

شبیه سازی مستقیم جریان جت دوبعدی مغشوش به روش تفاضل محدود فشرده

محمد جواد مغربی^{۱*}، حسین ایزی^۲، احد ضرغامی^۳

۱- دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- کارشناس ارشد مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

*مشهد، صندوق پستی ۹۱۷۷۵-۱۱۱۱، mjmaghrebi@um.ac.ir

چکیده- در این پژوهش معادلات بی بعد شده ناویر استوکس در شکل چرخشی برای جت دوبعدی صفحه ای به روش مستقیم عددی حل شده است. با در نظر گرفتن توزیع سرعت در ورودی دامنه محاسباتی، از نیم عرض جت به عنوان طول مشخصه و از سرعت خط مرکزی به عنوان سرعت مشخصه به منظور بی بعد سازی استفاده شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده، گسسته سازی شده و از نگاشت $y = -\beta \cot(\pi\zeta)$ برای ارتباط دهی دامنه فیزیکی $y \leq \infty$ - به دامنه محاسباتی $0 \leq \zeta \leq 1$ استفاده شده است. برای توسعه محاسبات در دامنه زمان از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده و شرط مرزی خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. از نتایج تحلیلی جریان سه بعدی کاملاً لزج استوکس و جریان ایدئال استوارت برای بررسی صحت نتایج استفاده شده است. در این مطالعه جریان جت مغشوش در دستگاه مختصات خود تشابه بررسی شده و توزیع شدت توربولانس و تنش رینولدز به دست آمده است. نتایج بیانگر رفتار غیر خود تشابهی لایه برشی است.

کلیدواژگان: جریان جت دوبعدی، اختلاف محدود فشرده، خود تشابهی، نیم عرض جت، سرعت خط مرکزی.

Direct Numerical Simulation of 2D Forced Jet using the Compact Finite Difference Method

M.J. Maghrebi^{1*}, H.Eazi², A.Zarghami³

1- Associate prof., Dept. of Mech. Eng., School of Engineering, Ferdowsi Uni. of Mashhad

2- Graduate student, Department of Mech. Eng., Shahrood University of Technology

3- Ph.D. candidate, Department of Mech. Eng., Shahrood Uni. of Tech., Shahrood

*P.O.B. 91775-1111, mjmaghrebi@um.ac.ir

Abstract- The dimensionless form of Navier-Stokes equations for two dimensional jet flows are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of jet flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the jet Reynolds number. These two characteristics are jet half-width and centerline velocity. Governing equations are discretized in streamwise and cross stream directions using a sixth order compact finite difference scheme and a mapped compact finite difference method, respectively. Cotangent mapping of $y = -\beta \cot(\pi\zeta)$ is used to relate the physical domain of y to the computational domain of ζ . The compact third order Runge-Kutta method is used for time-advancement of the simulation. convective outflow boundary condition is employed to create a non-reflective type boundary condition at the outlet. An inviscid Stuart flow and a completely viscous solutions of Navier Stokes equations are used for the verification of numerical simulations. Results for perturbed jet flow in self-similar coordinates were also investigated which indicate that the time-averaged statistics for velocity, vorticity, turbulence intensities and Reynolds stress distribution tend to collapse on top of each other at flow downstream locations.

Keywords: 2D Jet Flow, Compact Finite Difference, Jet Half-width, Jet Centerline

۱- مقدمه

جریان جت دوبعدی حالت پایدار به کمک تئوری لایه مرزی توسط شلیختینگ [۱] و بیکلی [۲] تحلیل شده است. آنها توزیع سرعت جریان را به دست آوردند و نتایجی را درباره چگونگی تناسب بین سرعت خط مرکزی و نیم عرض جت نسبت به جهت جریان ارائه کردند.

حل عددی جریان آرام در یک چهارم سطح توسط انصاری، شیشکین و هگارتی [۳] انجام شده است. آنان ارتباط لزجت سینماتیک با طول اصلی جریان را بررسی و تابع جریان را به صورت تابعی از x و y معرفی کردند. روش مش‌های شیشکین به وسیله انصاری [۴] به طور کامل مطالعه شد. وی به بررسی جت آرام دوبعدی غیر قابل تراکم براساس این روش و طرح مش یکنواخت تکه‌ای پرداخته و با مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج تئوری شلیختینگ [۱] خطاها را بررسی کرده و با توجه به تغییرات لزجت سینماتیکی به بررسی خطاها پرداخته است.

جت‌های آرام صفحه‌ای و متقارن مرکزی به کمک تکنیک SFC (روشی مبتنی بر استفاده از تابع جریان به صورت نوعی مختصات) توسط تسوکیچی [۵] و تاکاشی [۶] و زاربی [۷] بررسی شده و توافق خوبی در مقایسه با نتایج تئوری به دست آمده است.

حل جریان جت صفحه‌ای تراکم‌ناپذیر به کمک روش‌های مستقیم عددی، DNS و حل لاگرانژ مستقیم مونت کارلو، $DSMC$ توسط مرگان و آرمفیلد [۸] انجام و این دو روش مقایسه شد. در هر دو روش مشخص شده که سرعت جت در جهت اصلی جریان با $x^{-1/2}$ و نیم عرض جت متناسب با $x^{2/3}$ است. همچنین با مقایسه این دو روش مشخص شد که DNS سریعتر همگرا می‌شود. جزئیات بیشتر در مورد شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان جت در [۹ و ۱۰] آورده شده است.

