مجلهٔ فنی و مهندسی مدرس- مهندسی مکانیک
دوره ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹ ص‌ص ۳۱-۴۳
(دریافت مقاله: آذر ۱۳۸٦، پذیرش مقاله: آبان ۱۳۸۷)

حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریهٔ الاستیسیته مستوی

غلامحسین رحیمی[۱*]، مهدی قنّاد[۲]، سیامک اسماعیل‌زاده خادم[۳]
۱- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۲- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۳- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
***تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱٤۱۱۵، rahimi_gh@modares.ac.ir**

چکیده- در این مقاله با استفاده از الاستیسیتهٔ مستوی(PET)، معادله حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG در حالت کلی استخراج شده و سپس تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی استوان‌های به‌ازای ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مضاعف و ریشه‌های مختلط معادله مشخصه با در نظر گرفتن شرایط انتهایی متفاوت استوانه: دو سر باز، دو سر بسته و مقید و دو سر بسته و نامقیّد، به‌صورت تحلیلی (حل دقیق) به‌دست آمده است. تنش‌ها و جابه‌جایی با تغییرات ضرایب ناهمگنی مطالعه و با حالت استوانه جدار ضخیم همگن مقایسه شده است. در این مقاله، روابط تحلیلی در وضعیت‌های متفاوت، به‌دست آمده و سپس با تنها وضعیت تحلیل شده توسّط یکی از پژوهشگران مقایسه و اشتباه مقاله ایشان تصحیح و تکمیل شده است. جنس استوانه، مادّه ناهمگن و همسانگرد با تغییرات مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌صورت توانی و با نسبت پواسون ثابت است.

کلیدواژگان: استوانهٔ جدار ضخیم، مادّهٔ ناهمگن FG، الاستیسیتهٔ مستوی.

General Solution of Plane Elasticity of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylinderical Shells

G. H. Rahimi[1*], M. Ghannad[2], S. Esmaeilzadeh Khadem[3]
1- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
2- Ph.D. Student of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
3- Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
***P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir**

Abstract- In this paper, an analytical formulation of FGM axisymmetric thick-walled cylinders, based on the plane elasticity theory is presented. The stress and displacements in thick cylindrical shell are calculated using the real, double and complex roots of characteristic equation. Solutions are obtained under generalized plane stress, plane strain and closed-ends cylinder assumptions. It is assumed that the material is isotropic and heterogeneous with constant Poissn's ratio and radially varying elastic modulu. The results have been compared with findings of the researcher (2001) [hoop stress is incorrect], and we have present corrected version as well as supplementary findings.

Keywords: Thick-Walled Cylinder, FGM, Plane Elasticity.

۱- مقدمه

پوسته‌ها به‌طور کلّی، سازه‌هایی خمیده هستند که در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، مطلوبیت ویژه‌ای دارند. مطالعهٔ این رفتار از گذشته‌ای نه چندان دور مورد پژوهشگران قرار گرفته و به دلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوان‌های جدار نازک و جدار ضخیم، اهمّیت ویژه‌تری دارند و همواره پژوهشگرانان در پی اعمال تغییراتی بر روی ضخامت و مادّه این پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

لامه[1] نخستین بار در سال ۱۸۵۲ [۱] با استفاده از نظریه الاستیسیتهٔ مستوی[2]، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مادهٔ همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد و توزیع تنش را در استوانهٔ توخالی به‌دست آورد که آن در حل مسایل مختلف مهندسی استفاده شده و در کتب درسی گنجانیده شد [۲].

لخنیتسکی[3] در سال ۱۹۵۰ [۳] نظریه الاستیسیتهٔ اجسام مرکب[4] را فرمول‌بندی کرد. در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب به‌دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده و یا ترکیب دو مادهٔ ناهمساز در کنار یکدیگر و در نتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، مسایل و نواقصی در پوسته به‌وجود می‌آید که تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها ایجاد می‌شود. مواد با تغییر تدریجی خواص (مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) یا FGM[5] توسّط نینو[6] و همکاران در ۱۹۸٤ [٤] مطرح شد که پس از آن در سال‌های آخر قرن بیستم و شروع قرن جدید، مطالعات تحلیلی قابل توجهی بر روی سازه‌های ساخته شده از این مواد در نقاط مختلف جهان انجام شد.

فوکویی و یاماناکا[7] در ۱۹۹۲ [۵] روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای[8] به‌کمک معادله‌های لامه استخراج و آنها را به‌روش عددی رانگ-کوتا حل کردند. اُباتا و نودا[9] در ۱۹۹٤ [٦] تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کرهٔ توخالی FGM استخراج و مادهٔ بهینه را به‌دست آوردند. هورگان و چان[10] در ۱۹۹۹ [۷] معادله‌های حاکم بر استوانه توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌کمک معادله‌های لامه استخراج کردندو توزیع تنش را به‌ازای توان‌های مثبت به‌دست آوردند. هورگان و چان با همین منطق، تنش‌ها را در دیسک‌های دوار نیز بررسی کردند [۸].

