه آمده است.

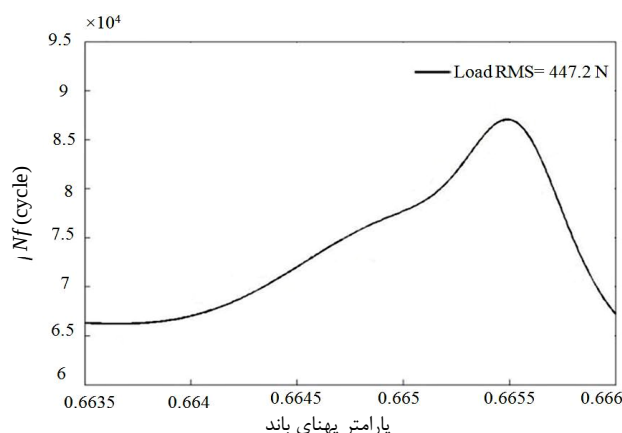
از این نمودارها مشاهده می شود که با افزایش تعداد سیکل بارگذاری، قابلیت اطمینان کاهش یافته و به عکس احتمال تخریب افزایش می یابد.

در شکل ۷ نیز با فرض ثابت ماندن سطح بارگذاری، نمودار طول عمر میانگین بر حسب پارامتر پهنای باند رسم شده است. همان طور که در این نمودار مشاهده می شود با افزایش پارامتر پهنای باند، ابتدا طول عمر افزایش یافته و سپس کاهش می یابد و تابع به صورت اکیداً صعودی یا نزولی نمی باشد.

در شکل های ۸ و ۹ تابع چگالی احتمالی و تابع تجمعی احتمال طول عمر برای حالت بارگذاری نوع D-L آمده است. مشاهده می شود که با وجود قطعی در نظر گرفتن خواص مواد، به علت ماهیت اتفاقی بودن بارگذاری، داده های طول عمر حول میانگین خود دارای پراکندگی هستند. مساحت زیر منحنی تابع چگالی احتمال برابر ۱ می باشد و از روی آن می توان تابع احتمال تجمعی را به دست آورد.

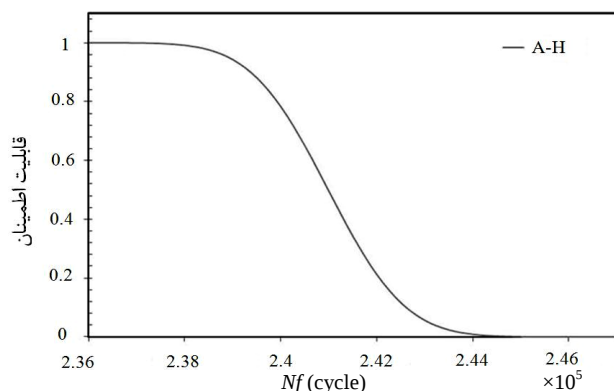
تابع تجمعی احتمال، احتمال این که طول عمر نمونه کمتر از یک مقدار مشخص باشد را می دهد. در نتیجه برای مثال در حالت بارگذاری نوع D-L با توجه به شکل ۹، احتمال این که طول عمر نمونه کمتر از میانگین طول عمر باشد حدوداً برابر ۷٪ و یا ۷۰٪ است. نظیر این نمودارها را می توان برای بارگذاری های نوع A-L و A-H نیز رسم کرد. که در نتیجه مقدار این احتمال برای بارگذاری های نوع A-H و نوع A-L به ترتیب برابر ۴۲٪ و ۵۵٪ به دست می آید.

همچنین از روی نمودار تابع احتمال تجمعی طول عمر، می توان تغییرپذیری آماری طول عمر را نیز با توجه به تغییرات آماری تاریخچه بارگذاری مورد مطالعه قرار داد. به این صورت که هر چقدر قسمت میانی این نمودار عمودی تر باشد تغییرپذیری آماری طول عمر کمتر و هر چقدر افقی تر باشد تغییرپذیری آماری بیشتر است.