در این پژوهش معادله ناویر استوکس در شکل چرخشی به طور مستقیم شبیه‌سازی شده است. از روش اختلاف محدود فشرده برای مشتقات اول و دوم و برای پیشروی محاسبات در زمان از رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. در مرز ورودی توزیعی به شکل $U(y) = 1/\cosh^2 y$ قرار داده شده و در مرز خروجی از شرط مرزی جابه‌جایی استفاده شده است. از نتایج تحلیلی جریان سه‌بعدی کاملاً لزج استوکس و جریان ایدئال استوارت برای بررسی صحت نتایج استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم

در این تحقیق شکل چرخشی معادلات ناویر استوکس به صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدل‌سازی یا ساده‌سازی به صورت عددی تحلیل شده است. شکل بی‌بعد معادله ناویر استوکس برای جریانهای تراکم‌ناپذیر به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (1)$$

با توجه به اتحاد زیر:

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (2)$$

برای $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ داریم:

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3)$$

که در آن $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. اگر معادله (۳) در معادله (۱) جایگزین شود معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4)$$

که در آن $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z) = \vec{U} \times \vec{\omega}$. با اعمال عملگر کرل به دو سمت معادله (۴)، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 U \quad (11)$$

۳- شرایط مرزی و شرط اولیه

معادله (۱۱) معادله‌ای مرتبه چهارم بوده و به اعمال چهار شرط مرزی نیاز دارد. مقادیر u در مرزهای ورودی و خروجی دامنه محاسباتی به عنوان شرط مرزی دریشله مشخص می‌شوند. همچنین با توجه به معادله پیوستگی، $\partial u / \partial x$ در مرزهای ورودی و خروجی دامنه محاسباتی به عنوان شرط مرزی نیومن مشخص و معرفی می‌شود. در شبیه‌سازی، سرعت پایه $U(y)$ (یکی از مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای در جهت اصلی جریان) با توزیع $U(y) = 1 / \cosh^2 y$ مطابق نتایج تحلیلی شلیختینگ [۱] برقرار می‌شود.

در مرز خروجی از شرط مرزی جابه‌جایی به کار برده شده توسط تروسیلا [۱۲] استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچ گونه برگشت جریان به داخل دامنه مشاهده شود. از معادله جابه‌جایی برای تولید شرط مرزی دریشله برای هر دو مؤلفه سرعت استفاده شده که معادله آن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (12)$$

در این معادله، مؤلفه‌های سرعت u و v جایگزین ψ می‌شود. C سرعت موج یا سرعت جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. به بیان دیگر، C سرعت جابه‌جایی ساختارهای با مقیاس بزرگ^۱ درون لایه است. هدف از کاربرد این شرط مرزی آن است که به سیال اجازه داده شود در وضعیتی طبیعی دامنه محاسباتی را ترک کند. بنابراین C به صورت سرعت متوسط جریان معرفی می‌شود.

$$\frac{\partial (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \nabla (p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times \vec{U}) \quad (5)$$

با توجه به اینکه $\nabla \times \nabla (\text{scalar}) = 0$ ، معادله (۵) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (6)$$

با اعمال مجدد عملگر کرل به دو سمت معادله (۶) معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (7)$$

با توجه به معادله پیوستگی ($\nabla \cdot \vec{U} = 0$) و با اعمال رابطه زیر:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (8)$$

معادله (۷) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{U} \quad (9)$$

که در آن $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z) = \vec{U} \times \vec{\omega}$ جمله‌های غیرخطی است.

مزیت استفاده از این شکل معادلات ناویر استوکس، کاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای حافظه مورد نیاز و همچنین نیاز نداشتن به تعیین فشار در مرزهای مسئله است. البته بهایی که برای این دو مزیت پرداخته می‌شود، تغییر مرتبه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار است [۹].

با جداسازی سرعت لحظه‌ای به صورت زیر [۱۱]:

$$U(x, y, t) = u(x, y, t) + U(y) \quad (10)$$

$$V(x, y, t) = v(x, y, t)$$

و با در نظر گرفتن اولین مؤلفه معادله (۹) در جهت اصلی جریان (x) و در حالت دوبعدی معادله زیر به دست می‌آید. برای اطلاعات بیشتر به [۱۱] مراجعه شود:

توزیع سرعت متوسط $U(y) = 1/\cosh^2 y$ به‌طور یکنواخت در تمامی ایستگاههای x ، شرط اولیه برای جریان دوبعدی جت غیراجباری است. از همین شرط برای شرط اولیه جریان اجباری جت استفاده می‌شود. براساس مطالعات آماری، این شرط اولیه برای شبیه‌سازی جریان اجباری و غیراجباری جت مناسب است. به بیان دیگر، هر ذره در ورودی ($x=0$)، باید مجاز به خروج از مرزها ($x=L_x$) باشد. جریان جت همچنین باید به حالت ایستای آماری^۱، هنگامی که مؤلفه‌های سرعت متوسط، مستقل از زمان باشند، برسد.