توتونچو و اُزترک[11] در ۲۰۰۱ [۹] حل دقیق مخازن تحت فشار استوان‌های و کروی جدار ثابت FGM را ارائه کردند. ایشان استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته $E = E_o \bar{r}^{\beta}$ در راستای شعاعی، تحلیل و توزیع تنش شعاعی و محیطی را به‌ازای توان‌های مثبت و منفی ضریب ناهمگنی در محدوده $-۲ \le \beta \le ۲$ به‌ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه بررسی کردند. در مقالهٔ ایشان رابطه و کردار مربوط به تنش محیطی و کردار تنش شعاعی اشتباه دارد که در برخی از پژوهش‌های بعدی استفاده شده است. جبّاری، سهراب‌پور و اسلامی در ۲۰۰۳ [۱۰] حل کلی تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه توخالی تحت بارهای پایدار نامتقارن محوری را با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی ارائه کردند. اراسلان و آکیز[12] در ۲۰۰٦ حل محور و دیسک توپر دوار را در حالت‌های تنش صفحه‌ای[13] و کرنش صفحه‌ای با خواص پیوستهٔ مکانیکی به‌صورت نمایی و سهمی [۱۱] و

1. Lamé
2. Plane Elasticity Theory (PET)
3. Lekhnitskii
4. Composite Bodies
5. Functionally Graded Materials
6. Niino
7. Fukui & Yamanaka
8. Plane Strain
9. Obata & Noda
10. Horgan & Chan
11. Tutuncu & Ozturk
12. Eraslan & Akis
13. Plane Stress

حل الاستیک-پلاستیک لوله تحت فشار را در حالت کرنش صفحه‌ای [۱۲] بررسی کردند. ژیفای و هونگ‌جون[1] در ۲۰۰۶[۱۳] حل دقیق استوانه‌های توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، که هر کدام از لایه‌ها به‌صورت همگن با خواص مکانیکی ثابت(همگن و همسانگرد) در نظر گرفته شده‌اند، ارائه کردند. ایشان در ۲۰۰۷[۱٤] همانند گذشته با در نظر گرفتن تغییرات خواص مکانیکی به‌صورت خطی و توانی، استوانه FGM را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو(۲۰۰۱) مقایسه کردند و در نتیجه به دلیل تفاوت کردارها، پی به اشتباه مقالهٔ مورد نظر بردند. توتونچو در ۲۰۰۷[۱۵] مشابه مقالهٔ پیشین اما با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به‌صورت نمایی، توزیع تنش‌ها را در یک استوانه ناهمگن به‌دست آورد. در مقالهٔ حاضر، تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه‌های جدار ضخیم FGM متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت‌های مختلف به‌دست آمده است.

۲- روابط اساسی

در نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن می‌باشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به‌عبارت دیگر، تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است. بنابراین تنش طولی σ_x و کرنش طولی ε_x دارای مقادیر ثابتند و تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی هستند.

$$\sigma_\theta > \sigma_x > \sigma_r \qquad (۱)$$

معادله تعادل تنش در غیاب نیروهای حجمی برابر است با:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = ۰ \qquad (۲)$$

و روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری.

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad \text{و} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \qquad (۳)$$

و روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \qquad (٤)$$

A و B تابع نسبت پواسون (ν = const.) هستند و براساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شوند. مدول الاستیک به‌صورت توانی، تابعی از شعاع فرض می‌شود.

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^\beta = E_i \bar{r}^\beta \quad \text{و} \quad \bar{r} = \frac{r}{r_i} \qquad (۵)$$

E_i و r_i مدول الاستیک و شعاع در سطح داخلی استوانه و β ضریب ناهمگنی مادهٔ آن است. بدیهی است که اگر $\beta = ۰$ باشد، مدول الاستیک ثابت می‌ماند، یعنی مادّه همگن است.

با جایگزینی روابط(۳ و ٤) در رابطه (۲).

$$\frac{d}{dr}\left[E(r)\left(A\frac{du_r}{dr} + B\frac{u_r}{r}\right)\right] + \frac{۱}{r}\left[E(r)(A-B)\left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r}\right)\right] = ۰ \qquad (٦)$$

$$E(r) \neq ۰$$

$$r^۲ \frac{d^۲u_r}{dr^۲} + (\beta+۱) r \frac{du_r}{dr} + \left(\beta\frac{B}{A} - ۱\right) u_r = ۰ \qquad (۷)$$

معادله (۷) یک معادلهٔ اویلر- کوشی است.

1. Zhifei & Hongjun

$$r^{2}u_r'' + (b+1)ru_r' + \left(bn^{*}-1\right)u_r = 0 \qquad (8)$$

مقدار $\nu^{*} = \frac{B}{A}$ براساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شود. اگر در معادله (۷) مقدار $u_r(r) = r^{m}$ گذاشته شود، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$m^{2} + \beta m + \left(\beta\nu^{*}-1\right) = 0 \qquad (9)$$

و ریشه‌های معادله:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\beta \pm \sqrt{\Delta}\right) \quad \& \quad \Delta = \beta^{2} - 4\left(\beta\nu^{*}-1\right) \qquad (10)$$

براساس مقادیر مختلف Δ ریشه‌های معادله، ممکن است: ۱ ریشه‌های حقیقی، ۲ ریشه‌های مضاعف و ۳ ریشه‌های مختلط باشند که در هر کدام از این حالت‌ها، شرایط انتهایی استوانه می‌تواند: (الف) تنش صفحه‌ای، (ب) کرنش صفحه‌ای و (پ) استوانه بسته باشد.