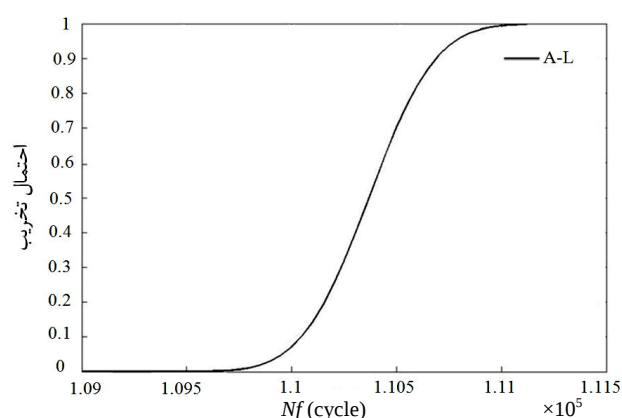


شکل ۷ نمودار طول عمر میانگین نمونه بر حسب پارامتر پهنای باند به ازای مقدار سطح بارگذاری ثابت

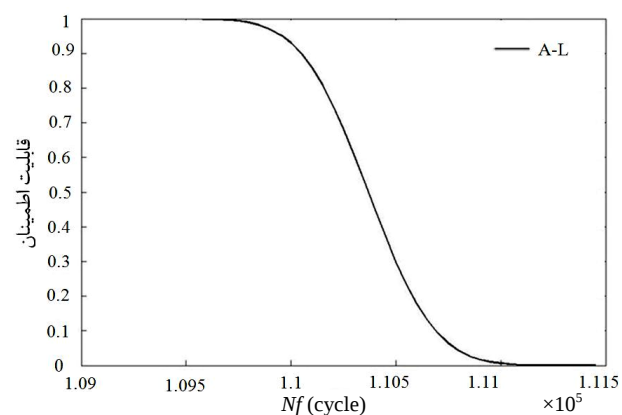
تخریب آن با افزایش تعداد سیکل بالا می‌رود تا اینکه در تعداد سیکل $N = 5.25 \times 10^5$ می‌توان به طور مطمئنی گفت که سازه تخریب شده است.



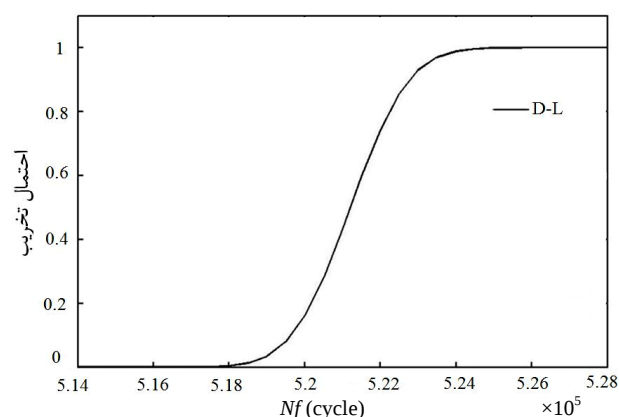
شکل ۱۳ نمودار قابلیت اطمینان تاریخچه بارگذاری نوع A-H



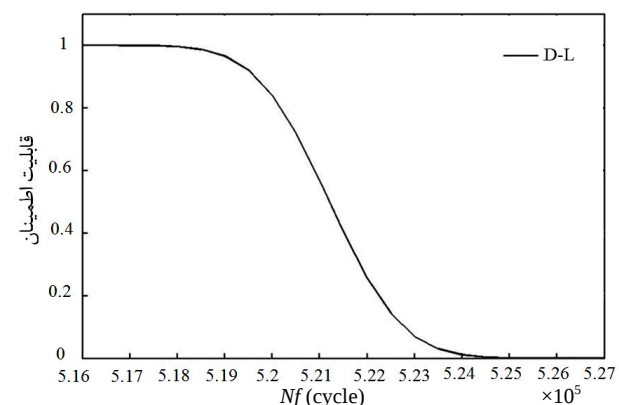
شکل ۱۴ نمودار احتمال تخریب تاریخچه بارگذاری نوع A-L