۴- مراحل محاسبات

الگوریتم حل معادله ناویر استوکس با توجه به چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای u ، از معادله پیوستگی می‌توان مقدار v را محاسبه کرد.

۲. با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ و برای حالت دوبعدی داریم $\omega_x = 0$ و $\omega_y = 0$ و لذا مقدار $\omega_x = \omega_y = 0$ حساب می‌شود.

۳. بنا به تعریف $H = U \times \omega$ که برای حالت دوبعدی $H_x = -U \cdot \omega$ و $H_y = V \cdot \omega$ است.

۴. محاسبه جملات غیرخطی در معادله ناویر استوکس که به شکل $\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y}$ است.

۵. محاسبه جملات لزجی که به شکل $\frac{1}{Re} \nabla^2 U$ است.

۶. پس از محاسبه سمت راست معادله (۱۱)، به‌روش رانج کوتای مرتبه سوم، سمت راست معادله پواسون $\nabla^2 u = R$ محاسبه می‌شود.

۷. با مشخص شدن R ، معادله پواسون بالا در شکل گسسته حل می‌شود. حل این معادله در شکل ماتریسی به شکل $A \Delta u + \Delta u B = C$ است که بر طبق الگوریتم بارتلز [۱۳]، مقدار Δu از آن استخراج می‌شود.

۸. با مشخص شدن Δu ، که تفاضل u در دو زیر مرحله زمانی است، u جدید به‌دست می‌آید.

۹. کلیه مراحل بالا برای یک زیر دامنه زمانی است که از u تولید شده در مرحله قبل به‌عنوان شرط اولیه مرحله جدید استفاده می‌شود.

۴-۱- محاسبه مشتقات مادی

مشتقات مادی با به‌کار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد ليله [۱۴] محاسبه شده است. ليله مشتق اول تابع $f(x)$ را به‌طور ضمنی^۲ با معادله زیر توصیف کرده است:

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3h} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12h} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (12)$$

که علامت پریم مشتق اول، j تعداد گره $Nx = J - 1$ و $h = \Delta x = Lx/Nx$ ($1 \leq j \leq J$) که در آن h که در این معادله، $\alpha = 1/3$ یا $\alpha = 1/4$ قرار داده شود، طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم به‌دست خواهد آمد. در مرزها یعنی جایی که $j = 1$ یا $j = J$ نوعی طرح مرتبه سوم یک‌طرفه ضمنی استفاده شده است:

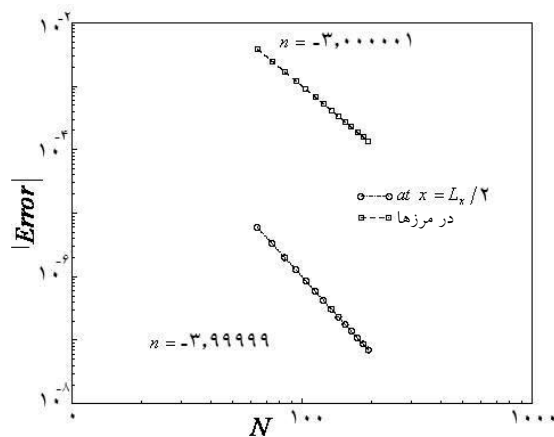
$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2h} (-5f_1 + 4f_2 + f_3) \quad (13)$$

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2h} (5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \quad (14)$$

روش مشابهی را می‌توان برای گره J به کار برد:

$$f_J'' + 2f_{J-1}'' = \frac{3}{h} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=Lx} - \frac{3}{2h^2} (f_J - f_{J-2}) \quad (20)$$

نزدیک مرزها که $j=1$ و $j=J-1$ ، از طرح اختلاف محدود فشرده مرتبه دوم استفاده شده که با جایگزینی $\alpha=1/10$ در معادله (۱۵) به دست می‌آید. میزان خطا در شکل ۱ برای گره‌های مرزی و داخلی ترسیم شده است [۱۱]. برای محاسبه مشتقات چهارم می‌توان عملگر مشتق دوم را دو بار اعمال کرد که بدین ترتیب جمله‌های لزجی موجود در سمت راست معادله ناویر استوکس محاسبه می‌شوند.



شکل ۱ مرتبه خطا در محاسبه مشتق دوم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده [۱۱].

۲-۴ روش محدودسازی دامنه y

جریان جت، جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب است، در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم، یعنی $-\infty \leq y \leq \infty$ است. برای گنجاندن y در دامنه محاسباتی از نوعی تابع یک‌به‌یک مثلثاتی استفاده می‌کنیم تا مختصات فیزیکی y به مختصات

در همسایگی مرزها یعنی در $j=2$ یا $j=J-1$ ، از معادله (۱۲) به ازای $\alpha=1/4$ استفاده می‌شود. همان‌طور که لیل به بحث کرده است، با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در معادله (۱۲) برای گره‌های $j=2$ و $j=J-2$ می‌توان پایداری عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$ را تضمین نمود.