۳- شرایط انتهایی استوانه

دو سر استوانه با حفظ شرایط نظریه الاستیسیتهٔ مستوی (تحلیل دوبعدی مسایل) می‌تواند باز یا بسته باشد، یعنی تنش و کرنش طولی، مقداری ثابت دارند.

(الف) تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز):

$$\sigma_x = 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x \neq 0$$

$$A = \frac{1}{1-\nu^{2}} \quad \text{و} \quad B = \frac{\nu}{1-\nu^{2}} \qquad (11)$$
$$\Rightarrow \nu^{*} = \frac{B}{A} = \nu$$

(ب) کرنش صفحه‌ای(استوانه با دو سر بسته- مقیّد):

$$\sigma_x \neq 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x = 0$$

$$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{و} \quad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (12)$$
$$\Rightarrow \nu^{*} = \frac{B}{A} = \frac{\nu}{1-\nu}$$

(پ) استوانه بسته[1](استوانه با دو سر بسته- نامقیّد):

$$\sigma_x \neq 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x \neq 0$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_x \qquad (13)$$

$$A = \frac{2-\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{و} \quad B = \frac{3\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (14)$$
$$\Rightarrow \nu^{*} = \frac{B}{A} = \frac{3\nu}{2-\nu}$$

۴- حل استوانه‌های ناهمگن

اکنون معادله (۷) را با در نظر گرفتن ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط و لحاظ کردن شرایط انتهایی استوانه، حل کرده و در هر کدام از حالت‌های به‌دست آمده، روابط پارامتری تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را استخراج می‌کنیم.

۴-۱- ریشه‌های حقیقی

اگر در رابطه (۱۰)، $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های حقیقی می‌شود.

$$m_1 = -\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad m_2 = -\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \qquad (15)$$
$$\Delta = \beta^{2} - 4\left(\beta\nu^{*}-1\right)$$

پاسخ معادله (۸) در این حالت:

$$u_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \qquad (16)$$

1. Closed Cylinder

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادله‌های (۳) به‌دست آورده و در معادله (٤) می‌گذاریم.

$$\sigma_r = E_i \bar{r}^{\beta}\left[C_1(Am_1+B)r^{m_1-1}+C_2(Am_2+B)r^{m_2-1}\right] \quad (۱۷)$$

با اعمال بارگذاری در سطح داخلی و خارجی استوانه:

$$s_r\Big|_{r=r_i} = -P \quad \text{و} \quad s_r\Big|_{r=r_o} = 0 \quad (۱۸)$$

در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{Pk^{m_2} r_i^{(1-m_1)}}{E_i(Am_1+B)(k^{m_2}-k^{m_1})} \\ k = \dfrac{r_o}{r_i} \\ C_2 = \dfrac{Pk^{m_1} r_i^{(1-m_2)}}{E_i(Am_2+B)(k^{m_2}-k^{m_1})} \end{cases} \quad (۱۹)$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۱٦ و ٤) قرار می‌دهیم:

$$s_r = \frac{P\bar{r}^{b-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left(k^{m_2}\bar{r}^{m_1}-k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right) \quad (۱-۲۰)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{\beta-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left(\frac{A+Bm_1}{Am_1+B}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{A+Bm_2}{Am_2+B}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right) \quad (۲-۲۰)$$

$$u_r = \frac{\Pr_i}{E_i(k^{m_1}-k^{m_2})}\left(\frac{1}{Am_1+B}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{Am_2+B}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right) \quad (۳-۲۰)$$

ملاحظه می‌شود که σ_r به‌طور مستقیم به A و B وابسته نیست، اما به ν^* و ضریب ناهمگنی β بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادله‌های (۲۰) با توجّه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$\nu^* = \nu$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{\beta-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left[\frac{1+\nu m_1}{m_1+\nu}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1+\nu m_2}{m_2+\nu}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (۱-۲۱)$$

$$u_r = \frac{\Pr_i(1-\nu^2)}{E_i(k^{m_1}-k^{m_2})}\left[\frac{1}{m_1+\nu}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{m_2+\nu}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (۲-۲۱)$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$s_q = \frac{P\bar{r}^{b-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left[\frac{(1-n)+nm_1}{(1-n)m_1+n}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{(1-n)+nm_2}{(1-n)m_2+n}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (۱-۲۲)$$

$$u_r = \frac{\Pr_i(1+n)(1-2n)}{E_i(k^{m_1}-k^{m_2})}\left[\frac{1}{(1-n)m_1+n}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{(1-n)m_2+n}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (۲-۲۲)$$