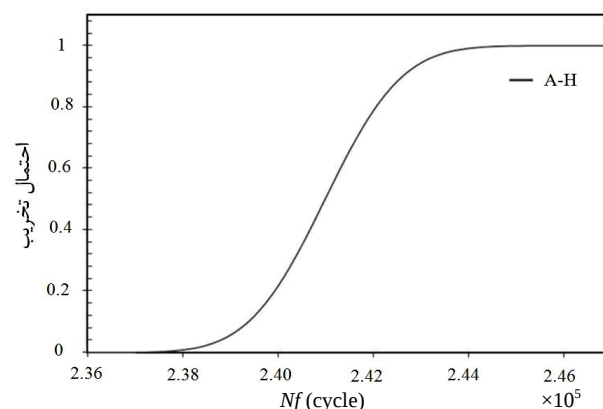
شکل ۱۵ نمودار قابلیت اطمینان تاریخچه بارگذاری نوع A-L



شکل ۱۰ نمودار احتمال تخریب تاریخچه بارگذاری نوع D-L



شکل ۱۱ نمودار قابلیت اطمینان تاریخچه بارگذاری نوع D-L



شکل ۱۲ نمودار احتمال تخریب تاریخچه بارگذاری نوع A-H

همچنین برای مثال در حالت بارگذاری نوع D-L در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود که سازه مورد نظر تا تعداد سیکل $N = 5.18 \times 10^5$ به طور مطمئنی تمایل به سالم ماندن دارد و بعد از این تعداد سیکل به طور سریع و ناگهانی احتمال

۵- فهرست علائم

a	طول ترک (cm)
a_0	طول ترک اولیه (cm)
C	ثابت رابطه پاریس $(\text{cm}/(\text{MPa}\sqrt{\text{cm}})^n)$
$E[\bullet]$	مقدار انتظاری (میانگین)
$F(a)$	ضریب تصحیح هندسی
K	ضریب شدت تنش $(\text{MPa}\sqrt{\text{cm}})$
m, n	ثوابت رابطه واکر
m'	پارامتر توزیع وایبول
N	تعداد سیکل بارگذاری (cycle)
N_f	تعداد سیکل بارگذاری تا شکست (cycle)
P_e	گستره بارگذاری موثر (N)
$P(\bullet)$	تابع احتمال
R	نسبت تنش
$S(\omega)$	تابع چگالی طیفی توان (N^2s)
t	زمان (s)
W	عرض نمونه CT (cm)
$X(t)$	تاریخچه بارگذاری (N)

علائم یونانی:

γ	پارامتر توزیع وایبول
μ	مقدار میانگین
σ	مقدار انحراف معیار
ω_0	فرکانس ابتدای بازه (rad/s)
ω_k	فرکانس k ام (rad/s)
ϕ_k	زاویه فاز k ام (rad)
ξ	نسبت بی نظمی
ε	پارامتر پهنای باند

۶- مراجع

- [1] Dominguez J., Zapatero J., Bohorquez L., "Effect of the Length of the Random Load on History on the Fatigue Life Statistics", In: *Firrao D, Editor. Fracture Behaviour And Design Of Materials And Structures. EMA*, 1991, pp. 1427-34.
- [2] Dominguez J, Zapatero J., "Effect of the Loading Spectrum and History Length on Fatigue Life Distribution Under Random Loading", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 42, 1992, pp. 925-933.