برای محاسبه مشتق دوم تابع $f(x)$ ، از طرح اختلاف محدود فشرده با دقت مرتبه چهارم استفاده شده است:

$$\alpha f_{j-1}'' + f_j'' + \alpha f_{j+1}'' = \frac{4(1-\alpha)}{3h^2} (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{10\alpha-1}{12h^2} (f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j + f_{j-2}) \quad (15)$$

که در آن $\alpha=1/4$. در اینجا مسأله ناهنجاری نیز مورد توجه قرار گرفته و معادله در $1/\alpha$ ضرب شده است. در مرزها از طرح مرتبه سوم یک‌طرفه ضمنی استفاده شده است:

$$f_1'' + 12f_2'' = \frac{1}{h^2} (13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (16)$$

$$f_J'' + 12f_{J-1}'' = \frac{1}{h^2} (13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (17)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۱۳) معادله زیر به دست می‌آید:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{1}{2h} (-5f_1' + 4f_2' + f_3') = \frac{-3}{h} f_1' + \frac{1}{2h} (f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (18)$$

اگر جمله سمت راست معادله (۱۸)، با معادله (۱۲) در حالت $\alpha=1/4$ جایگزین شود، معادله زیر به دست می‌آید:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{3}{h} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} - \frac{3}{2h^2} (f_1 - f_2) \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (28)$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده شود، ماتریس سمت راست معادله (۱۲) دارای عناصر صفر روی قطر اصلی است و لذا نمی‌توان به انتگرال‌گیری پرداخت. برای حل این مشکل با مشتق‌گیری از دو سمت معادله برحسب y ، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (29)$$

با وجود دو شرط مرزی برای v به‌صورت $v = 0 \rightarrow y = \pm\infty$ این معادله به شکل زیر حل می‌شود [۱۱].

چنانچه از معادله (۲۴)، به‌جای سمت چپ معادله (۲۹) و برای $d^2v/d\zeta^2$ و $dv/d\zeta$ از معادل آن مطابق طرح اختلاف محدود فشرده استفاده شود، آنگاه می‌توان با اعمال شرایط مرزی $v(x, y = \pm\infty, t) = 0$ ، حل را انجام داد.

۴-۴- پیشروی در زمان

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به‌وسیله رای [۱۵] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به‌کار می‌رود. برای پیشروی زمانی معادله‌ای به‌صورت معادله (۳۰)، مطابق جدول ۱ می‌توان فرایند را انجام داد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \quad (30)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt ، سمت راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه

محاسباتی $0 \leq \zeta \leq 1$ تبدیل شود. فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت است، اما در مجموعه فیزیکی، این فواصل مساوی نیستند و در ناحیه مرکزی جریان بیشتر متمرکزند. رابطه مورد استفاده بین مکان گره‌های موجود در مجموعه محاسباتی و مجموعه فیزیکی به‌وسیله معادله زیر توصیف شده است [۱۱]:

$$y = -\beta \cot(\pi\zeta) \quad (31)$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض شبکه است. برای مشتق‌گیری تابع f نسبت به y از قانون زنجیره‌ای به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{2}{\pi\beta} \cos^2(\pi\zeta/2) \frac{df}{d\zeta} \quad (32)$$

با برابر قرار دادن $\lambda_\zeta = \frac{2}{\pi\beta} \cos^2(\pi\zeta/2)$ رابطه فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{df}{dy} = \lambda_\zeta \frac{df}{d\zeta} \quad (33)$$

برای محاسبه مشتق دوم نیز به‌شکل مشابه عمل می‌شود:

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \lambda_\zeta \frac{d^2f}{d\zeta^2} + \lambda_{\zeta'} \frac{df}{d\zeta} \quad (34)$$

$$\lambda_{\zeta'} = \lambda_{\zeta'}^2 \quad (35)$$

$$\lambda_{\zeta''} = -\frac{4}{\pi\beta^2} \sin(\pi\zeta/2) \cos^3(\pi\zeta/2) \quad (36)$$

۴-۳- انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی

با حل معادله (۹) می‌توان $u(x, y, t)$ را به‌دست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از معادله پیوستگی استفاده می‌شود:

۴-۵- حل معادله پواسون

پس از محاسبه سمت راست معادله ناویر استوکس و پیشروی در زمان، مقدار $\nabla^2 u$ به دست می آید. لذا داریم:

$$\nabla^2 u = C \quad (32)$$

که C معلوم و u مجهول است. با بسط این معادله

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C \quad (33)$$

و جایگزین کردن عملگرهای مشتقات دوم در جهت های x و y معادله زیردر شکل گسسته به دست می آید [۱۱]:

$$(D^2 X u^T)^T + D^2 Y u = C \quad (34)$$

توجه کنید که برای اعمال عملگر مشتق دوم در جهت X باید تابع مورد نظر را ترانهاد و سپس در ماتریس عملگر $D^2 X$ ضرب کرده و سپس از نتیجه ضرب دو ماتریس ترانهاد گرفته شود. با توجه به این که:

$$(ST)^T = T^T S^T \quad (35)$$

معادله (۳۴) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$u \cdot D^2 X^T + D^2 Y u = C \quad (36)$$

روش حل معادله ماتریسی $AX + XB = C$ توسط بارتلز [۱۳] ارائه شده که در آن $A = D^2 Y$ و $B = D^2 X^T$ می باشد.