(پ) استوانهٔ بسته:

$$\nu^* = \frac{3\nu}{2-\nu}$$

$$s_q = \frac{P\bar{r}^{b-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left[\frac{(2-n)+3nm_1}{(2-n)m_1+3n}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{(2-n)+3nm_2}{(2-n)m_2+3n}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (۱-۲۳)$$

$$u_r = \frac{2\Pr_i(1+n)(1-2n)}{E_i(k^{m_1}-k^{m_2})}\left[\frac{1}{(2-n)m_1+3n}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{(2-n)m_2+3n}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (۲-۲۳)$$

مرجع[۹] تنش شعاعی و تنش محیطی را فقط به‌ازای $\Delta > 0$ در حالت کرنش صفحه‌ای به‌دست آورده است. σ_r (رابطه ۹ مقاله) را درست و σ_θ (رابطه ۱۰ مقاله) را نادرست به‌دست آورده است. برای تصحیح رابطه، به‌جای $\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}$ باید $\left(\frac{rR}{a}\right)^{\beta-1}$ را براساس نمادهای مقاله مذکور قرار داد. کردار(۲) مرجع مذکور اشتباه است که در انتهای این مقاله، صحیح آن نشان داده می‌شود.

۴-۲- ریشه‌های مضاعف

اگر در رابطه (۱۰)، $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مضاعف می‌شود.

$$m_1 = m_2 = m = -\frac{\beta}{2} \quad (۲۴)$$

پاسخ معادله (۸) در این حالت:

$$u_r(r) = \left(C_1 + C_2 \ln r\right) r^m \quad (۲۵)$$

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادله‌های (۳) به‌دست آورده و در معادله (٤) می‌گذاریم.

$$s_r = E_i\bar{r}^b\left\{C_1(Am+B)+C_2\left[A+(Am+B)\ln r\right]\right\}r^{m-1} \quad (۲۶)$$

با اعمال شرایط بارگذاری (رابطه ۱۸)، در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{P\left[A+(Am+B)\ln r_o\right]}{E_i(Am+B)^2(\ln k)r_i^{m-1}} \\ k = \dfrac{r_o}{r_i} \\ C_2 = \dfrac{P}{E_i(Am+B)(\ln k)r_i^{m-1}} \end{cases} \quad (۲۷)$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۲۵) و (٤) قرار می‌دهیم:

$$\sigma_r = -\frac{P\bar{r}^{(m+\beta-1)}}{\ln k}\left(\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \quad (۱-۲۸)$$

$$s_q = \frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k}\left[\frac{B^2-A^2}{(Am+B)^2} - \frac{A+Bm}{Am+B}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right] \quad (۲-۲۸)$$

$$u_r = -\frac{\Pr_i\bar{r}^m}{E_i(Am+B)\ln k}\left(\frac{A}{Am+B}+\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \quad (۳-۲۸)$$

ملاحظه می‌شود که مشابه حالت پیشین σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، اما به ν^* و ضریب ناهمگنی β بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادله (۲۸) با توجّه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k}\left[\frac{1-n^2}{(m+n)^2}+\frac{1+nm}{m+n}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right] \qquad (۱-۲۹)$$

$$u_r = -\frac{\Pr_i\,\bar{r}^m(1-\nu^2)}{E_i(m+\nu)\ln k}\left(\frac{1}{m+\nu}+\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \qquad (۲-۲۹)$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

(۱-۳۰)

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k}\left\{\frac{1-2n}{\left[(1-n)m+n\right]^2}+\frac{(1-n)+nm}{(1-n)m+n}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right\}$$

(۲-۳۰)

$$u_r = -\frac{\Pr_i\,\bar{r}^m(1+n)(1-2n)}{E_i\left[(1-n)m+n\right]\ln k}\left[\frac{1-n}{(1-n)m+n}+\ln\frac{k}{\bar{r}}\right]$$

(پ) استوانهٔ بسته:

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k}\left\{\frac{4(1+n)(1-2n)}{\left[(2-n)m+3n\right]^2}+\frac{(2-n)+3nm}{(2-n)m+3n}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right\} \qquad (۱-۳۱)$$

(۲-۳۱)

$$u_r = -\frac{2\Pr_i\,\bar{r}^m(1+n)(1-2n)}{E_i\left[(2-n)m+3n\right]\ln k}\left[\frac{2-n}{(2-n)m+3n}+\ln\frac{k}{\bar{r}}\right]$$

۴-۳- ریشه‌های مختلط

اگر در رابطهٔ (۱۰)، $\Delta<0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مختلط می‌شود.

(۳۲)

$$m_1 = z+iy \quad \text{و} \quad m_2 = z-iy$$

$$z=-\frac{\beta}{2} \qquad y=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \& \quad \Delta=\beta^2-4\left(\beta\nu^*-1\right)$$

پاسخ معادلهٔ (۸) در این حالت:

$$u_r(r)=\left[C_1\cos(y\ln r)+C_2\sin(y\ln r)\right]r^z \qquad (۳۳)$$

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادله (۳) به‌دست آورده و در معادله (٤) قرار می‌دهیم.