این نتیجه‌گیری را با استفاده از شکل ۱۱ نیز می‌توان به صورت دیگری بیان کرد. در این شکل مشاهده می‌شود که تا تعداد سیکل بارگذاری $N = 5.18 \times 10^5$ قابلیت اطمینان سازه برابر ۱۰۰٪ باقی می‌ماند که از این تعداد سیکل به بعد به طور ناگهانی کاهش پیدا می‌کند. از تعداد سیکل $N = 5.25 \times 10^5$ به بعد نیز درصد قابلیت اطمینان به صفر می‌رسد. همین نتیجه‌گیری‌ها را نیز می‌توان برای دو نوع بارگذاری دیگر و طبق نمودارهای ۱۲ تا ۱۵ انجام داد. از روی این نمودارها همچنین می‌توان احتمال تخریب و قابلیت اطمینان سازه را در طول عمر میانگین ذکر شده در جدول ۳ به دست آورد. در نتیجه برای بارگذاری نوع D-L در طول عمر میانگین ذکر شده در جدول ۳ مقدار احتمال تخریب حدود ۹۹٪ و قابلیت اطمینان حدود ۱٪ است. این مقادیر برای بارگذاری نوع A-H به ترتیب برابر ۵۵٪ و ۴۵٪ و برای بارگذاری نوع A-L به ترتیب برابر ۴۱٪ و ۵۹٪ می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر به بررسی تأثیر پارامترهای پهنای باند و سطح بارگذاری اتفاقی بر رشد ترک خستگی در یک نمونه CT با استفاده از تئوری حد مرکزی پرداخته شده است. با دقت در نتایج به دست آمده می‌توان موارد زیر را نتیجه گرفت:

الف- روش تحلیلی ارائه شده توافق خوبی با نتایج آزمون دارد و حداکثر خطای میانگین طول عمر به دست آمده در مقایسه با نتایج تجربی در حالت بارگذاری نوع A-H و برابر ۱۳ درصد و حداقل آن در حالت بارگذاری نوع A-L و برابر ۵/۲ درصد می‌باشد که در تحلیل‌های خستگی مقدار قابل قبولی است.

ب- با افزایش سطح بارگذاری به ازای پهنای باند ثابت، طول عمر نمونه کاهش می‌یابد.

ج- پارامتر پهنای باند تأثیر ثابتی روی طول عمر نمونه نداشته و با افزایش پهنای باند به ازای سطح بارگذاری ثابت، طول عمر گاهی کاهش و گاهی افزایش می‌یابد.

د- با روش تحلیلی ارائه شده می‌توان مقادیر احتمال تخریب و قابلیت اطمینان را در هر سیکل بارگذاری به دست آورده و با مقادیر مجاز مقایسه کرد. این قابلیت، برتری تحلیل احتمالی به تحلیل‌های قطعی را نشان می‌دهد.

- [7] Kalnaus S., Fan F., Vasudevan A.K., Jiang Y., "An Experimental Investigation on Fatigue Crack Growth of AL6XN Stainless Steel", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, 2008, pp. 2002-2019.
- [8] ASTM E647-00, *Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates*. Annual Book of ASTM Standards. 2001.
- [9] WU W. F., "Computer Simulation and Reliability Analysis of Fatigue Crack Propagation under Random Loading", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 45, 1993, pp. 697-712.
- [10] Castillo E., Canteli A. F., *A Unified Statistical Methodology for Modeling Fatigue Damage*. Springer, 2009.
- [11] Forman R.G., Shivakumar V., Cardinal J.W., Williams L.C., McKeighan P.C. "Fatigue Crack Growth Database for Damage Tolerance Analysis", *U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration*, 2005.
- [3] Dominguez J., Zapatero J., Pascual J., "Effect of Load Histories on Scatter of Fatigue Crack Growth in Aluminium Alloy 2024-T351", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 56, 1997, pp. 65-76.
- [4] Marissen R., Trautman KH., Nowack H., "The Influence of Compression Loads and of dK/da on the Crack Propagation under Variable Amplitude Loading", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, 1984, pp. 863-79.
- [5] Alawi H., "Designing Reliability for Fatigue Crack Growth under Random Loading", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, 1990, pp. 75-85.
- [6] Moreno B., Zapatero J., Dominguez J., "An Experimental Analysis of Fatigue Crack Growth under Random Loading", *International Journal of Fatigue*, Vol. 25, 2003, pp. 597-608.