۵- ارزیابی نتایج

به منظور ارزیابی صحت شبیه سازی ها، نتایج به دست آمده با بعضی از حل های دقیق معادله ناویر استوکس در حالت های خاص مقایسه شده است.

شود. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i)\Delta t$ پیش می رود و u به وسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و مرحله زمانی گذشته محاسبه می شود. پس از گذشت مرحله سوم، زمان به اندازه Δt پیش رفته و مقدار u محاسبه شده برابر با مقدار u پس از گذشت یک Δt زمانی است. از مساوی قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با ضرایب طرح داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1^2 c_2 + c_2 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_1}{c_2}))^2 + c_1^2 d_2 = 1/3$$

$$c_1 c_2 + c_2 (\frac{d_1}{c_2} (1 + \frac{d_2}{c_2}) + c_2 (1 + \frac{d_1}{c_2})) = 1/2$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

ضرایب برای یک خانواده از حل فوق با $d_1 = 0$ به صورت زیر به دست می آید.

$$c_1 = 8/15$$

$$c_2 = 5/12$$

$$c_3 = 3/4$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = -17/60$$

$$d_3 = -5/12$$

جدول ۱ طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم

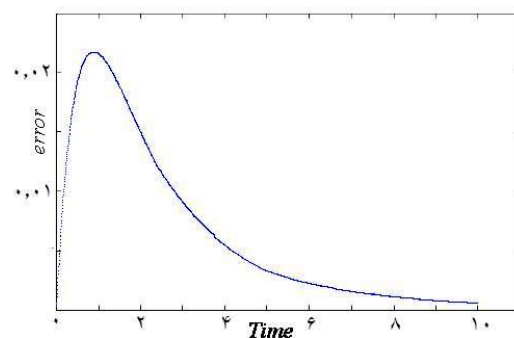
دومین موقعیت	اولین موقعیت	زمان
$R(u^n)$	u^n	t^n
$R' = R(u')$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$t' = t^n + (c_1 + d_1) \Delta t$
$R'' = R(u'')$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$
	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	$t^{n+1} = t'' + (c_3 + d_3) \Delta t$

۵-۱- معادله دیفیوژن وابسته به زمان

حل عددی معادله ناویر استوکس با حل تحلیلی معادله دیفیوژن ارزیابی گردید. معادله دیفیوژن مربوط به حالتی است که $H=0$. یک حل خاص برای معادله دیفیوژن به صورت زیر است [۱۱]:

$$u(x, y, t) = \cos(x) \times \frac{y-1}{\left(1 + \frac{4t}{Re}\right)^{1.5}} \times \exp(-4t/Re) \times \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{\left(1 + \frac{4t}{Re}\right)}\right) \quad (37)$$

برای این مقایسه باید از معادله فوق برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده شود. در نتیجه شرط مرزی خروجی جابه‌جایی و تشکیل جمله‌های غیرخطی در این مقایسه نمی‌تواند ارزیابی شوند. اما حل معادله پواسون و کیفیت پیشرفت در زمان را می‌توان ارزیابی کرد. توجه شود که u شرط پایداری را ارضا می‌کند و حل را می‌توان برای شبیه‌سازی جریان جت کاملاً لزج استفاده کرد. پارامترهای این آزمایش $L_x = 2\pi/3$ و $\beta = 4$ و $Re = 10$ و $t = 20$ و $Nx = 45$ و $Ny = 40$ است. شکل ۲ دقت حل وابسته به زمان را برای u نشان می‌دهد.



شکل ۲ تحلیل خطا برای u در معادله دیفیوژن وابسته به زمان

۵-۲- گردابه‌های استوارت

حل دقیق برای معادله ناویر استوکس غیر لزج برای لایه‌های اختلاطی دوبعدی به‌وسیله استوارت [۱۶] ارائه شده است. جریان در جهت اصلی جریان متناوب بوده و با سرعت متوسط لایه C ، به سمت پایین‌دست جریان حرکت می‌کند. حل به شکل تابع جریان ψ که به ترتیب زیر به مؤلفه‌های سرعت $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ و $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ وابسته است.

$$\psi(x, y, t) = cy + \ln(a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)) \quad (38)$$

که در آن $b = \sqrt{a^2 - 1}$. به‌سادگی می‌توان نشان داد که معادله بالا، معادله جابه‌جایی را ارضا می‌کند که C سرعت جابه‌جایی موج است. بنابراین حل استوارت می‌تواند برای ارزیابی صحت شرط مرزی خروجی جابه‌جایی به کار رود. در این تست تشکیل جمله لزج بررسی نمی‌شود اما تشکیل جمله‌های غیرخطی و پیشروی محاسبات در زمان به خوبی ارزیابی می‌گردند. مؤلفه‌های سرعت u, v و همچنین مؤلفه ورتیسیته ω ، با مشتق‌گیری از رابطه فوق به‌دست می‌آیند [۱۱]:

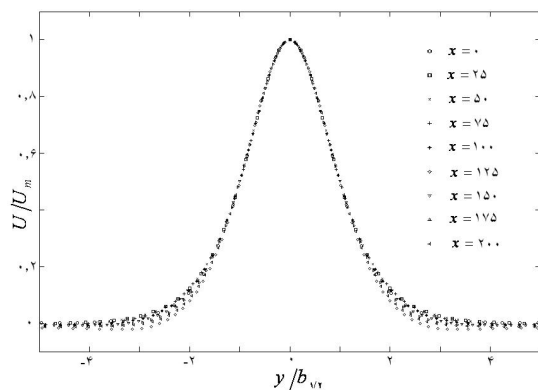
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c + \frac{a \sinh(y - y_0)}{a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)} \quad (39)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{b \sin(x - ct)}{a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)} \quad (40)$$

$$\omega = \frac{1}{[a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)]^2} \quad (41)$$

شکل ۳ دقت حل وابسته به زمان را برای u و v نشان می‌دهد.