(۳٤)

$$s_r = E_i\bar{r}^b\left\{C_1\left[(Az+B)\cos(y\ln r)-Ay\sin(y\ln r)\right]+C_2\left[(Az+B)\sin(y\ln r)+Ay\cos(y\ln r)\right]\right\}r^{z-1}$$

از اعمال شرایط بارگذاری(رابطه ۱۸)، در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

(۳۵)

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{\Pr_i^{(1-z)}}{E_i D}\left[(Az+B)\sin(y\ln r_o)+Ay\cos(y\ln r_o)\right] \\ C_2 = \dfrac{\Pr_i^{(1-z)}}{E_i D}\left[(Az+B)\cos(y\ln r_o)-Ay\sin(y\ln r_o)\right] \end{cases}$$

(۳٦)

$$k=\frac{r_o}{r_i} \quad \text{و} \quad D=\left[(Az+B)^2+A^2y^2\right]\sin(y\ln k)$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۳۳) و (٤) قرار می‌دهیم:

$$\sigma_r = -\frac{P\bar{r}^{(z+\beta-1)}}{\sin(y\ln k)}\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \quad (۱-۳۷)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{P\bar{r}^{(z+\beta-1)}}{D}\left\{\left(A^2-B^2\right)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) + \left[AB\left(z^2+y^2+1\right)+\left(A^2+B^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\} \quad (۲-۳۷)$$

$$u_r = -\frac{P_{r_i}\bar{r}^z}{E_i D}\left[(Az+B)\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+Ay\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right] \quad (۳-۳۷)$$

ملاحظه می‌شود که σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، اما به ν^* و ضریب ناهمگنی β بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادله‌های (۳۷) با توجّه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(z+b-1)}}{\left[(z+n)^2+y^2\right]\sin(y\ln k)}\left\{\left(1-n^2\right)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) + \left[n\left(z^2+y^2+1\right)+\left(1+n^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\} \quad (۱-۳۸)$$

$$u_r = -\frac{P_{r_i}\bar{r}^z(1-\nu^2)}{E_i\left[(z+\nu)^2+y^2\right]\sin(y\ln k)}\left[(z+\nu)\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) + y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right] \quad (۲-۳۸)$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(z+b-1)}}{\left[\left[(1-n)z+n\right]^2+(1-n)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times \left\{(1-2n)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+\left[n(1-n)\left(z^2+y^2+1\right) + \left(1-2n+2n^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\} \quad (۱-۳۹)$$

$$u_r = -\frac{P_{r_i}\bar{r}^z(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i\left[\left[(1-\nu)z+\nu\right]^2+(1-\nu)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times \left\{\left[(1-\nu)z+\nu\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+(1-\nu)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\} \quad (۲-۳۹)$$

(پ) استوانه بسته:

$$\sigma_\theta = -\frac{P\bar{r}^{(z+\beta-1)}}{\left[\left[(2-\nu)z+3\nu\right]^2+(2-\nu)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times \left\{4(1+\nu)(1-2\nu)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+\left[3\nu(2-\nu) \times\left(z^2+y^2+1\right)+2\left(2-2\nu+5\nu^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\} \quad (۱-۴۰)$$

$$u_r = -\frac{2P_{r_i}\bar{r}^z(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i\left[\left[(2-\nu)z+3\nu\right]^2+(2-\nu)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times \left\{\left[(2-\nu)z+3\nu\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+(2-\nu)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\} \quad (۲-۴۰)$$

۵- حل استوانه‌های همگن

در استوانه‌های همگن و همسانگرد، مدول الاستیک و نسبت پواسون، هر دو ثابت هستند. اگر در معادله (۵) مقدار $\beta = 0$ گذاشته شود، مادهٔ همگن به‌دست می‌آید.

$$E = E_i = const. \tag{41}$$

و معادله اویلر-کوشی:

$$r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0 \tag{42}$$

معادله مشخصه و ریشه‌های آن.

$$m^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; m_{1,2} = \pm 1 \tag{43}$$

مشاهده می‌شود که ریشه‌های معادله مشخصه، حقیقی می‌باشند و از این رو پاسخ‌ها در مجموعه $\Delta > 0$ قرار می‌گیرند. اگر در معادله (۱۶) و بقیه معادله‌ها، به‌جای $m_1 = +1$ و $m_2 = -1$ گذاشته شود، همان روابط شناخته شده استوانه‌های همگن به‌دست می‌آیند.

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{44}$$

با اعمال شرایط بارگذاری، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{P}{E(A+B)(k^2-1)} \\ C_2 = \dfrac{\mathrm{Pr}_o^2}{E(A-B)(k^2-1)} \end{cases} \tag{45}$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۴۴) و (۴) قرار می‌دهیم:

$$\sigma_r^H = \frac{\mathrm{P}}{k^2-1}\left(1 - \frac{k^2}{\bar{r}^2}\right) \tag{46-1}$$

$$\sigma_\theta^H = \frac{\mathrm{P}}{k^2-1}\left(1 + \frac{k^2}{\bar{r}^2}\right) \tag{46-2}$$

$$u_r^H = \frac{\mathrm{Pr}_i\,\bar{r}}{E(k^2-1)}\left[\frac{1}{A+B} + \left(\frac{1}{A-B}\right)\frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{46-3}$$