عرض جت) و u با U_m (سرعت خط مرکزی) بی‌بعد شده است.

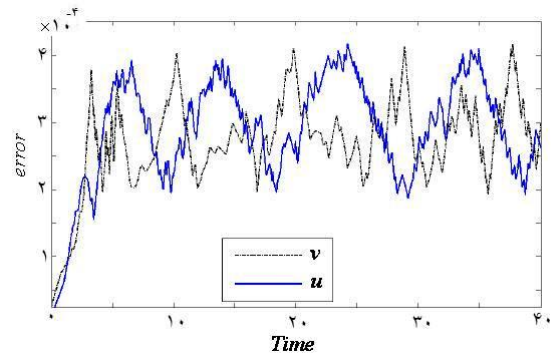


شکل ۵ توزیع سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی جت دوبعدی آرام

۷- جریان جت دوبعدی مغشوش ($Re=300$)

برای مطالعه جت دوبعدی مغشوش، جریان جت را در حالتی توسعه می‌دهیم که یک اغتشاش در ورودی قرار داده می‌شود. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y حاصل از حل معادله اورسامرفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان جت [۱۷] است که فقط برای توزیع v به کار برده می‌شود.

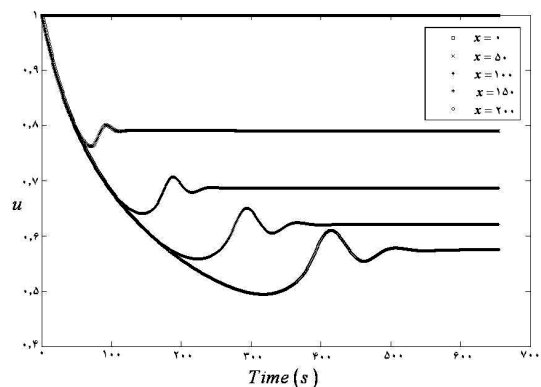
مؤلفه‌های اغتشاش u و v از ناپایداریترین مود حاصل از حل معادله پایداری دو مود ناپایداری به دست می‌آیند. سرعت لحظه‌ای در شبیه‌سازی همراه با اغتشاشها باید به حالت سکون (پایدار) برسد و در واقع سرعت متوسط مستقل از زمان می‌شود. به عنوان نمونه، گذر زمانی v در سه فاصله مساوی در جهت طول L_x در شکل ۶ نشان داده شده است. با توجه این شکل مشاهده می‌شود که مؤلفه‌های سرعت v به حالت پایدار و ایستا رسیده‌اند. همچنین با توجه به این شکل مشخص است که لایه



شکل ۳ تحلیل خطا برای u و v مقایسه با حل تحلیلی استوارت.

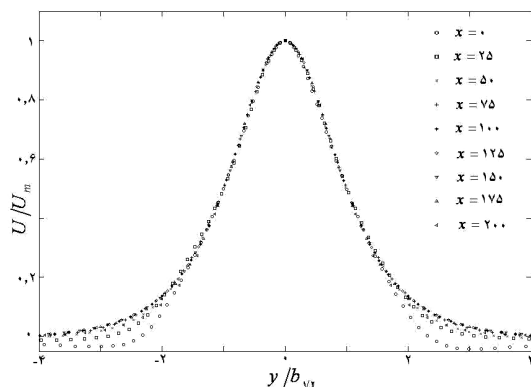
۶- شبیه‌سازی جریان جت دوبعدی آرام ($Re=300$)

برای شبیه‌سازی جریان جت آرام باید سرعت به حالت پایدار و ثابت در هر مکان برسد. این موضوع در شکل ۴ برای مؤلفه u نشان داده شده است این شکل تاریخچه مؤلفه سرعت u را در پنج ایستگاه با فاصله مساوی در جهت جریان نشان می‌دهد.

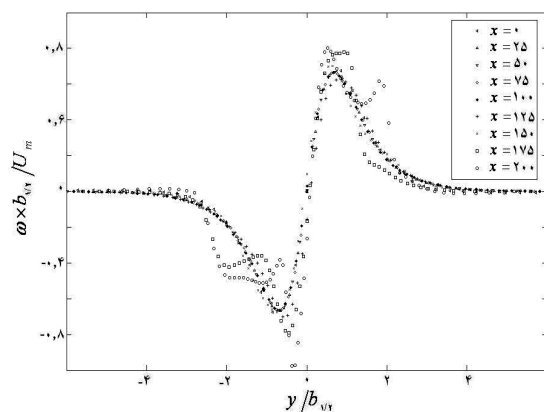


شکل ۴ گذر زمانی u در پنج فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه‌سازی جت دوبعدی بدون اغتشاش ورودی