ملاحظه می‌شود که σ_r و σ_θ به A و B وابسته نیست و نیز به E وابستگی ندارد. در حقیقت تنش شعاعی و تنش محیطی ایجاد شده برای استوانه‌های همگن و همسانگرد با مدول الاستیک متفاوت تحت فشار ثابت و هندسه یکسان، به یک میزان است که این مقدار مستقل از شرایط انتهایی استوانه است. اما u_r به A و B و نیز E وابستگی مستقیم دارد، یعنی مقدار جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ها با شرایط بالا، با تغییر مدول الاستیک و شرایط انتهایی، یکسان نیست. اکنون معادله (۴۶-۳) را در شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر می‌نویسیم.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$u_r^H = \frac{\mathrm{Pr}_i\,\bar{r}}{E(k^2-1)}\left[(1-\nu) + (1+\nu)\frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{47}$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$u_r^H = \frac{\mathrm{Pr}_i\,\bar{r}(1+\nu)}{E(k^2-1)}\left[(1-2\nu) + \frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{48}$$

(پ) استوانه بسته:

$$u_r^H = \frac{\mathrm{Pr}_i\,\bar{r}}{E(k^2-1)}\left[(1-2\nu) + (1+\nu)\frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{49}$$

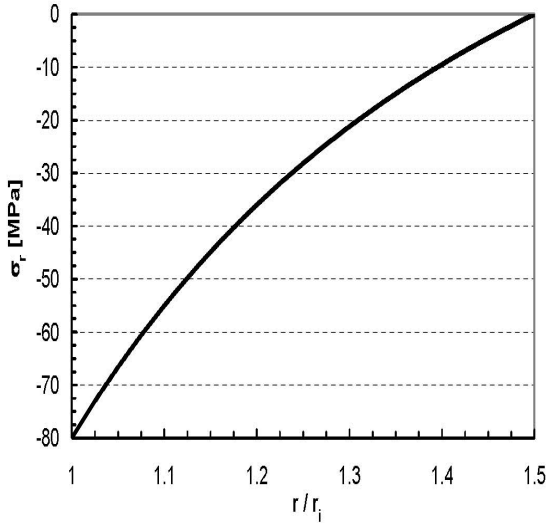
۶- بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی کردارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، استوانه‌ای جدار ضخیم با مشخصات زیر را با توزیع متغیر مدول الاستیک در امتداد جدار در نظر می‌گیریم. استوانهٔ جدار ثابت با شعاع داخلی $r_i = 40\ mm$ و شعاع خارجی $r_o = 60\ mm$ تحت فشار یکنواخت

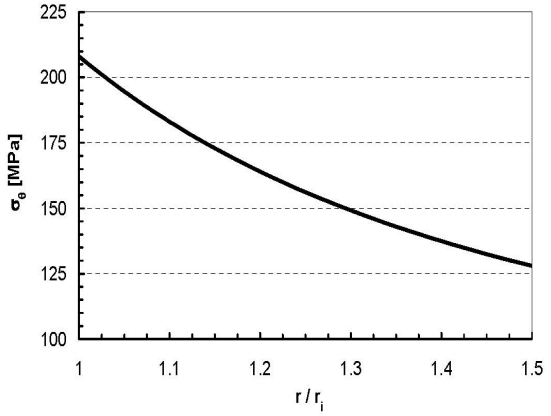
داخلی $P = ۸۰\ MPa$ قرار گرفته است. مدول الاستیک سطح داخلی استوانه برابر $E_i = ۲۰۰\ GPa$ و نسبت پواسون برابر $\nu = ۰/۳$ است.

۶-۱- استوانه همگن

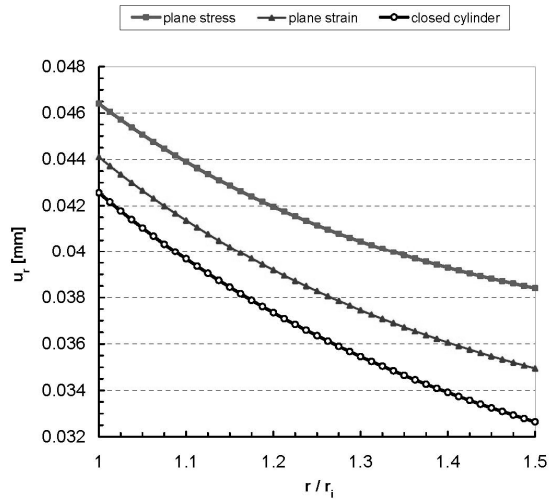
تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه‌های همگن و همسانگرد مستقل از خواص مکانیکی و شرایط انتهایی استوانه هستند، اما جابه‌جایی شعاعی به آنها وابسته است. شکل ۱ توزیع تنش شعاعی فشاری را براساس رابطه (٤٦-۱) و شکل ۲ توزیع تنش محیطی کششی را براساس رابطه (٤٦-۲) در استوانه نسبت به شعاع بی‌بعد $\bar{r} = \frac{r}{r_i}$ نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی در شکل ۳ براساس روابط ٤٧، ٤٨ و ٤٩ در همان استوانه، نشانگر آن است که مقدار جابه‌جایی شعاعی در استوانه باز (تنش صفحه‌ای) بیشترین و در استوانه بسته(نامقیّد) کمترین است.