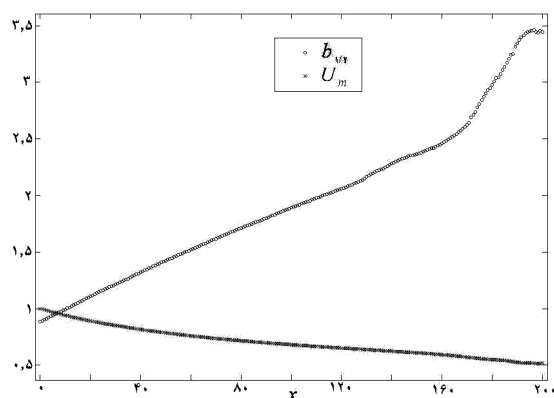
در شکل ۵ توزیع سرعت جت در حالت بی‌بعد و در مقاطع مختلف نشان داده شده که در آن y با $b_{1/2}$ (نیم



شکل ۷ توزیع سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



شکل ۸ توزیع گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

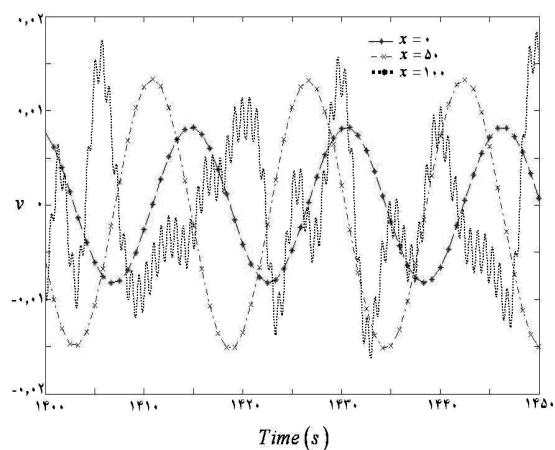


شکل ۹ سرعت خط مرکزی U_m و نیم عرض جت برای x

برشی متناوب است که اغتشاش اعمال شده در مرز ورودی دامنه محاسباتی دلیل آن است.

شکل‌های ۷ و ۸ نتایج شبیه‌سازی را برای سرعت متوسط در جهت جریان اصلی و گردابه در مقاطع مختلف، در مختصات خود تشابه نشان می‌دهد. در این شکل به خوبی می‌توان پدیده خود تشابهی را برای سرعت متوسط و گردابه مطالعه کرد. دیده می‌شود که در حالت مغشوش، جریان، رفتار خودمشابه از خود نشان نمی‌دهد، که این ناشی از اعمال اغتشاشها در مرز ورودی است.

در شکل ۹ چگونگی توسعه سرعت متوسط خط مرکزی و نیم عرض جت با توجه به جهت جریان نشان داده شده است. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ پارامترهای شدت توربولانس و در شکل ۱۲ توزیع تنش رینولدز نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص شده با دور شدن از مرز ورودی، این تنش‌ها افزایش می‌یابد، که این رفتار، بار دیگر بیانگر رفتار غیرخودتشابه در جریان جت است.



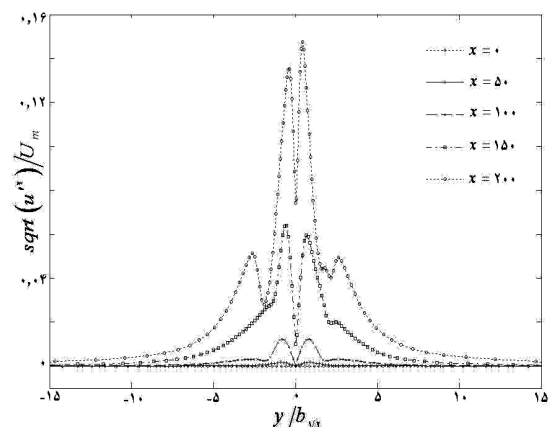
شکل ۱۰ گذر زمانی v در سه فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه‌سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

۸- نتیجه گیری

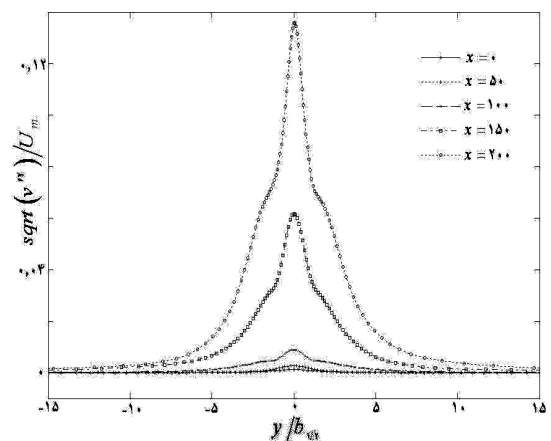
در این پژوهش، جریان جت دوبعدی تراکم‌ناپذیر به کمک حل مستقیم عددی معادله ناویر استوکس در شکل چرخشی مطالعه شد. دقت مناسب این روش با بررسی و ارزیابی دو جواب تحلیلی ارزیابی گردید. نتایج نشان می‌دهند که شبیه‌سازی انجام شده برای جریان کاملاً لزج و ایدئال، پاسخ مطلوب و قابل قبولی را ارائه می‌کند. جریان جت آرام بررسی و توزیع سرعت در مقاطع مختلف در جهت جریان ترسیم شد. در مقادیر متوسط عدد رینولدز ($Re=300$) و بدون هیچ‌گونه اغتشاشی در ورودی نیز جریان جت بررسی شد و توزیع سرعت در مقاطع مختلف در جهت اصلی جریان به دست آمد. همچنین چگونگی کاهش سرعت خط مرکزی با پیشروی در جهت جریان ترسیم و نشان داده شد که این پارامتر با $x^{-1/3}$ متناسب است. رابطه نیم عرض جت با پیشروی در جهت جریان نیز متناسب $x^{2/3}$ را نشان داد که این تناسب، با نتایج تئوری و عددی توافق خوبی دارد. همچنین مقادیر تنش رینولدز در حالت بی‌بعد برای جریان جت مغشوش به دست آمد و دیده شد که با دور شدن از مرز ورودی، مقادیر این تنش‌ها بیشتر شده و منجر به بروز رفتار غیرخودمشابه در مؤلفه‌های سرعت و ورتیسیته جریان جت می‌شود.

۹- منابع

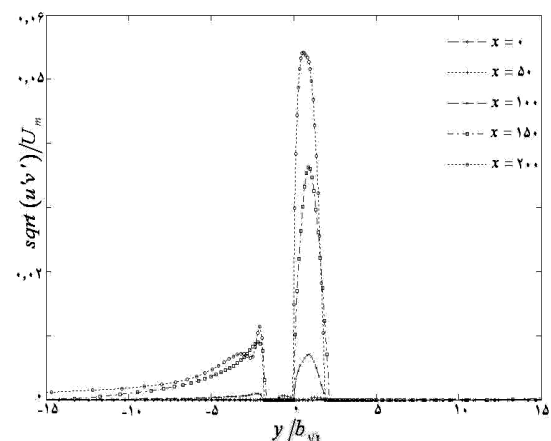
- [1] Schlichting, H., "Boundary-layer Theory", 8th ed., Spriger-Verlag, 2000.
- [2] Bickley, W., "The Plane Jet", Phil. Mag. Ser.7, 23, 1939, pp727-731.
- [3] Ansari, A.R., Hegarty, A.F., Shishkin, G.I., "Parameter-uniform numerical methods for a laminar jet problem, International Journal for Numerical Methods in Fluids 43, 2003, pp937-951.



شکل ۱۰ تغییرات $\sqrt{u'}/U_m$ در برابر تغییرات y/b_{jet}



شکل ۱۱ تغییرات $\sqrt{v'}/U_m$ در برابر تغییرات y/b_{jet}



شکل ۱۲ تغییرات $\sqrt{u'v'}/U_m$ در برابر تغییرات y/b_{jet}

- [11] M.J. Maghrebi, "A Study of the Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Plane Wakes", PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.
- [12] Monica de mier torrecilla, "Introduction to Numerical Simulation of Fluid Flows", Technical University of Munich, 2004.
- [13] Bartles. R.H., Stewart. GW, "Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$ [F4]", Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, 1972.
- [14] Lele. S.K., "Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution", Journal of Computational Physics, 103, 1992, pp16-42.
- [15] Wray. A., Hussaini. M.Y., "Numerical Experiments in Boundary Layer Stability", Proc. R. Scotland.A, vol. 392, 1984, pp373-389.
- [16] Stuart. J. T., "On finite amplitude oscillations in laminar mixing layer", Journal of fluid mechanics, 29. (3), 1967, pp417-440.
- [۱۷] سلمانی ماهینی، الف. "تحلیل پایداری خطی جریان جت"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود. ۱۳۸۴.
- [4] Ansari. A.R., "Shishkin Meshes and their Applications", Department of Mathematics, Gulf University for Science & Technology, Winter Conference in Mathematics, 2004, Hawally 32093, P.O. Box 7207, Kuwait.
- [5] Tsukiji.T., Takahashi.K, "Numerical analysis of an axisymmetric jet using a streamline coordinate system", JSME Intl. J., Vol. 30, 1987, pp1406-1413.
- [6] Takahashi. K., Tsukiji. T., "Numerical analysis of a laminar jet using a streamline coordinates system", Transactions of the CSME, Vol 9, 1985, pp65-170.
- [7] Zarbi. G., Takahashi. K., "Prediction of the laminar two-dimensional jet flow through a convergent channel", JSME Intl. J., Series II, Vol. 24, 1991, pp115-121.
- [8] Morgan. P. L., Auld. D., Armfield. S. W., "A comparison of Eulerian and Lagrangian schemes for the simulation of an incompressible planar jet", ANZIAM J. 45 (E), 2004, pp310-325.
- [9] Akhavan, R., Ansari, A., Kang, S., and Mangiavacchi, N. "Subgrid-Scale interaction in a Numerically Simulated Planar Turbulent Jet and Implication for Modeling", J Fluid Mech., 408, 2000, pp83-120.
- [10] Stanley, S.A., Sarkar, S., and Mellado, J.P., "A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation", J Fluid Mech., 450, 2002, pp337-407.