شکل ۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه همگن



شکل ۲ توزیع تنش محیطی در استوانه همگن



شکل ۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه همگن

۶-۲- استوانهٔ ناهمگن

در استوانه‌های ناهمگن و همسانگرد، تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی، مستقل از خواص مکانیکی و شرایط انتهایی استوانه نیستند، بلکه از طریق β و $\nu^* = \frac{B}{A}$ به خواص مکانیکی و شرایط دو سر استوانه وابسته می‌شوند. مدول الاستیک استوانه در راستای شعاع با تابع توانی $E(r) = E_i \bar{r}^{\beta}$ تعریف که β در محدوده $-۲ \le \beta \le ۲$ [۱۳،۱٤،۱٥،۹] در نظر گرفته می‌شود. شکل

٤ توزیع مدول الاستیک را نسبت به شعاع استوانه $\frac{E}{E_i}=\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\beta}$ به‌ازای مقادیر صحیح β نشان می‌دهد. نسبت پواسون استوانه، ثابت $0<\nu<0/5$ است که براساس آن $0<\nu^*<1$ می‌شود. در این مقاله، $\nu=0/3$ در نظر گرفته شده که مقدار ν^* براساس شرایط انتهایی برابر است با:

$$\nu^*=\begin{cases}0/3 & \text{تنش صفحه‌ای}\\ 0/4286 & \text{کرنش صفحه‌ای}\\ 0/5294 & \text{استوانه بسته}\end{cases} \qquad (50)$$

توزیع نرمال تنش‌ها و جابه‌جایی در شرایط انتهایی مختلف، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند، از این‌رو کردارهای اشکال ٤ تا ۷ برای حالت استوانه بسته ترسیم شده که نتایج مانند نتایج دو حالت دیگر است.

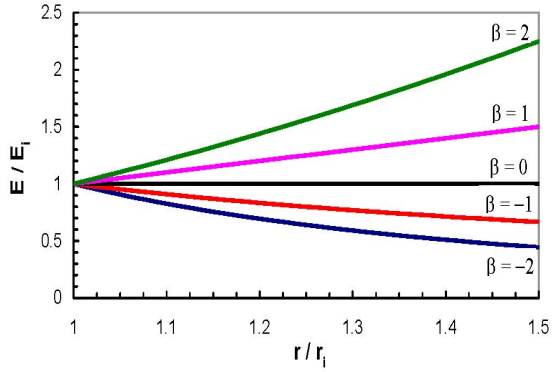
شکل ۵ توزیع نرمال تنش شعاعی استوانه ناهمگن را نسبت به استوانه همگن نشان می‌دهد. این نسبت در لایه داخل و لایه خارج استوانه یک است (در [۹] و [١٤] در لایه خارجی یک ترسیم نشده است)، یعنی رفتار مادهٔ ناهمگن همانند رفتار مادهٔ همگن است. در جدار استوانه به‌ازای $\beta<0$ تنش شعاعی، کاهش و به‌ازای $\beta>0$ تنش شعاعی افزایش می‌یابد. میزان کاهش یا افزایش تنش به مقدار $|\beta|$ بستگی دارد.

شکل ٦ توزیع نرمال تنش محیطی استوانه ناهمگن را نسبت به استوانه همگن نشان می‌دهد. این نسبت در لایه داخل استوانه یک نیست(در [۹] این کردار مشابه کردار تنش شعاعی ترسیم شده اما در [١٤] اصلاح شده است). تنش محیطی به‌ازای $\beta<0$ در نیمه داخلی جدار، بیشتر از مادهٔ همگن و در نیمه خارجی جدار، کمتر از مادهٔ همگن است و به‌ازای $\beta>0$ برعکس در نیمه داخلی جدار، کمتر از مادهٔ همگن و در نیمه خارجی جدار، بیشتر از مادهٔ همگن است. تنش محیطی(تنش بیشینه) در حالت $\beta=1$ در طول جدار تقریباً ثابت می‌ماند که از نظر کنترل تنش در استوانه جدار ضخیم، می‌تواند امتیاز ویژه‌ای باشد. در محدوده لایه میانی استوانه، رفتار تنش محیطی مانند رفتار مادهٔ همگن می‌شود.

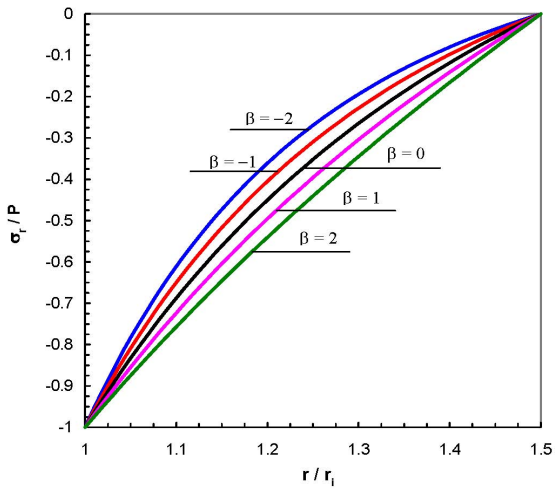
شکل ۷ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی استوانه ناهمگن را نسبت به استوانه همگن نشان می‌دهد. این نسبت به‌ازای βهای مختلف در هیچ حالتی یک نمی‌شود. به‌ازای $\beta<0$ جابه‌جایی استوانه نسبت به مادهٔ همگن بیشتر است و به‌ازای $\beta>0$ کمتر می‌شود، اما این نسبت در طول جدار تقریباً ثابت می‌ماند، یعنی تغییرات جابه‌جایی در مادهٔ ناهمگن مشابه تغییرات جابه‌جایی در مادهٔ همگن است و میزان تفاوت به مقدار $|\beta|$ بستگی دارد.

۷- نتیجه‌گیری

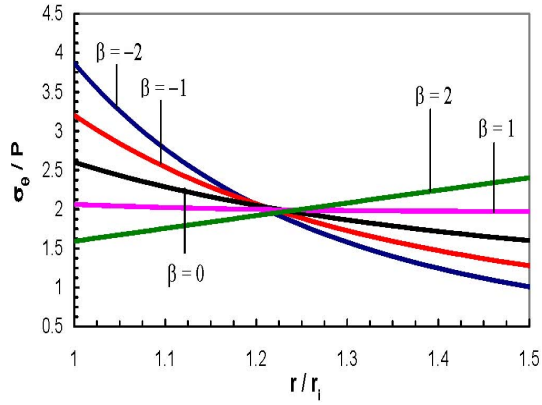
می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای β مثبت یا منفی، تنش محیطی در یک نیمه، کاهش و در نیمه دیگر افزایش می‌یابد. به‌ازای β مثبت، تنش شعاعی افزایش و جابه‌جایی شعاعی کاهش نشان می‌دهد و به‌ازای β منفی، تنش شعاعی کاهش و جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد (در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه بسته) و هر چقدر $|\beta|$ بزرگتر باشد، تغییرات بیشتر مشاهده می‌شود. بنابراین به‌ازای $\beta=\pm1$ حدود ۲۰٪ تغییرات در رفتار مادّه نسبت به مادهٔ همگن مشاهده می‌شود که برحسب نیاز به کاهش جابه‌جایی یا تنش در استوانه ناهمگن، می‌توان از مقدار مثبت یا منفی آن استفاده کرد.



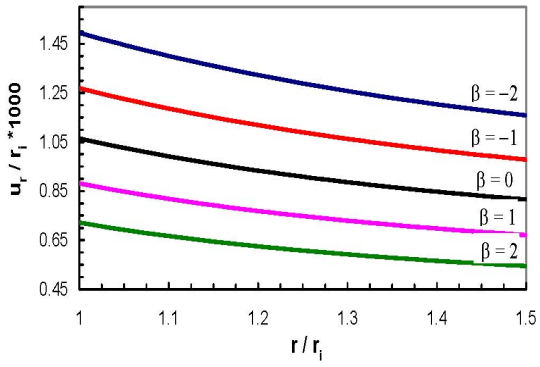
شکل ٤ توزیع مدول الاستیک در راستای شعاعی



شکل ٥ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن



شکل ٦ توزیع تنش محیطی در استوانه ناهمگن



شکل ٧ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه ناهمگن

٨- منابع

[1] Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1976.

[2] Timoshenko S.P., Goodier J.N.; Theory of Elasticity, 3rd ed., New York, McGraw-Hill, 1983.

[3] Lekhnitskii S.G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, Mir Pub., 1981.

[4] Koizumi M.; FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering); vol. 28, 1997, 1-4.

[5] Fukui Y., Yamanaka N.; Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, JSME Int. J. Ser. I: Solid Mech.; vol. 35(4),1992, 379-385.

[6] Obata Y., Noda N.; Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a sphere of a functionally gradient material, J. Thermal Stresses; vol.17(3),1994, 471-487.

[7] Horgan C.O., Chan A.M.; The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, J. Elasticity; vol. 55,1999, 43-59.

[8] Horgan C.O., Chan A.M.; The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks, J. Elasticity; vol. 55,1999, 219-230.

[9] Tutuncu N., Ozturk M.; Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, composites: Part B(Engineering); vol. 32, 2001, 683-686.

[10] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; General solution for mechanical and thermal stresses in a nonaxisymmeteic steady-state loads, J. App. Mech.; vol. 70, 2003, 111-118.

[11] Eraslan A.N., Akis T.; On the plane strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems, Acta Mechanica; vol. 181, 2006, 43-63.

[12] Eraslan A.N., Akis T.; Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic–plastic pressurized tube, Int. J. Pressure Vessels & Piping; vol. 83, 2006, 635-644.

[13] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, Mech. Res. Comm.; vol. 33, 2006, 681-691.

[14] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, J. Composite Struc.; vol. 79, 2007, 140-147.

[15] Tutuncu N.; Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, J. Eng. Struc.; vol. 29, 2007, 2032-2035.